CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 21 luglio 2003
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Gestionale (Canali $1-2-3$**).**

Nome e cognome**:**

1. Un lotto è formato da 100 componenti, di cui r costruiti con una apparecchiatura A e i rimanenti con una apparecchiatura B. Ciascuno dei componenti prodotti da A (risp. da B) è non difettoso con probabilità $\frac{4}{5}$ (risp. $\frac{3}{4}$). Dal lotto si prende a caso un pezzo che viene esaminato. Considerati gli eventi $H =$ *"il componente preso a caso è stato prodotto da A"*, $E =$ *"il componente preso a caso è difettoso"*, determinare i valori di r tali che $P(H|E) > \frac{1}{2}$.

   $r \in$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, sia X il numero aleatorio di pezzi non difettosi fra gli r componenti prodotti dall'apparecchiatura A. Sia inoltre E_i l'evento "*l'i-mo pezzo prodotto da A è non difettoso*", $i = 1, 2, \ldots, r$. Supposto che $E_1, \ldots, E_r$ siano stocasticamente indipendenti, calcolare: (i) la probabilità p_h di ogni possibile valore h di X; (ii) la funzione caratteristica di X.

   $p_h =$, $h \in$; $\phi_X(t) =$

3. Dato un parametro aleatorio Θ, con distribuzione iniziale normale di parametri $m_0 = 0, \sigma_0 = 1$, le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_{16})$ hanno, condizionatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, distribuzione normale di parametri θ e $\sigma = 2$. Supposto di aver osservato un campione $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{16})$, con $x_1 + \cdots + x_{16} = 0$, calcolare la previsione m_{16} e lo scarto quadratico medio σ_{16} della distribuzione finale (cioè, condizionata ad $\mathbf{x}$) di Θ. Inoltre, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(|\Theta| > \frac{1}{\sqrt{5}} \mid \mathbf{x})$.

   $m_{16} =$ $\sigma_{16} =$ $\alpha =$

4. Un sistema S è costituito da due dispositivi D_1 e D_2 in parallelo funzionanti simultaneamente. Siano T_1, T_2, T i tempi aleatori di durata di D_1, D_2 ed S, rispettivamente. Supposto che T_1 e T_2 siano stocasticamente indipendenti ed ugualmente distribuiti, con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 3$, calcolare: (i) la probabilità p_t che il sistema non si guasti in un fissato intervallo $[0, t]$; (ii) la densità di probabilità $f(t)$ di T, per ogni $t \geq 0$; (iii) la funzione di rischio $h(t)$ di T, per ogni $t \geq 0$.

   $p_t =$ $f(t) =$ $h(t) =$

Soluzioni.

1. Si ha
$$P(H) = \frac{r}{100}\,, \quad P(H^c) = \frac{100-r}{100}\,, \quad P(E|H) = \frac{1}{5}\,, \quad P(E|H^c) = \frac{1}{4}\,.$$
Allora
$$P(H|E) = \frac{P(H)P(E|H)}{P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c)} = \frac{\frac{r}{100}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{r}{100}\cdot\frac{1}{5} + \frac{100-r}{100}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{4r}{500-r}\,,$$
da cui segue
$$P(H|E) > \frac{1}{2}\,, \quad \forall\, r \in \{56, 57, \ldots, 100\}\,.$$

2. Si ha $X \sim B(r, \frac{4}{5})$, ovvero $X \in \{0, 1, 2, \ldots, r\}$, con
$$P(X = h) \;=\; \left(\begin{array}{c} r \\ h \end{array}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^h\left(\frac{1}{5}\right)^{r-h}\,, \quad h = 0, 1, 2, \ldots, r\,.$$
Inoltre
$$\phi_X(t) = \sum_{h=0}^{r}\left(\begin{array}{c} r \\ h \end{array}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^h\left(\frac{1}{5}\right)^{r-h} e^{ith} = \cdots = (\frac{4}{5}e^{it} + \frac{1}{5})^r\,.$$

3. Si ha $\Theta \,|\, \mathbf{x} \sim N_{m_{16},\sigma_{16}}$, con
$$m_{16} = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0 + \frac{n}{\sigma^2}\cdot\bar{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}\,, \quad \frac{1}{\sigma_{16}^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}\,,$$
e quindi, tenendo conto che $m_0 = \bar{x} = 0, \sigma_0 = 1, \sigma = 2, n = 16$, segue
$$m_{16} = 0\,, \qquad \sigma_{16} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$
Inoltre, $\frac{\Theta - m_n}{\sigma_n} \;\mid\; \mathbf{x} \;=\; \frac{\Theta}{1/\sqrt{5}} \;\mid\; \mathbf{x} \sim N_{0,1}$. Pertanto
$$\alpha = P(|\Theta| > \tfrac{1}{\sqrt{5}} \;\mid\; \mathbf{x}) = P(|\tfrac{\Theta}{1/\sqrt{5}}| > 1 \;\mid\; \mathbf{x}) = P(\tfrac{\Theta}{1/\sqrt{5}} < -1 \;\mid\; \mathbf{x}) + P(\tfrac{\Theta}{1/\sqrt{5}} > 1 \;\mid\; \mathbf{x}) =$$
$$= \Phi(-1) + 1 - \Phi(1) = 2[1 - \Phi(1)] \simeq 0.3174\,.$$

4. Si ha
$$p_t = P(T \notin [0,t]) = P(T > t) = P[(T_1 > t) \vee (T_2 > t)] = P(T_1 > t) + P(T_2 > t) - P(T_1 > t, T_2 > t)\,.$$
Allora, osservando che
$$P(T_1 > t) = P(T_2 > t) = \textstyle\int_t^{+\infty} 3e^{-3x}dx = e^{-3t}\,,$$
$$P(T_1 > t, T_2 > t) = P(T_1 > t)\cdot P(T_2 > t) = e^{-6t}\,,$$
segue
$$p_t = e^{-3t} + e^{-3t} - e^{-6t} = e^{-3t}(2 - e^{-3t})\,.$$
Inoltre, per ogni $t \geq 0$, si ha
$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - p_t = 1 - 2e^{-3t} + e^{-6t} = (1 - e^{-3t})^2\,,$$
con $F(t) = 0$, $\forall\, t < 0$. Quindi, per ogni $t \geq 0$, si ha
$$f(t) = F'(t) = 6e^{-3t}(1 - e^{-3t})\,,$$
con $f(t) = 0$, $\forall\, t < 0$. Infine, osservando che $S(t) = P(T > t) = p_t$, segue per ogni $t \geq 0$
$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{6e^{-3t}(1 - e^{-3t})}{e^{-3t}(2 - e^{-3t})} = \frac{6(1 - e^{-3t})}{2 - e^{-3t}}\,.$$