Probabilità e Statistica (31/5/2016)

(Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un'urna contenente 2 palline bianche e 3 nere si effettuano estrazioni senza restituzione. Indicando con X il numero aleatorio di estrazioni fino ad ottenere per la prima volta una pallina bianca e con E_i l'evento *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, calcolare: (i) l'insieme $\mathcal{C}$ dei possibili valori di X; (ii) la previsione di X.

   $\mathcal{C} =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(X) =$

2. Dato un numero aleatorio X con distribuzione $N_{m,\sigma}$, calcolare la probabilità condizionata $p = P(m - \sigma \leq X \leq m + 2\sigma \,|\, m - 2\sigma \leq X \leq m + \sigma)$. Inoltre, verificare se $a = b$, dove $a = P(X > m - \sigma \,|\, X \leq m + k\sigma)$, $b = P(X \leq m + \sigma \,|\, X \geq m - k\sigma)$, con $k > 0$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $a = b$?

3. Da un'urna U, contenente 4 palline bianche e 5 nere, vengono estratte senza restituzione tutte le palline. Tizio estrae le prime 4 palline; Caio estrae le ultime 4. Ciascuno dei due vince un premio se estrae tutte palline bianche. Definiti gli eventi: $A =$ "Tizio vince il premio", $B =$ "Caio vince il premio", $E_i =$ "l'i-ma pallina estratta è bianca", calcolare: (i) la probabilità p che almeno uno tra Tizio e Caio vinca il premio; (ii) la probabilità α che almeno uno dei due vinca il premio, supposto che E_5 sia falso.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

4. Dati 3 numeri aleatori X, Y, Z, stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale standard, sia $V = X + Y + Z$ e $W = aV$, con $a > 0$. Calcolare la funzione caratteristica di V e il valore della costante a tale che W abbia una distribuzione normale standard. Inoltre, posto $U = X + Y, T = Y + Z$, calcolare $Cov(U, T)$. (*ricordiamo che per una distribuzione normale di parametri m, σ si ha $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$*)

   $\varphi_V(t) =$ $\qquad\qquad$ $a =$ $\qquad\qquad$ $Cov(U, T) =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = a(x - y)$, per (x, y) appartenente al triangolo T di vertici i punti $(0, 0), (2, 0), (2, 2)$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e la probabilità condizionata $p = P(Y \leq 1 \,|\, X \geq 1)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $p =$

6. Dato un numero aleatorio continuo $X \geq 0$, con densità $f(x) = 16xe^{-4x}$, $x \geq 0$ e con $f(x) = 0$ altrove, calcolare la funzione di sopravvivenza $S(x)$ e la funzione di rischio $h(x)$, per ogni $x > 0$. Fissati inoltre $x > 0, y > 0$, stabilire se $P(X > x + y \,|\, X > y) = P(X > x)$.

   $S(x) =$ $\qquad\qquad$ $h(x) =$ $\qquad\qquad$ $P(X > x + y \,|\, X > y) = P(X > x)$?

7. La distribuzione iniziale $\beta(\theta)$ di un numero aleatorio Θ è normale standard. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \cdots, X_n)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = \frac{1}{6}$. Indicando con $\mathbf{x}$ un campione osservato $(x_1, \ldots, x_n)$, con $x_1 + \cdots + x_n = 0$, siano m_n e σ_n la previsione e lo scarto quadratico medio di $\Theta|\mathbf{x}$. Calcolare la probabilità $p = P[(-2\sigma_n \leq \Theta \leq 2\sigma_n)|\mathbf{x}]$ e stabilire per quali valori di n l'ampiezza dell'intervallo $[m_n - \sigma_n, m_n + \sigma_n]$ è minore di $\frac{1}{8}$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $n \in$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma)

Soluzioni della prova scritta del 31/5/2016.

