Nome e cognome: *Matr.:*

CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 17 aprile 2004

Ing. Gestionale (Canali $1-2-3$).

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Siano A, B, C tre eventi tali che A e B siano incompatibili, inoltre $(A \vee B) \wedge C = \emptyset$. Determinare se la valutazione di probabilità $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{12}, P(C) = \frac{1}{4}$ è coerente, e in caso affermativo calcolare i valori di probabilità coerenti p per l'evento $A^c \wedge B^c \wedge C^c$.

   E' coerente ? $p =$

2. Una ditta riceve merce da tre fornitori A, B, C nelle seguenti proporzioni: il 42% della merce è fornita da A, il 14% da B, e la restante merce da C. E' noto che la probabilità che un pezzo sia difettoso è, rispettivamente, 0.05, 0.04, 0.1, a seconda che sia fornito da A, B, C. Calcolare la probabilità α che un pezzo estratto da quelli ricevuti dalla ditta sia difettoso. Inoltre, esaminato un pezzo e supposto che sia difettoso, calcolare la probabilità p che esso provenga dal fornitore B.

   $\alpha =$ $p =$

3. Dato l'insieme $\mathcal{C} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, sia $f(x, y) = x(y+1)$, per $(x, y) \in \mathcal{C}$, con $f(x, y) = 0$ altrove, la densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y). Calcolare la probabilità p dell'evento $(X + Y \geq 0)$, le densità marginali e stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   $p =$ $f_X(x) = \Bigg\{$ $f_Y(y) = \Bigg\{$

   X e Y sono stocasticamente indipendenti ?

4. Le funzioni caratteristiche di tre numeri aleatori X, Y, Z, con X e Y stocasticamente indipendenti, sono

$$\phi_X(t) = e^{(\sqrt{5}-1)it-2t^2}, \quad \phi_Y(t) = e^{it-\frac{t^2}{2}}, \quad \phi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{8}}$$

   (Si ricordi che la funzione caratteristica di un numero aleatorio con distribuzione $N_{m,\sigma}$ è $e^{imt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$). Assumendo $\rho_{XZ} = \rho_{YZ} = \frac{1}{2}$, calcolare la varianza di $U = \frac{X+Y+Z}{3}$. Determinare la densità del numero aleatorio $V = X + Y$. Calcolare inoltre la probabilità γ dell'evento $(X + Y > \sqrt{5})$.

   $Var(U) =$ $f_V(v) =$ $\gamma =$

Soluzioni

1. Si ha $A \wedge B = A \wedge C = B \wedge C = \emptyset$ e quindi i costituenti sono

   $C_1 = A \wedge B^c \wedge C^c = A,\;\; C_2 = A^c \wedge B \wedge C^c = B,\;\; C_3 = A^c \wedge B^c \wedge C = C,\;\; C_4 = A^c \wedge B^c \wedge C^c.$

   Allora, per la coerenza, dev'essere: $P(A) + P(B) + P(C) \leq 1$, ed essendo $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ l'assegnazione è coerente. Inoltre, dalla relazione

   $$P(A) + P(B) + P(C) + P(A^c \wedge B^c \wedge C^c) = 1\,,$$

   segue: $p = P(A^c \wedge B^c \wedge C^c) = 0$.

2. Indicando con A (analogamente B, C) l'evento "il pezzo proviene dal fornitore A", si ha: $P(A) = \frac{42}{100}$, $P(B) = \frac{14}{100}$, $P(C) = \frac{44}{100}$. Inoltre, definito l'evento F="il pezzo estratto è difettoso", risulta: $P(F|A) = \frac{1}{20}$, $P(F|B) = \frac{1}{25}$, $P(F|C) = \frac{1}{10}$. La percentuale di pezzi difettosi che la ditta riceve è 7.06%; infatti:

   $$P(F) = P(A)P(F|A) + P(B)P(F|B) + P(C)P(F|C) =$$
   $$= \frac{42}{100} \times \frac{1}{20} + \frac{14}{100} \times \frac{1}{25} + \frac{44}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{353}{5000} = 0.0706\,.$$

   La probabilità di $B|F$ (che un pezzo provenga dal fornitore B supposto che sia difettoso) si determina tramite il teorema di Bayes:

   $$P(B|F) = \frac{P(B)P(F|B)}{P(F)} = \frac{\frac{14}{100} \times \frac{1}{25}}{\frac{353}{5000}} = \frac{28}{353} \simeq 0.0793\,.$$

3. Si ha

   $p = P(X + Y \geq 0) = \int_0^1 dx \int_{-x}^1 x(y+1)dy = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} + y\right]_{-x}^1 dx = \int_0^1 (\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3 + x^2)dx = \cdots = \frac{23}{24}\,.$

   Inoltre

   $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-1}^1 x(y+1)dy = x\left[\frac{y^2}{2} + y\right]_{-1}^1 = 2x\,,\;\; 0 \leq x \leq 1\,,$$

   con $f_X(x) = 0$ altrove;

   $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 x(y+1)dx = \frac{y+1}{2}\,,\;\; -1 \leq y \leq 1\,,$$

   con $f_Y(y) = 0$ altrove.
   Infine $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, $\forall\,(x,y)$, e quindi X e Y sono stocasticamente indipendenti.

4. Si ha: $X \sim N_{\sqrt{5}-1,2}\,,\; Y \sim N_{1,1}\,,\; Z \sim N_{0,\frac{1}{2}}\,.$ Pertanto

   $$\sigma_U^2 = Var\left(\frac{X+Y+Z}{3}\right) = \frac{1}{9}Var(X+Y+Z) = \frac{1}{9}(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2 + 2\frac{1}{2}\sigma_X\sigma_Z + 2\frac{1}{2}\sigma_Y\sigma_Z) = \frac{3}{4}\,.$$

   Inoltre:

   $$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = e^{(\sqrt{5}-1)it - 2t^2} e^{it - \frac{t^2}{2}} = e^{\sqrt{5}it - \frac{5t^2}{2}}\,,$$

   e quindi $f_V(v) = N_{\sqrt{5},\sqrt{5}}(v)$. Infine

   $$\gamma = P(X + Y > \sqrt{5}) = 1 - P(V \leq \sqrt{5}) = 1 - \Phi_{\sqrt{5},\sqrt{5}}(\sqrt{5}) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}\,.$$