1 - Stabilire il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^2)}{\sqrt[4]{n}}$.

. . . .

La serie assegnata è a termini positivi. In forza di

$$\frac{\log(1+n^2)}{\sqrt[4]{n}} \geq \frac{\log 2}{\sqrt[4]{n}} \qquad \forall n \geq 1,$$

si può applicare il criterio del confronto: poiché $\log 2 > 0$ e la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ diverge positivamente in quanto $\dfrac{1}{4} < 1$, anche la serie assegnata diverge positivamente.

---

2 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\quad 4\cos x - 4 + \alpha x^2 + \beta x^4 = \dfrac{7}{6}x^4 + o(x^4) \quad$ per $\quad x \to 0$.

. . . .

Per lo sviluppo di Maclaurin di $\cos x$ si ha

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \qquad\qquad x \to 0\,,$$

e quindi

$$4\cos x - 4 + \alpha x^2 + \beta x^4 = (\alpha - 2)x^2 + \Big(\beta + \frac{1}{6}\Big)x^4 + o(x^4) \qquad x \to 0\,.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata per $\alpha - 2 = 0$ e $\beta + \dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{6}$, e quindi $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

---

3 - Calcolare la derivata della funzione $\quad F(x) = \displaystyle\int_1^x e^{\sqrt[5]{\operatorname{sen} t}}\, dt \quad$ nel punto $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

. . . .

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = e^{\sqrt[5]{\operatorname{sen} x}}\,,$$

e di conseguenza $F'\big(\frac{\pi}{2}\big) = e$.

---

4 - Data la funzione $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(x-1)} \quad$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione. (Non è richiesto lo studio della convessità).

. . . .

La funzione è definita per $x > 0$, $x \neq 1$. I limiti agli estremi del dominio sono:

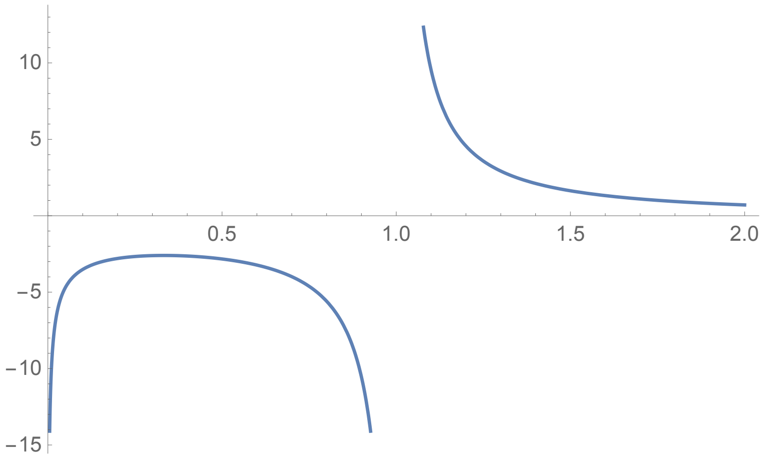
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0\,,$$

e quindi le rette di equazione $x = 0$ e $x = 1$ sono asintoti verticali, mentre la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale per f.
La derivata prima di f è data da

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) + \sqrt{x}}{x\big(x-1\big)^2} = -\frac{x - 1 + 2x}{2x^{3/2}\big(x-1\big)^2} = -\frac{3x-1}{2x^{3/2}\big(x-1\big)^2} \qquad x > 0,\ x \neq 1\,.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $\Big(0, \dfrac{1}{3}\Big)$, mentre è decrescente in $\Big(\dfrac{1}{3}, 1\Big)$ e in $(1, +\infty)$; di conseguenza $f\Big(\dfrac{1}{3}\Big) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ è un massimo locale per f.

Un grafico approssimativo di f è il seguente.



---

5 - (i) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $\quad y' = y \log x - 3x^x \quad x > 0.$

(ii) Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y \log x - 3x^x & x > 0 \\ y(1) = -3 \end{cases}.$

. . . .

(i) Per determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata si deve calcolare l'integrale (per parti)

$$\int \log x \; dx = x \log x - x,$$

e quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è dato da

$$y(x) = Ce^{x \log x - x} = Cx^x e^{-x} \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si deve calcolare l'integrale

$$\int e^{-x \log x + x} x^x \; dx = \int e^x \; dx = e^x \, ;$$

di conseguenza l'integrale generale è dato da

$$y(x) = Cx^x e^{-x} - 3x^x \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(ii) Imponendo la condizione iniziale $y(1) = -3$ si ha $C = 0$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = -3x^x, \qquad x > 0.$$