Nome e cognome: *Matr.:*

CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 25 settembre 2004

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. In un controllo di qualità, si estrae (senza restituzione) un campione di $n = 6$ pezzi da un lotto che ne contiene $N = 30$ fra i quali x difettosi. Il lotto viene accettato (sia H questo evento) se nel campione non c'e' alcun pezzo difettoso: calcolare la probabilità di H nell'ipotesi $x = 2$.

$$P(H) =$$

2. Dati due eventi E, H di probabilità positiva e minore di 1, con $P(E \wedge H) = \frac{2}{5}$, stabilire se la valutazione $P(E|H) = \frac{1}{5}$ è coerente. Se gli eventi E, H sono stocasticamente indipendenti, mantenendo la precedente valutazione di $P(E \wedge H)$ ed assegnando alla probabilità di E il valore $P(E) = \frac{8}{15}$, determinare la corrispondente assegnazione coerente di $P(H)$.

$P(E|H) = \frac{1}{5}$ coerente? SI NO

$$P(H) =$$

3. Un vettore aleatorio (X, Y) ha distribuzione uniforme su $\mathcal{C} = [0, 2] \times [0, 2]$. Calcolare le funzioni di ripartizione F_X, F_Y e la probabilità dell'evento condizionato $A|B$, con $A = (X - Y < 0)$, $B = (X < 1)$.

$F_X(x) = \begin{cases} \\ \end{cases}$ $F_Y(y) = \begin{cases} \\ \end{cases}$ $P(A|B) =$

4. Sia X un numero aleatorio con funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & 0 \leq x < 2 \\ 2/3, & 2 \leq x < 3 \\ 5/6, & 3 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

Determinare il suo codominio $\mathcal{C}_X$, la probabilità degli eventi $\{X = 2\}$, $\{X = 4\}$, la funzione caratteristica $\varphi_X(t)$.

$\mathcal{C}_X =$, $P(X = 2) =$, $P(X = 4) =$

$$\varphi_X(t) =$$

Soluzioni

1. Essendo le estrazioni senza restituzione si ha, nell'ipotesi $x = 2$,

$$P(H) = \frac{\binom{28}{6}\binom{2}{0}}{\binom{30}{6}} = \frac{24}{30}\frac{23}{29} = \frac{276}{435} \simeq 0,63.$$

2. Dalla relazione $P(E \wedge H) = P(E|H)P(H)$ si ottiene $\frac{2}{5} = \frac{1}{5}P(H)$, ovvero $P(H) = 2$, assurdo. Pertanto la valutazione $P(E|H) = \frac{1}{5}$ non è coerente. Inoltre, nell'ipotesi di indipendenza stocastica degli eventi E, H con l'assegnazione $P(E) = \frac{8}{15}$, si ottiene

$$P(H) = \frac{P(E \wedge H)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{4}.$$

3. L'area di $\mathcal{C}$ è pari a 4; pertanto $f(x,y) = \frac{1}{4}$, per $(x,y) \in \mathcal{C}$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Allora

$$F_X(x) = \int_0^x du \int_0^2 \frac{1}{4}\, dy = \frac{x}{2}\,, \quad 0 \leq x \leq 2\,,$$

con $F_X(x) = 0$, per $x < 0$, ed $F_X(x) = 1$, per $x > 2$. Con un ragionamento analogo si trova che $F_Y = F_X$, ovvero $F_Y(y) = \frac{y}{2}\,, \quad 0 \leq y \leq 2\,,$ con $F_Y(y) = 0$, per $y < 0$, ed $F_Y(y) = 1$, per $y > 2$.
Infine

$$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} = \frac{\int_0^1 dx \int_x^2 \frac{1}{4}\, dy}{\int_0^1 dx \int_0^2 \frac{1}{4}\, dy} = \cdots = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\,.$$

4. Si ha $\mathcal{C}_X = \{0, 2, 3, 5\}$, con

$$P(X=0) = \frac{1}{2}\,,\ P(X=2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\,,\ P(X=3) = \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}\,,\ P(X=5) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}\,.$$

Inoltre, considerati due valori a, b, con $3 \leq a < 4 \leq b < 5$, dalla relazione

$$(X = 4) \subset (a < X \leq b)\,,$$

segue

$$P(X = 4) \leq P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0\,;$$

pertanto: $P(X = 4) = 0$. Infine

$$\varphi_X(t) = \sum_h p_h e^{itx_h} = \cdots = \frac{3 + e^{2it} + e^{3it} + e^{5it}}{6}\,.$$