Calcolo delle probabilità (16/12/2002)

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

1. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 0,\ \sigma_0 = 2$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_n)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 1$. Avendo osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, con $x_1 + \cdots + x_n = 3n$, calcolare la dimensione minima n_0 di $\mathbf{x}$ tale che, con riferimento alla distribuzione finale di Θ, si abbia $P(\Theta \geq \frac{48}{17} \,|\, \mathbf{x}) \geq \frac{1}{2}$. (*Ricordiamo che la distribuzione normale ha un diagramma simme- trico rispetto ad una opportuna retta verticale*).
   Risp.: $n_0 =$

2. Una macchina $\mathcal{M}$ produce componenti di un certo tipo, ognuno dei quali indipendentemente dagli altri è non difettoso con probabilità p. Considerati 3 pezzi prodotti da $\mathcal{M}$ e supposto che almeno 2 dei 3 pezzi siano non difettosi, calcolare la probabilità α che i 3 componenti siano tutti non difettosi.
   Risp.: $\alpha =$

3. In un appartamento ci sono 2 ragazzi e 3 ragazze (nella stanza $\mathcal{A}$) e 5 ragazzi e 4 ragazze (nella stanza $\mathcal{B}$). In modo casuale una persona si sposta da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, mentre in contemporanea un'altra persona si sposta da $\mathcal{B}$ ad $\mathcal{A}$. Indicando, dopo tali spostamenti, con X il numero aleatorio di ragazzi nella stanza $\mathcal{A}$ e con Y il numero aleatorio di ragazze nella stanza $\mathcal{B}$, calcolare il coefficiente di correlazione ρ_{XY}.
   (Nota: per rappresentare X e Y è utile definire gli eventi: $E_1 =$ *"la persona che si sposta da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ è un ragazzo"*; $E_2 =$ *"la persona che si sposta da $\mathcal{B}$ ad $\mathcal{A}$ è un ragazzo"*)
   Risp.: $\rho_{XY} =$

4. Dati due numeri aleatori X e Y indipendenti e con distribuzione uniforme in $[-1, a-1]$, si può dimostrare che il numero aleatorio $Z = X + Y$ ha una distribuzione di tipo triangolare in $[-2, 2a-2]$, con densità $g(z) = \frac{z+2}{a^2}$, per $z \in [-2, a-2]$, $g(z) = \frac{2a-2-z}{a^2}$, per $z \in (a-2, 2a-2]$, con $g(z) = 0$ altrove. Calcolare il valore di a tale che $var(Z) = 1$.
   Risp.: $a =$

5. Da un lotto contenente 5 componenti indistinguibili, 2 dei quali difettosi, se ne prelevano a caso 3 che vengono conservati in un contenitore a parte. Successivamente, dal contenitore vengono presi a caso 2 dei 3 pezzi e vengono utilizzati, risultando entrambi non difettosi (evento E). Calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $H_2|E$, dove H_2 rappresenta l'evento *"i 2 pezzi difettosi sono rimasti entrambi nel lotto"*.
   Risp.: $\alpha =$

6. Con riferimento all'esercizio precedente, sia X il numero aleatorio di pezzi non difettosi fra i 3 inseriti nel contenitore. Calcolare la funzione caratteristica di X e verificare la relazione $\phi'_X(0) = i\mathbb{P}(X)$.
   Risp.: $\phi_X(t) =$

7. Indicato con $\mathcal{C}$ l'insieme di punti $\{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq x\}$, la densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è data da $f(x, y) = 5e^{-(4x+y)}$ per $(x, y) \in \mathcal{C}$, con $f(x, y) = 0$ altrove, calcolare la densità condizionata $f_2(y|x)$.
   Risp.: $f_2(y|x) =$

8. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare, per ogni $y \geq 0$, la funzione di rischio $h_2(y)$ del numero aleatorio Y.
   Risp.: $h_2(y) =$

Calcolo delle probabilità (Ing. El., Inf., Tel. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 16/12/2002.

