Calcolo delle probabilità (6/4/2004)

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

1. Siano dati tre eventi A_1, A_2, A_3, con $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ e con $P(A_1) = \frac{1}{5}, P(A_2) = \frac{3}{5}, P(A_3) = \frac{4}{5}$, calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$ del numero aleatorio $X = |A_1| + |A_2| + |A_3|$.

$$F(x) = \begin{cases} \quad , \\ \quad , \\ \quad , \\ \quad , \\ \quad , \end{cases}$$

2. Stabilire per quale valore della costante a la funzione $f(x) = \frac{x}{a} + 1$, per $x \in [-a, 0]$, $f(x) = -\frac{x}{a} + 1$, per $x \in (0, a]$, con $f(x) = 0$ altrove, è una densità di probabilità. $(a = \qquad)$

3. Dato un vettore aleatorio discreto (X, Y), con codominio $\{(-1, 0),\ (0, -3),\ (0, 0),\ (0, 3),\ (1, 0)\}$, e posto $P(X = x, Y = y) = p(x, y)$, si assuma

$$p(-1, 0) = p(0, -3) = \frac{1}{4} - a\,, \;\; p(1, 0) = p(0, 3) = \frac{1}{4} - b\,; \quad 0 \leq a \leq \frac{1}{4}\,, \; 0 \leq b \leq \frac{1}{4}\,.$$

Determinare l'insieme I delle coppie (a, b) tali che $Cov(X, Y) = 0$.
$(I = \{(a, b) : \qquad \}\ )$

4. Sia $h(x) = 3x^2$, per $x \geq 0$, con $h(x) = 0$ altrove, la funzione di rischio di un numero aleatorio continuo X non negativo. Calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(X > 2 \,|\, X > 1)$. $(\alpha = \qquad)$

5. Dato l'insieme $\mathcal{C} = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\}$, sia $f(x, y) = (x + 1)y$, per $(x, y) \in \mathcal{C}$, con $f(x, y) = 0$ altrove, la densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) che ha come codominio l'insieme $\mathcal{C}$. Calcolare la probabilità p dell'evento $(X + Y \leq 1)$. $(p = \qquad)$

6. Con riferimento all'esercizio precedente, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti. (*stoc. indip.*? $\qquad$)

7. Un'azienda costruisce componenti con tre apparecchiature A, B, C nelle seguenti proporzioni: il 30% è prodotto da A, il 25% da B, e la parte restante da C. E' noto che risultano difettosi il 5% dei pezzi prodotti da A, il 20% dei pezzi prodotti da B e il 10% dei pezzi prodotti da C. Calcolare la percentuale p di componenti difettosi prodotti dall'azienda. Inoltre, esaminando a caso un componente e supposto che sia difettoso, calcolare la probabilità γ che sia stato prodotto da A o B. $(p = \qquad \gamma = \qquad)$

8. Le funzioni caratteristiche di due numeri aleatori X, Y sono, rispettivamente,

$$\phi_X(t) = e^{3it - 2t^2}\,, \quad \phi_Y(t) = e^{-it - \frac{t^2}{2}}\,.$$

Posto $Z = \frac{X+Y}{2}$ e assumendo che il coefficiente di correlazione di X, Y sia $\rho = \frac{1}{2}$, calcolare la previsione di Z^2. $(\mathbb{P}(Z^2) = \qquad)$

Calcolo delle probabilità (Ing. El., Inf., Tel. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 6/4/2004.

1. I costituenti ed i corrispondenti valori di X sono rispettivamente

$$C_1 = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3\,,\quad C_2 = A_1^c \wedge A_2 \wedge A_3\,,\quad C_3 = A_1^c \wedge A_2^c \wedge A_3\,,\quad C_4 = A_1^c \wedge A_2^c \wedge A_3^c\,,$$

$$x_1 = 3\,,\qquad x_2 = 2\,,\qquad x_3 = 1\,,\qquad x_4 = 0\,.$$

Le probabilità dei costituenti (e dei corrispondenti valori di X) sono

$$P(C_1) = P(A_1) = \tfrac{1}{5},\ P(C_2) = P(A_2) - P(A_1) = \tfrac{2}{5},$$

$$P(C_3) = P(A_3) - P(A_2) = \tfrac{1}{5},\ P(C_4) = 1 - P(A_3) = \tfrac{1}{5}.$$

Pertanto

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{5}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{5}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{4}{5}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

2. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero, in termini geometrici, l'area del triangolo di vertici $(-a, 0), (0, 1), (a, 0)$ dev'essere unitaria. Quindi: $a = 1$.

