Equazioni alle derivate parziali

Esercizi di esame e di controllo

Daniele Andreucci
Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Università di Roma La Sapienza
via A.Scarpa 16, 00161 Roma
andreucci@dmmm.uniroma1.it

launch˙dagroup 20100925 22.53

1. (ex): esercizi d'esame; (hw): esercizi di controllo.

2. La numerazione delle formule è relativa al singolo esercizio.

210. Edp del I ordine: metodo delle caratteristiche

1. [2003 (hw)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} &u_x + u_y = 1\,, \\ &u(s^2, s) = \cos s\,, \qquad -\infty < s < \alpha\,, \end{aligned}$$

trovando il valore massimo di α che permette l'esistenza di una soluzione con derivate continue.

Soluzione

A) Applicando il teorema di esistenza e unicità, controlliamo la condizione

$$0 \neq a\psi_2' - b\psi_1' = 1 - 2s\,,$$

che impone $s \neq 1/2$. Perciò, se scegliamo $\alpha = 1/2$ sopra, il teorema garantisce l'esistenza di una soluzione regolare; in linea di principio, questa potrebbe non essere la scelta ottimale. Per ora sappiamo dunque che $\alpha \geq 1/2$.

B) Troviamo le caratteristiche al suolo risolvendo:

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= 1\,, \qquad \varphi_1(0) = s^2\,, \\ \varphi_2' &= 1\,, \qquad \varphi_2(0) = s\,, \end{aligned}$$

che implica

$$\big(\varphi_1(\tau; s), \varphi_2(\tau; s)\big) = \big(\tau + s^2, \tau + s\big)\,.$$

Le caratteristiche al suolo sono quindi rette parallele a $y = x$: alcune intersecano due volte la curva che porta il dato $x = y^2$.

C) Risolviamo poi il problema di Cauchy per la e.d.o. sulle caratteristiche al suolo, ossia

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} = 1\,, \qquad U(0; s) = \cos s\,.$$

Pertanto

$$U(\tau; s) = \tau + \cos s\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$$

D) Infine, per trovare la soluzione cercata $u(x, y)$, torniamo alle variabili (x, y). Risolviamo in (τ, s) (per i punti $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ per cui questo è possibile,

$$\begin{aligned} \tau + s^2 &= x\,, \\ \tau + s &= y\,. \end{aligned}$$

Per sostituzione di τ si ottiene

$$s^2 - s + y - x = 0\,,$$

che ha le possibili soluzioni

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(y - x)}}{2}\,,$$

sotto la condizione

$$y \leq x + \frac{1}{4}\,.$$

Questo semipiano è l'insieme coperto dalle caratteristiche al suolo che incontrano la parabola che porta il dato.
Sappiamo che la soluzione sarà definita in un aperto che conterrà il ramo inferiore (ove $y < 0$) della parabola: quindi, almeno per tale porzione di curva, dovremo scegliere la soluzione negativa tra le due possibili, per cui

$$s = \frac{1 - \sqrt{1 - 4(y - x)}}{2} \,, \qquad \tau = y - \frac{1 - \sqrt{1 - 4(y - x)}}{2} \,.$$

In realtà questa scelta del segno permette di giungere fino al valore $s = 1/2$. In corrispondenza si trova la soluzione

$$u(x, y) = y - \frac{1 - \sqrt{1 - 4(y - x)}}{2} + \cos\Big(\frac{1 - \sqrt{1 - 4(y - x)}}{2}\Big) \,,$$

che però, come si verifica con un calcolo diretto, ha derivate che divengono discontinue proprio nel punto $(1/2, 1/4)$ corrispondente a $s = 1/2$. Quindi va scelto sopra $\alpha = 1/2$.
R.

$$u(x, y) = y - \frac{1 - \sqrt{1 - 4(y - x)}}{2} + \cos\Big(\frac{1 - \sqrt{1 - 4(y - x)}}{2}\Big) \,,$$
$$y < x + \frac{1}{4} \,.$$

2. [16/4/2003 (ex)I] Si consideri la equazione del primo ordine

$$u_x + \cos x \, u_y = u \,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,.$$

a) Se ne determinino le caratteristiche al suolo.
b) Si risolva l'equazione scritta come e.d.o. sulle caratteristiche.
c) Si dia una condizione su $\alpha > 0$ perché tutta la retta $y = \alpha x$ sia accettabile come curva che porta il dato in un problema di Cauchy per l'equazione data. Si interpreti geometricamente la condizione ottenuta.
Soluzione
a) Troviamo le curve caratteristiche al suolo risolvendo

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= 1 \,, \qquad & \varphi_1(0) &= \bar{x} \,, \\ \varphi_2' &= \cos\varphi_1 \,, \qquad & \varphi_2(0) &= \bar{y} \,, \end{aligned}$$

ove con $(\bar{x}, \bar{y})$ denotiamo un punto per cui passa la caratteristica, per ora del tutto generico. La soluzione è

$$\big(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)\big) = \big(\tau + \bar{x}, \sin(\tau + \bar{x}) + \bar{y} - \sin(\bar{x})\big) \,, \qquad -\infty < \tau < \infty \,.$$

b) L'equazione differenziale sulle caratteristiche è

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} = U \,,$$

che ha per soluzione (per un $\bar\tau$ fissato ad arbitrio)

$$U(\tau) = U(\bar\tau)e^{\tau-\bar\tau}\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$$

c) Usiamo per esempio il teorema di esistenza e unicità: dovremo allora imporre la condizione $a\psi_2' \neq b\psi_1'$, per

$$\big(\psi_1(s), \psi_2(s)\big) = \big(s, \alpha s\big)\,, \quad a = 1\,, \quad b = \cos x\,,$$

che conduce a

$$\alpha \neq \cos s\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$

Questa è vera se e solo se $\alpha \notin [-1, 1]$, ossia $\alpha > 1$. Dal punto di vista geometrico, il fatto che la pendenza della retta $y = \alpha x$ sia maggiore di 1 garantisce che essa non sia mai tangente alle caratteristiche $y = \sin x +$ costante.

R.

a) $\big(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)\big) = \big(\tau + \bar x, \sin(\tau + \bar x) + \bar y - \sin(\bar x)\big)\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$

b) $U(\tau) = U(\bar\tau)e^{\tau-\bar\tau}\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$

c) $\alpha > 1\,.$

3. [16/4/2003 (ex)II] Si consideri la equazione del primo ordine

$$u_x + \frac{1}{1+x^2}\,u_y = 3u\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

a) Se ne determinino le caratteristiche al suolo.
b) Si risolva l'equazione scritta come e.d.o. sulle caratteristiche.
c) Si dia una condizione su $\alpha > 0$ perché tutta la retta $y = \alpha x$ sia accettabile come curva che porta il dato in un problema di Cauchy per l'equazione data. Si interpreti geometricamente la condizione ottenuta.

R.

a) $\big(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)\big) = \big(\tau + \bar x, \operatorname{arctg}(\tau + \bar x) + \bar y - \operatorname{arctg}(\bar x)\big)\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$

b) $U(\tau) = U(\bar\tau)e^{3(\tau-\bar\tau)}\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$

c) $\alpha > 1\,.$

4. [30/6/2003 (ex)I] Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u_x + xyu_y &= 0\,, \\ u(0, y) &= y\,, \qquad y \in \boldsymbol{R}\,. \end{aligned}$$

Soluzione

A) Troviamo le caratteristiche al suolo risolvendo

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= 1\,, & \varphi_1(0) &= 0\,, \\ \varphi_2' &= \varphi_1\varphi_2\,, & \varphi_2(0) &= s\,, \end{aligned}$$

ove si parametrizza la curva che porta il dato con

$$(0, s)\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$

La soluzione dunque è

$$\big(\varphi_1(\tau; s), \varphi_2(\tau; s)\big) = \big(\tau, se^{\frac{\tau^2}{2}}\big)\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$$

B) Risolviamo la e.d.o. sulle caratteristiche

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} = 0\,,$$
$$U(0) = s\,,$$

ottenendo

$$U(\tau; s) = s\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$$

C) Torniamo infine alle variabili (x, y): occorre risolvere il sistema

$$\tau = x\,,$$
$$se^{\frac{\tau^2}{2}} = y\,,$$

che dà

$$\tau = x\,, \qquad s = ye^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

R.

$$u(x, y) = ye^{-\frac{x^2}{2}}\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

5. [30/6/2003 (ex)II] Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$u_x + xyu_y = 0\,,$$
$$u(0, y) = y^2\,, \qquad y \in \boldsymbol{R}\,.$$

R.

$$u(x, y) = y^2 e^{-x^2}\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

6. [23/9/2003 (ex)I] Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$u_x + \frac{1}{2y} u_y = u + 1\,,$$
$$u(1, y) = 3\,, \qquad y > 0\,,$$

definita in un opportuno aperto del piano, contenuto in $\{y > 0\}$.
SOLUZIONE

A) Troviamo le curve caratteristiche al suolo, che sono le soluzioni di

$$\varphi_1' = 1\,, \qquad \varphi_1(0) = 1\,,$$
$$\varphi_2' = \frac{1}{2\varphi_2}\,, \qquad \varphi_2(0) = s\,,$$

ove parametrizziamo la curva che porta il dato con

$$(1, s)\,, \qquad s > 0\,.$$

La soluzione è

$$\big(\varphi_1(\tau; s), \varphi_2(\tau; s)\big) = \big(\tau + 1, \sqrt{\tau + s^2}\big)\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$$

B) Risolviamo poi la e.d.o. sulle curve caratteristiche

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} = U + 1\,,$$
$$U(0) = 3\,,$$

ottenendo

$$U(\tau; s) = 4e^{\tau} - 1\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$$

C) Infine passiamo alle coordinate cartesiane. Dobbiamo risolvere

$$\tau + 1 = x\,,$$
$$\sqrt{\tau + s^2} = y\,,$$

cha dà

$$\tau = x - 1\,, \qquad s = \sqrt{y^2 - x + 1}\,.$$

La determinazione di s potrebbe apparire inutile ai nostri fini, visto che nell'espressione di U appare solo τ, ma la restrizione

$$y^2 + 1 > x\,,$$

a cui conduce stabilisce l'aperto di definizione della soluzione.

R.

$$u(x, y) = 4e^{x-1} - 1\,, \qquad x < y^2 + 1\,, \quad y > 0\,.$$

7. [23/9/2003 (ex)II] Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{1}{2x}u_x + u_y = -u + 1\,,$$
$$u(x, 0) = \pi\,, \qquad x > 0\,,$$

definita in un opportuno aperto del piano, contenuto in $\{x > 0\}$.

R.

$$u(x, y) = (\pi - 1)e^{y} + 1\,, \qquad y < x^2\,, \quad x > 0\,.$$

8. [20/1/2004 (hw)I] Risolvere

$$\begin{aligned} (2x+y)u_x - xu_y &= e^u\,, \\ u(s, 1-s) &= s-1\,, \qquad -\infty < s < \infty\,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x,y) = -\ln\Big[(x+y)e^{\frac{y}{x+y}} - \ln(x+y)\Big]\,,$$

nella regione ove $x+y>0$ e la quantità $[\dots]$ è positiva.

9. [20/1/2004 (hw)I] Risolvere

$$\begin{aligned} (y+1)u_x + yu_y &= 0\,, \\ u(s,1) &= e^s\,, \qquad -\infty < s < \infty\,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x,y) = \frac{1}{y}e^{1+x-y}\,, \qquad y>0\,.$$

10. [20/1/2004 (hw)I] Risolvere

$$\begin{aligned} xu_x + 2yu_y &= y\,, \\ u(\cos\theta, \sin\theta) &= 1\,, \qquad 0<\theta<\pi\,. \end{aligned}$$

SOLUZIONE

A) Troviamo le caratteristiche al suolo risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_1\,, \qquad & \varphi_1(0) &= \cos s\,, \\ \varphi_2' &= 2\varphi_2\,, \qquad & \varphi_2(0) &= \sin s\,, \end{aligned}$$

ove denotiamo $\theta = s \in (0,\pi)$. Ne segue

$$\big(\varphi_1(\tau;s), \varphi_2(\tau;s)\big) = \big(e^\tau\cos s, e^{2\tau}\sin s\big)\,, \qquad -\infty<\tau<\infty\,.$$

B) Risolviamo la e.d.o. sulle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} &= e^{2\tau}\sin s\,, \\ U(0) &= 1\,, \end{aligned}$$

ottenendo

$$U(\tau;s) = 1 + \frac{\sin s}{2}(e^{2\tau}-1)\,, \qquad -\infty<\tau<\infty\,.$$

C) Infine torniamo alle variabili (x,y). Occorre risolvere il sistema

$$\begin{aligned} e^\tau\cos s &= x\,, \\ e^{2\tau}\sin s &= y\,. \end{aligned}$$

A questo scopo eleviamo al quadrato entrambe le uguaglianze, e dividiamo la seconda equazione così trovata per $e^{2\tau}$*, giungendo a*

$$e^{4\tau} - e^{2\tau}x^2 - y^2 = 0\,,$$

da cui

$$e^{2\tau} = \frac{x^2 + \sqrt{x^4 + 4y^2}}{2}\,.$$

Dal sistema sopra si ricava subito

$$\sin s = ye^{-2\tau} = \frac{2y}{x^2 + \sqrt{x^4 + 4y^2}}\,.$$

R.