1. Osservando che $\overline{x}_n = 3$, segue: $\Theta|\mathbf{x} \sim N_{m_n,\sigma_n}$, con

$$m_n = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0 + \frac{n}{\sigma^2}\cdot \overline{x}_n}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} = \frac{3n}{\frac{1}{4}+\frac{n}{1}} = \frac{12n}{1+4n}\,.$$

Dalla simmetria della distribuzione normale, si ha $P(\Theta \geq m_n\,|\,\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\,,\quad \forall\, n$. Inoltre, per ogni fissato θ_0, si ha

$$P(\Theta \geq \theta_0\,|\,\mathbf{x}) \geq \frac{1}{2} \iff m_n \geq \theta_0\,,$$

e quindi

$$P(\Theta \geq \frac{48}{17}\,|\,\mathbf{x}) \,\geq\, \frac{1}{2} \iff \frac{12n}{1+4n} \geq \frac{48}{17} \iff n \geq 4\,.$$

Pertanto: $n_0 = 4$.

2. Indicato con E_i l'evento *"l'i-mo componente è non difettoso"*, $i = 1,2,3$, si tratta di calcolare $\alpha = P(E_1E_2E_3\,|\,E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3)$. Allora

$$\alpha = \frac{P[E_1E_2E_3 \wedge (E_1E_2\vee E_1E_3 \vee E_2E_3)]}{P(E_1E_2\vee E_1E_3\vee E_2E_3)} = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2\vee E_1E_3\vee E_2E_3)} =$$

$$= \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2E_3)+P(E_1E_2E_3^c)+P(E_1E_2^cE_3)+P(E_1^cE_2E_3)} = \frac{p^3}{p^3+3p^2(1-p)} = \frac{p}{3-2p}\,.$$

3. Si ha: $X = 2 - |E_1| + |E_2|\,,\quad Y = 4 + |E_1^c| - |E_2^c| = 4 - |E_1| + |E_2| = X + 2\,.$ Come si vede, tra X e Y c'è una relazione lineare del tipo $Y = aX + b$, con $a > 0$. Pertanto: $\rho_{XY} = 1$. Infatti, ai quattro costituenti $E_1E_2\,,\ E_1E_2^c\,,\ E_1^cE_2\,,\ E_1^cE_2^c$, corrispondono, per il vettore aleatorio (X,Y), i punti $(2,4)\,,\ (1,3)\,,\ (3,5)\,,\ (2,4)$, che appartengono tutti alla retta di equazione $y = x + 2$.
Nota: con un procedimento diretto, ma più laborioso, si avrebbe

$$X \in \{1,2,3\}\,,\quad Y \in \{3,4,5\}\,,\quad XY \in \{3,8,15\}$$

con

$$P(X=1) = \tfrac{8}{45},\qquad P(X=2) = \tfrac{22}{45},\qquad P(X=3) = \tfrac{15}{45},$$

$$P(Y=3) = \tfrac{8}{45},\qquad P(Y=4) = \tfrac{22}{45},\qquad P(Y=5) = \tfrac{15}{45},$$

$$P(XY=3) = \tfrac{8}{45},\quad P(XY=8) = \tfrac{22}{45},\quad P(XY=15) = \tfrac{15}{45}\,.$$

Calcolando, poi, $\mathbb{P}(X)$, $\mathbb{P}(Y)$, $\mathbb{P}(XY)$, σ_X, σ_Y, *si avrebbe lo stesso risultato* ($\rho_{XY} = 1$).

4. Si ha $var(X) = var(Y) = \frac{(a-1+1)^2}{12} = \frac{a^2}{12}\,,\ cov(X,Y) = 0$. Pertanto:

$$var(Z) = var(X) + var(Y) = \frac{a^2}{6} = 1 \iff a = \sqrt{6}\,.$$

Nota: in alternativa, si potrebbe utilizzare il seguente procedimento (più laborioso)

$$var(Z) = \mathbb{P}(Z^2) - [\mathbb{P}(Z)]^2 = \int_{-2}^{2a-2} z^2 g(z)dz - \Big(\int_{-2}^{2a-2} z g(z)dz\Big)^2 = \cdots = \frac{7a^2-24a+24}{6} - (a-2)^2 = \frac{a^2}{6}\,.$$

5. Si possono fare 3 ipotesi:

- $H_0 =$ *"nel lotto non sono rimasti pezzi difettosi"*;

- $H_1 =$ *"nel lotto è rimasto un solo pezzo difettoso"*;
- $H_2 =$ *"nel lotto sono rimasti entrambi i pezzi difettosi"*.