3. Osserviamo che $p(0, 0) = 2(a + b)$. Inoltre: $X \in \{-1, 0, 1\}$, $Y \in \{-3, 0, 3\}$, con

$$P(X = -1) = \tfrac{1}{4} - a\,, P(X = 1) = \tfrac{1}{4} - b\,,\ \ P(X = 0) = \tfrac{1}{2} + a + b\,,$$

$$P(Y = -3) = \tfrac{1}{4} - a\,, P(Y = 3) = \tfrac{1}{4} - b\,,\ \ P(Y = 0) = \tfrac{1}{2} + a + b\,,$$

e quindi: $\mathbb{P}(X) = \cdots = a - b$, $\mathbb{P}(Y) = \cdots = 3(a - b)$.
Infine, si ha certamente $XY = 0$ e quindi $\mathbb{P}(XY) = 0$. Allora

$$Cov(X, Y) = \mathbb{P}(XY) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = -3(a - b)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = b\,.$$

Pertanto $I = \{(a, b) : a = b\,,\ 0 \le a \le \frac{1}{4}\}$.

4. Si ha $S(x) = e^{-\int_0^x 3t^2 dt} = e^{-x^3}$, $\forall\, x \ge 0$. Allora

$$\alpha = P(X > 2\,|\,X > 1) = \frac{P(X > 2, X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(X > 2)}{P(X > 1)} = \frac{S(2)}{S(1)} = \frac{e^{-8}}{e^{-1}} = e^{-7}\,.$$

5. Per eseguire meno calcoli, conviene calcolare la probabilità dell'evento contrario. Si ha

$$P(X + Y > 1) = \textstyle\int_0^1 dx \int_{1-x}^1 (x + 1)y dy = \int_0^1 (x + 1) \left[\frac{y^2}{2}\right]_{1-x}^1 dx =$$

$$= \tfrac{1}{2} \textstyle\int_0^1 (x + 1)(2x - x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^3 + 2x)dx = \cdots = \frac{13}{24}\,.$$

Pertanto $p = P(X + Y \le 1) = \frac{11}{24}$.

6. Si ha
$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 (x+1)ydy = \frac{x+1}{2}\,, \quad -1 \le x \le 1\,,$$
con $f_1(x) = 0$ altrove. Inoltre
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{-1}^1 (x+1)ydx = 2y\,, \quad 0 \le y \le 1\,,$$
con $f_2(y) = 0$ altrove. Allora $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, $\forall\,(x,y)$, e quindi X e Y sono stocasticamente indipendenti.

7. Indicando con A l'evento “il pezzo è stato prodotto da A” (e analogamente per B e C), si ha $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{9}{20}$. Inoltre, definito l'evento E=“il pezzo estratto è difettoso”, risulta $P(E|A) = \frac{1}{20}$, $P(E|B) = \frac{1}{5}$, $P(E|C) = \frac{1}{10}$, da cui segue
$$p = P(E) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) + P(C)P(E|C) = \cdots = \frac{11}{100} = 0.11\,;$$
quindi la percentuale di pezzi difettosi è l' 11%.
Infine (teorema di Bayes):
$$\gamma = P(A \vee B\,|\,E) = 1 - P(C|E) = 1 - \frac{P(C)P(E|C)}{P(E)} = 1 - \frac{\frac{9}{20}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{11}{100}} = \frac{13}{22}\,.$$

8. Ricordando che, per una distribuzione normale con parametri m, σ, la funzione caratteristica è $e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, si ha: $X \sim N_{3,2}$, $Y \sim N_{-1,1}$. Pertanto
$$\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(\tfrac{X+Y}{2}) = \tfrac{1}{2}(\mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y)) = 1\,,$$
$$\sigma_Z^2 = Var(\tfrac{X+Y}{2}) = \tfrac{1}{4}Var(X+Y) = \tfrac{1}{4}(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y) = \tfrac{7}{4}\,,$$
e quindi $\mathbb{P}(Z^2) = Var(Z) + [\mathbb{P}(Z)]^2 = \frac{11}{4}$.