$$u(x, y) = 1 + \frac{y}{x^2 + \sqrt{x^4 + 4y^2}}\Big(\frac{x^2 + \sqrt{x^4 + 4y^2}}{2} - 1\Big)\,, \qquad y > 0\,.$$

11. [31/3/2004 (ex)I] Risolvere

$$\begin{aligned} xu_x + x^2u_y &= 1\,, \\ u(s, s) &= 2s\,, \qquad 0 < s < 1\,. \end{aligned}$$

12. [31/3/2004 (ex)II] Risolvere

$$\begin{aligned} y^2u_x + yu_y &= 3\,, \\ u(s, s) &= s\,, \qquad 0 < s < 1\,. \end{aligned}$$

13. [28/6/2004 (ex)I] Risolvere il seguente problema, determinando anche l'insieme di definizione massimale della soluzione:

$$\begin{cases} xu_x + 4yu_y = u^2\,, \\ \quad u(x, 1) = x\,, \qquad x > 0\,. \end{cases}$$

14. [28/6/2004 (ex)II] Risolvere il seguente problema, determinando anche l'insieme di definizione massimale della soluzione:

$$\begin{cases} 4xu_x + yu_y = u^2\,, \\ \quad u(-1, y) = y\,, \qquad y > 0\,. \end{cases}$$

15. [4/2/2005 (hw)I] Risolvere

$$\begin{cases} (x+y)u_x + (x-y)u_y = u + 2\,, \\ \qquad\qquad\qquad u(s,0) = 0\,, \qquad s > 0\,. \end{cases}$$

Soluzione

1) Troviamo le caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_1 + \varphi_2\,, \qquad \varphi_1(0) = s\,, \\ \varphi_2' &= \varphi_1 - \varphi_2\,, \qquad \varphi_2(0) = 0\,. \end{aligned}$$

Derivando la prima equazione, e usando poi la seconda, si ha

$$\varphi_1'' = \varphi_1' + \varphi_2' = \varphi_1' + \varphi_1 - \varphi_2\,.$$

Usando ancora la prima equazione si ottiene

$$\varphi_1'' - \varphi_1 = 0\,.$$

Quindi

$$\varphi_1(\tau; s) = k_1(s)e^{\sqrt{2}\tau} + k_2(s)e^{-\sqrt{2}\tau}\,.$$

Dai dati di Cauchy, e dal sistema differenziale, si ha

$$\begin{aligned} k_1(s) + k_2(s) &= \varphi_1(0; s) = s\,, \\ \sqrt{2}k_1 - \sqrt{2}k_2 &= \varphi_1'(0; s) = \varphi_1(0; s) + \varphi_2(0; s) = s\,, \end{aligned}$$

da cui

$$k_1(s) = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}s\,, \qquad k_2(s) = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}s\,,$$

e

$$\big(\varphi_1(\tau; s), \varphi_2(\tau; s)\big) = \frac{s}{2\sqrt{2}}\big((\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}\tau} + (\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}\tau}, e^{\sqrt{2}\tau} - e^{-\sqrt{2}\tau}\big)\,.$$

Si noti che le caratteristiche al suolo sono contenute tutte in $x > 0$.

2) Integriamo la e.d.o. sulle caratteristiche al suolo:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} &= U + 2\,, \\ U(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

La soluzione è

$$U(\tau; s) = 2e^{\tau} - 2\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$$

3) Torniamo alle variabili (x, y) risolvendo

$$\begin{aligned} \frac{s}{2\sqrt{2}}\big((\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}\tau} + (\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}\tau}\big) &= x\,, \\ \frac{s}{2\sqrt{2}}\big(e^{\sqrt{2}\tau} - e^{-\sqrt{2}\tau}\big) &= y\,. \end{aligned}$$

Dividendo le due equazioni membro a membro

$$\frac{e^{\sqrt{2}\tau} - e^{-\sqrt{2}\tau}}{(\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}\tau} + (\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}\tau}} = \frac{y}{x} .$$

Ponendo $z = e^{\sqrt{2}\tau}$, *si ottiene, anche moltiplicando questa uguaglianza per* z,

$$(\sqrt{2}+1)z^2 y + (\sqrt{2}-1)y = z^2 x - x ,$$

da cui

$$z = \Big[\frac{(\sqrt{2}-1)y + x}{x - (\sqrt{2}+1)y}\Big]^{\frac{1}{2}} ,$$

e quindi

$$e^{\tau} = z^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \Big[\frac{(\sqrt{2}-1)y + x}{x - (\sqrt{2}+1)y}\Big]^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} .$$

R.

$$u(x,y) = 2\Big[\Big(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\,\frac{(\sqrt{2}+1)x + y}{(\sqrt{2}-1)x - y}\Big)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} - 1\Big] ,$$

nel quarto di piano $Q = \{(\sqrt{2}-1)x > y > -(\sqrt{2}+1)x\}$.

16. [4/2/2005 (hw)I] Risolvere

$$\begin{cases} xyu_x + xyu_y = 0 , \\ \qquad u(-1,s) = s^2 , \qquad s > 0 . \end{cases}$$

(*Sugg.* Osservare bene l'equazione prima di iniziare i calcoli ...)
R.

$$u(x,y) = (x - y + 1)^2 , \qquad \text{per } y > x + 1.$$

17. [4/2/2005 (hw)I] Risolvere

$$\begin{cases} yu_x + (2x+y)u_y = \dfrac{1}{u} , \\ \qquad\qquad u(0,s^2) = s^2 , \qquad s > 0 . \end{cases}$$

R.

$$u(x,y) = \sqrt{(y-2x)^{\frac{4}{3}}(x+y)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}\ln\frac{y-2x}{x+y}} .$$

18. [23/6/2005 (ex)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$u_x + xu_y = \frac{1}{u} ,$$
$$u(0,s) = s^2 , \qquad 0 < s < 2 ,$$

e trovare il più grande aperto ove è possibile definire la soluzione, dimostrando che esso giace in un semipiano della forma $\{x > x_0\}$, con $0 > x_0 > -\infty$.

19. [23/6/2005 (ex)II] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} yu_x - u_y &= -\frac{1}{u}\,, \\ u(s,0) &= -s^2\,, \qquad -1 < s < 0\,, \end{aligned}$$

e trovare il più grande aperto ove è possibile definire la soluzione, dimostrando che esso giace in un semipiano della forma $\{y > y_0\}$, con $0 > y_0 > -\infty$.

Soluzione

1) Troviamo le caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_2\,, \qquad & \varphi_1(0) &= s\,, \\ \varphi_2' &= -1\,, \qquad & \varphi_2(0) &= 0\,, \end{aligned}$$

da cui

$$\big(\varphi_1(\tau;s), \varphi_2(\tau;s)\big) = \Big(s - \frac{\tau^2}{2}, -\tau\Big)\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$$

2) Risolviamo poi la e.d.o. sulle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} &= -\frac{1}{U}\,, \\ U(0) &= -s^2\,. \end{aligned}$$

Per separazione di variabili si ottiene

$$U(\tau)^2 - U(0)^2 = -2\tau\,,$$

da cui

$$U(\tau;s) = -\sqrt{s^4 - 2\tau}\,, \qquad \tau < \frac{s^4}{2}\,.$$

3) Torniamo alle variabili (x,y) risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} s - \frac{\tau^2}{2} &= x\,, \\ -\tau &= y\,, \end{aligned}$$

che dà

$$\tau = -y\,, \qquad s = x + \frac{y^2}{2}\,,$$

dove va imposta la condizione, visto che vogliamo che la caratteristica al suolo incontri la curva che porta il dato,

$$-1 < x + \frac{y^2}{2} < 0\,. \tag{1}$$

Si ha infine

$$u(x,y) = -\sqrt{\Big(x+\frac{y^2}{2}\Big)^4 + 2y}\,, \qquad (x,y)\in\Omega\,,$$

ove l'aperto massimale Ω, ricordando sia la (1) che la restrizione su τ per garantire la positività della quantità sotto radice quadrata, è definito da

$$\Omega = \Big\{ -1 < x + \frac{y^2}{2} < 0\,, \Big(x+\frac{y^2}{2}\Big)^4 + 2y > 0 \Big\}\,.$$

4) Per la restrizione $\tau < s^2/2$ si deve avere

$$-y < \frac{s^2}{2} < \frac{1}{2}\,,$$

ossia $y > -1/2$.
R.

$$1)\quad u(x,y) = -\sqrt{\Big(x+\frac{y^2}{2}\Big)^4 + 2y}\,,$$
$$(x,y)\in \Big\{ -1 < x + \frac{y^2}{2} < 0\,, \Big(x+\frac{y^2}{2}\Big)^4 + 2y > 0 \Big\}\,.$$
$$2)\quad y_0 = -\frac{1}{2}\,.$$

20. [16/9/2005 (ex)I] Risolvere il problema

$$\begin{cases} u_x + x u_y = 0\,, \\ \quad u(0,y) = \dfrac{1}{y}\,, \qquad y>0\,. \end{cases}$$

21. [16/9/2005 (ex)II] Risolvere il problema

$$\begin{cases} y u_x + u_y = 0\,, \\ \quad u(x,0) = \dfrac{1}{x+1}\,, \qquad x>0\,. \end{cases}$$

22. [15/12/2005 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} &u_x + u_y = e^u\,, \\ &\ u(x,0) = x-1\,, \qquad x\in\boldsymbol{R}\,, \end{aligned}$$

e il più grande aperto ove u è definita.

23. [6/2/2006 (hw)I] Risolvere

$$\begin{cases} e^y u_x + x e^{-y} u_y = x\,, \\ \qquad u(s,\ln 2s) = s\,, \qquad 1<s<\infty\,. \end{cases}$$

Soluzione
Risolviamo il sistema caratteristico

$$\varphi_1' = e^{\varphi_2}\,, \qquad \varphi_1(0) = s\,,$$
$$\varphi_2' = \varphi_1 e^{-\varphi_2}\,, \qquad \varphi_2(0) = \ln 2s\,,$$

che dà

$$\varphi_1(\tau; s) = \frac{s}{2}(3e^{\tau} - e^{-\tau})\,, \quad \varphi_2(\tau; s) = \ln\left[\frac{s}{2}(3e^{\tau} + e^{-\tau})\right]\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$$

Va quindi risolto il problema di Cauchy

$$U' = \frac{s}{2}(3e^{\tau} - e^{-\tau})\,, \qquad U(0; s) = s\,,$$

da cui

$$U(\tau; s) = \frac{s}{2}(3e^{\tau} + e^{-\tau}) - s\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$$

Il sistema $\varphi_1(\tau; s) = x$, $\varphi_2(\tau; s) = y$, *risolto, dà*

$$\tau = \ln\sqrt{\frac{1 + xe^{-y}}{3(1 - xe^{-y})}}\,, \qquad s = e^{y}\sqrt{\frac{(1 + xe^{-y})(1 - xe^{-y})}{3}}\,.$$

Sostituendo nell'espressione di U *si ottiene infine la soluzione.*
R.

$$u(x, y) = e^{y}\left(1 - \sqrt{\frac{(1 + xe^{-y})(1 - xe^{-y})}{3}}\right)\,.$$

24. [7/4/2006 (ex)I] Risolvere

$$2u_x + (6 + 2\cos x)u_y = 0\,,$$
$$u(0, s) = s^2\,, \qquad 0 < s < 3\,.$$

Trovare

$$\sup_{\Omega} u\,,$$

ove Ω è l'aperto massimale di definizione della soluzione u.
Soluzione
Risolviamo per caratteristiche:
1) Troviamo le curve caratteristiche al suolo:

$$\varphi_1' = 2\,, \qquad \varphi_1(0) = 0\,,$$
$$\varphi_2' = 6 + 2\cos\varphi_1\,, \qquad \varphi_2(0) = s\,,$$

che dà subito

$$\varphi_1(\tau; s) = 2\tau\,, \qquad \varphi_2(\tau; s) = 6\tau + \sin(2\tau) + s\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$$

2) Risolviamo la e.d.o. sulle caratteristiche al suolo:

$$U'(\tau; s) = 0\,,$$
$$U(0; s) = s^2\,,$$

che ha la soluzione

$$U(\tau; s) = s^2 , \qquad -\infty < \tau < \infty .$$

3) Torniamo alle variabili (x, y) risolvendo

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau; s) &= 2\tau = x , \\ \varphi_2(\tau; s) &= 6\tau + \sin(2\tau) + s = y , \end{aligned}$$

che implica

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{x}{2} , \\ s &= y - 3x - \sin x . \end{aligned}$$

Non sono presenti restrizioni su τ, mentre deve risultare $0 < s < 3$.
Infine, visto che la derivata di u lungo le caratteristiche al suolo è nulla, e che per definizione Ω è coperto da caratteristiche al suolo che partono dalla curva che porta il dato,

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{0<s<3} u(0, s) = \sup_{0<s<3} s^2 = 9 ,$$

R.

$$u(x, y) = (y - 3x - \sin x)^2 , \qquad 0 < y - 3x - \sin x < 3 ,$$

e

$$\sup_{\Omega} u = 9 .$$

25. [7/4/2006 (ex)II] Risolvere

$$\begin{aligned} (9 + 3\sin y)u_x - 3u_y &= 0 , \\ u(s, 0) &= s^3 , \qquad 0 < s < 2 . \end{aligned}$$

Trovare

$$\sup_{\Omega} u ,$$

ove Ω è l'aperto massimale di definizione della soluzione u.
R.

$$u(x, y) = (x - 1 + 3y - \cos y)^3 , \qquad 0 < x - 1 + 3y - \cos y < 2 ,$$

e

$$\sup_{\Omega} u = 8 .$$

26. [20/4/2006 (ex)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u_x + xu_y &= e^{2u} , \\ u(s, s^2) &= s , \qquad 0 < s < 1 , \end{aligned}$$

determinando anche l'aperto massimale di definizione della soluzione.