1. I casi possibili sono

$$(X=1)=E_1\,,\quad (X=2)=E_1^cE_2\,,\quad (X=3)=E_1^cE_2^cE_3\,,\quad (X=4)=E_1^cE_2^cE_3^c\,;$$

pertanto: $\mathcal{C}=\{1,2,3,4\}$. Inoltre

$$P(X=1)=P(E_1)=\frac{2}{5}\,,\quad P(X=2)=P(E_1^cE_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}\,,$$

$$P(X=3)=P(E_1^cE_2^cE_3)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{5}\,,\quad P(X=4)=P(E_1^cE_2^cE_3^c)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{10}\,.$$

Pertanto: $\mathbb{P}(X)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{10}=2.$

2. Ricordando che $\Phi_{m,\sigma}(x)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$, con $\Phi(1)\simeq 0.8413$, $\Phi(2)\simeq 0.9772$, si ha

$$p=P(m-\sigma\le X\le m+2\sigma\,|\,m-2\sigma\le X\le m+\sigma)=\frac{P(m-\sigma\le X\le m+2\sigma\,,m-2\sigma\le X\le m+\sigma)}{P(m-2\sigma\le X\le m+\sigma)}=$$

$$=\frac{P(m-\sigma\le X\le m+\sigma)}{P(m-2\sigma\le X\le m+\sigma)}=\frac{\Phi(1)-\Phi(-1)}{\Phi(1)-\Phi(-2)}=\frac{2\Phi(1)-1}{\Phi(1)+\Phi(2)-1}\simeq\frac{0.6826}{0.8413+0.9772-1}\simeq 0.834\,.$$

Inoltre $a=b$; infatti

$$a=P(X>m-\sigma\,|\,X\le m+k\sigma)=\frac{P(X>m-\sigma,X\le m+k\sigma)}{P(X\le m+k\sigma)}=\frac{P(m-\sigma\le X\le m+k\sigma)}{P(X\le m+k\sigma)}=$$

$$=\frac{\Phi_{m,\sigma}(m+k\sigma)-\Phi_{m,\sigma}(m-\sigma)}{\Phi_{m,\sigma}(m+k\sigma)}=\frac{\Phi(k)-\Phi(-1)}{\Phi(k)}=\frac{\Phi(k)+\Phi(1)-1}{\Phi(k)}\,.$$

$$b=\frac{P(X\le m+\sigma,X\ge m-k\sigma)}{P(X\ge m-k\sigma)}=\frac{P(m-k\sigma\le X\le m+\sigma)}{1-P(X\le m-k\sigma)}=\frac{\Phi(1)-\Phi(-k)}{1-\Phi(-k)}=\frac{\Phi(1)+\Phi(k)-1}{\Phi(k)}\,.$$

3. Gli eventi $E_1,\ldots,E_9$ sono scambiabili, con

$$P(E_i)=\frac{4}{9}\,,\ P(E_i^c)=\frac{5}{9}\,,\ P(E_iE_jE_kE_r)=P(E_1E_2E_3E_4)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{126}\,,\ i\ne j\ne k\ne r\,.$$

Inoltre, si ha $A=E_1E_2E_3E_4$, $B=E_6E_7E_8E_9$, con A e B incompatibili. Allora

$$p=P(A\vee B)=P(A)+P(B)=P(E_1E_2E_3E_4)+P(E_6E_7E_8E_9)=2P(E_1E_2E_3E_4)=\frac{1}{63}\,.$$

Infine, osservando che $A\vee B$ implica E_5^c, ovvero $(A\vee B)\wedge E_5^c=A\vee B$, si ha

$$\alpha=P(A\vee B\,|\,E_5^c)=\frac{P[(A\vee B)\wedge E_5^c]}{P(E_5^c)}=\frac{P(A\vee B)}{P(E_5^c)}=\frac{\frac{1}{63}}{\frac{5}{9}}=\frac{1}{35}\,.$$

