CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 24 giugno 2002

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

Gestionale (Canali $1-2$).

Nome e cognome**:**

1. - La probabilità che uno studente scelto a caso tra gli iscritti al I anno di Ingegneria dopo la prima sessione <u>non</u> abbia ancora superato l'esame di Analisi é 0.7, la probabilità che abbia fatto il liceo scientifico ed abbia superato l'esame di Analisi é 0.2. Quali valori coerenti può assumere la probabilità p che abbia fatto il liceo classico ed abbia superato Analisi ?

$p \in$

2. - La densità di probabilità di un numero aleatorio X è data da $f(x) = kx^2$, $(-1 \leq x \leq 1)$, e $f(x) = 0$ altrove. Calcolare: la costante k; la funzione di ripartizione $F(x)$; la densità di probabilità $g(y)$ del numero aleatorio $Y = 2X$.

$k =$ $\qquad F(x) = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$ $\qquad g(y) = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

3. - Tre palline numerate da 1 a 3 vengono inserite a caso in due scatole s_1, s_2. Sia X il numero di palline in s_1 e Y il numero di palline con numero dispari in s_1. Determinare se X ed Y sono stocasticamente indipendenti. Calcolare $\mathbb{P}(X)$, $cov(X, Y)$.

X e Y sono stocasticamente indipendenti? si no

$\mathbb{P}(X) =$; $cov(X, Y) =$

4. - Data la funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{5} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

del numero aleatorio X, determinare il codominio $\mathcal{C}_X$ di X e la probabilità dei seguenti eventi $E = (\frac{4}{5} \leq X \leq \frac{9}{4})$, $H = (\frac{3}{2} \leq X \leq 3)$ e dell'evento condizionato $E|H$.

$\mathcal{C}_X =$; $P(E) =$; $P(H) =$; $P(E|H) =$

Soluzione.

1. Consideriamo i seguenti eventi:

$$\begin{aligned} &A = \text{“}\textit{Lo studente supera l'esame di Analisi alla prima sessione}\text{”;}\\ &S = \text{“}\textit{Lo studente ha fatto il liceo scientifico}\text{”;}\\ &C = \text{“}\textit{Lo studente ha fatto il liceo classico}\text{”.}\end{aligned}$$

Osservando che $AS \subseteq A$ e che $AC \subseteq A$ si ha $AS \vee AC \subseteq A$. Essendo gli eventi S e C incompatibili si ha

$$\begin{aligned} &P(AS \vee AC) = P(AS) + P(AC) \leq P(A)\\ &0.2 + p \leq 0.3\\ &p \leq 0.1\end{aligned}$$

Inoltre dovendo essere anche $p \geq 0$ si ha $p \in [0, 0.1]$

2. Calcoliamo la costante k.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{+1} kx^2 dx = 1 \Rightarrow k[\frac{x^3}{3}]_{-1}^{+1} \Rightarrow \frac{2}{3}k = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{2}.$$

Fissato $x \in [-1, 1]$ si ha

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{3}{2}t^2 dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} 3t^2 dt = \frac{1}{2}[t^3]_{-1}^{x} = \frac{1}{2}(x^3 + 1).$$

Ne segue che la funzione di ripartizione $F(x)$ è definita da

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1,\\ \frac{1}{2}(x^3+1) & \text{se } -1 \leq x < 1,\\ 1 & \text{se } x \geq 1.\end{cases}$$

Calcoliamo $G(y)$ e $g(y)$.

$$\begin{aligned} &G(y) = P(X \leq \tfrac{y}{2}) = F(\tfrac{y}{2}) \Rightarrow g(y) = [G(y)]' = [F(\tfrac{y}{2})]' = \tfrac{1}{2}f(\tfrac{y}{2})\\ &g(y) = \begin{cases} \frac{3}{16}y^2 & \text{se } -2 \leq y \leq 2,\\ 0 & \text{altrove.}\end{cases}\end{aligned}$$

3. Indicando con E_i=*“La pallina numero i viene inserita nella prima urna”* (per $i = 1, 2, 3$) calcoliamo tutti i costituenti

$$\begin{array}{llll} C_0 = E_1^c E_2^c E_3^c & C_1 = E_1 E_2^c E_3^c & C_2 = E_1^c E_2 E_3^c & C_3 = E_1^c E_2^c E_3\\ C_4 = E_1 E_2 E_3^c & C_5 = E_1 E_2^c E_3 & C_6 = E_1^c E_2 E_3 & C_7 = E_1 E_2 E_3.\end{array}$$

