1 - Stabilire per quali valori del parametro $x > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\log \sqrt[5]{x}\Big)^n$ è convergente, e in tal caso determinare la somma della serie.

....

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione $\log \sqrt[5]{x}$. Pertanto la serie è convergente per $x > 0$ tale che

$$\Big|\log \sqrt[5]{x}\Big| < 1.$$

Poiché $\log \sqrt[5]{x} = \dfrac{1}{5}\log x$, si ha $|\log x| < 5$, e quindi $-5 < \log x < 5$, cioè $e^{-5} < x < e^5$.
La somma della serie è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\log \sqrt[5]{x}\Big)^n = \frac{1}{1-\log \sqrt[5]{x}} - 1 = \frac{\log \sqrt[5]{x}}{1-\log \sqrt[5]{x}}, \qquad e^{-5} < x < e^5\,.$$

---

2 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\alpha x - \mathrm{sen}(4x) + \beta x^3 + \log(1-x^3) = -\dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \to 0\,.$

....

Per gli sviluppi di Maclaurin di $\mathrm{sen}\, x$ e $\log(1+x)$ si ha

$$\mathrm{sen}(4x) = 4x - \frac{32}{3}x^3 + o(x^3) \qquad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

$$\log(1-x^3) = -x^3 + o(x^3) \qquad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

e quindi

$$\alpha x - \mathrm{sen}(4x) + \beta x^3 + \log(1-x^3) = (\alpha-4)x + \Big(\frac{32}{3} + \beta - 1\Big)x^3 + o(x^3) \qquad \text{per} \quad x \to 0\,.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $\alpha - 4 = 0$ e $\dfrac{32}{3} + \beta - 1 = -\dfrac{1}{3}$, cioè $\alpha = 4$ e $\beta = -10$.

---

3 - Determinare la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ tale che $F(0) = 3$.

....

L'integrale indefinito di $f(x)$ è dato da

$$\int \frac{x^2}{x-1}\,dx = \int \frac{x^2-1+1}{x-1}\,dx = \int \Big[x + 1 + \frac{1}{x-1}\Big]\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \log|x-1| + C \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

Imponendo la condizione $F(0) = 3$ si ha $C = 3$, e quindi $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + \log|x-1| + 3$.

---

4 - (i) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 3y + 4e^x \\ y(0) = 3 \end{cases}$.
(ii) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è verificata la condizione $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$.

....

(i) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = Ce^{3x} \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si può applicare il metodo *ad hoc* e cercare la soluzione nella forma

$$\widetilde{y}(x) = ae^x,$$

con $a \in \mathbb{R}$ da determinare. Imponendo che $\widetilde{y}(x) = ae^x$ sia soluzione di $y' = 3y + 4e^x$ si ottiene $a = -2$, e di conseguenza l'integrale generale è dato da

$$y(x) = Ce^{3x} - 2e^x \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 3$ si ha $C = 5$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = 5e^{3x} - 2e^x.$$

(ii) In forza di

$$e^{\alpha x} y(x) = e^{(\alpha+3)x}(5 - 2e^{-2x})$$

si ha $\lim_{x\to+\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$ se $\alpha + 3 < 0$, cioè $\alpha < -3$.

---

5 - Data la funzione $f(x) = (x+1)e^{|x-2|}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali punti di non derivabilità, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

. . . .

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

La derivata prima di f è data da

$$f'(x) = \begin{cases} e^{2-x}(1-x-1) = -e^{2-x}x & x < 2\,, \\ e^{x-2}(1+x+1) = e^{x-2}(x+2) & x > 2\,. \end{cases}$$

La funzione f non è derivabile in 2, in quanto $f'_-(2) = -2 \neq 4 = f'_+(2)$.
Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(2, +\infty)$, mentre è decrescente in $(0, 2)$. Pertanto $f(0) = e^2$ è un massimo relativo e $f(2) = 3$ un minimo relativo per f.
La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \begin{cases} -e^{2-x}(1-x) = e^{2-x}(x-1) & x < 2\,, \\ e^{x-2}(1+x+2) = e^{x-2}(x+3) & x > 2\,. \end{cases}$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è concava in $(-\infty, 1)$, mentre è convessa in $(1, 2)$ e in $(2, +\infty)$; di conseguenza 1 è punto di flesso.
Un grafico approssimativo di f è il seguente.