CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA
Ing. Informatica, 11 gennaio 2003

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Un lotto contiene 2 pezzi difettosi e 28 buoni; da esso vengono estratti uno alla volta e senza restituzione 4 pezzi. Calcolare la probabilità α di estrarre 2 pezzi difettosi consecutivamente.

$$\alpha =$$

2. Si considerino tre eventi A, B, C tali che $A \wedge B^c = \emptyset$; stabilire se l'assegnazione di probabilità $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(C) = \frac{1}{2}$ è coerente. Determinare se esiste una distribuzione di probabilità sui costituenti, che renda A e B stocasticamente indipendenti.

L'assegnazione è coerente ? si no
A e B sono stocasticamente indipendenti ? si no

3. Una persona di 50 anni chiede un rimborso ad un ente pubblico. Il tempo T (espresso in anni) di disbrigo delle innumerevoli pratiche burocratiche ha distribuzione esponenziale di parametro $\mu = \frac{1}{15}$. La durata X della vita dell'uomo (espressa in anni) ha la seguente distribuzione:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-50)} & \text{per} \quad x > 50 \\ 0 & \text{per} \quad x \leq 50 \end{cases}$$

dove $\lambda = \frac{1}{20}$. Supponendo X e T indipendenti, calcolare la probabilità γ che tale persona (di 50 anni) muoia prima di riavere i propri soldi,

$$\gamma =$$

4. Sia data la seguente distribuzione congiunta di probabilità

Y \ X	-1	0	1
0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{16}$

Calcolare cov(X,Y) e la probabilità condizionata $p = P(\min(X,Y) \geq 0 | \max(X,Y) < 1)$. Stabilire se X e Y sono indipendenti.

$cov(X,Y) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

X e Y sono indipendenti ? si no

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA
Ing. Informatica, 11 gennaio 2003

Soluzioni

1. Indicando con E_i l'evento "l'i-mo pezzo è difettoso", si ha:

$$\alpha = P(E_1E_2 \vee E_2E_3 \vee E_3E_4) = P(E_1E_2) + P(E_1^cE_2E_3) + P(E_1^cE_2^cE_3E_4) =$$

$$= \cdots = 3P(E_1E_2) = 3 \cdot \tfrac{2}{30} \cdot \tfrac{1}{29} = \tfrac{1}{145}\,.$$

2. Dalla condizione $A \wedge B^c = \emptyset$ segue $A \subseteq B$ e quindi dev'essere $P(A) \leq P(B)$. Pertanto l'assegnazione $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, \ldots$ non è coerente.
Inoltre, gli eventi A e B (logicamente dipendenti) non possono essere stocasticamente indipendenti. Infatti, ad esempio, la condizione $P(A|B) = P(A)$, con $0 < P(A) < 1,\ 0 < P(B) < 1$, non può essere soddisfatta in quanto si avrebbe $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} = P(A)$, da cui seguirebbe $P(B) = 1$.

3. Si ha $f(x,t) = f_X(x)f_T(t)$ e quindi

$$\gamma = P(X - 50 < T) = \int_{50}^{+\infty} f_X(x)dx \int_{x-50}^{+\infty} f_T(t)dt = \int_{50}^{+\infty} \tfrac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}(x-50)} e^{-\frac{1}{15}(x-50)} dx =$$

$$= \tfrac{3}{7} \int_0^{+\infty} \tfrac{7}{60} e^{-\frac{7}{60}u} du = \tfrac{3}{7}\,.$$

4. Si ha $X \in \{-1,0,1\},\ XY \in \{-1,0,1\}$, con

$$P(X=-1) = P(X=1) = \tfrac{1}{4}\,,\ \ P(X=0) = \tfrac{1}{2}\,,$$

$$P(XY=-1) = P(XY=1) = \tfrac{1}{16}\,,\ \ P(XY=0) = \tfrac{14}{16}\,.$$

Allora le previsioni di X e XY sono nulle e quindi $cov(X,Y) = 0$.
Inoltre, indicando con $p(x,y)$ la probabilità dell'evento $(X = x, Y = y)$, si ha

$$p = P(\min(X,Y) \geq 0 | \max(X,Y) < 1) = \tfrac{P(\min(X,Y) \geq 0,\, \max(X,Y) < 1)}{P(\max(X,Y) < 1)} =$$

$$= \tfrac{p(0,0)}{p(-1,0)+p(0,0)} = \tfrac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{16}+\frac{3}{10}} = \tfrac{24}{39}\,.$$

Infine X e Y non sono indipendenti perchè, ad esempio, si ha:

$$p(0,0) = \frac{3}{10} \neq P(X=0)P(Y=0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{27}{40} = \frac{27}{80}\,.$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Ing. Gestionale, 11 gennaio 2003

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Un lotto contiene 2 pezzi difettosi e 28 buoni; da esso vengono estratti uno alla volta e senza restituzione 4 pezzi. Calcolare la probabilità α di estrarre 2 pezzi difettosi consecutivamente.

$$\alpha =$$

2. Si considerino tre eventi A, B, C tali che $A \wedge B^c = \emptyset$; stabilire se l'assegnazione di probabilità $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(C) = \frac{1}{2}$ è coerente. Determinare se esiste una distribuzione di probabilità sui costituenti, che renda A e B stocasticamente indipendenti.