Soluzione

Troviamo le curve caratteristiche al suolo risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= 1 , & \varphi_1(0;s) &= s , \\ \varphi_2' &= \varphi_1 , & \varphi_2(0;s) &= s^2 . \end{aligned}$$

Questo sistema ammette l'unica soluzione

$$\big(\varphi_1(\tau;s), \varphi_2(\tau;s)\big) = \Big(\tau + s, \frac{\tau^2}{2} + s\tau + s^2\Big) , \qquad \tau \in \boldsymbol{R} .$$

Si noti che sulle caratteristiche vale

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{s^2}{2} .$$

Risolviamo poi l'equazione differenziale sulle caratteristiche al suolo:

$$\begin{aligned} U' &= e^{2U} , \\ U(0;s) &= s . \end{aligned}$$

Procedendo per separazione delle variabili si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} e^{-2U} = -2 ,$$

da cui

$$U(\tau;s) = -\frac{1}{2} \ln\big(e^{-2s} - 2\tau\big) , \qquad 2\tau < e^{-2s} .$$

Infine torniamo alle variabili (x, y), risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} \tau + s &= x , \\ \frac{\tau^2}{2} + s\tau + s^2 &= y . \end{aligned}$$

Da qui

$$s = \sqrt{2y - x^2} , \quad \tau = x - \sqrt{2y - x^2} ,$$

sotto la restrizione

$$0 < 2y - x^2 < 1 .$$

La soluzione sarà quindi

$$u(x, y) = -\frac{1}{2} \ln\big(e^{-2\sqrt{2y-x^2}} - 2x + 2\sqrt{2y - x^2}\big) ,$$

il cui aperto di definizione sarà sottoposto alle restrizioni sopra.

R.

$$u(x, y) = -\frac{1}{2} \ln\big(e^{-2\sqrt{2y-x^2}} - 2x + 2\sqrt{2y - x^2}\big) ,$$

definita in

$$\{0 < 2y - x^2 < 1\} \cap \{e^{-2\sqrt{2y-x^2}} - 2x + 2\sqrt{2y - x^2} > 0\} .$$

27. [20/4/2006 (ex)II] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} yu_x - u_y &= -e^u \,, \\ u(s^2, s) &= s^2 \,, \qquad -1 < s < 0 \,, \end{aligned}$$

determinando anche l'aperto massimale di definizione della soluzione.
R.

$$u(x, y) = -\ln\left(e^{-\frac{y^2+2x}{3}} - y - \sqrt{\frac{y^2+2x}{3}}\right) ,$$

definita in

$$\{0 < y^2 + 2x < 3\} \cap \left\{e^{-\frac{y^2+2x}{3}} - y - \sqrt{\frac{y^2+2x}{3}} > 0\right\} .$$

28. [6/7/2006 (ex)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} xu_x - 2(1-y)u_y &= xu \,, \\ u(s, 0) &= s \,, \qquad -\infty < s < \infty \,. \end{aligned}$$

Determinare anche l'aperto massimale di definizione della soluzione.
Soluzione
Troviamo le curve caratteristiche al suolo risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_1 \,, & \varphi_1(0; s) &= s \,, \\ \varphi_2' &= -2(1-\varphi_2) \,, & \varphi_2(0; s) &= 0 \,. \end{aligned}$$

Questo sistema ammette l'unica soluzione

$$\big(\varphi_1(\tau; s), \varphi_2(\tau; s)\big) = \big(se^\tau, 1 - e^{2\tau}\big) \,, \qquad \tau \in \boldsymbol{R} \,.$$

Risolviamo poi il problema di Cauchy per l'equazione differenziale sulle caratteristiche al suolo:

$$\begin{aligned} U' &= se^\tau U \,, \\ U(0; s) &= s \,, \end{aligned}$$

che ha come soluzione

$$U(\tau; s) = se^{se^\tau - s} \,, \qquad \tau \in \boldsymbol{R} \,.$$

Infine torniamo alle variabili (x, y), risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} se^\tau &= x \,, \\ 1 - e^{2\tau} &= y \,. \end{aligned}$$

Da qui

$$\tau = \frac{1}{2}\ln(1-y) \,, \qquad s = \frac{x}{\sqrt{1-y}} \,,$$

sotto la necessaria restrizione

$$y < 1\,.$$

R.

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1-y}} \exp\Big(x - \frac{x}{\sqrt{1-y}}\Big)\,, \qquad \textit{in } \Omega = \{y < 1\}.$$

29. [6/7/2006 (ex)II] Risolvere il problema di Cauchy

$$2(1-x)u_x - yu_y = yu\,,$$
$$u(0,s) = -s\,, \qquad -\infty < s < \infty\,.$$

Determinare anche l'aperto massimale di definizione della soluzione.
R.

$$u(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{1-x}} \exp\Big(-y + \frac{y}{\sqrt{1-x}}\Big)\,, \qquad \textit{in } \Omega = \{x < 1\}.$$

30. [20/9/2006 (ex)I] Risolvere

$$xu_x + u_y = u(1-u)\,,$$
$$u(s,0) = \frac{1}{2}\,, \qquad -\infty < s < \infty\,.$$

SOLUZIONE
Troviamo le curve caratteristiche al suolo risolvendo il sistema

$$\varphi_1' = \varphi_1\,, \qquad \varphi_1(0;s) = s\,,$$
$$\varphi_2' = 1\,, \qquad \varphi_2(0;s) = 0\,.$$

Questo sistema ammette l'unica soluzione

$$\big(\varphi_1(\tau;s), \varphi_2(\tau;s)\big) = (se^\tau, \tau)\,, \qquad \tau \in \boldsymbol{R}\,.$$

Si noti che sulle caratteristiche vale

$$x = se^y\,.$$

Risolviamo poi l'equazione differenziale sulle caratteristiche al suolo:

$$U' = U(1-U)\,,$$
$$U(0;s) = \frac{1}{2}\,.$$

Procedendo per separazione delle variabili si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\big[\ln U - \ln(1-U)\big] = 1\,,$$

da cui

$$U(\tau;s) = \frac{e^\tau}{1+e^\tau}\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$$

Infine torniamo alle variabili (x, y), risolvendo il sistema

$$
\begin{aligned}
se^{\tau} &= x\,, \\
\tau &= y\,.
\end{aligned}
$$

Da qui

$$
u(x, y) = \frac{e^y}{1 + e^y}\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,.
$$

il cui aperto di definizione sarà sottoposto alle restrizioni sopra.
R.

$$
u(x, y) = \frac{e^y}{1 + e^y}\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,.
$$

31. [15/12/2006 (ex)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
2xu_x - u_y &= -u^2\,, \\
u(s, \ln s) &= 1\,, \qquad 0 < s < \infty\,,
\end{aligned}
$$

specificando l'aperto massimale di definizione Ω della soluzione.
Si dimostri anche che, in Ω, u non cambia mai segno.
Soluzione
Troviamo le curve caratteristiche al suolo risolvendo il sistema

$$
\begin{aligned}
\varphi_1' &= 2\varphi_1\,, \qquad \varphi_1(0; s) = s\,, \\
\varphi_2' &= -1\,, \qquad \varphi_2(0; s) = \ln s\,.
\end{aligned}
$$

Questo sistema ammette l'unica soluzione

$$
\big(\varphi_1(\tau; s), \varphi_2(\tau; s)\big) = (se^{2\tau}, -\tau + \ln s)\,, \qquad \tau \in \boldsymbol{R}\,.
$$

Risolviamo poi l'equazione differenziale sulle caratteristiche al suolo:

$$
\begin{aligned}
U' &= -U^2\,, \\
U(0; s) &= 1\,.
\end{aligned}
$$

Procedendo per separazione delle variabili si ottiene

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \frac{1}{U} = 1\,,
$$

da cui

$$
U(\tau; s) = \frac{1}{1 + \tau}\,, \qquad -1 < \tau < \infty\,.
$$

Infine torniamo alle variabili (x, y), risolvendo il sistema

$$
\begin{aligned}
se^{2\tau} &= x\,, \\
-\tau + \ln s &= y\,.
\end{aligned}
$$

Da qui

$$
s = xe^{-2\tau}\,, \quad \tau = \frac{1}{3}(\ln x - y)\,,
$$

sotto la restrizione

$$x > 0\,.$$

La soluzione sarà quindi

$$u(x,y) = \frac{3}{3 + \ln x - y}\,,$$

il cui aperto di definizione è

$$\Omega = \{(x,y) \mid x > 0\,, y < \ln x + 3\}\,.$$

Poiché il denominatore di u si mantiene sempre positivo in Ω, risulta dimostrato che $u > 0$.
R.

$$u(x,y) = \frac{3}{3 + \ln x - y}\,, \qquad (x,y) \in \Omega = \{(x,y) \mid x > 0\,, y < \ln x + 3\}\,.$$

32. [2/4/2007 (ex)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} yu_x + (x-2y)u_y &= y\,, \\ u(s,0) &= s\,, \qquad 0 < s < \infty\,. \end{aligned}$$

[*Sugg.*: al momento di tornare alle variabili (x,y) non sarà necessario risolvere del tutto il sistema.]
Soluzione
A) Troviamo le curve caratteristiche al suolo risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_2\,, & \varphi_1(0;s) &= s\,, \\ \varphi_2' &= \varphi_1 - 2\varphi_2\,, & \varphi_2(0;s) &= 0\,. \end{aligned}$$

Derivando la prima equazione differenziale e sostituendo poi φ_2 e φ_2' si ottiene

$$\varphi_1'' + 2\varphi_1' - \varphi_1 = 0\,,$$

che ha per integrale generale

$$\varphi_1(\tau) = k_1 e^{-(1+\sqrt{2})\tau} + k_2 e^{-(1-\sqrt{2})\tau}\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha

$$\begin{aligned} &\big(\varphi_1(\tau;s), \varphi_2(\tau;s)\big) = \\ &\quad \frac{s}{2\sqrt{2}}\Big((\sqrt{2}-1)e^{-(1+\sqrt{2})\tau} + (\sqrt{2}+1)e^{-(1-\sqrt{2})\tau}, -e^{-(1+\sqrt{2})\tau} + e^{-(1-\sqrt{2})\tau}\Big)\,, \end{aligned}$$

per $\tau \in \boldsymbol{R}$ e $s > 0$.
B) Integriamo l'equazione differenziale lungo le caratteristiche al suolo, imponendo il dato di Cauchy. Si ottiene il problema

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{s}{2\sqrt{2}}\big(-e^{-(1+\sqrt{2})\tau} + e^{-(1-\sqrt{2})\tau}\big)\,, \\ U(0;s) &= s\,, \end{aligned}$$

cha ha per soluzione

$$U(\tau;s)=\frac{s}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{e^{-(1-\sqrt{2})\tau}}{\sqrt{2}-1}+\frac{e^{-(1+\sqrt{2})\tau}}{\sqrt{2}+1}\Big)\,,\qquad \tau\in\boldsymbol{R}\,,$$

per ogni $s>0$.
C) Torniamo infine alle variabili (x,y). *Il sistema da risolvere sarebbe*

$$\begin{aligned}\frac{s}{2\sqrt{2}}\Big((\sqrt{2}-1)e^{-(1+\sqrt{2})\tau}+(\sqrt{2}+1)e^{-(1-\sqrt{2})\tau}\Big)&=x\,,\\ \frac{s}{2\sqrt{2}}\big(-e^{-(1+\sqrt{2})\tau}+e^{-(1-\sqrt{2})\tau}\big)&=y\,.\end{aligned}$$

Tuttavia non è necessario svolgere tutti i calcoli; basta osservare che la prima equazione dà subito

$$\frac{s}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{e^{-(1-\sqrt{2})\tau}}{\sqrt{2}-1}+\frac{e^{-(1+\sqrt{2})\tau}}{\sqrt{2}+1}\Big)=x\,.$$

R.

$$u(x,y)=x\,.$$

33. [2/4/2007 (ex)II] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned}(y-2x)u_x+xu_y&=x\,,\\ u(0,s)&=s\,,\qquad 0<s<\infty\,.\end{aligned}$$

[*Sugg.*: al momento di tornare alle variabili (x,y) non sarà necessario risolvere del tutto il sistema.]
R.

$$u(x,y)=y\,.$$

34. [12/7/2007 (ex)I] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned}xu_x-yu_y&=e^u\,,\\ u(s,s)&=s\,,\qquad s>0\,,\end{aligned}$$

specificandone l'aperto massimale di definizione Ω e dimostrando che

$$\Omega\subset\{(x,y)\mid 0<x<ye^2\}\,.$$

Soluzione
A) Risolviamo il sistema delle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned}\varphi_1'&=\varphi_1\,,\qquad &\varphi_1(0)&=s\,,\\ \varphi_2'&=-\varphi_2\,,\qquad &\varphi_2(0)&=s\,.\end{aligned}$$

