Calcolo delle probabilità (21/9/2004)

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

1. Siano dati due lotti, L_1 contenente 2 pezzi difettosi e 3 non difettosi ed L_2 contenente 3 pezzi difettosi e 4 non difettosi. Da L_1 si effettuano 2 estrazioni con restituzione ottenendo X pezzi non difettosi; successivamente, si effettuano 3 estrazioni con restituzione da L_2 ottenendo Y pezzi non difettosi. Sia E_i l'evento *"il pezzo estratto nell'i-ma prova è non difettoso"*, $i = 1, \ldots, 5$. Calcolare la probabilità p che almeno uno dei 5 pezzi estratti sia non difettoso.

   $p =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica di $Z = X + Y$.

   $\varphi_Z(t) =$

3. Con riferimento agli esercizi precedenti, calcolare la previsione e la varianza di Z.

   $\mathbb{P}(Z) =$ $\qquad\qquad$ $Var(Z) =$

4. Un vettore aleatorio (X, Y) ha una distribuzione uniforme nell'insieme di punti $\mathcal{C} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x(2 - x)\}$. Calcolare la densità marginale $f_1(x)$.

   $f_1(x) =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare per ogni $x \in (0, 2)$ la funzione di rischio $h_1(x)$ di X.

   $h_1(x) =$

6. Con riferimento al vettore aleatorio continuo (X, Y) dell'esercizio 4, calcolare la probabilità γ dell'evento condizionato $(X \geq 1 \,|\, X \geq Y)$.

   $\gamma =$

7. Un sistema S, costituito da due moduli in serie M_1, M_2, dev'essere utilizzato in un dato intervallo di tempo $[0, T]$. M_1 è formato da 2 dispositivi in parallelo D_1, D_2, mentre M_2 è formato da 3 dispositivi in parallelo D_3, D_4, D_5. Definiti gli eventi E_i = *"il dispositivo D_i funziona senza guastarsi nell'intervallo* $[0, T]$*"*, $i = 1, \ldots, 5$, e supposto che tali eventi siano indipendenti e tutti di probabilità 0.8, calcolare la probabilità α che S funzioni senza guastarsi nell'intervallo $[0, T]$.

   $\alpha =$

8. Da un cassetto contenente 5 chiavi, delle quali al massimo una può aprire una serratura, se ne estraggono in blocco 2. Definiti gli eventi H = *"il cassetto contiene la chiave che apre la serratura"*, E = *"nessuna delle 2 chiavi estratte dal cassetto apre la serratura"*, si ponga $P(H) = p_0$, $P(H|E) = p_2$. Determinare i valori di p_0 tali che $p_2 > \frac{1}{2}$.

   $p_0 \in$

Calcolo delle probabilità

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 21/9/2004.

1. Tenendo conto che gli eventi $E_1, \ldots, E_5$ sono stocasticamente indipendenti, si ha

$$p = P(X+Y>0) = 1 - P(X+Y=0) = 1 - P(E_1^c \cdots E_5^c) =$$
$$= 1 - P(E_1^c) \cdots P(E_5^c) = \cdots = 1 - (\frac{2}{5})^2 (\frac{3}{7})^3 \simeq 0.9874\,.$$

2. Si ha: $X \sim B(2, \frac{3}{5})$, $Y \sim B(3, \frac{4}{7})$; quindi, ricordando che la funzione caratteristica di una distribuzione binomiale di parametri n, p è $(pe^{it}+q)^n$, segue

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{3}{5}\,e^{it} + \frac{2}{5}\right)^2\,, \quad \varphi_Y(t) = \left(\frac{4}{7}\,e^{it} + \frac{3}{7}\right)^3\,.$$

Allora, osservando che X e Y sono stocasticamente indipendenti, si ottiene

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = \left(\frac{3}{5}\,e^{it} + \frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{7}\,e^{it} + \frac{3}{7}\right)^3\,.$$

3. Ricordando che per una distribuzione binomiale di parametri n, p la previsione e la varianza sono, rispettivamente, np ed npq, segue

$$\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) = 2 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{4}{7} = \frac{102}{35} \simeq 2.9143\,,$$

e per l'indipendenza di X, Y

$$Var(Z) = Var(X) + Var(Y) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1488}{1225} \simeq 1.2147\,.$$

4. Indicando con k il valore costante (da determinare) della densità congiunta, si ha

$$f_1(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy = \int_0^{x(2-x)} kdy = kx(2-x)\,, \quad 0 \le x \le 2\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove.
Inoltre

$$\int_0^2 f_1(x)dx = k \int_0^2 x(2-x)dx = \cdots = \frac{4}{3}\,k = 1\,;$$

pertanto: $k = \frac{3}{4}$. In conclusione

$$f_1(x) = \frac{3}{4}\,x(2-x)\,, \quad x \in [0,2]\,; \quad f_1(x) = 0\,, \quad x \notin [0,2]\,.$$

5. Fissato $x \in (0,2)$, si ha

$$S_1(x) = P(X > x) = \int_x^2 f_1(t)dt = \int_x^2 \frac{3}{4}\, t(2-t)dt = \cdots = \frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{4} + 1\,,$$

con $S_1(x) = 0$ per $x \geq 2$. Allora, per ogni $x \in (0,2)$, si ha

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)}{S_1(x)} = \frac{\frac{3}{4}\, x(2-x)}{\frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{4} + 1} = \frac{6x - 3x^2}{x^3 - 3x^2 + 4}\,.$$

6. Si osservi che $(X \geq 1)$ implica $(X \geq Y)$; pertanto $(X \geq 1\,,\, X \geq Y) = (X \geq 1)$. Allora

$$\gamma = \frac{P(X \geq 1\,,\, X \geq Y)}{P(X \geq Y)} = \frac{P(X \geq 1)}{P(X \geq Y)}\,,$$

con

$$P(X \geq 1) = \int_1^2 f_1(x)dx = \int_1^2 \frac{3}{4}\, x(2-x)\, dx = \cdots = \frac{1}{2}\,,$$

(*come si potrebbe anche intuire in base a considerazioni di simmetria*)

$$P(X \geq Y) = 1 - P(X < Y) = 1 - \int_0^1 dx \int_x^{x(2-x)} \frac{3}{4}\, dy = \cdots = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}\,.$$

Pertanto: $\gamma = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = \frac{4}{7}$.

7. Si ha

$$\alpha = P[(E_1 \vee E_2) \wedge (E_3 \vee E_4 \vee E_5)] = P(E_1 \vee E_2)P(E_3 \vee E_4 \vee E_5) =$$
$$= [1 - P(E_1^c E_2^c)][1 - P(E_3^c E_4^c E_5^c)] = [1 - P(E_1^c)P(E_2^c)][1 - P(E_3^c)P(E_4^c)P(E_5^c)] =$$
$$= (1 - 0.2^2)(1 - 0.2^3) = 0.96 \times 0.992 \,\simeq\, 0.95\,.$$

8. Si ha $P(E|H) = \dfrac{\binom{1}{0}\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{5}\,, \quad P(E|H^c) = 1$, da cui segue:

$$P(E) = P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c) = \frac{3}{5}\, p_0 + 1 - p_0 = 1 - \frac{2}{5}\, p_0\,.$$

Inoltre

$$p_2 = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c)} = \frac{\frac{3}{5}\, p_0}{1 - \frac{2}{5}\, p_0} > \frac{1}{2} \iff p_0 > \frac{5}{8}\,.$$