Nome e cognome: *Matr.:*

CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 20 marzo 2004

Ing. Gestionale (Canali $1-2-3$).

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. L'architettura di un software è costituita da 3 moduli M_1, M_2, M_3. Sia A_i l'evento "il modulo M_i funziona". E' noto che se M_1 funziona allora M_2 funziona, se M_2 funziona allora M_3 funziona. Determinare l'insieme $\mathcal{C}$ dei costituenti generati dagli eventi A_i con $i = 1, 2, 3$ (tenendo conto dei vincoli logici dati). Supposto che $P(A_1) = \frac{1}{4}, P(A_3) = \frac{6}{10}$, determinare i valori di probabilità coerenti p per A_2. Stabilire inoltre se A_1 e A_3 possono essere stocasticamente indipendenti.

   $\mathcal{C} = \{ \qquad \}$

   $p \in$ *Stoc. indip.?*

2. Sia X il tempo aleatorio di durata di un dispositivo con densità

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-2x^2}, & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{per } x \leq 0. \end{cases}$$

   Determinare la costante k e la probabilità γ dell'evento condizionato $(X > 2|X > 1)$.

   $k =$ $\gamma =$

3. Dati due lotti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, ciascuno contenente 6 componenti buoni e 2 difettosi, da entrambi si effettuano 3 estrazioni con restituzione, ottenendo X pezzi difettosi fra quelli estratti da A ed Y pezzi difettosi fra quelli estratti da B. Considerato il numero aleatorio discreto $Z = X+Y$, calcolare: (i) la previsione m e la varianza σ^2 di Z; (ii) la funzione caratteristica $\phi_Z(t)$ di Z. (*Si noti che X e Y sono stocasticamente indipendenti*).

   $m =$ $\sigma^2 =$ $\phi_Z(t) =$

4. Un sistema S è costituito da due dispositivi D_1 e D_2 in parallelo funzionanti simultaneamente (e quindi S funziona finchè almeno uno dei due dispositivi funziona). Siano X, Y, Z i tempi aleatori di durata di D_1, D_2 ed S, rispettivamente. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x, y) = 6e^{-2x-3y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la probabilità p che D_1 si guasti prima di D_2 e, per ogni $z \geq 0$, la funzione di ripartizione $F_Z(z)$ e la funzione di rischio $h_Z(z)$ di Z.

   $p =$ $F_Z(z) =$ $h_Z(z) =$

Soluzioni

1. Siccome $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$, i costituenti sono
$$C_1 = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3\,;\; C_2 = A_1^c \wedge A_2 \wedge A_3\,;\; C_3 = A_1^c \wedge A_2^c \wedge A_3\,;\; C_4 = A_1^c \wedge A_2^c \wedge A_3^c\,.$$
Dalla monotonia della probabilità segue che necessariamente $\frac{1}{4} \leq P(A_2) \leq \frac{6}{10}$.
Essendo $A_1 \subseteq A_3$, si ha che A_1 e A_3 non possono essere stocasticamente indipendenti. Infatti $P(A_1 \wedge A_3) = P(A_1) \neq P(A_1)P(A_3)$.

2. Si ha
$$\int_0^{+\infty} kxe^{-2x^2}dx = \frac{k}{4}\int_0^{+\infty} 4xe^{-2x^2}dx = \frac{k}{4}[-e^{-2x^2}]_0^{+\infty} = \frac{k}{4}[0-(-1)] = \frac{k}{4} = 1,$$
e quindi $k = 4$. Inoltre, essendo la funzione di sopravvivenza di X per $x \geq 0$
$$S(x) = \int_x^{+\infty} 4te^{-2t^2}dt = [-e^{-2t^2}]_x^{+\infty} = e^{-2x^2},$$
si ha
$$\gamma = P(X > 2|X > 1) = \frac{P(X > 2, X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(X > 2)}{P(X > 1)} = \frac{S(2)}{S(1)} = \frac{e^{-8}}{e^{-2}} = e^{-6}.$$

3. X e Y sono indipendenti ed ugualmente distribuiti, con distribuzione binomiale di parametri $n = 3, p = \frac{1}{4}$. Pertanto $I\!P(X) = I\!P(Y) = np = \frac{3}{4}$, $Var(X) = Var(Y) = npq = \frac{9}{16}$, quindi
$$m = I\!P(Z) = I\!P(X) + I\!P(Y) = \frac{3}{2}\,; \quad \sigma^2 = Var(Z) = Var(X) + Var(Y) = \frac{9}{8}\,\cdot$$
Inoltre, osservando che
$$\phi_X(t) = I\!P(e^{itX}) = I\!P(e^{itY}) = \phi_Y(t) = \cdots = \left(\frac{e^{it}}{4} + \frac{3}{4}\right)^3,$$
segue (per un noto teorema sulla funzione caratteristica di un numero aleatorio somma di numeri aleatori stocasticamente indipendenti)
$$\phi_Z(t) = \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = \left(\frac{e^{it}}{4} + \frac{3}{4}\right)^6.$$
(*infatti:* $Z \sim B(6, \frac{1}{4})$).

4. Si ha che
$$p = P(X < Y) = \int_R \left(\int_x^{+\infty} f(x,y)dy\right)dx = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x}\left(\int_x^{+\infty} 3e^{-3y}dy\right)dx = \int_0^{+\infty} 2e^{-5x}dx = \frac{2}{5}\,.$$
Inoltre, osservando che il sistema S non funziona al tempo z quando entrambi i dispositivi D_1 e D_2 non funzionano al tempo z si ha che $(Z \leq z) = (X \leq z) \wedge (Y \leq z)$, per ogni $z \geq 0$ e quindi (siccome X e Y sono stocasticamente indipendenti)
$$F_Z(z) = P(X \leq z, Y \leq z) = F_X(z)F_Y(z) = (1-e^{-2z})(1-e^{-3z}) = 1 - e^{-2z} - e^{-3z} + e^{-5z}\,.$$
Infine, indicando con $f_Z(z)$ la densità di Z, si ha $h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)}$ e quindi
$$h_Z(z) = \frac{2e^{-2z} + 3e^{-3z} - 5e^{-5z}}{e^{-2z} + e^{-3z} - e^{-5z}} = \frac{2e^{3z} + 3e^{2z} - 5}{e^{3z} + e^{2z} - 1} = 2 + \frac{e^{2z} - 3}{e^{3z} + e^{2z} - 1}\,\cdot$$