CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 7 luglio 2003
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Gestionale (Canali $1-2-3$).

Nome e cognome**:**

1. Dati tre eventi E_1, E_2, E_3, con $E_3 \subset E_1E_2$, determinare l'insieme $\mathcal{C}$ dei costituenti e stabilire in ciascuno dei seguenti due casi se l'assegnazione di probabilità è coerente: (i) $P(E_1) = 0.8, P(E_1E_2) = 0.5, P(E_3) = 0.2$; (ii) $P(E_1) = 0.4, P(E_1E_2) = 0.6, P(E_3) = 0.2$.

   $\mathcal{C} =$ $\qquad\qquad$ $(0.8, 0.5, 0.2)$ *coerente*? $\qquad\qquad$ $(0.4, 0.6, 0.2)$ *coerente*?

2. Dati due lotti L_1 ed L_2, ciascuno contenente 3 componenti buoni e 1 difettoso, da entrambi si estraggono in blocco 3 pezzi, ottenendo X pezzi difettosi fra quelli estratti da L_1 ed Y pezzi difettosi fra quelli estratti da L_2. Considerato il numero aleatorio discreto $Z = X+Y$, calcolare: (i) la probabilità p_z di ogni possibile valore z di Z; (ii) la funzione caratteristica di Z.

   $z :$ $\qquad$, $\qquad$,

   $p_z :$ $\qquad$, $\qquad$, $\qquad\qquad$ $\phi_Z(t) =$

3. Da una stanza S_1, in cui ci sono r_1 uomini e 5 donne, una persona a caso si sposta in una stanza S_2, in cui inizialmente ci sono r_2 uomini e 5 donne. Successivamente da S_2 esce a caso una persona. Considerati gli eventi $H =$ *"la persona entrata in S_2 è un uomo"*, $E =$ *"la persona uscita da S_2 è una donna"*, determinare i valori di r_1 ed r_2 tali che $P(H|E) > \frac{1}{2}$.

   $r_1 \in$ $\qquad\qquad$ $r_2 \in$

4. Dato un sistema S, costituito da due dispositivi D_1 e D_2 disposti in serie, indichiamo con T_1, T_2 i rispettivi tempi aleatori di durata. Siano, per ogni $t \geq 0$, rispettivamente $h_1(t) = 1$ e $h_2(t) = 2$ le funzioni di rischio di T_1 e T_2. Indicando con T il tempo aleatorio di durata del sistema S e supponendo T_1, T_2 stocasticamente indipendenti, calcolare: (i) la funzione di ripartizione di T; (ii) per ogni $t \geq 0$, la funzione di rischio $h(t)$ di T; (iii) la probabilità p dell'evento condizionato $(T > 6 \mid T > 4)$.

   $F(t) = \begin{cases} & , \\ & , \end{cases}$ $\qquad\qquad$ $h(t) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

Soluzioni.

1. Poichè $E_3 \subset E_1E_2$, i tre eventi $E_1E_2^cE_3$, $E_1^cE_2E_3$, $E_1^cE_2^cE_3$ sono impossibili e quindi l'insieme dei costituenti è:
$$\mathcal{C} = \{E_1E_2E_3,\ E_1E_2E_3^c,\ E_1E_2^cE_3^c,\ E_1^cE_2E_3^c,\ E_1^cE_2^cE_3^c\}\,.$$
Inoltre, osservando che
$$E_1E_2E_3 = E_3\,, \quad E_1E_2 = E_1E_2E_3 \vee E_1E_2E_3^c\,, \quad E_1 = E_1E_2E_3 \vee E_1E_2E_3^c \vee E_1E_2^cE_3^c\,,$$
e scegliendo
$$P(E_1E_2E_3) = 0.2\,, \quad P(E_1E_2E_3^c) = P(E_1E_2^cE_3^c) = 0.3\,,$$
risulta $P(E_1) = 0.8, P(E_1E_2) = 0.5, P(E_3) = 0.2$ e quindi l'assegnazione $(0.8, 0.5, 0.2)$ è coerente.
Infine, poichè la relazione $E_1E_2 \subset E_1$ implica $P(E_1E_2) \leq P(E_1)$, non è possibile valutare $P(E_1) = 0.4, P(E_1E_2) = 0.6$ e quindi l'assegnazione $(0.4, 0.6, 0.2)$ non è coerente.

2. Osserviamo che X e Y sono indipendenti. Pertanto, definendo
$$p'_x = P(X = x),\ \ p''_y = P(Y = y),\ \ P(X = x, Y = y) = p_{xy}\,,$$
si ha $p_{xy} = p'_x \cdot p''_y$. Inoltre $X \in \{0,1\}$, $Y \in \{0,1\}$, con
$$p'_0 = p''_0 = \frac{\binom{3}{3}\binom{1}{0}}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{4}\,, \qquad p'_1 = p''_1 = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{\binom{4}{3}} = \frac{3}{4}\,.$$
Pertanto, si ha $Z \in \{0,1,2\}$, con
$$p_0 = P(Z = 0) = p'_0p''_0 = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{16}\,,$$
$$p_1 = P(Z = 1) = p'_0p''_1 + p'_1p''_0 = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{8}\,,$$
$$p_2 = P(Z = 2) = p'_1p''_1 = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{9}{16}\,.$$
Inoltre,
$$\phi_Z(t) = \boldsymbol{P}(e^{itZ}) = \cdots = \frac{1 + 6e^{it} + 9e^{2it}}{16}\,.$$

3. Si ha
$$P(H) = \frac{r_1}{r_1+5}\,,\ \ P(H^c) = \frac{5}{r_1+5}\,,\ \ P(E|H) = \frac{5}{r_2+6}\,,\ \ P(E|H^c) = \frac{6}{r_2+6}\,.$$
Allora
$$P(H|E) = \frac{P(H)P(E|H)}{P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c)} = \frac{\frac{r_1}{r_1+5} \cdot \frac{5}{r_2+6}}{\frac{r_1}{r_1+5} \cdot \frac{5}{r_2+6} + \frac{5}{r_1+5} \cdot \frac{6}{r_2+6}} = \frac{r_1}{r_1+6}\,,$$
da cui segue
$$P(H|E) > \frac{1}{2}\,, \quad \forall\, r_1 \in \{7,8,9,\dots\}\,,\ \ \forall\, r_2 \in \{0,1,2,\dots\}\,.$$

4. Poichè $h_1(t)$ e $h_2(t)$ sono costanti, segue che T_1 e T_2 hanno distribuzione esponenziale di parametri rispettivamente $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Ovvero
$$f_1(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad t < 0 \end{cases} \quad ; \quad f_2(t) = \begin{cases} 2e^{-2t} & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}\,.$$
Calcoliamo la funzione di ripartizione di T. Per $t \leq 0$ si ha $F(t) = 0$, mentre per $t > 0$, si ha
$$\begin{aligned} F(t) &= P(T \leq t) = P[\min(T_1, T_2) \leq t] = P[(T_1 \leq t) \vee (T_2 \leq t)] = \\ &= 1 - P(T_1 > t, T_2 > t) = 1 - P(T_1 > t)P(T_2 > t) = 1 - e^{-t}e^{-2t} = 1 - e^{-3t}\,. \end{aligned}$$
Pertanto T ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda_1 + \lambda_2 = 3$ e quindi, per ogni $t \geq 0$, si ha $h(t) = 3$.
Inoltre, si ha
$$P(T > 6 \mid T > 4) = \frac{P(T > 6)}{P(T > 4)} = \cdots = P(T > 2) = e^{-6}\,.$$