Si ottiene

$$\big(\varphi_1(\tau;s),\varphi_2(\tau;s)\big)=(se^{\tau},se^{-\tau})\,,\qquad -\infty<\tau<\infty\,.$$

B) Risolviamo poi l'equazione differenziale sulle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau}&=e^{U}\,,\\ U(0)&=s\,.\end{aligned}$$

Si ottiene per separazione delle variabili

$$U(\tau;s)=-\ln(e^{-s}-\tau)\,,\qquad -\infty<\tau<e^{-s}\,.$$

C) Torniamo alle coordinate cartesiane, risolvendo il sistema

$$\begin{aligned}se^{\tau}&=x\,,\\ se^{-\tau}&=y\,.\end{aligned}$$

Si noti che il sistema è risolubile se e solo se $x>0$ e $y>0$, perché deve essere $s>0$. Procedendo per sostituzione si trova

$$s=\sqrt{xy}\,,\qquad \tau=\ln\sqrt{\frac{x}{y}}\,,$$

da cui

$$u(x,y)=-\ln\Big(e^{-\sqrt{xy}}-\ln\sqrt{\frac{x}{y}}\Big)\,,$$

per $(x,y)\in\Omega$, ove sull'aperto massimale di definizione Ω vanno imposte le restrizioni $x>0$, $y>0$ già incontrate, e la $\tau<e^{-s}$, che diviene

$$\ln\sqrt{\frac{x}{y}}<e^{-\sqrt{xy}}\quad\Longleftrightarrow\quad x<ye^{2e^{-\sqrt{xy}}}\,. \tag{1}$$

Si osservi che per $x>0$, $y>0$, vale

$$1<e^{2e^{-\sqrt{xy}}}<e^{2}\,.$$

Perciò se vale la (1), allora vale anche la

$$x<ye^{2}\,.$$

R.

$$u(x,y)=-\ln\Big(e^{-\sqrt{xy}}-\ln\sqrt{\frac{x}{y}}\Big)\,,\qquad \textit{in}\quad \Omega=\{(x,y)\mid 0<x<ye^{2e^{-\sqrt{xy}}}\}\,.$$

35. [12/7/2007 (ex)II] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned}xu_x-yu_y&=e^{-u}\,,\\ u(s,s)&=-s\,,\qquad s>0\,,\end{aligned}$$

specificandone l'aperto massimale di definizione Ω e dimostrando che

$$\Omega \subset \{(x,y) \mid x > ye^{-2} > 0\} .$$

R.

$$u(x,y) = \ln\Big(e^{-\sqrt{xy}} + \ln\sqrt{\frac{x}{y}}\Big) , \qquad \textit{in} \quad \Omega = \{(x,y) \mid x > ye^{-2e^{-\sqrt{xy}}}\} .$$

36. [20/9/2007 (ex)I] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} xu_x + 2yu_y &= xu , \\ u(1,s) &= f(s) , \qquad -1 < s < 1 , \end{aligned}$$

ove $f \in C^1((-1,1))$, specificandone l'aperto massimale di definizione, e trovando la condizione necessaria e sufficiente su f perché u sia limitata su Ω.

Soluzione

A) Risolviamo il sistema delle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_1 , \qquad & \varphi_1(0) &= 1 , \\ \varphi_2' &= 2\varphi_2 , \qquad & \varphi_2(0) &= s . \end{aligned}$$

Si ottiene

$$\big(\varphi_1(\tau;s), \varphi_2(\tau;s)\big) = (e^\tau, se^{2\tau}) , \qquad -\infty < \tau < \infty .$$

Le caratteristiche al suolo sono dunque le mezze parabole

$$y = sx^2 , \qquad x > 0 , \quad s \in (-1,1) .$$

B) Risolviamo poi l'equazione differenziale sulle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} &= e^\tau U , \\ U(0) &= f(s) . \end{aligned}$$

Si ottiene

$$U(\tau;s) = e^{e^\tau - 1} f(s) , \qquad -\infty < \tau < \infty .$$

C) Torniamo alle coordinate cartesiane, risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} e^\tau &= x , \\ se^{2\tau} &= y . \end{aligned}$$

Si noti che il sistema è risolubile solo se $x > 0$.
Si trova

$$s = \frac{y}{x^2} , \qquad \tau = \ln x .$$

Ricordando che $-1 < s < 1$ si deve imporre $(x,y) \in \Omega$, ove

$$\Omega = \{(x,y) \mid x > 0 , -x^2 < y < x^2\} .$$

C) Quindi

$$u(x,y) = e^{x-1} f\Big(\frac{y}{x^2}\Big), \qquad (x,y) \in \Omega.$$

La u si mantiene limitata su tutto Ω, e in particolare per $x \to \infty$, se e solo se $f \equiv 0$.

R.

$$u(x,y) = e^{x-1} f\Big(\frac{y}{x^2}\Big), \qquad \text{in } \Omega = \{x > 0, -x^2 < y < x^2\}.$$

La u è limitata se e solo se $f \equiv 0$.

37. [14/12/2007 (ex)I] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u_x + \cos x u_y &= 2, \\ u(s, \cos s) &= s, \qquad -\frac{\pi}{4} < s < \frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

Si dimostri che il dominio massimale Ω di u è contenuto in una striscia

$$-\infty < -y_0 < y < y_0 < \infty.$$

Soluzione

A) Risolviamo il sistema delle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= 1, & \varphi_1(0) &= s, \\ \varphi_2' &= \cos\varphi_1, & \varphi_2(0) &= \cos s. \end{aligned}$$

Si ottiene

$$\big(\varphi_1(\tau; s), \varphi_2(\tau; s)\big) = (s + \tau, \sin(s+\tau) - \sin s + \cos s), \quad \tau \in \boldsymbol{R}.$$

Le caratteristiche al suolo sono dunque le curve

$$y = \sin x - \sin s + \cos s, \quad -\infty < x < \infty, s \in (-\pi/4, 3\pi/4).$$

B) Risolviamo poi il problema di Cauchy per l'equazione differenziale sulle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\tau} &= 2, \\ U(0) &= s. \end{aligned}$$

Si ottiene

$$U(\tau; s) = 2\tau + s, \qquad -\infty < \tau < \infty.$$

C) Torniamo alle coordinate cartesiane, risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} s + \tau &= x, \\ \sin(s+\tau) - \sin s + \cos s &= y. \end{aligned}$$

Si noti che il sistema è risolubile solo se $|y| < 3$.

Si trova

$$-\sin s + \cos s = y - \sin(s+\tau) = y - \sin x,$$

da cui

$$\cos\left(s+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\cos s-\sin s}{\sqrt{2}}=\frac{y-\sin x}{\sqrt{2}}\,.$$

Ricordando che $-\pi/4<s<3\pi/4$ *e che* $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$, *si ha*

$$\tau=x+\frac{\pi}{4}-\arccos\left(\frac{y-\sin x}{\sqrt{2}}\right),$$
$$s=-\frac{\pi}{4}+\arccos\left(\frac{y-\sin x}{\sqrt{2}}\right).$$

C) Quindi

$$u(x,y)=2x+\frac{\pi}{4}-\arccos\left(\frac{y-\sin x}{\sqrt{2}}\right).$$

R.

$$u(x,y)=2x+\frac{\pi}{4}-\arccos\left(\frac{y-\sin x}{\sqrt{2}}\right),$$
$$(x,y)\in\Omega=\{-\infty<x<\infty\,,|y-\sin x|<\sqrt{2}\}\subset\{|y|<3\}\,.$$

38. [28/3/2008 (ex)I] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$x(1-x)u_x+u_y=y\,,$$
$$u(a,s)=s\,,\qquad -\infty<s<\infty\,,$$

ove $0<a<1$. Determinare l'aperto massimale Ω di esistenza della soluzione u.

Soluzione

A) Risolviamo il sistema delle caratteristiche al suolo

$$\varphi_1'=\varphi_1(1-\varphi_1)\,,\qquad \varphi_1(0)=a\,,$$
$$\varphi_2'=1\,,\qquad \varphi_2(0)=s\,.$$

Le due equazioni sono disaccoppiate; la seconda è di immediata risoluzione. Dalla prima si ha

$$\varphi_1'\left(\frac{1}{\varphi_1}+\frac{1}{1-\varphi_1}\right)=1\,,$$

da cui

$$\ln\left|\frac{\varphi_1(1-a)}{a(1-\varphi_1)}\right|=\tau\,. \tag{1}$$

Si ottiene infine, tenendo presente che $0<a<1$,

$$\big(\varphi_1(\tau;s),\varphi_2(\tau;s)\big)=\left(\frac{ae^{\tau}}{1-a+ae^{\tau}},s+\tau\right),\quad \tau\in\boldsymbol{R}.$$

Le caratteristiche al suolo sono dunque le curve

$$x=\frac{ae^{y-s}}{1-a+ae^{y-s}}\,,\quad -\infty<y<\infty\,,s\in(-\infty,\infty)\,.$$

B) Risolviamo poi il problema di Cauchy per l'equazione differenziale sulle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} &= \tau + s\,, \\ U(0) &= s\,. \end{aligned}$$

Si ottiene

$$U(\tau; s) = \frac{\tau^2}{2} + s\tau + s\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$$

C) Torniamo alle coordinate cartesiane, risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} \frac{ae^{\tau}}{1 - a + ae^{\tau}} &= x\,, \\ s + \tau &= y\,. \end{aligned}$$

Si noti che il sistema è stato in effetti già risolto (si veda la (1)*). Poiché il sistema è risolubile per ogni* $x \in (0,1)$ *e* $y \in \boldsymbol{R}$*, l'aperto massimale di esistenza è la striscia* $(0,1) \times \boldsymbol{R}$*.*
R.

$$\begin{gathered} u(x,y) = (y-1)\ln\frac{x(1-a)}{a(1-x)} + y - \frac{1}{2}\left[\ln\frac{x(1-a)}{a(1-x)}\right]^2, \\ (x,y) \in \Omega = (0,1) \times \boldsymbol{R}\,. \end{gathered}$$

39. [28/3/2008 (ex)II] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} -u_x + y(1-y)u_y &= -x\,, \\ u(s,a) &= -s\,, \qquad -\infty < s < \infty\,, \end{aligned}$$

ove $0 < a < 1$. Determinare l'aperto massimale Ω di esistenza della soluzione u.
R.

$$\begin{gathered} u(x,y) = -(x+1)\ln\frac{y(1-a)}{a(1-y)} - x - \frac{1}{2}\left[\ln\frac{y(1-a)}{a(1-y)}\right]^2, \\ (x,y) \in \Omega = \boldsymbol{R} \times (0,1)\,. \end{gathered}$$

40. [14/7/2008 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} x^2 u_x + (x-1)u_y &= x\,, \\ u(s,s) &= s - s^{-1}\,, \qquad 0 < s < \infty\,. \end{aligned}$$

Soluzione

A) Risolviamo il sistema delle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_1^2\,, \qquad & \varphi_1(0) &= s\,, \\ \varphi_2' &= \varphi_1 - 1\,, \qquad & \varphi_2(0) &= s\,. \end{aligned}$$

Le due equazioni sono disaccoppiate. Dalla prima si ha

$$\frac{\varphi_1'}{\varphi_1^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{1}{\varphi_1} = 1\,,$$

da cui

$$\varphi_1(\tau) = \frac{\varphi_1(0)}{1 - \tau\varphi_1(0)}\,. \tag{1}$$

Si ottiene infine, tenendo presenti le condizioni iniziali e la seconda equazione del sistema caratteristico, ora di immediata soluzione,

$$\big(\varphi_1(\tau;s), \varphi_2(\tau;s)\big) = \left(\frac{s}{1-\tau s}, -\ln(1-\tau s) - \tau + s\right)\,, \quad \tau < \frac{1}{s}\,.$$

B) Risolviamo poi il problema di Cauchy per l'equazione differenziale sulle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{s}{1-\tau s}\,, \\ U(0) &= s - \frac{1}{s}\,. \end{aligned}$$

Si ottiene

$$U(\tau;s) = -\ln(1-\tau s) + s - \frac{1}{s}\,, \qquad -\infty < \tau < \frac{1}{s}\,.$$

C) Torniamo alle coordinate cartesiane, risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} \frac{s}{1-\tau s} &= x\,, \\ -\ln(1-\tau s) - \tau + s &= y\,, \end{aligned}$$

o meglio ricavandone che

$$-\ln(1-\tau s) + s - \frac{1}{s} = y + \tau - \frac{1}{s} = y - \frac{1}{x}\,.$$

R.

$$u(x,y) = y - \frac{1}{x}\,.$$

41. [14/7/2008 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} (1-y)u_x + y^2 u_y &= y\,, \\ u(-s,s) &= s - s^{-1}\,, \qquad 0 < s < \infty\,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x, y) = -x - \frac{1}{y}\,.$$

42. [16/9/2008 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} \sin y u_x + 2u_y &= \sqrt{u}\,, \\ u(s, 0) &= s\,, \qquad 0 < s < \infty\,. \end{aligned}$$

