SETTIMANA 27 settembre – 1 ottobre 2021

---

**1.** Determinare $\min\left\{\frac{1}{2}, \pi^{-\sqrt{3}}\right\}$.

---

**2.** Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni reali di una variabile reale:

$$\text{(a) } f(x) = \frac{\log_\pi(x+1)}{\sqrt{2-x^2}} \log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{x+1}\right); \quad \text{(b) } f(x) = \sqrt{5^{2x}-3}; \quad \text{(c) } f(x) = \sqrt[6]{\frac{x-3}{x+3}} \log_4|x+5|;$$

$$\text{(d) } f(x) = \sqrt{\log_7\left(x^3+x-1\right)}; \qquad \text{(e) } f(x) = \frac{(x^2+3x+2)^{\sqrt{11}}}{\log_{1/2}(x^2+x)}.$$

---

**3.** Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri l'insieme $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x-\alpha}\big(2\sqrt{x-\alpha}+1\big) < 2x-\alpha\}$. Determinare, se esiste, il valore del parametro $\alpha$ tale che $E_\alpha = [3, 12)$.

---

**4.** Provare che $|x| = \max\{x, -x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

---

**5.** Se $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente, posto $-A := \{x \in \mathbb{R}, -x \in A\}$, provare che

(i) $-A$ è limitato inferiormente e $\inf(-A) = -\sup A$;

(ii) se esiste $\max A$, allora $\min(-A) = -\max A$.

---

**6.** Provare che

(a) $\big\{x \in \mathbb{R} : 3^{2x} - 5\ 3^x + 6 \geq 0\big\} = (-\infty, \log_3 2] \cup [1, +\infty)$;

(b) $\big\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{\log_3(x+1) - 1} \leq 2\big\} = [2, 242]$;

(c) $\big\{x \in \mathbb{R} : \log_{1/3}(x^2+x) \leq 1\big\} = \Big(-\infty, -\frac{\sqrt{21}+3}{6}\Big] \cup \Big[\frac{\sqrt{21}-3}{6}, +\infty\Big)$;

(d) $\big\{x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{8\pi}{5}}(x - \sqrt{1-x^2}) < 0\big\} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\Big)$;

(e) $\big\{x \in \mathbb{R} : \log_3\big(\log_2(3x-4)\big) \leq 1\big\} = \Big(\frac{5}{3}, 4\Big]$;

(f) $\big\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < \sqrt{x|x|+1} < 2\big\} = \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\Big)$;

(g) $\Big\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{\frac{10+x}{2x-1}} \leq x\Big\} = [2, +\infty)$.

---

**7.** Tracciare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni, precisando dominio, immagine, monotonia e eventuali simmetrie:

(a) $f(x) = |x|^\pi$;

(b) $f(x) = (|x|-2)^{-3\pi}$;

(c) $f(x) = (x+5)^{1/\sqrt{\pi}}$;

(d) $f(x) = (x-6)^{-10}$;

(e) $f(x) = (x+7)^{-21}$;

(f) $f(x) = \frac{x+|x|}{8}$;

(g) $f(x) = |x+4|$;

(h) $f(x) = \min\{-x, x^2\}$;

(i) $f(x) = \max\{x, x^2\}$;

(l) $f(x) = \sqrt{|x|-x}$;

(m) $f(x) = |x+3|^{\sqrt{5}}$.

---