Calcolo delle probabilità e statistica (27/6/2006)

(Ing. Informatica - Ing. Automatica - Roma)

1. Un lotto contenente 8 pezzi (2 difettosi e 6 buoni) viene diviso a caso in due lotti L_1 ed L_2, contenenti rispettivamente 3 pezzi e 5 pezzi. Successivamente, da ciascuno dei due lotti si estrae a caso un pezzo. Definiti gli eventi $A =$ *"il pezzo estratto da L_1 è difettoso"*, $B =$ *"il pezzo estratto da L_2 è difettoso"*, stabilire se A e B sono stocasticamente indipendenti. (*N.B.: definire gli eventi $H_r =$ "L_1 contiene r pezzi difettosi", $r = 0, 1, 2$*).

   Stocasticamente indipendenti ?

2. Due automobili A e B, posizionate inizialmente nell'origine e nel punto di ascissa 3, iniziano a muoversi con velocità aleatorie X e Y verso il punto P di ascissa 6. Assumendo per il vettore aleatorio (X, Y) una densità congiunta $f(x, y) = xy$, per $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 1]$, con $f(x, y) = 0$ altrove, calcolare la probabilità α che A non giunga in P dopo B.

   $\alpha =$

3. Dati tre eventi A, B e C, con $AB = \emptyset$, $C \subset B$, e con $P(A) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{4}, P(B) = p$, determinare l'insieme I delle assegnazioni coerenti di p. Inoltre, assumendo $p = \frac{1}{3}$, determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X = |A| - |B| + |C|$.

   $I =$ $$F(x) = \begin{cases} \quad\quad , \\ \quad\quad , \\ \quad\quad , \\ \quad\quad , \end{cases}$$

4. Un circuito elettrico è composto da due interruttori in parallelo tra loro indipendenti. Il primo è chiuso (permette il passaggio di corrente) con probabilità 2/5, mentre il secondo è chiuso con probabilità 3/5. Sapendo che ai capi del circuito c'è passaggio di corrente, qual'è la probabilità p che siano entrambi chiusi?

   $p =$

Calcolo delle probabilità e statistica *(Ing. Informatica - Ing. Automatica - Roma)*

Soluzioni della prova scritta del 27/6/2006.

1. Si ha

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{6}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{14}\,, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{6}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{28}\,, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{6}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{3}{28}\,;$$

$$P(A\,|\,H_0) = 0\,, \quad P(A\,|\,H_1) = \frac{1}{3}\,, \quad P(A\,|\,H_2) = \frac{2}{3}\,;$$

$$P(B\,|\,H_0) = \frac{2}{5}\,, \quad P(B\,|\,H_1) = \frac{1}{5}\,, \quad P(B\,|\,H_2) = 0\,.$$

$$P(AB\,|\,H_0) = 0\,, \quad P(AB\,|\,H_1) = P(A\,|\,H_1)P(B\,|\,H_1) = \frac{1}{15}\,, \quad P(AB\,|\,H_2) = 0\,.$$

Quindi:

$$P(A) = P(A\,|\,H_0)P(H_0) + P(A\,|\,H_1)P(H_1) + P(A\,|\,H_2)P(H_2) = \cdots = \frac{1}{4}\,,$$

$$P(B) = P(B\,|\,H_0)P(H_0) + P(B\,|\,H_1)P(H_1) + P(B\,|\,H_2)P(H_2) = \cdots = \frac{1}{4}\,.$$

$$P(AB) = P(AB\,|\,H_0)P(H_0) + P(AB\,|\,H_1)P(H_1) + P(AB\,|\,H_2)P(H_2) = \cdots = \frac{1}{28}\,.$$

Allora: $P(AB) \neq P(A)P(B)$; pertanto A e B non sono indipendenti.

2. Siano T_A e T_B gli istanti aleatori in cui A e B arrivano nel punto P. Si ha

$$\alpha = P(T_A \leq T_B) = P\left(\frac{6}{X} \leq \frac{3}{Y}\right) = P\left(Y \leq \frac{X}{2}\right) = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} xy\,dy = \cdots = \frac{1}{2}\,.$$

3. Dev'essere $P(B) \geq P(C)$, $P(B) \leq 1 - P(A)$; pertanto $I = [\frac{1}{4}, \frac{2}{3}]$. Inoltre, i costituenti sono $AB^cC^c = A\,,\ A^cBC = C\,,\ A^cBC^c = BC^c\,,\ A^cB^cC^c = A^cB^c$ e i corrispondenti valori di X sono 1, 0, -1, 0. Pertanto, assumendo $p = \frac{1}{3}$, si ha

$$P(X=-1) = P(B) - P(C) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\,, \quad P(X=1) = P(A) = \frac{1}{3}\,, \quad P(X=0) = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12}\,.$$

Allora

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{12}, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{2}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

4. Indicando con A e B gli eventi $A =$ *"il primo interruttore è chiuso"*, $B =$ *"il secondo interruttore è chiuso"*, si ha

$$p = P(AB\,|\,A \vee B) = \frac{P(AB)}{P(A \vee B)} = \frac{P(AB)}{1 - P(A^cB^c)} = \frac{P(A)P(B)}{1 - P(A^c)P(B^c)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{6}{19}\,.$$