Calcolo delle probabilità (10/9/2001)

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

1. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è data da $f(x, y) = 3e^{-(x+3y)}$, per $x \geq 0,\ y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la previsione μ di $\frac{1}{3}X - Y$.
   Risp.: $\mu =$

2. Dati 2 eventi A, B, con $P(A) = \frac{1}{2}, P(B|A) = P(A|B) = \frac{1}{4}$, calcolare la probabilità dell'evento condizionato $A^c|B^c$.
   Risp.: $P(A^c|B^c) =$

3. Considerato il triangolo $T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$, sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità $f(x, y) = 6(x - y)$, per $(x, y) \in T$, e zero altrove. Calcolare la densità $f_1(x)$ e la funzione di ripartizione $F_1(x)$ di X.
   Risp.: $f_1(x) =$, $F_1(x) =$

4. Da un'urna contenente 3 palline, segnate con i valori numerici $-1, 0, 1$, si effettuano 2 estrazioni senza restituzione. Sia (X, Y) il vettore aleatorio discreto corrispondente al risultato dell'esperimento. Calcolare la previsione m_Z del numero aleatorio $Z = X + Y$.
   Risp.: $m_Z =$

5. Da un lotto contenente 10 componenti, dei quali 1 è difettoso, sono stati tolti 4 componenti. Fra i 6 componenti rimasti se ne sceglie a caso uno che risulta non difettoso (evento E). Calcolare la probabilità che il componente difettoso sia uno dei 4 tolti (evento H).
   Risp.: $P(H|E) =$

6. La quantitá di rifiuti solidi smaltiti da un'industria in ciascuna giornata é un numero aleatorio X con densitá
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ a(2 - x) & 1 < x \leq 2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$
   Calcolare il valore della costante a.
   Risp.: $a =$

7. La funzione caratteristica di un numero aleatorio X è data da $\phi_X(t) = e^{it-2t^2}$. Posto $Y = \frac{X-1}{2}$, calcolare la probabilità p dell'evento $(|Y| \leq 1)$.
   Risp.: $p =$

8. Dati due numeri aleatori X, Y ugualmente distribuiti, si ponga $U = X - Y$ e $V = X + Y$. Calcolare la covarianza di U, V.
   Risp.: $Cov(U, V) =$

Calcolo delle probabilità

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 10/9/2001.

1. Si ha:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \cdots = e^{-x}, \ x \geq 0,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \cdots = 3e^{-3y}, \ y \geq 0,$$

cioè X e Y hanno distribuzione esponenziale, di parametri rispettivamente $\lambda_X = 1, \lambda_Y = 3$, e quindi $m_X = 1, \ m_Y = \frac{1}{3}$.

Ricordando la proprietà di linearità della previsione, segue

$$\mu = \frac{1}{3}m_X - m_Y = \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} = 0.$$

2. Si ha $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) = P(AB)$ e quindi $\frac{1}{4}P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$, da cui $P(B) = \frac{1}{2}$.

Inoltre $P(A^c B^c) = 1 - P(A \vee B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Pertanto $P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c B^c)}{P(B^c)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$.

3. Si ha:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^x 6(x-y)dy = 6[xy - \tfrac{y^2}{2}]_0^x =$$

$$= 6(x^2 - \tfrac{x^2}{2}) = 3x^2, \quad 0 \leq x \leq 1\,.$$

Inoltre:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x 3t^2 dt = x^3\ , \ \ x \in (0,1)\ ;$$

$$F_1(x) = 0\,, \ \ x \leq 0\,; \ \ F_1(x) = 1\,, \ \ x \geq 1\,.$$

4. L'insieme dei valori possibili del vettore aleatorio (X, Y) è

$$\mathcal{C} = \{(-1,0), (-1,1), (0,-1), (0,1), (1,-1), (1,0)\} \ .$$

Per ogni $(x, y) \in \mathcal{C}$ si

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y \,|\, X = x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \ .$$

Quindi, il vettore aleatorio (X, Y) ha distribuzione uniforme sull'insieme $\mathcal{C}$. Come si può facilmente verificare, i valori possibili di Z sono $-1, 0, 1$, tutti di probabilità $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Pertanto $m_Z = 0$.

5. Si ha:

$$P(H) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \ , \quad P(E|H) = 1 \ , \quad P(E|H^c) = \frac{5}{6} \ .$$

Allora:

$$P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(E)} = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c)} = \frac{1 \cdot \frac{2}{5}}{1 \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{4}{9} \ .$$

6. Si ha:

$$\textstyle\int_0^2 f(x)dx = 1 = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 a(2-x)dx = \frac{1}{3} + a[2x - \frac{x^2}{2}]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{a}{2} \ ,$$

da cui si ottiene: $a = \frac{4}{3}$.

7. $\phi_X(t) = e^{it-2t^2}$ è la funzione caratteristica di una distribuzione normale di parametri $m = 1, \sigma = 2$. Pertanto Y ha una distribuzione normale standard. Allora:

$$p = P(|Y| \leq 1) = 2\Phi(1) - 1 \simeq 0.6826 \ .$$

8. Ricordando che

$$Cov(\sum_i a_i X_i, \sum_j b_j Y_j) = \sum_i \sum_j a_i b_j Cov(X_i, Y_j) \ ,$$

si ha:

$$Cov(U, V) = Cov(X - Y, X + Y) = Cov(X, X) + Cov(X, Y) - Cov(Y, X) - Cov(Y, Y) =$$

$$= Var(X) - Var(Y) = 0 \ .$$