Soluzione

A) Risolviamo il sistema delle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \sin\varphi_2\,, \qquad & \varphi_1(0) &= s\,, \\ \varphi_2' &= 2\,, & \varphi_2(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

La seconda equazione è indipendente dalla prima. Risolvendo la seconda equazione e poi la prima, che diviene così di integrazione elementare, si ottiene la soluzione

$$\big(\varphi_1(\tau; s), \varphi_2(\tau; s)\big) = \Big(-\frac{1}{2}\cos 2\tau + \frac{1}{2} + s, 2\tau\Big)\,, \quad -\infty < \tau < \infty\,.$$

B) Risolviamo poi il problema di Cauchy per l'equazione differenziale sulle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} &= \sqrt{U}\,, \\ U(0) &= s\,. \end{aligned}$$

Si ottiene

$$U(\tau; s) = \Big(\sqrt{s} + \frac{\tau}{2}\Big)^2\,, \qquad -2\sqrt{s} < \tau < \infty\,.$$

C) Torniamo alle coordinate cartesiane, risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\cos 2\tau + \frac{1}{2} + s &= x\,, \\ 2\tau &= y\,, \end{aligned}$$

che dà

$$\begin{aligned} s &= x + \frac{1}{2}\cos y - \frac{1}{2}\,, \\ y &= 2\tau\,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x, y) = \Big(\sqrt{x + \frac{1}{2}\cos y - \frac{1}{2}} + \frac{y}{4}\Big)^2\,,$$

$$x > \frac{1 - \cos y}{2}\,, \qquad y > -4\sqrt{x + \frac{1}{2}\cos y - \frac{1}{2}}\,.$$

43. [16/9/2008 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$2u_x + \frac{1}{3}\sin x u_y = \sqrt{u}\,,$$
$$u(0,s) = 3s\,, \qquad 0 < s < \infty\,.$$

R.

$$u(x,y) = \Big(\sqrt{3y + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}} + \frac{x}{4}\Big)^2\,,$$
$$y > \frac{1-\cos y}{6}\,, \qquad x > -4\sqrt{3y + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}}\,.$$

44. [12/1/2009 (ex)I] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{1}{y^2}u_x + u_y = x\,,$$
$$u\Big(s,\frac{1}{s}\Big) = 1\,, \qquad 0 < s < \infty\,.$$

Determinare l'aperto massimale Ω di esistenza della soluzione u.
Soluzione
A) Risolviamo il sistema delle caratteristiche al suolo

$$\varphi_1' = \frac{1}{\varphi_2^2}\,, \qquad \varphi_1(0) = s\,,$$
$$\varphi_2' = 1\,, \qquad \varphi_2(0) = \frac{1}{s}\,.$$

La seconda equazione è di immediata risoluzione, e dà

$$\varphi_2(\tau;s) = \tau + \frac{1}{s}\,.$$

Dalla prima si ha quindi

$$\varphi_1' = \frac{1}{\Big(\tau + \frac{1}{s}\Big)^2}\,,$$

da cui infine

$$\big(\varphi_1(\tau;s),\varphi_2(\tau;s)\big) = \Big(-\frac{1}{\tau+\frac{1}{s}} + 2s, \tau + \frac{1}{s}\Big)\,, \quad \tau > -\frac{1}{s}\,.$$

Le caratteristiche al suolo sono dunque i rami di iperbole

$$x = -\frac{1}{y} + 2s\,, \quad 0 < y < \infty\,, s \in (0,\infty)\,.$$

B) Risolviamo poi il problema di Cauchy per l'equazione differenziale sulle caratteristiche al suolo

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{\tau + \frac{1}{s}} + 2s\,,$$
$$U(0) = 1\,.$$

Si ottiene

$$U(\tau; s) = 2s\tau - \ln\Big(\tau + \frac{1}{s}\Big) - \ln s + 1\,, \qquad -\frac{1}{s} < \tau < \infty\,.$$

C) Torniamo alle coordinate cartesiane, risolvendo il sistema

$$-\frac{1}{\tau + \frac{1}{s}} + 2s = x\,,$$
$$\tau + \frac{1}{s} = y\,.$$

Si ricava subito

$$s = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{y}\Big)\,,$$
$$\tau = y - \frac{2}{x + \frac{1}{y}}\,.$$

Le condizioni da imporre sono $\tau + 1/s > 0$, e $s > 0$, ossia

$$y > 0\,, \qquad x + \frac{1}{y} > 0\,.$$

R.

$$u(x, y) = xy - \ln y - \ln\Big(x + \frac{1}{y}\Big) + \ln 2\,,$$
$$(x, y) \in \Omega = \{(x, y) \mid y > 0\,, x + y^{-1} > 0\}\,.$$

45. [12/1/2009 (ex)II] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$u_x + \frac{1}{x^2}u_y = y\,,$$
$$u\Big(\frac{1}{s}, s\Big) = 0\,, \qquad 0 < s < \infty\,.$$

Determinare l'aperto massimale Ω di esistenza della soluzione u.
R.

$$u(x, y) = xy - \ln x - \ln\Big(y + \frac{1}{x}\Big) + \ln 2 - 1\,,$$
$$(x, y) \in \Omega = \{(x, y) \mid x > 0\,, y + x^{-1} > 0\}\,.$$

46. [15/6/2009 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$
\begin{gathered}
xu_x + u_y = x(1+y)u\,,\\
u(s,0) = -\frac{1}{\ln s}\,,\qquad s>1\,.
\end{gathered}
$$

Trovare anche l'aperto massimale di definizione.

Soluzione

A) Troviamo le caratteristiche al suolo, risolvendo il sistema caratteristico

$$
\begin{aligned}
\varphi_1' &= \varphi_1\,, &\qquad \varphi_1(0) &= s\,,\\
\varphi_2' &= 1\,, &\qquad \varphi_2(0) &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Si ottiene immediatamente

$$
(\varphi_1(\tau;s),\varphi_2(\tau,s)) = (se^{\tau},\tau)\,,\qquad \tau\in\boldsymbol{R}\,.
$$

B) Si risolve quindi la e.d.o. sulle caratteristiche al suolo

$$
\begin{gathered}
U' = se^{\tau}(1+\tau)U\,,\\
U(0) = -\frac{1}{\ln s}\,,
\end{gathered}
$$

ottenendo per separazione delle variabili

$$
U(\tau;s) = -\frac{1}{\ln s}\exp se^{\tau}\tau\,,\qquad \tau\in\boldsymbol{R}.
$$

C) Infine si torna alle variabili (x,y) invertendo il sistema

$$
se^{\tau} = x\,,\qquad \tau = y\,,
$$

che dà

$$
s = xe^{-y}\,,\qquad \tau = y\,.
$$

Si noti che la restrizione $s>1$ implica

$$
\ln s = \ln x - y > 0\,,
$$

che definisce l'aperto massimale di definizione, insieme con $x>0$.

R.

$$
u(x,y) = \frac{1}{y-\ln x}e^{xy}\,,
$$

definita in

$$
\Omega = \{(x,y)\mid x>0\,, y<\ln x\}\,.
$$

47. [13/7/2009 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$
\begin{gathered}
\frac{u_x}{x} + \frac{u_y}{y} = \frac{1}{u}\,,\\
u\Big(s,\frac{2}{s}\Big) = 1\,,\qquad s>0\,.
\end{gathered}
$$

SOLUZIONE

Si noti che i termini $1/x$ e $1/y$ presenti nell'equazione impediscono a x e a y di annullarsi; visto che la curva che porta il dato è contenuta nel primo quadrante, anche l'aperto massimale di definizione della soluzione sarà contenuto nel primo quadrante.

A) Troviamo le caratteristiche al suolo, risolvendo il sistema caratteristico

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \frac{1}{\varphi_1}\,, \qquad \varphi_1(0) = s\,, \\ \varphi_2' &= \frac{1}{\varphi_2}\,, \qquad \varphi_2(0) = \frac{2}{s}\,. \end{aligned}$$

Si ottiene integrando per separazione di variabili

$$\varphi_i(\tau) = \sqrt{2\tau + \varphi_i(0)^2}\,,$$

cioè

$$(\varphi_1(\tau; s), \varphi_2(\tau, s)) = \Big(\sqrt{2\tau + s^2}, \sqrt{2\tau + \frac{4}{s^2}}\Big)\,, \qquad \tau > \max\Big(-\frac{s^2}{2}, -\frac{2}{s^2}\Big)\,.$$

B) Si risolve quindi la e.d.o. sulle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} U' &= \frac{1}{U}\,, \\ U(0) &= 1\,, \end{aligned}$$

ottenendo per separazione delle variabili

$$U(\tau; s) = \sqrt{1 + 2\tau}\,, \qquad \tau > -\frac{1}{2}\,.$$

C) Infine si torna alle variabili (x, y) invertendo il sistema

$$\sqrt{2\tau + s^2} = x\,, \qquad \sqrt{2\tau + \frac{4}{s^2}} = y\,,$$

che dà (ricordando $s > 0$)

$$s = \sqrt{\frac{x^2 - y^2 + \sqrt{(y^2 - x^2)^2 + 16}}{2}}\,, \qquad \tau = \frac{x^2 + y^2 - \sqrt{(y^2 - x^2)^2 + 16}}{4}\,.$$

Si noti che le restrizioni su τ trovate risolvendo il sistema caratteristico sono automaticamente soddisfatte, mentre imponendo la $\tau > -1/2$ si ha dai calcoli

$$y > \sqrt{\frac{3 - x^2}{x^2 + 1}}\,, \qquad 0 < x < \sqrt{3}\,,$$

che definisce l'aperto massimale di definizione, insieme con $x > 0$, $y > 0$.

R.

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2 + x^2 + y^2 - \sqrt{(y^2 - x^2)^2 + 16}}\,,$$

definita in

$$\Omega = \left\{ (x,y) \mid \sqrt{3} > x > 0 \,, y > \sqrt{\frac{3-x^2}{x^2+1}} \right\} \cup \Big([\sqrt{3}, \infty) \times (0,\infty) \Big) \,.$$

48. [13/7/2009 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} \frac{u_x}{x} + \frac{u_y}{y} &= -\frac{1}{u} \,, \\ u\Big(s, \frac{2}{s}\Big) &= 1 \,, \qquad s > 0 \,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2 - y^2 + \sqrt{(y^2-x^2)^2 + 16}} \,,$$

definita in

$$\Omega = \Big((0,1] \times (0,\infty) \Big) \cup \left\{ (x,y) \mid x > 1 \,, y < \sqrt{\frac{3+x^2}{x^2-1}} \right\} .$$

49. [15/9/2009 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} 2xu_x + yu_y &= \frac{1}{u} \,, \\ u(1,s) &= s \,, \qquad s > 0 \,, \end{aligned}$$

determinando anche l'aperto massimale di definizione.

Soluzione

A) Troviamo le caratteristiche al suolo, risolvendo il sistema caratteristico

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= 2\varphi_1 \,, \qquad \varphi_1(0) = 1 \,, \\ \varphi_2' &= \varphi_2 \,, \qquad \varphi_2(0) = s \,. \end{aligned}$$

Si ottiene

$$(\varphi_1(\tau;s), \varphi_2(\tau,s)) = (e^{2\tau}, se^{\tau}) \,, \qquad \tau \in \boldsymbol{R} \,.$$

B) Si risolve quindi la e.d.o. sulle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} U' &= \frac{1}{U} \,, \\ U(0) &= s \,, \end{aligned}$$

ottenendo per separazione delle variabili

$$U(\tau;s) = \sqrt{s^2 + 2\tau} \,, \qquad \tau > -\frac{s^2}{2} \,.$$

C) Infine si torna alle variabili (x,y) invertendo il sistema

$$e^{2\tau} = x \,, \qquad se^{\tau} = y \,,$$

che dà

$$s = \frac{y}{\sqrt{x}}\,, \qquad \tau = \ln\sqrt{x}\,.$$

Si deve quindi avere $x > 0$ e $y > 0$, perché $s > 0$, e imponendo la $\tau > -s^2/2$ si ha dai calcoli l'ulteriore restrizione

$$y^2 > -x\ln x\,, \qquad 0 < x < 1\,.$$

R.

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{y^2}{x} + \ln x}\,, \qquad (x,y) \in \Omega = \{x > 0\,, y > \sqrt{\max(-x\ln x, 0)}\}\,.$$

50. [15/9/2009 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$xu_x + 2yu_y = \frac{1}{u}\,,$$
$$u(s,1) = 2s\,, \qquad s > 0\,,$$

determinando anche l'aperto massimale di definizione.
R.

