Nome e cognome: *Matr.:*

CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 9 settembre 2003

Ing. Gestionale (Canali $1-2-3$).

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Dati tre eventi E_1, E_2, E_3 indipendenti ed equiprobabili, con $P(E_i) = \frac{1}{4}$, calcolare la probabilità α che E_1 ed E_2 siano entrambi veri, supposto che almeno due dei tre eventi siano veri. Inoltre, indicando con X il numero aleatorio di eventi veri fra i tre considerati, calcolare la funzione caratteristica di X.

   $\alpha =$ $\phi_X(t) =$

2. Il codominio di un vettore aleatorio continuo (X,Y) è dato dall'insieme $\mathcal{C} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3\}$. La densità congiunta di (X,Y) è data da $f(x,y) = kxy^2$, per $(x,y) \in \mathcal{C}$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e stabilire se gli eventi $A = (X \leq 1), B = (Y \leq 1)$ sono stocasticamente indipendenti. Inoltre, calcolare la probabilità γ dell'evento condizionato $(A^c \vee B^c \,|\, A \vee B)$.

   $k =$ A, B *stocast. indip.*? $\gamma =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione $F_2(y)$ di Y e, fissato $y \in [0,3]$, la densità condizionata $f_1(x|y)$.

   $$F_2(y) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \end{cases} \qquad f_1(x|y) = \begin{cases} & , \\ & , \end{cases}$$

4. Siano dati un lotto L_1, contenente 2 pezzi buoni e 1 difettoso, un lotto L_2, contenente 1 pezzo buono e 2 difettosi, e un contenitore C vuoto. Da ciascuno dei due lotti si preleva a caso un pezzo inserendolo in C. Successivamente da C si prende a caso un pezzo. Considerati gli eventi $D_i =$ *"il pezzo prelevato da L_i è difettoso"*, $i = 1,2$, $H_r =$ *"fra i due pezzi inseriti in C ve ne sono r difettosi"*, $r = 0,1,2$, $E =$ *"il pezzo estratto da C è difettoso"*, calcolare $P(E \,|\, H_1 \vee H_2)$ e $P(H_2|E)$.

   $P(E \,|\, H_1 \vee H_2) =$ $P(H_2|E) =$

Soluzioni

1. Ricordando che

$$P(A \vee B \vee C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - PAC) - P(BC) + P(ABC)\,,$$

si ha

$$\begin{aligned}&\alpha = P(E_1E_2 \,|\, E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3) = \tfrac{P(E_1E_2)}{P(E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3)} = \\ &= \tfrac{P(E_1E_2)}{P(E_1E_2)+P(E_1E_3)+P(E_2E_3)-P(E_1E_2E_3)-P(E_1E_2E_3)-P(E_1E_2E_3)+P(E_1E_2E_3)} = \\ &= \tfrac{(\frac{1}{4})^2}{3(\frac{1}{4})^2-2\cdot(\frac{1}{4})^3} = \tfrac{2}{5}\,.\end{aligned}$$

Inoltre, si ha $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$. Essendo gli eventi indipendenti ed equiprobabili, X ha una distribuzione binomiale di parametri $n = 3, p = \frac{1}{4}$. Pertanto, risulta

$$\phi_X(t) = \sum_{h=0}^{3} \binom{3}{h} \left(\frac{1}{4}\right)^h \left(\frac{3}{4}\right)^{3-h} e^{ith} = \cdots = \left(\frac{1}{4}e^{it} + \frac{3}{4}\right)^3 .$$

2. Si ha

$$\int_0^2 \int_0^3 kxy^2 dxdy = \cdots = 18k = 1\,,$$

e quindi $k = \frac{1}{18}$. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned}P(A) &= \textstyle\int_0^1 \int_0^3 \frac{1}{18}xy^2dxdy = \cdots = \frac{1}{4}\,,\\ P(B) &= \textstyle\int_0^2 \int_0^1 \frac{1}{18}xy^2dxdy = \cdots = \frac{1}{27}\,,\\ P(AB) &= \textstyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{18}xy^2dxdy = \cdots = \frac{1}{108} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{27} = P(A)P(B)\,.\end{aligned}$$

Pertanto A e B sono stocasticamente indipendenti. Infine, si ha

$$\gamma = P(A^c \vee B^c | A \vee B) = 1 - P(AB|A\vee B) = 1 - \frac{P(AB)}{P(A\vee B)} = 1 - \frac{P(A)P(B)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)} = \cdots = \frac{29}{30}\,.$$

3. Intanto, si ha

$$f_2(y) = \int_0^2 \frac{1}{18}xy^2dx = \frac{y^2}{9}\,,\ \ y \in [0,3]\,,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Quindi

$$F_2(y) = \int_0^y f_2(t)dt = \frac{1}{9}\int_0^y t^2dt = \frac{y^3}{27}\,,\ \ y \in (0,3)\,,$$

con $F_2(y) = 0$, per $y \leq 0$; $F_2(y) = 1$, per $y \geq 3$. Inoltre, fissato $y \in [0,3]$, si ha

$$f_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{\frac{1}{18}xy^2}{\frac{y^2}{9}} = \frac{x}{2}\,,\ \ x \in (0,2)\,,$$

con $f_1(x|y) = 0$ altrove.
(*Nota: in effetti X e Y sono stocasticamente indipendenti e quindi* $f_1(x|y) = f_1(x)$)

4. Si ha

$$H_0 = D_1^cD_2^c\,,\quad H_1 = D_1D_2^c \vee D_1^cD_2\,,\quad H_2 = D_1D_2\,,$$

ed essendo D_1 e D_2 stocasticamente indipendenti, si ottiene

$$P(H_0) = P(D_1^c)P(D_2^c) = \frac{2}{9}\,,\ \ P(H_1) = P(D_1)P(D_2^c) + P(D_1^c)P(D_2) = \frac{5}{9}\,,\ \ P(H_2) = P(D_1)P(D_2) = \frac{2}{9}\,.$$

Inoltre $P(E|H_r) = \frac{r}{2}\,,\quad r = 0,1,2$. Allora

$$P(E\,|\,H_1 \vee H_2) = \frac{P(EH_1)+P(EH_2)}{P(H_1)+P(H_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} + 1\cdot\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}+\frac{2}{9}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{14}\,.$$

Infine

$$P(H_2|E) = \frac{P(EH_2)}{P(E)} = \frac{P(EH_2)}{P(EH_0)+P(EH_1)+P(EH_2)} = \frac{P(EH_2)}{P(EH_1)+P(EH_2)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9}\,.$$