L'assegnazione è coerente ? si no
A e B sono stocasticamente indipendenti ? si no

3. Una persona di 50 anni chiede un rimborso ad un ente pubblico. Il tempo T (espresso in anni) di disbrigo delle innumerevoli pratiche burocratiche ha distribuzione esponenziale di parametro $\mu = \frac{1}{15}$. La durata X della vita dell'uomo (espressa in anni) ha la seguente distribuzione:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-50)} & \text{per} \quad x > 50 \\ 0 & \text{per} \quad x \leq 50 \end{cases}$$

dove $\lambda = \frac{1}{20}$. Supponendo X e T indipendenti, calcolare la probabilità γ che tale persona (di 50 anni) muoia prima di riavere i propri soldi,

$$\gamma =$$

4. Sia data la seguente distribuzione congiunta di probabilità

Y \ X	-1	0	1
0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{16}$

Calcolare cov(X,Y) e la probabilità condizionata $p = P(\min(X,Y) \geq 0 | \max(X,Y) < 1)$. Stabilire se X e Y sono indipendenti.

$cov(X,Y) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

X e Y sono indipendenti ? si no

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Ing. Gestionale, 11 gennaio 2003

Soluzioni

1. Indicando con E_i l'evento "l'i-mo pezzo è difettoso", si ha:

$$\alpha = P(E_1E_2 \vee E_2E_3 \vee E_3E_4) = P(E_1E_2) + P(E_1^cE_2E_3) + P(E_1^cE_2^cE_3E_4) =$$

$$= \cdots = 3P(E_1E_2) = 3 \cdot \tfrac{2}{30} \cdot \tfrac{1}{29} = \tfrac{1}{145}\,.$$

2. Dalla condizione $A \wedge B^c = \emptyset$ segue $A \subseteq B$ e quindi dev'essere $P(A) \leq P(B)$. Pertanto l'assegnazione $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, \ldots$ non è coerente.
Inoltre, gli eventi A e B (logicamente dipendenti) non possono essere stocasticamente indipendenti. Infatti, ad esempio, la condizione $P(A|B) = P(A)$, con $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, non può essere soddisfatta in quanto si avrebbe $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} = P(A)$, da cui seguirebbe $P(B) = 1$.

3. Si ha $f(x,t) = f_X(x)f_T(t)$ e quindi

$$\gamma = P(X - 50 < T) = \int_{50}^{+\infty} f_X(x)dx \int_{x-50}^{+\infty} f_T(t)dt = \int_{50}^{+\infty} \tfrac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}(x-50)} e^{-\frac{1}{15}(x-50)} dx =$$

$$= \tfrac{3}{7} \int_0^{+\infty} \tfrac{7}{60} e^{-\frac{7}{60}u} du = \tfrac{3}{7}\,.$$

4. Si ha $X \in \{-1, 0, 1\}$, $XY \in \{-1, 0, 1\}$, con

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \tfrac{1}{4}\,,\;\; P(X = 0) = \tfrac{1}{2}\,,$$

$$P(XY = -1) = P(XY = 1) = \tfrac{1}{16}\,,\;\; P(XY = 0) = \tfrac{14}{16}\,.$$

Allora le previsioni di X e XY sono nulle e quindi $cov(X,Y) = 0$.
Inoltre, indicando con $p(x,y)$ la probabilità dell'evento $(X = x, Y = y)$, si ha

$$p = P(\min(X,Y) \geq 0 | \max(X,Y) < 1) = \tfrac{P(\min(X,Y) \geq 0,\, \max(X,Y) < 1)}{P(\max(X,Y) < 1)} =$$

$$= \tfrac{p(0,0)}{p(-1,0) + p(0,0)} = \tfrac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{16} + \frac{3}{10}} = \tfrac{24}{39}\,.$$

Infine X e Y non sono indipendenti perchè, ad esempio, si ha:

$$p(0,0) = \frac{3}{10} \neq P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{27}{40} = \frac{27}{80}\,.$$