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{4x^2}{y} + \ln y}\,, \qquad (x,y) \in \Omega = \Big\{y > 0\,, x > \frac{1}{2}\sqrt{\max(-y\ln y, 0)}\Big\}\,.$$

51. [9/4/2010 (ex)I] Si determini la soluzione del problema

$$xu_x + \frac{y}{x}u_y = x\,,$$
$$u(1,s) = 0\,, \qquad s > 0\,.$$

Soluzione
A) Troviamo le curve caratteristiche al suolo, risolvendo

$$\varphi_1' = \varphi_1\,, \qquad \varphi_1(0) = 1\,,$$
$$\varphi_2' = \varphi_2\varphi_1^{-1}\,, \qquad \varphi_2(0) = s\,,$$

da cui

$$\big(\varphi_1(\tau,s), \varphi_2(\tau,s)\big) = (e^\tau, se^{1-e^{-\tau}})\,, \qquad \tau \in \boldsymbol{R}\,.$$

B) Risolviamo poi la e.d.o. lungo le caratteristiche

$$U' = e^\tau\,, \qquad U(0) = 0\,,$$

da cui

$$U(\tau,s) = e^\tau - 1\,.$$

C) Infine da

$$\begin{aligned} e^{\tau} &= x\,, \\ se^{1-e^{-\tau}} &= y\,, \end{aligned}$$

otteniamo immediatamente la $u(x,y)$.
R.

$$u(x,y) = x - 1\,, \qquad x > 0\,, y > 0\,.$$

250. Edp del I ordine: trasformazioni di coordinate

1. [3/2/2003 (hw)I] Risolvere il problema

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= x^2 + y^2\,, \\ u(x,y) &= x\,, \qquad\qquad \text{su } x^2 + y^2 = 1\,, \end{aligned}$$

e mostrare che la soluzione non è $C^1(\boldsymbol{R}^2)$.
SOLUZIONE
Definiamo

$$v(r,\varphi) = u(x,y)\,,$$

ove (r,φ) sono le solite coordinate polari. Il problema diviene allora

$$\begin{aligned} rv_r &= r^2\,, \\ v(1,\varphi) &= \cos\varphi\,, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi\,. \end{aligned}$$

Da qui si ottiene $v_r = r$ e per integrazione

$$v(r,\varphi) = \frac{r^2}{2} + f(\varphi)\,,$$

ove la f si determina poi imponendo il dato su $r = 1$:

$$f(\varphi) = \cos\varphi - \frac{1}{2}\,.$$

Dunque

$$v(r,\varphi) = \frac{r^2}{2} + \cos\varphi - \frac{1}{2}\,,$$

e tornando alle coordinate cartesiane

$$u(x,y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

È chiaro che u è di classe C^∞ in $x^2 + y^2 > 0$, mentre non è neppure continua nell'origine.

R.

$$u(x,y)=\frac{x^2+y^2-1}{2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\qquad x^2+y^2>0\,.$$

2. [3/2/2003 (hw)I] Risolvere il problema

$$\begin{aligned}xu_x+yu_y&=2xy\,,\\ u(x,y)&=1\,,\qquad \text{su } x^2+y^2=1\,,\end{aligned}$$

e mostrare che la soluzione non è $C^1(\boldsymbol{R}^2)$.
R.

$$\begin{aligned}u(x,y)&=xy-\frac{xy}{x^2+y^2}+1\,,\\ v(r,\varphi)&=\frac{r^2-1}{2}\sin 2\varphi+1\,.\end{aligned}$$

3. [3/2/2003 (hw)I] Risolvere il problema

$$\begin{aligned}xu_x+yu_y&=2xy\,,\\ u(x,y)&=xy\,,\qquad \text{su } x^2+y^2=1\,,\end{aligned}$$

e mostrare che la soluzione è $C^1(\boldsymbol{R}^2)$.
R.

$$\begin{aligned}u(x,y)&=xy\,,\\ v(r,\varphi)&=r^2\cos\varphi\sin\varphi\,.\end{aligned}$$

4. [16/4/2003 (ex)I] Calcolare la soluzione del problema

$$\begin{aligned}xu_x+yu_y&=-u\sqrt{x^2+y^2}\,,\\ u(x,y)&=\pi\,,\qquad\qquad x^2+y^2=4\,,\end{aligned}$$

e dimostrare che è continua in $\boldsymbol{R}^2$, ma non di classe $C^1(\boldsymbol{R}^2)$. (*Sugg.* Considerare la particolare geometria del problema.)
Soluzione
Passando a coordinate polari il problema diviene

$$\begin{aligned}rv_r&=-rv\,,\\ v(2,\varphi)&=\pi\,,\qquad 0\le\varphi\le 2\pi\,.\end{aligned}$$

Si ha subito

$$v(r,\varphi)=\pi e^{-r+2}\,.$$

Quindi

$$u(x,y) = \pi e^{2-\sqrt{x^2+y^2}} .$$

La u è continua come composizione di funzioni continue. Tuttavia, e.g.,

$$u_x = -\pi e^{2-\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} ,$$

che non è continua. In alternativa, si può ragionare così: v è radiale; dunque per essere di classe C^1 nell'origine, dovrebbe essere $v_r \to 0$ per $r \to 0$, mentre invece $v_r \to -\pi e^2$ per $r \to 0$.
R.

$$u(x,y) = \pi e^{2-\sqrt{x^2+y^2}} , \qquad x^2+y^2 > 0 .$$

5. [16/4/2003 (ex)II] Calcolare la soluzione del problema

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= -u , \\ u(x,y) &= \pi , \qquad x^2+y^2 = 4 , \end{aligned}$$

e dimostrare che non è continua in $\boldsymbol{R}^2$. (*Sugg.* Considerare la particolare geometria del problema.)
R.

$$u(x,y) = \frac{2\pi}{\sqrt{x^2+y^2}} , \qquad x^2+y^2 > 0 .$$

6. [20/1/2004 (hw)I] Trovare la soluzione definita nel semipiano $x > 0$ di

$$\begin{aligned} yu_x - xu_y &= x + 1 , \\ u(\sqrt{s}, 0) &= s , \qquad s > 0 . \end{aligned}$$

R.

$$u(x,y) = -y - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + x^2 + y^2 , \qquad x > 0 .$$

7. [14/4/2004 (ex)I] Trovare una condizione sulla funzione f affinché il seguente problema sia risolubile

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= f(x,y)\sqrt{x^2+y^2} , && 1 < x^2+y^2 < 4 , \\ u(x,y) &= x , && x^2+y^2 = 1 , \\ u(x,y) &= y , && x^2+y^2 = 4 . \end{aligned}$$

Soluzione
In coordinate polari r, φ,

$$v(r,\varphi) = u(x,y) , \qquad g(r,\varphi) = f(x,y) ,$$

per cui la e.d.p. diviene

$$rv_r = g(r,\varphi)r\,,$$

ossia

$$v_r = g(r,\varphi)\,,$$

da cui

$$v(2,\varphi) - v(1,\varphi) = \int_1^2 g(r,\varphi)\,\mathrm{d}r = 2\sin\varphi - \cos\varphi\,.$$

R.

$$\int_1^2 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r = 2\sin\varphi - \cos\varphi\,, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi\,.$$

8. [14/4/2004 (ex)II] Trovare una condizione sulla funzione f affinché il seguente problema sia risolubile

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= f(x,y)\sqrt{x^2+y^2}\,, && 4 < x^2+y^2 < 9\,,\\ u(x,y) &= y\,, && x^2+y^2 = 4\,,\\ u(x,y) &= x\,, && x^2+y^2 = 9\,. \end{aligned}$$

R.

$$\int_2^3 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r = 3\cos\varphi - 2\sin\varphi\,, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi\,.$$

9. [15/9/2004 (ex)I] Calcolare la soluzione di

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,,\\ u(x,y) &= y^2\,, \qquad x^2+y^2 = 4\,, x > 0\,, \end{aligned}$$

e trovarne l'aperto massimale di definizione. Esprimere la soluzione sia in coordinate polari che in coordinate cartesiane.

10. [15/9/2004 (ex)I] Risolvere

$$\begin{aligned} yu_x - xu_y &= 3x\,,\\ u(x,x) &= \sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad x > 0\,. \end{aligned}$$

11. [15/9/2004 (ex)II] Calcolare la soluzione di

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= x\,,\\ u(x,y) &= y^2\,, \qquad x = 1\,, \end{aligned}$$

e trovarne l'aperto massimale di definizione. Esprimere la soluzione sia in coordinate polari che in coordinate cartesiane.

12. [15/9/2004 (ex)II] Risolvere

$$
\begin{aligned}
yu_x - xu_y &= 2y\,,\\
u(y,y) &= x^2+y^2\,, \qquad y<0\,.
\end{aligned}
$$

13. [4/2/2005 (hw)I] Trovare tutte le soluzioni di

$$(x,y)\cdot\nabla u(x,y) + D^2u(x,y)(x,y)\cdot(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,,$$

definite in $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Qui $D^2u(x,y)$ indica la matrice hessiana:

$$D^2u(x,y) = \begin{pmatrix} u_{xx}(x,y) & u_{xy}(x,y) \\ u_{xy}(x,y) & u_{yy}(x,y) \end{pmatrix}\,,$$

e quindi $D^2u(x,y)(x,y)\cdot(x,y)$ la forma quadratica

$$x^2u_{xx}(x,y) + 2xyu_{xy}(x,y) + y^2u_{yy}(x,y)\,.$$

(*Sugg.* Passare a coordinate polari, è ovvio).
R.

$$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + c_1(\varphi)\ln\sqrt{x^2+y^2} + c_2(\varphi)\,,$$

ove c_1 e c_2 sono arbitrarie funzioni in $C^2(\boldsymbol{R})$, periodiche di periodo 2π.

14. [1/4/2005 (ex)I] Risolvere

$$
\begin{cases}
xu_x + yu_y = 1\,,\\
u(\cos\varphi,\sin\varphi) = \varphi^2\,, \qquad -\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}
\end{cases}
$$

(esprimere la soluzione sia in coordinate polari che cartesiane).
Soluzione
Passando a coordinate polari, e ponendo $v(r,\varphi) = u(x,y)$, si ha

$$
\begin{cases}
rv_r = 1\,,\\
v(1,\varphi) = \varphi^2\,, \qquad -\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}
\end{cases}
$$

da cui, integrando l'equazione differenziale,

$$v(r,\varphi) = \ln r + C(\varphi)\,,$$

e usando poi il dato di Cauchy,

$$v(r,\varphi) = \ln r + \varphi^2\,, \qquad r>0\,, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\,.$$

In coordinate cartesiane:

$$u(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2} + \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)^2 , \qquad x>0, y \in \boldsymbol{R} .$$

15. [1/4/2005 (ex)II] Risolvere

$$\begin{cases} -yu_x + xu_y = 1 , \\ \qquad u(x,0) = x , \qquad 0 < x < 1 \end{cases}$$

(esprimere la soluzione sia in coordinate polari che cartesiane).
Soluzione
Passando a coordinate polari, e ponendo $v(r,\varphi) = u(x,y)$, si ha

$$\begin{cases} \qquad v_\varphi = 1 , \\ v(r,0) = r , \qquad 0 < r < 1 \end{cases}$$

da cui, integrando l'equazione differenziale,

$$v(r,\varphi) = \varphi + C(r) ,$$

e usando poi il dato di Cauchy,

$$v(r,\varphi) = \varphi + r , \qquad 0 < r < 1 , -\pi < \varphi < \pi .$$

In coordinate cartesiane (restringendoci per brevità al semipiano $x > 0$):

$$u(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \sqrt{x^2+y^2} , \qquad x > 0, x^2+y^2 < 1 .$$

16. [14/4/2005 (ex)I] Si determini $a \in \boldsymbol{R}$ in modo che il problema

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= a\frac{y}{x} , && \text{in } \Omega, \\ u(x,y) &= 0 , && x^2+y^2 = 1 , 0 < y < x , \\ u(x,y) &= \frac{y}{x} , && x^2+y^2 = 4 , 0 < y < x , \end{aligned}$$

abbia soluzione $u \in C^1(\overline{\Omega})$, ove

$$\Omega = \{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 < 4 , 0 < y < x\} .$$

17. [14/4/2005 (ex)II] Si determini $a \in \boldsymbol{R}$ in modo che il problema

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= a(x^2+y^2) , && \text{in } \Omega, \\ u(x,0) &= 0 , && 1 < x < 2 , \\ u(x,x) &= 2x^2 , && \frac{1}{\sqrt{2}} < x < \sqrt{2} , \end{aligned}$$

abbia soluzione $u \in C^1(\overline{\Omega})$, ove

$$\Omega = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\,, 0 < y < x\}\,.$$

R.

$$a = \frac{4}{\pi}\,.$$

18. [23/6/2005 (ex)I] Dimostrare che ogni soluzione di

$$\frac{xu_x + yu_y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -yu_x + xu_y\,,$$

in $\Omega = \{(x,y) \mid x > 0\}$ si può scrivere come

$$u(x,y) = f\Big(\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big)\,,$$

per una funzione $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ opportuna.

19. [23/6/2005 (ex)II] Dimostrare che ogni soluzione di

$$xu_x + yu_y = (yu_x - xu_y)\sqrt{x^2+y^2}\,,$$

in $\Omega = \{(x,y) \mid x > 0\}$ si può scrivere come

$$u(x,y) = f\Big(\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big)\,,$$

per una funzione $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ opportuna.

20. [16/9/2005 (ex)I] Dimostrare che la soluzione di

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= (2\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad && x^2+y^2 > 1\,,\\ u(\cos\theta, \sin\theta) &= u_0(\theta)\,, && 0 \le \theta \le \pi\,, \end{aligned}$$

ove u_0 è una qualunque funzione in $C([0,\pi])$, soddisfa

$$\lim_{r\to\infty} u(r\cos\theta, r\sin\theta) = u_0(\theta)\,,$$

per ogni fissato $\theta \in [0,\pi]$.

