

1. Dimostrare per induzione le seguenti proprietà:

(a)  $(1 + h)^n > 1 + nh$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \forall h \in \mathbb{R}, h > -1, h \neq 0$ ,  
(disuguaglianza di Bernoulli in senso stretto);

(b)  $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ,  
(approssimazioni del fattoriale per difetto e per eccesso);

(c)  $\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  
(somma di una progressione geometrica).

---

2. Determinare, se esistono, i seguenti limiti, utilizzando il simbolo di Landau  $o(1)$ :

(a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2} \operatorname{sen}(e^{-\sqrt{2}x^2})$ ;

(b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} 2^{-2n}$ . (Si consiglia di utilizzare la formula di Stirling.)

---

3. Stabilire il comportamento delle seguenti serie numeriche:

(a)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^k}$ ;

(b)  $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{k}{2}}$ ;

(c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - 2^{-k}\right)$ ;

(d)  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\pi^{\frac{k}{3}} + 7^{-k}\right)$ ;

(e)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{100}{\sqrt{k}}$ ;

(f)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e + 2\sqrt{k}}{k}$ .

---

4. Calcolare la somma delle seguenti serie numeriche:

(a)  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(- (12)^{-k}\right)$ ;

$$(b) \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{3}{8^k} + 5^{-k} \right);$$

$$(c) \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{3}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{6^k} \right);$$

$$(d) \sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k 3^{-k}.$$

---

5. Provare che se  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$ , allora per ogni  $\lambda < 0$  si ha  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k = +\infty$ .

---

Dal libro di esercizi consigliato:

P. Loreti, D. Sforza – Esercizi di Analisi Matematica – Casa Editrice Università La Sapienza

### Esercizi su serie geometrica, serie armonica e criterio del confronto

|         |             |
|---------|-------------|
| pag. 17 | Esercizio 4 |
| pag. 20 | Esercizio 4 |
| pag. 23 | Esercizio 3 |
| pag. 25 | Esercizio 3 |
| pag. 28 | Esercizio 3 |
| pag. 48 | Esercizio 4 |
| pag. 73 | Esercizio 2 |
| pag. 88 | Esercizio 5 |
| pag.125 | Esercizio 6 |
| pag.157 | Esercizio 5 |
| pag.163 | Esercizio 6 |
| pag.163 | Esercizio 7 |
| pag.168 | Esercizio 4 |
| pag.174 | Esercizio 4 |
| pag.178 | Esercizio 4 |
| pag.200 | Esercizio 5 |
| pag.204 | Esercizio 5 |
| pag.208 | Esercizio 5 |
| pag.213 | Esercizio 4 |