CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 14 settembre 2002
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Gestionale (Canali $1-2$).

Nome e cognome**:**

1. Siano dati 4 eventi A, B, C, D, con

$$A \subset B\,, \quad C \subset D\,, \quad B \wedge D = \emptyset\,, \quad P(A) = P(C) = \frac{1}{5}\,, \quad P(B) = P(D) = p\,.$$

   Determinare l'insieme I dei valori p coerenti e calcolare il valore p_0 tale che $P(A|B \vee D) = \frac{1}{4}$. Infine, posto $X = |A^c \wedge B| + |C^c \wedge D|$, calcolare, per $p = \frac{1}{2}$, la probabilità α dell'evento $(X = 0)$.

   $I =$ $\qquad$ $p_0 =$ $\qquad$ $\alpha =$

2. Dato un numero aleatorio X, con distribuzione normale standard, e posto $Y = 2X+1$, calcolare $P(Y \geq 1)$. Inoltre, posto $Z = Y + 2$, calcolare la covarianza di Y, Z e la probabilità p dell'evento: $(Z+1)(Z-7) \leq 0$.

   $P(Y \geq 1) =$ $\qquad$ $cov(Y, Z) =$ $\qquad$ $p =$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è data da $f(x, y) = kxy$, per $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e, per ogni $y \in [0, 2]$, la funzione di ripartizione $F_2(y)$. Stabilire, inoltre, se X ed Y sono stocasticamente indipendenti.

   $k =$ $\qquad$ $F_2(y) =$ $\qquad$ $X\,,\ Y$ *St. Indip.?*

4. Da un lotto di 6 componenti, contenente 2 pezzi difettosi, si estraggono in blocco 3 pezzi, ottenendo un numero aleatorio X di pezzi non difettosi. Calcolare la funzione caratteristica, la previsione e la varianza di X.

   $\phi(t) =$ $\qquad$ $m =$ $\qquad$ $\sigma^2 =$

Soluzioni.

1. Da $P(B) \geq P(A)$ segue $p \geq \frac{1}{5}$.
   Da
   $$P(B \vee D) = P(B) + P(D) = 2p \leq 1\,,$$
   segue $p \leq \frac{1}{2}$. Pertanto $I = [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]$.
   Inoltre
   $$P(A \,|\, B \vee D) = \frac{P[A \wedge (B \vee D)]}{P(B \vee D)} = \frac{P(A)}{P(B) + P(D)} = \frac{\frac{1}{5}}{2p} = \frac{1}{10p} = \frac{1}{4} \iff p = p_0 = \frac{2}{5}\,.$$
   Infine
   $$P(X = 0) = P[A \vee C \vee (B^c \wedge D^c)] = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + 1 - 2p = \frac{7}{5} - 2p\,,$$
   da cui, sostituendo $p = \frac{1}{2}$, si ottiene $P(X = 0) = \frac{2}{5}$.

2. Si ha
   $$Y \sim N_{1,2}\,, \quad Z \sim N_{3,2}\,.$$
   Allora
   $$P(Y \geq 1) = 1 - \Phi_{1,2}(1) = 1 - \Phi(\frac{1-1}{2}) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}\,.$$
   Inoltre
   $$cov(Y, Z) = cov(Y, Y + 2) = var(Y) = 4\,.$$
   Infine
   $$p = P[(Z+1)(Z-7) \leq 0] = P(-1 \leq Z \leq 7) = \Phi_{3,2}(7) - \Phi_{3,2}(-1) =$$
   $$= \Phi(\tfrac{7-3}{2}) - \Phi(\tfrac{-1-3}{2}) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 0.9544\,.$$

3. Dev'essere
   $$\int_0^1 \int_0^2 f(x, y)dxdy = 1\,,$$
   cioè
   $$k \int_0^1 \int_0^2 xydxdy = k \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = k \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 1\,,$$
   e quindi $k = 1$. Inoltre, per $y < 0$, si ha: $F_2(y) = 0$, mentre, per $y > 2$, si ha: $F_2(y) = 1$.
   Per $0 \leq y \leq 2$, si ha
   $$F_2(y) = \int_0^y f_2(t)dt\,.$$
   Allora, essendo
   $$f_2(y) = \int_0^1 f(x, y)dx = \int_0^1 xydx = \frac{y}{2}\,, \quad 0 \leq y \leq 2\,,$$
   con $f_2(y) = 0$ altrove, segue
   $$F_2(y) = \int_0^y \frac{t}{2}dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^y = \frac{y^2}{4}\,.$$
   Infine
   $$f_1(x) = \int_0^2 f(x, y)dy = \int_0^2 xydy = 2x\,, \quad 0 \leq x \leq 1\,,$$
   con $f_1(x) = 0$ altrove. Allora
   $$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = xy\,, \quad \forall\,(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]\,,$$
   con $f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto X e Y sono stocasticamente indipendenti.

4. Si ha $X \in \{1, 2, 3\}$, con

$$P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}, \quad P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5}, \quad P(X=3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{2}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}.$$

Allora, posto $P(X=n) = p_n$, si ha

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{3} p_n e^{itn} = p_1 e^{it} + p_2 e^{2it} + p_3 e^{3it} = \frac{1}{5}e^{it} + \frac{3}{5}e^{2it} + \frac{1}{5}e^{3it} = \frac{e^{it} + 3e^{2it} + e^{3it}}{5}.$$

Indicando rispettivamente con m ed $m^{(2)}$ le previsioni di X e X^2, dalle relazioni

$$\phi'(0) = im, \qquad \phi''(0) = i^2 m^{(2)} = -m^{(2)},$$

tenendo conto che

$$\phi'(t) = \frac{ie^{it} + 6ie^{2it} + 3ie^{3it}}{5}, \quad \phi''(t) = \frac{-e^{it} - 12e^{2it} - 9e^{3it}}{5}$$

si ottiene

$$\phi'(0) = 2i, \qquad \phi''(0) = -\frac{22}{5},$$

da cui segue

$$m = 2, \qquad \sigma^2 = \frac{22}{5} - 4 = \frac{2}{5}.$$