21. [16/9/2005 (ex)II] Dimostrare che la soluzione di

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= \sqrt{x^2+y^2}e^{1-\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad && x^2+y^2 > 1\,,\\ u(\cos\theta, \sin\theta) &= u_0(\theta)\,, && 0 \le \theta \le \pi\,, \end{aligned}$$

ove u_0 è una qualunque funzione in $C([0, \pi])$, soddisfa

$$\lim_{r \to \infty} u(r \cos \theta, r \sin \theta) = u_0(\theta) + 1 ,$$

per ogni fissato $\theta \in [0, \pi]$.

22. [15/12/2005 (ex)I] Trovare tutte le soluzioni di

$$x u_x + y u_y = u + 1 , \qquad x^2 + y^2 > 0 .$$

23. [6/2/2006 (hw)I] Trovare una soluzione in un aperto Ω che includa la curva

$$\gamma = \{(s \cos s, s \sin s) \mid 2\pi < s < 6\pi\}$$

che porta il dato, del problema

$$\begin{aligned} x u_x + y u_y &= 2u , \\ u(s \cos s, s \sin s) &= s , \qquad 2\pi < s < 6\pi . \end{aligned}$$

Soluzione

Ponendo $v(r, \varphi) = u(x, y)$, ove (r, φ) sono le usuali coordinate polari, l'equazione diviene

$$r v_r = 2v ,$$

da cui subito

$$v(r, \varphi) = f(\varphi) r^2 .$$

Su $\gamma = (\psi_1, \psi_2)$ vale

$$r^2 = \psi_1(s)^2 + \psi_2(s)^2 = s^2 , \qquad \varphi = s ;$$

la γ è perciò un tratto della spirale $r = \varphi$. Dunque deve valere

$$s = v(s, s) = f(s) s^2 , \quad \text{e quindi} \quad f(s) = \frac{1}{s} .$$

Infine

$$u(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\varphi(x, y)} .$$

Per chiarire cosa abbiamo fatto, e in particolare trovare la forma dell'aperto Ω in cui risulta definita la soluzione, dobbiamo investigare più in particolare la trasformazione di coordinate da cartesiane a polari; soprattutto potrebbe risultare inusuale il fatto che φ vari su un intervallo di ampiezza 4π.
L'aperto di definizione U di v nel piano (r, φ) contiene il segmento

$$\ell = \{(\varphi, \varphi) \mid 2\pi < \varphi < 6\pi\} ;$$

d'altra parte in U non devono cadere punti che rendano non biunivoca la trasformazione $(x, y) \leftrightarrow (r, \varphi)$. È pertanto necessario che

$$U \subset U_0 = \{(r, \varphi) \mid 2\pi < \varphi < 6\pi , -\pi + \varphi < r < \pi + \varphi\} .$$

Il parallelogramma U_0 corrisponde all'aperto Ω_0 del piano (x, y) definito da

$$\Omega_0 = \bigcup_{2\pi<s<6\pi} I_s \,,$$

ove I_s è il segmento sulla semiretta radiale per $\Psi(s)$ composto dai punti che distano da $\Psi(s)$ meno di π. Si noti che i segmenti I_s non si intersecano tra di loro. *Si vede subito che in Ω_0 la trasformazione è biunivoca se in ogni punto (x, y) scegliamo*

$$r(x, y) = x^2 + y^2 \,, \qquad \varphi(x, y) = s \,,$$

ove $s = s(x, y)$ è individuato dalla richiesta $(x, y) \in I_s$.
L'insieme di definizione di v [u] risulta infine proprio U_0 [Ω_0] perché non si sono introdotte altre restrizioni.
R. *La soluzione è, in coordinate polari,*

$$v(r, \varphi) = \varphi^{-1} r^2 \,,$$

definita su

$$U_0 = \{(r, \varphi) \mid 2\pi < \varphi < 6\pi \,, -\pi + \varphi < r < \pi + \varphi\} \,.$$

24. [7/4/2006 (ex)I] Risolvere

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= x + y \,, \\ u(2, s) &= 1 \,, \qquad\qquad s \in \boldsymbol{R} \,, \end{aligned}$$

esprimendo la soluzione sia in coordinate cartesiane che polari. Specificare l'aperto massimale di definizione della soluzione.
Soluzione
In coordinate polari (r, φ) l'e.d.p. diviene (se v denota la u come funzione delle coordinate polari)

$$rv_r = r(\cos\varphi + \sin\varphi) \,,$$

ossia

$$v_r = \cos\varphi + \sin\varphi \,, \qquad r > 0 \,.$$

La curva che porta il dato, cioè la retta $x = 2$, in coordinate polari corrisponde a

$$r = \frac{2}{\cos\varphi} \,, \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \,.$$

Quindi

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= v\left(\frac{2}{\cos\varphi}, \varphi\right) + \int\limits_{\frac{2}{\cos\varphi}}^{r} (\cos\varphi + \sin\varphi) \, \mathrm{d}\bar{r} \\ &= 1 + (\cos\varphi + \sin\varphi)\left(r - \frac{2}{\cos\varphi}\right) \\ &= r\cos\varphi + r\sin\varphi - 1 - 2\operatorname{tg}\varphi \,. \end{aligned}$$

L'aperto massimale di definizione è il semipiano $x > 0$ che è coperto dalle caratteristiche al suolo (cioè le semirette uscenti dall'origine) che intersecano la retta $x = 2$.
R.

$$u(x,y) = x + y - 1 - 2\frac{y}{x}\,, \qquad x > 0\,;$$
$$v(r,\varphi) = r\cos\varphi + r\sin\varphi - 1 - 2\operatorname{tg}\varphi\,, \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\,.$$

25. [7/4/2006 (ex)II] Risolvere

$$xu_x + yu_y = y - x\,,$$
$$u(s,-1) = 0\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

esprimendo la soluzione sia in coordinate cartesiane che polari. Specificare l'aperto massimale di definizione della soluzione.
R.

$$u(x,y) = y - x + 1 - \frac{x}{y}\,, \qquad y < 0\,;$$
$$v(r,\varphi) = r\sin\varphi - r\cos\varphi + 1 - \operatorname{cotg}\varphi\,, \qquad -\pi < \varphi < 0\,.$$

26. [20/4/2006 (ex)I] Si considerino tutte le soluzioni di

$$xu_x + yu_y = f(\sqrt{x^2 + y^2})\,,$$
$$u(\cos\varphi, \sin\varphi) = u_0(\varphi)\,, \qquad 0 < \varphi < \pi\,.$$

È possibile scegliere $f \in C^0((0,\infty))$ indipendente da u_0 in modo che valga una sola delle due condizioni

$$\text{A)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = 0\,, \qquad \text{B)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = +\infty\,,$$

per tutti gli $u_0 \in C^1([0,\pi])$.
Dire quale delle due condizioni A) e B) è possibile soddisfare, dando un esempio esplicito di f.
Soluzione
In coordinate polari, denotando con v l'incognita, il problema si scrive come

$$rv_r(r,\varphi) = f(r)\,, \qquad v(1,\varphi) = u_0(\varphi)\,.$$

Perciò

$$v(r,\varphi) = v(1,\varphi) + \int_1^r \frac{f(s)}{s}\,\mathrm{d}s = u_0(\varphi) + \int_1^r \frac{f(s)}{s}\,\mathrm{d}s\,, \quad r > 0\,.$$

Quindi si può soddisfare solo la condizione B), prendendo per esempio

$$f(r) = -1 \,, \qquad r > 0 \,.$$

In questo modo

$$v(r, \varphi) = u_0(\varphi) - \ln r \to +\infty \,, \qquad r \to 0 \,.$$

R. *La condizione B), prendendo per esempio*

$$f(r) = -1 \,, \qquad r > 0 \,.$$

27. [20/4/2006 (ex)II] Si considerino tutte le soluzioni di

$$\begin{aligned} x u_x + y u_y &= \sqrt{x^2 + y^2} f(\sqrt{x^2 + y^2}) u \,, \\ u(\cos\varphi, \sin\varphi) &= u_0(\varphi) \,, \qquad\qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \,. \end{aligned}$$

È possibile scegliere $f \in C^0((0, \infty))$ indipendente da u_0 in modo che valga una sola delle due condizioni

$$\text{A)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y) = +\infty \,, \qquad \text{B)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y) = 0 \,,$$

per tutti gli $u_0 \in C^1([-\pi/2, \pi/2])$.
Dire quale delle due condizioni A) e B) è possibile soddisfare, dando un esempio esplicito di f.
Soluzione
In coordinate polari, denotando con v l'incognita, il problema si scrive come

$$v_r(r, \varphi) = f(r) v(r, \varphi) \,, \qquad v(1, \varphi) = u_0(\varphi) \,.$$

Perciò

$$v(r, \varphi) = v(1, \varphi) e^{\int_1^r f(s) \, \mathrm{d}s} = u_0(\varphi) e^{\int_1^r f(s) \, \mathrm{d}s} \,, \quad r > 0 \,.$$

Quindi si può soddisfare solo la condizione B), prendendo per esempio

$$f(r) = \frac{1}{r} \,, \qquad r > 0 \,.$$

In questo modo

$$v(r, \varphi) = u_0(\varphi) e^{\int_1^r \frac{1}{s} \, \mathrm{d}s} = u_0(\varphi) e^{\ln r} = u_0(\varphi) r \to 0 \,, \qquad r \to 0 \,.$$

R. *La condizione B), prendendo per esempio*

$$f(r) = \frac{1}{r} \,, \qquad r > 0 \,.$$

28. [6/7/2006 (ex)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$-yu_x + xu_y = \sin x\,,$$
$$u(s,0) = s\,, \qquad s > 0\,.$$

Rappresentare la soluzione sia in coordinate cartesiane che polari nel semipiano $x > 0$.

Soluzione

Passando a coordinate polari (r, φ),

$$v(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,,$$

il problema diviene

$$v_\varphi = \sin(r\cos\varphi)\,,$$
$$v(r,0) = r\,, \qquad r > 0\,.$$

Perciò

$$v(r,\varphi) = r + \int_0^\varphi \sin(r\cos t)\,\mathrm{d}t\,,$$

da cui, ricordando che in $x > 0$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \int_0^{\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})} \sin(\sqrt{x^2+y^2}\cos t)\,\mathrm{d}t\,.$$

R.

$$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \int_0^{\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})} \sin(\sqrt{x^2+y^2}\cos t)\,\mathrm{d}t \qquad x > 0\,;$$
$$v(r,\varphi) = r + \int_0^\varphi \sin(r\cos t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\,.$$

29. [6/7/2006 (ex)II] Risolvere il problema di Cauchy

$$-yu_x + xu_y = e^y\,,$$
$$u(s,0) = s^2\,, \qquad s > 0\,.$$

Rappresentare la soluzione sia in coordinate cartesiane che polari nel semipiano $x > 0$.

R.

$$
u(x,y)=x^2+y^2+\int_0^{\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})}\exp(\sqrt{x^2+y^2}\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad x>0\,;
$$

$$
v(r,\varphi)=r^2+\int_0^{\varphi}e^{r\sin t}\,\mathrm{d}t\,,\qquad -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\,.
$$

30. [2/4/2007 (ex)I] Trovare tutte le possibili costanti a, $b\in\boldsymbol{R}$, tali che esista una soluzione $u\in C^1(\boldsymbol{R}^2)$ di

$$
\begin{aligned}
yu_x-xu_y&=ax^2-by^2\,,\\
u(s,0)&=0\,,\qquad\qquad 0<s<\infty\,,
\end{aligned}
$$

e determinare la funzione u.
Soluzione
Passiamo alle coordinate polari (r,φ). Posto

$$
v(r,\varphi)=u(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,,
$$

si ha

$$
\begin{aligned}
-v_\varphi&=ar^2\cos^2\varphi-br^2\sin^2\varphi\,,\\
v(s,0)&=0\,,\qquad\qquad 0<s<\infty\,.
\end{aligned}
$$

Integrando su $(0,\varphi)$ si ha, usando anche il dato di Cauchy,

$$
v(r,\varphi)=\int_0^{\varphi}\big(br^2\sin^2\theta-ar^2\cos^2\theta\big)\,\mathrm{d}\theta=\frac{b-a}{2}r^2\varphi-\frac{b+a}{4}r^2\sin 2\varphi\,.
$$

Se v deve essere continua in $\boldsymbol{R}^2$ si dovrà intanto avere

$$
v(r,2\pi)=v(r,0)=0\,,\qquad r>0\,.
$$

Perciò deve essere $a=b$. In questo caso

$$
v(r,\varphi)=-ar^2\sin\varphi\cos\varphi\,,
$$

e

$$
u(x,y)=-axy
$$

risulta di classe $C^1(\boldsymbol{R}^2)$.
R.

$$
a=b\,,\qquad u(x,y)=-axy\,,\quad (x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,.
$$

31. [2/4/2007 (ex)II] Trovare tutte le possibili costanti a, $b \in \boldsymbol{R}$, tali che esista una soluzione $u \in C^1(\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ di

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= ay - bx^2 \,, \\ u(s,0) &= 0 \,, \qquad\qquad 0 < s < \infty \,, \end{aligned}$$

e determinare la funzione u.
R.

$$a \in \boldsymbol{R} \,, \quad b = 0 \,, \qquad u(x,y) = a(\sqrt{x^2+y^2} - x) \,, \quad (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \,.$$

32. [2/4/2007 (ex)I] Trovare tutte le possibili costanti a, $b \in \boldsymbol{R}$, tali che esista una soluzione $u \in C^1(\boldsymbol{R}^2)$ di

$$\begin{aligned} yu_x - xu_y &= a + bx \,, \\ u(s,0) &= 0 \,, \qquad\qquad 0 < s < \infty \,, \end{aligned}$$

e determinare la funzione u.

