
1. Provare il seguente sviluppo di Maclaurin:

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

2. Data la funzione

$$f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2},$$

(a) tracciarne un grafico qualitativo.

(b) Dimostrare la disuguaglianza

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \forall x > 0.$$

3. Tracciare un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \frac{e^{|x-1|} - 1}{1 + |x-1|}.$$

(Non è richiesto lo studio della convessità.)

4. Tracciare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni

(a) $f(x) = \frac{\log(x + \pi) + 1}{x + \pi};$

(b) $f(x) = \frac{\log|x + \pi| + 1}{|x + \pi|};$

(c) $f(x) = \left| \frac{\log(x + \pi) + 1}{x + \pi} \right|.$

5. Determinare l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = 2x - \sinh(2x) - \log(1 + 3x^2) + 3x^2 \quad x \rightarrow 0;$

(b) $f(x) = 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \operatorname{sen} \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{\sqrt[3]{x}} \quad x \rightarrow +\infty;$

(c) $f(x) = 2 \cosh \sqrt{x} - e^x - 1 \quad x \rightarrow 0^+.$

6. Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che si abbia

$$3 \log \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) + 2x^\alpha = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \quad x \rightarrow 0.$$