Si ha:

$$P(H_0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} = \tfrac{3}{10}\,, \quad P(H_1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \tfrac{6}{10}\,, \qquad P(H_2) = \frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} = \tfrac{1}{10}\,,$$

$$P(E|H_0) = 0 \qquad (EH_0 = \emptyset)\,, \quad P(E|H_1) = \frac{\binom{2}{2}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} = \tfrac{1}{3}\,, \quad P(E|H_2) = 1\,.$$

Allora:

$$P(H_2|E) = \frac{P(E|H_2)P(H_2)}{P(E|H_0)P(H_0) + P(E|H_1)P(H_1) + P(E|H_2)P(H_2)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{10}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}\,.$$

6. Ricordando il significato degli eventi H_0, H_1, H_2, si ha: $X \in \{1, 2, 3\}$, con

$$P(X = 1) = P(H_0) = \frac{3}{10}\,, \quad P(X = 2) = P(H_1) = \frac{6}{10}\,, \quad P(X = 3) = P(H_2) = \frac{1}{10}\,.$$

Quindi $I\!P(X) = 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{6}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10}$. Inoltre $\phi_X(t) = I\!P(e^{itX}) = \frac{3}{10}e^{it} + \frac{6}{10}e^{2it} + \frac{1}{10}e^{3it}$. Allora

$$\phi'_X(t) = \frac{3i}{10}e^{it} + \frac{12i}{10}e^{2it} + \frac{3i}{10}e^{3it}\,,$$

da cui, ponendo $t = 0$, segue

$$\phi'_X(0) = \frac{3i}{10} + \frac{12i}{10} + \frac{3i}{10} = i(1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{6}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10}) = iI\!P(X)\,.$$

7. Si ha:

$$f_1(x) = \int_x^{+\infty} 5e^{-(4x+y)}dy = 5e^{-4x} \int_x^{+\infty} e^{-y}dy = 5e^{-5x}\,, \quad x \geq 0\,;$$

con $f_1(x) = 0$, per $x < 0$. Allora:

$$f_2(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{5e^{-(4x+y)}}{5e^{-5x}} = e^{x-y}\,, \quad y \geq x\,;$$

con $f_2(y|x) = 0$, per $y < x$.

8. Si ha:

$$f_2(y) = \int_0^y 5e^{-(4x+y)}dx = 5e^{-y} \int_0^y e^{-4x}dx = \frac{5}{4}e^{-y}(1 - e^{-4y}) = \frac{5}{4} \cdot e^{-y} - \frac{1}{4} \cdot 5e^{-5y}\,, \quad y \geq 0\,;$$

con $f_2(y) = 0$, per $y < 0$. Come si vede, $f_2(y)$ è una combinazione lineare, con coefficienti $\frac{5}{4}$ e $-\frac{1}{4}$, di due densità esponenziali di parametri 1 e 5. Allora:

$$S_2(y) = \frac{5}{4}\int_y^{+\infty} e^{-t}dt - \frac{1}{4}\int_y^{+\infty} 5e^{-5t}dt = \frac{5}{4}e^{-y} - \frac{1}{4}e^{-5y}\,, \quad y \geq 0\,.$$

Pertanto:

$$h_2(y) = \frac{f_2(y)}{S_2(y)} = \frac{\frac{5}{4} \cdot e^{-y} - \frac{1}{4} \cdot 5e^{-5y}}{\frac{5}{4}e^{-y} - \frac{1}{4}e^{-5y}} = \frac{5e^{4y} - 5}{5e^{4y} - 1}\,, \quad y \geq 0\,.$$