Essi sono equiprobabili pertanto si ha $P(C_i) = \frac{1}{8}$ (per $i = 0, 1, \ldots, 7$). Inoltre il codominio di X è $C_X = \{0, 1, 2, 3\}$ e quello di Y è $C_Y = \{0, 1, 2\}$. Si hanno le seguenti probabilità

$P(X = 0) = P(C_0) = \frac{1}{8}$ $\quad$ $P(X = 1) = P(C_1 \vee C_2 \vee C_3) = \frac{3}{8}$

$P(X = 2) = P(C_4 \vee C_5 \vee C_6) = \frac{3}{8}$ $\quad$ $P(X = 3) = P(C_7) = \frac{1}{8}$

$P(Y = 0) = P(C_0 \vee C_2) = \frac{2}{8}$ $\quad$ $P(Y = 1) = P(C_1 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_6) = \frac{4}{8}$

$P(Y = 2) = P(C_5 \vee C_7) = \frac{2}{8}$

Pertanto la previsione di X è data da

$$\mathbb{P}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

e la previsione di Y è data da

$$\mathbb{P}(Y) = 0 \cdot \frac{2}{8} + 1 \cdot \frac{4}{8} + 2 \cdot \frac{2}{8} = 1.$$

Il codominio del vettore (X, Y) è $C_{X,Y} = \{(0,0), (1,0), (1,1), (2,1), (2,2), (3,2)\}$, con

$$\begin{array}{ll} P(X=0, Y=0) = P(C_0) = \frac{1}{8} & P(X=1, Y=0) = P(C_2) = \frac{1}{8} \\ P(X=1, Y=1) = P(C_1 \vee C_3) = \frac{2}{8} & P(X=2, Y=1) = P(C_4 \vee C_6) = \frac{2}{8} \\ P(X=2, Y=2) = P(C_5) = \frac{1}{8} & P(X=3, Y=2) = P(C_7) = \frac{1}{8} \end{array}$$

Osserviamo che $XY \in \{0, 1, 2, 4, 6\}$, con

$$\begin{array}{ll} P(XY=0) = P(C_0 \vee C_2) = \frac{2}{8} & P(XY=1) = P(C_1 \vee C_3) = \frac{2}{8} \\ P(XY=2) = P(C_4 \vee C_6) = \frac{2}{8} & P(XY=4) = P(C_5) = \frac{1}{8} \\ P(XY=6) = P(C_7) = \frac{1}{8} & \end{array}$$

da cui segue

$$\mathbb{P}(XY) = 0 \cdot \frac{2}{8} + 1 \cdot \frac{2}{8} + 2 \cdot \frac{2}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(0 + 2 + 4 + 4 + 6) = 2.$$

Pertanto

$$Cov(X, Y) = \mathbb{P}(XY) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = 2 - \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Poichè $Cov(X, Y) \neq 0$ si ha che X e Y non sono indipendenti. Infatti, ad esempio, si può osservare che

$$P(X=0)P(Y=0) \neq P(X=0, Y=0).$$

Metodo alternativo: i due numeri aleatori X e Y si possono scrivere come

$$Y = |E_1| + |E_3|, \;\; X = |E_1| + |E_2| + |E_3| = Y + |E_2|.$$

Gli eventi E_i sono tra di loro indipendenti ed equiprobabili con probabilità $P(E_i) = \frac{1}{2}$, quindi X e Y hanno distribuzione binomiale, con

$$X \sim \mathbf{B}(3, \frac{1}{2}), \; Y \sim \mathbf{B}(2, \frac{1}{2}).$$

Quindi $\mathbb{P}(X) = \frac{3}{2}$. Inoltre

$$Cov(X, Y) = Cov(Y + |E_2|, Y) = Cov(Y, Y) + \underbrace{Cov(|E_2|, |E_1| + |E_3|)}_{=0} = Var(Y) = 2\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

4. Si ha $C_X = \{0, 1, 2, 3\}$ con rispettive probabilità $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}\}$.

$$P(E) = P(\tfrac{4}{5} \leq X \leq \tfrac{9}{4}) = P(X=1) + P(X=2) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{10} = \tfrac{11}{20}$$

$$P(H) = P(\tfrac{3}{2} \leq X \leq 3)) = P(X=2) + P(X=3) = \tfrac{3}{10} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{2}$$

$$P(E|H) = \tfrac{P(EH)}{P(H)} = \tfrac{P(X=2)}{P(H)} = \tfrac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \tfrac{3}{5}$$