Calcolo delle probabilità e statistica (11/4/2007)

(Ing. Informatica - Ing. Automatica - Roma)

1. Siano dati due lotti L_1, contenente 1 pezzo difettoso e 2 non difettosi, ed L_2, contenente 2 pezzi difettosi e 4 non difettosi. Dopo aver tolto a caso da ciascuno dei due lotti un pezzo, con i pezzi rimanenti di L_1 ed L_2 si forma un lotto L_3. Calcolare la probabilità α dell'evento $H_1 =$ "*L_3 contiene un solo pezzo difettoso*"; inoltre, supposto che un pezzo estratto a caso da L_3 risulti non difettoso (indichiamo con E tale evento), calcolare la probabilità β dell'evento condizionato $H_1 \,|\, E$.
   (*Nota: conviene definire gli eventi $A =$ "il pezzo estratto da L_1 è difettoso", $B =$ "il pezzo estratto da L_2 è difettoso"*)

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

2. La densità di probabilità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+y^2}{2}}$, per ogni $(x, y) \in I\!R^2$. Posto $U = X + Y, V = 2X - 1$, calcolare la covarianza di U, V e la probabilità p dell'evento $(-3 \leq V \leq 3)$.

   $\mathrm{cov}(U, V) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare l'equazione della retta di regressione di V su U.

   $v =$

4. Sia dato il numero aleatorio $X = 2|A| - 6|B|$ con A e B eventi stocasticamente indipendenti. Sapendo che $I\!P(X) = 0$ e $\mathrm{var}(X) = 6$, determinare la probabilità di A e di B.

   $P(A) =$ $\qquad\qquad$ $P(B) =$

Calcolo delle probabilità e statistica *(Ing. Informatica - Ing. Automatica - Roma)*

Soluzioni della prova scritta del 11/4/2007.

1. Si ha: $P(H_1) = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$. Inoltre, definiti gli eventi $H_2 = AB^c \vee A^cB$, $H_3 = A^cB^c$, si ha
$$P(H_2) = P(AB^c) + P(A^cB) = P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{9},$$
$$P(H_3) = P(A^cB^c) = P(A^c)P(B^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{9}.$$
Pertanto
$$P(E) = P(H_1)P(E|H_1) + P(H_2)P(E|H_2) + P(H_3)P(E|H_3) = \frac{1}{9} \cdot \frac{6}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{3};$$
quindi: $P(H_1 \,|\, E) = \frac{P(EH_1)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{6}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{7}$.

2. Si ha
$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+y^2}{2}} \, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}};$$
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+y^2}{2}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$
Pertanto X ha una distribuzione normale con parametri $m_1 = 1$, $\sigma_1 = 1$, mentre Y ha una distribuzione normale standard; inoltre, osservando che $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ per ogni (x, y), segue che X e Y sono stocasticamente indipendenti e quindi anche incorrelati. Allora
$$\mathrm{cov}(U, V) = \mathrm{cov}(X + Y, 2X - 1) = \mathrm{cov}(X, 2X - 1) + \mathrm{cov}(Y, 2X - 1) =$$
$$= 2\,\mathrm{cov}(X, X) + 2\,\mathrm{cov}(Y, X) = 2\,\mathrm{var}(X) = 2.$$
Infine, osservando che $X - 1$ ha una distribuzione normale standard, segue
$$P(-3 \leq V \leq 3) = P(-3 \leq 2X - 1 \leq 3) = P(-1 \leq X \leq 2) = P(-2 \leq X - 1 \leq 1) =$$
$$= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - [1 - \Phi(2)] = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 \simeq 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185.$$

3. L'equazione della retta di regressione di V su U è: $v = m_V + \rho \frac{\sigma_V}{\sigma_U}(u - m_U)$. Osservando che $m_1 = 1$, $m_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, si ha
$$m_V = I\!\!P(V) = I\!\!P(2X - 1) = 1, \quad m_U = I\!\!P(U) = I\!\!P(X + Y) = 1,$$
$$\rho \frac{\sigma_V}{\sigma_U} = \frac{\rho \sigma_U \sigma_V}{\sigma_U^2} = \frac{\mathrm{cov}(U, V)}{\sigma_U^2} = \frac{\mathrm{cov}(X + Y, 2X - 1)}{\mathrm{var}(X + Y)} = \frac{2\,\mathrm{var}(X)}{\mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)} = \frac{2}{1 + 1} = 1.$$
Pertanto, l'equazione è: $v = u$.

4. Ponendo per semplicità di notazione $P(A) = x$ e $P(B) = y$, si ha
$$I\!\!P(X) = 2I\!\!P(|A|) - 6I\!\!P(|B|) = 2x - 6y = 0.$$
Inoltre, ricordando che per evento E di probabilità p si ha $\mathrm{var}(|E|) = p(1 - p)$, segue
$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(2|A| - 6|B|) = \mathrm{var}(2|A|) + \mathrm{var}(-6|B|) + 2\,\mathrm{cov}(2|A|, -6|B|) =$$
$$= 4x(1 - x) + 36y(1 - y) - 24\,\mathrm{cov}(|A|, |B|),$$
e poiché A e B sono indipendenti, $\mathrm{var}(X) = 4x(1 - x) + 36y(1 - y) = 6$. Risolvendo il sistema di equazioni $\begin{cases} 2x - 6y & = 0 \\ 4x(1 - x) + 36y(1 - y) & = 6 \end{cases}$ si ottengono le due soluzioni
$$\left\{x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{6}\right\}, \quad \left\{x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}\right\}.$$
Ovviamente la seconda soluzione non è accettabile e quindi $P(A) = \frac{1}{2}$ e $P(B) = \frac{1}{6}$.