4. Si ha: $\varphi_X(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi_Y(t) = \varphi_Z(t)$; pertanto

$$\varphi_V(t) = \mathbb{P}(e^{itV}) = \mathbb{P}(e^{it(X+Y+Z)}) = \mathbb{P}(e^{itX})\mathbb{P}(e^{itY})\mathbb{P}(e^{itZ}) = e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{3t^2}{2}}\,;$$

ovvero $V \sim N_{0,\sqrt{3}}$. Inoltre

$$\varphi_W(t) = \mathbb{P}(e^{itW}) = \mathbb{P}(e^{iatV}) = \varphi_V(at) = e^{-\frac{3a^2t^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}} \iff 3a^2 = 1 \iff a = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Infine: $Cov(X,Y) = Cov(X,Z) = Cov(Y,Z) = 0,\ Cov(Y,Y) = Var(Y) = 1$; allora

$Cov(U,T) = Cov(X+Y, Y+Z) = Cov(X,Y) + Cov(X,Z) + Cov(Y,Y) + Cov(Y,Z) = 1\,.$

5. Si ha: $\int\int_T f(x,y)dxdy = a\int_0^2 dx \int_0^x (x-y)dy = a\int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{4}{3}a = 1$; pertanto: $a = \frac{3}{4}$. Inoltre

$$p = \frac{P(X \geq 1,\, Y \leq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{\frac{3}{4}\int_1^2 dx \int_0^1 (x-y)dy}{\frac{3}{4}\int_1^2 dx \int_0^x (x-y)dy} = \cdots = \frac{\int_1^2 (x-\frac{1}{2})dx}{\int_1^2 \frac{x^2}{2}dx} = \cdots = \frac{6}{7}\,.$$

6. Per ogni $x > 0$, si ha

$$S(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} 16te^{-4t}dt = [4t(-e^{-4t})]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} 4e^{-4t}dt = 4xe^{-4x} + e^{-4x} = (4x+1)e^{-4x}\,,$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{16xe^{-4x}}{(4x+1)e^{-4x}} = \frac{16x}{4x+1}\,.$$

Inoltre, $P(X > x+y \,|\, X > y) \neq P(X > x)$ in quanto la distribuzione non è esponenziale; infatti

$$P(X > x+y \,|\, X > y) = \frac{P(X > x+y)}{P(X > y)} = \frac{S(x+y)}{S(y)} = \frac{(4x+4y+1)e^{-4x-4y}}{(4y+1)e^{-4y}} =$$

$$= \frac{(4x+4y+1)e^{-4x}}{4y+1} = \left(\frac{4x}{4y+1} + 1\right)e^{-4x} \neq (4x+1)e^{-4x} = P(X > x)\,.$$

7. Si ha $m_0 = \bar{\mathbf{x}} = 0, \sigma_0 = 1$; quindi

$$\Theta|\mathbf{x} \sim N_{m_n,\sigma_n}\,, \qquad m_n = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0 + \frac{n}{\sigma^2}\cdot \bar{\mathbf{x}}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} = 0\,, \qquad \frac{1}{\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2} = 1 + 36n\,,\ \sigma_n = \frac{1}{\sqrt{1+36n}}\,.$$

Allora, osservando che $\left(\frac{\Theta - m_n}{\sigma_n}\right)|\mathbf{x}$ ha una distribuzione normale standard e ricordando che $\Phi(2) \simeq 0.9772$, segue

$$p = P[(-2\sigma_n \leq \Theta \leq 2\sigma_n)|\mathbf{x}] = P\left(-2 \leq \frac{\Theta - m_n}{\sigma_n} \leq 2 \,|\, \mathbf{x}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \ \simeq\ 0.9544\,;$$

inoltre, l'ampiezza dell'intervallo $[m_n - \sigma_n, m_n + \sigma_n]$ è $2\sigma_n = \frac{2}{\sqrt{1+36n}} < \frac{1}{8}$ per $n > 7$.

Nota:

$$P[(m_n - 2\sigma_n \leq \Theta \leq m_n + 2\sigma_n)\,|\,\mathbf{x}] = P\left[\left(-\frac{2}{\sqrt{1+36n}} \leq \Theta \leq \frac{2}{\sqrt{1+36n}}\right)\,|\,\mathbf{x}\right] =$$

$$= P(-2 \leq \Theta \leq 2) = P(m_0 - 2\sigma_0 \leq \Theta \leq m_0 + 2\sigma_0) \ \simeq\ 0.9544\,.$$