SETTIMANA 15–19 novembre 2021

---

1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) & \text{se } -\dfrac{1}{2} \le x < 3, \\ 1 - |x-4| & \text{se } 3 \le x \le 5, \end{cases}$$

(a) stabilire se si può applicare il teorema di Weierstrass;

(b) determinare gli eventuali punti di minimo e massimo relativi e assoluti;

(c) tracciare un grafico qualitativo.

---

2. Determinare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il numero delle soluzioni reali dell'equazione

$$x^6 - \alpha x^4 + 1 = 0\,.$$

---

3. Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\sqrt{3}x^4} - 1}{x^\alpha}$$

esiste finito e diverso da 0.

---

4. Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che si abbia

$$e^{1-\sqrt{x}} - e + \alpha\sqrt{x} = -\frac{e}{6}\sqrt{x} + o\big(\sqrt{x}\big) \qquad x \to 0^+\,.$$

---

5. Data la funzione

$$f(x) = \operatorname{sen}^3(\sqrt{x}) \quad x \ge 0,$$

provare che $f \in C^1([0,+\infty)) \cap C^2((0,+\infty))$.

---

6. Stabilire se si può applicare il teorema di Rolle alla funzione $f(x) = \sqrt[3]{(2+x)^2}$ nell'intervallo $[-4, 0]$.

---

7. Provare, per induzione su $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$, la seguente uguaglianza:

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\big(x^n\big) = n!\; x.$$

---

8. Dimostrare che se f è una funzione derivabile e pari (risp. dispari), allora la funzione derivata f' è dispari (risp. pari).
