Calcolo delle probabilità (17/12/2001)

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

1. Un mazzo di 4 chiavi contiene un sola chiave adatta ad aprire una certa serratura. Provando a caso le chiavi una dopo l'altra, occorre effettuare un numero aleatorio X di tentativi per aprire la serratura. Calcolare la varianza di X.

$$Var(X) =$$

2. Un vettore aleatorio discreto (X, Y) ha una distribuzione uniforme sull'insieme di punti $\mathcal{C} = \{(-1, 0),\ (1, 0),\ (0, 0),\ (0, -1),\ (0, 1)\}$. Calcolare il coefficiente di correlazione ρ di X, Y.

$$\rho =$$

3. L'insieme dei possibili valori di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è il rettangolo $\mathcal{C} = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3;\ 1 \leq y \leq 2\}$. La densità congiunta di (X, Y) è la funzione $f(x, y) = k(3 - x)(2 - y)$, per $(x, y) \in \mathcal{C}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k.

$$k =$$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è la funzione $f(x, y) = xy$, per $(x, y) \in \mathcal{C} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

$$X, Y \ \ \textit{indipendenti}\ ?$$

5. Dati 3 eventi E_1, E_2, E_3, con $E_1E_2E_3 = \emptyset$ e con

$$P(E_i) = \frac{2}{5},\ i \in \{1, 2, 3\}, \quad P(E_i|E_j) = \frac{1}{3},\ i \neq j,\ i, j \in \{1, 2, 3\},$$

calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(E_1 \vee E_2 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3)$.

$$p =$$

6. La funzione caratteristica di un numero aleatorio discreto X è $\phi_X(t) = \sum_{k=1}^{5} \frac{e^{ikt}}{5}$. Calcolare la previsione di X.

$$\mathbb{P}(X) =$$

7. Date tre urne A,B,C, contenenti ciascuna 1 pallina bianca e 1 nera, dalle urne B e C si estrae a caso una pallina che (senza osservarne il colore) viene inserita in A. Successivamente da A si estrae una pallina che risulta bianca (evento E). Definiti gli eventi $F =$ *"la pallina estratta da B è bianca"*, $K =$ *"la pallina estratta da C è bianca"*, $H_r =$ *"r delle 2 palline inserite in A sono bianche"*, $r = 0, 1, 2$, calcolare la probabilità dell'evento condizionato $H_1|E$.

$$P(H_1|E) =$$

8. Le componenti di un campione casuale (X_1, X_2, X_3), hanno una distribuzione normale con valor medio incognito Θ e scarto quadratico medio $\sigma = 2$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (3, -1, 1)$, determinare la densità finale $\beta(\theta|\mathbf{x})$ a partire da una densità iniziale $\beta(\theta) = N_{0,3}(\theta)$.

$$\beta(\theta|\mathbf{x}) =$$

Calcolo delle probabilità
(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 17/12/2001.

1. Indicando con E_i l'evento *"la chiave che apre la serratura viene individuata all'i-mo tentativo"*, $i = 1, 2, 3, 4$, si ha

   $P(X = 1) = P(E_1) = \frac{1}{4}\,,$ $\qquad P(X = 2) = P(E_1^c E_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\,,$

   $P(X = 3) = P(E_1^c E_2^c E_3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,,$ $\quad P(X = 4) = P(E_1^c E_2^c E_3^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,,$

   da cui segue
   $$I\!\!P(X) = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{5}{2}\,, \quad I\!\!P(X^2) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4} = \frac{15}{2}\,.$$
   Allora
   $$Var(X) = I\!\!P(X^2) - [I\!\!P(X)]^2 = \frac{15}{2} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}\,.$$

2. Si ha $P(X = x, Y = y) = \frac{1}{5}$, $\forall\,(x, y) \in \mathcal{C}$. Inoltre
   $$X \in \{-1, 0, 1\}\,, \quad Y \in \{-1, 0, 1\}\,, \quad XY = 0\,,\ \forall\,(x, y) \in \mathcal{C}\,,$$
   con
   $$P(X = -1) = P(X = 1) = \tfrac{1}{5}\,,\ \ P(X = 0) = \tfrac{3}{5}\,,$$
   $$P(Y = -1) = P(Y = 1) = \tfrac{1}{5}\,,\ \ P(Y = 0) = \tfrac{3}{5}\,,$$
   $$I\!\!P(X) = I\!\!P(Y) = I\!\!P(XY) = 0\,.$$
   Pertanto si ha $Cov(X, Y) = 0$ e quindi $\rho = 0$, cioè X e Y sono incorrelati.

3. Dev'essere
   $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = k\int_1^3\int_1^2 (3-x)(2-y)dxdy = 1\,.$$
   Poichè
   $$\int_1^3\int_1^2 (3-x)(2-y)dxdy = \int_1^3 (3-x)dx \int_1^2 (2-y)dy = \cdots = 1\,,$$
   segue $k = 1$.

4. Si ha
   $$f_1(x) = \textstyle\int_0^2 xydy = 2x\,,\ \ 0 \le x \le 1; \quad \text{con}\ \ f_1(x) = 0\ \ \text{altrove;}$$
   $$f_2(y) = \textstyle\int_0^1 xydx = \frac{y}{2}\,,\ \ 0 \le y \le 2; \quad \text{con}\ \ f_2(y) = 0\ \ \text{altrove.}$$
   Poichè $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, $\forall\,(x, y)$, segue che X e Y sono indipendenti.

5. Tenendo conto che $P(E_1E_2E_3)=0$, si ha

$$p \;=\; P(E_1 \vee E_2 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) \;=\; \tfrac{P(E_1 \vee E_2)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} \;=$$

$$=\; \tfrac{P(E_1)+P(E_2)-P(E_1E_2)}{P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)-P(E_1E_2)-P(E_1E_3)-P(E_2E_3)} \;=\; \tfrac{\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}} \;=\; \tfrac{5}{6} \cdot$$

6. Si ha

$$\phi'_X(t) = \sum_{k=1}^{5} \frac{ike^{ikt}}{5} \,,$$

da cui segue

$$\phi'_X(o) = \sum_{k=1}^{5} \frac{ik}{5} = \frac{i(1+2+3+4+5)}{5} = 3i = i\mathbb{P}(X) \,.$$

Pertanto: $\mathbb{P}(X)=3$.

7. Osservando che gli eventi F e K sono indipendenti e che

$$H_0 = F^cK^c \,, \quad H_1 = FK^c \vee F^cK \,, \quad H_2 = FK \,,$$

si ha

$$P(H_0) \;=\; P(F^c)P(K^c) \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} \;=\; \tfrac{1}{4} \;=\; P(F)P(K) \;=\; P(H_2) \,,$$

$$P(H_1) \;=\; P(FK^c)+P(F^cK) \;=\; P(F)P(K^c)+P(F^c)P(K) \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot$$

Allora

$$P(H_1|E) \;=\; \tfrac{P(EH_1)}{P(E)} \;=\; \tfrac{P(H_1)P(E|H_1)}{P(H_0)P(E|H_0)+P(H_1)P(E|H_1)+P(H_2)P(E|H_2)} \;=$$

$$=\; \tfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}} \;=\; \tfrac{1}{2} \;=\; P(H_1) \,.$$

8. Si ha

$$X_i|\theta \;\sim\; f(x_i|\theta) = N_{\theta,2}(x_i) \,, \;\; i=1,2,3,$$

$$\alpha(\mathbf{x}|\theta) \;=\; N_{\theta,2}(x_1)N_{\theta,2}(x_2)N_{\theta,2}(x_3) \;=\; N_{\theta,2}(3)N_{\theta,2}(-1)N_{\theta,2}(1) \,,$$

$$\beta(\theta|\mathbf{x}) \;=\; k(\mathbf{x})\beta(\theta)\alpha(\mathbf{x}|\theta) \;=\; \cdots \;=\; N_{m_3,\sigma_3}(\theta) \,,$$

con

$$\tfrac{1}{\sigma_3^2} \;=\; \tfrac{1}{\sigma_0^2}+\tfrac{3}{\sigma^2} \;=\; \tfrac{1}{9}+\tfrac{3}{4} \;=\; \tfrac{31}{36} \,, \qquad \text{cioè} \quad \sigma_3 \;=\; \sqrt{\tfrac{36}{31}} \,,$$

$$m_3 \;=\; \tfrac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0+\frac{3}{\sigma^2}\cdot\overline{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{3}{\sigma^2}} \;=\; \tfrac{\frac{1}{9}\cdot 0+\frac{3}{4}\cdot\frac{3-1+1}{3}}{\frac{31}{36}} \;=\; \tfrac{27}{31} \,.$$