33. [18/4/2007 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= u + 1 \,, \\ u(s,1) &= 0 \,, \qquad\qquad -\infty < s < \infty \,, \end{aligned}$$

esprimendola sia in coordinate polari che cartesiane.
Soluzione
Passando alle coordinate polari r, φ, e definendo

$$v(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \,,$$

il problema diviene

$$\begin{aligned} rv_r &= v + 1 \,, \\ v\Big(\frac{1}{\sin\varphi}, \varphi\Big) &= 0 \,, \qquad\qquad 0 < \varphi < \pi \,. \end{aligned}$$

Integrando per separazione delle variabili si arriva a

$$\ln \frac{v(r,\varphi) + 1}{v\Big(\frac{1}{\sin\varphi}, \varphi\Big) + 1} = \ln \frac{r}{\frac{1}{\sin\varphi}} \,,$$

da cui

$$v(r,\varphi) = r\sin\varphi - 1 \,.$$

R.

$$\begin{aligned} &v(r,\varphi) = r\sin\varphi - 1 \,, \qquad r > 0 \,, 0 < \varphi < \pi \,; \\ &u(x,y) = y - 1 \,, \qquad y > 0 \,. \end{aligned}$$

34. [18/4/2007 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$
\begin{aligned}
xu_x + yu_y &= u + 2\,, \\
u(3, s) &= 0\,, \qquad\qquad -\infty < s < \infty\,,
\end{aligned}
$$

esprimendola sia in coordinate polari che cartesiane.
R.

$$
\begin{aligned}
v(r, \varphi) &= \frac{2}{3} r \cos\varphi - 2\,, \qquad r > 0\,, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\,; \\
u(x, y) &= \frac{2}{3} x - 2\,, \qquad x > 0\,.
\end{aligned}
$$

35. [12/7/2007 (ex)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
xu_x + yu_y &= 2u\,, \\
u(s, 1 - s) &= s\,, \qquad 0 < s < 1\,.
\end{aligned}
$$

SOLUZIONE
Passiamo a coordinate polari (r, φ) con $v(r, \varphi) = u(x, y)$.
La curva che porta il dato è il segmento

$$
y + x = 1\,, \qquad 0 < x < 1\,,
$$

che in coordinate polari è dato da

$$
r = \frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}\,, \qquad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\,.
$$

Il problema diviene dunque

$$
\begin{aligned}
rv_r &= 2v\,, \\
v\Big(\frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}, \varphi\Big) &= \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi}\,, \qquad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\frac{v_r}{v} = \frac{2}{r}\,,
$$

e

$$
\ln \frac{v(r, \varphi)}{v\Big(\frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}, \varphi\Big)} = 2 \ln r(\cos\varphi + \sin\varphi)\,,
$$

per $r > 0$ e $0 < \varphi < \pi/2$.
Sostituendo il dato di Cauchy

$$
v(r, \varphi) = r^2 \cos\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi)\,.
$$

R.

$$u(x,y) = x(x+y)\,, \qquad x>0\,, y>0\,.$$

36. [12/7/2007 (ex)II] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= u\,, \\ u(s, 2-s) &= s\,, \qquad 0<s<2\,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x,y) = x\,, \qquad x>0\,, y>0\,.$$

37. [28/3/2008 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= y\cos x\,, \\ u(s,s) &= 4\,, \qquad 0<s<\infty\,, \end{aligned}$$

esprimendola sia in coordinate cartesiane che polari.
Soluzione
In coordinate polari il problema diviene

$$v_\varphi = r\sin\varphi\cos(r\cos\varphi) = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\sin(r\cos\varphi)\,. \tag{1}$$

La condizione di Cauchy si può scrivere come

$$v\Big(r, \frac{\pi}{4}\Big) = 4\,, \qquad r>0\,.$$

Dunque, integrando la (1) *su* $(\pi/4, \varphi)$ *si ottiene*

$$v(r,\varphi) = 4 - \sin(r\cos\varphi) + \sin\Big(\frac{r}{\sqrt{2}}\Big)\,.$$

La soluzione è definita in tutto il piano meno l'origine.
R.

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 4 - \sin x + \sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\,, \qquad (x,y)\in \boldsymbol{R}^2\setminus\{(0,0)\}\,, \\ v(r,\varphi) &= 4 - \sin(r\cos\varphi) + \sin\Big(\frac{r}{\sqrt{2}}\Big)\,, \qquad r>0\,. \end{aligned}$$

38. [28/3/2008 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} yu_x - xu_y &= x\sin y\,, \\ u(s,s) &= 1\,, \qquad 0<s<\infty\,, \end{aligned}$$

esprimendola sia in coordinate cartesiane che polari.
R.

$$u(x,y) = 1 + \cos y - \cos \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\,, \qquad (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,,$$
$$v(r,\varphi) = 1 + \cos(r\sin\varphi) - \cos\Big(\frac{r}{\sqrt{2}}\Big)\,, \qquad r > 0\,.$$

39. [18/4/2008 (ex)I] Determinare la soluzione $u(x,y)$ del problema di Cauchy

$$(x-1)u_x + (y-1)u_y = u^2\,,$$
$$u\big(s, 1 - \sqrt{1-(s-1)^2}\big) = 1\,, \qquad 0 < s < 2\,.$$

Determinare anche il dominio massimale Ω di definizione della soluzione.
Soluzione
Passiamo alle coordinate polari

$$x = 1 + r\cos\varphi\,, \qquad y = 1 + r\sin\varphi\,,$$

e

$$v(r,\varphi) = u(1 + r\cos\varphi, 1 + r\sin\varphi)\,.$$

Si ottiene il problema

$$rv_r = v^2\,,$$
$$v(1,\varphi) = 1\,, \qquad -\pi < \varphi < 0\,.$$

Quindi

$$\frac{v_r}{v^2} = \frac{1}{r}\,,$$

da cui

$$-\frac{1}{v} + C(\varphi) = \ln r\,, \qquad r > 0\,,$$

e

$$v(r,\varphi) = \frac{1}{C(\varphi) - \ln r}\,.$$

Imponendo il dato di Cauchy si ha

$$v(r,\varphi) = \frac{1}{1-\ln r}\,, \qquad 0 < r < e\,, \quad -\pi < \varphi < 0\,.$$

R.

$$u(x,y) = \frac{1}{1 - \ln\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}\,,$$

in

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 < (x-1)^2 + (y-1)^2 < e^2\,, y < 1\}\,.$$

40. [18/4/2008 (ex)II] Determinare la soluzione $u(x,y)$ del problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
(x-2)u_x + (y-2)u_y &= u\,,\\
u\big(s, 2-\sqrt{4-(s-2)^2}\big) &= 1\,, \qquad 0<s<4\,.
\end{aligned}
$$

Determinare anche il dominio massimale Ω di definizione della soluzione.
R.

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}\,,$$

in

$$\Omega = \{(x,y) \mid y<2\}\,.$$

41. [16/9/2008 (ex)I] Scrivere la soluzione del seguente problema:

$$
\begin{aligned}
(x-1)u_x + (y-2)u_y &= \alpha\,,\\
u(3,s) &= \beta s\,, \qquad s\in\boldsymbol{R}\,,
\end{aligned}
$$

ove α, $\beta\in\boldsymbol{R}$ sono costanti.
Inoltre si trovino i valori di α, $\beta\in\boldsymbol{R}$ che rendono la soluzione estendibile a tutto il piano come funzione di classe C^1.
Soluzione
A) Passiamo a coordinate polari

$$x-1 = r\cos\varphi\,,\quad y-2=r\sin\varphi\,,\qquad r>0\,,\varphi\in(-\pi,\pi)\,,$$

definendo

$$v(r,\varphi)=u(x,y)\,.$$

Nelle nuove coordinate la retta $x=3$ si esprime come

$$r=\frac{2}{\cos\varphi}\,,\qquad -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\,.$$

Quindi il problema diviene

$$
\begin{aligned}
rv_r &= \alpha\,,\\
v\Big(\frac{2}{\cos\varphi},\varphi\Big) &= \beta\Big(\frac{2}{\cos\varphi}\sin\varphi+2\Big)\,, \qquad -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Si ha dunque

$$
\begin{aligned}
v(r,\varphi) &= v\Big(\frac{2}{\cos\varphi},\varphi\Big) + \int_{\frac{2}{\cos\varphi}}^{r} v_\rho(\rho,\varphi)\,\mathrm{d}\rho = v\Big(\frac{2}{\cos\varphi},\varphi\Big) + \int_{\frac{2}{\cos\varphi}}^{r} \frac{\alpha}{\rho}\,\mathrm{d}\rho\\
&= \beta\Big(\frac{2}{\cos\varphi}\sin\varphi+2\Big) + \alpha\ln\frac{r\cos\varphi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Da qui tornando alle variabili cartesiane

$$u(x,y) = \beta\Big(2\frac{y-2}{x-1}+2\Big) + \alpha \ln\frac{x-1}{2}\,, \qquad x>1\,.$$

B) La soluzione è estendibile a tutto il piano come funzione C^1 se e solo se $\alpha = \beta = 0$, ossia se essa è nulla.
R.

$$u(x,y) = \beta\Big(2\frac{y-2}{x-1}+2\Big) + \alpha \ln\frac{x-1}{2}\,, \qquad x>1\,.$$
$$\alpha = \beta = 0\,.$$

42. [16/9/2008 (ex)II] Scrivere la soluzione del seguente problema:

$$(x+1)u_x + (y-1)u_y = \alpha\,,$$
$$u(1,s) = \beta s\,, \qquad s\in \boldsymbol{R}\,,$$

ove α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ sono costanti.
Inoltre si trovino i valori di α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ che rendono la soluzione estendibile a tutto il piano come funzione di classe C^1.
R.

$$u(x,y) = \beta\Big(2\frac{y-1}{x+1}+1\Big) + \alpha \ln\frac{x+1}{2}\,, \qquad x>-1\,.$$
$$\alpha = \beta = 0\,.$$

43. [12/2/2009 (ex)I] Si consideri il problema

$$-yu_x + xu_y = ax+b\,,$$
$$u(s,0) = cs\,, \qquad s>0\,,$$

ove a, b, c sono costanti.
Trovare tutti i valori di a, b, c per cui esiste una soluzione del problema in $C^1\big(\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$, e scrivere tale soluzione sia in coordinate cartesiane che polari.
Soluzione
Passiamo alle variabili polari

$$v(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,.$$

Il problema diviene

$$v_\varphi = ar\cos\varphi + b\,,$$
$$v(r,0) = cr\,, \qquad r>0\,.$$

Quindi

$$v(r,\varphi) = v(r,0) + \int_0^{\varphi} (ar\cos\theta + b)\,\mathrm{d}\theta = cr + ar\sin\varphi + b\varphi\,.$$

Per ottenere una funzione u continua in $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ occorre perciò che $b = 0$; in questo modo si ottiene

$$u(x,y) = c\sqrt{x^2+y^2} + ay\,,$$

che ha la regolarità voluta per a e c arbitrari.
R.

$$u(x,y) = c\sqrt{x^2+y^2} + ay\,, \qquad v(r,\varphi) = cr + ar\sin\varphi\,,$$

con a e c arbitrari.

44. [12/2/2009 (ex)II] Si consideri il problema

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= ax + by\,, \\ u(s,0) &= cs\,, \qquad\qquad s > 0\,, \end{aligned}$$

ove a, b, c sono costanti.
Trovare tutti i valori di a, b, c per cui esiste una soluzione del problema in $C^1(\boldsymbol{R}^2)$, e scrivere tale soluzione sia in coordinate cartesiane che polari.
R.

$$u(x,y) = ay - bx\,, \qquad v(r,\varphi) = ar\sin\varphi - br\cos\varphi\,,$$

con $c = -b$, e a e b arbitrari.

45. [13/7/2009 (ex)I] Trovare la soluzione $u(x,y)$ del problema

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,, \\ u(1,s) &= as\,, \qquad\qquad s \in \boldsymbol{R}\,, \end{aligned}$$

ove $a \in \boldsymbol{R}$ è una costante.
Determinare anche l'aperto massimale di definizione Ω, e i valori di a che rendono la soluzione limitata in

$$\Omega \cap \{1 < x < 2\}\,.$$

Soluzione
Notiamo che Ω dovrà comunque essere contenuto in $\{x > 0\}$, poiché il termine y/x nell'equazione impedisce a x di annullarsi, e la curva che porta il dato è contenuta nel semipiano $\{x > 0\}$.
Passando a coordinate polari

$$v(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,,$$

si ha

$$\begin{aligned} rv_r &= \varphi\,, \\ v\Big(\frac{1}{\cos\varphi},\varphi\Big) &= a\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = a\operatorname{tg}\varphi\,, \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Perciò

$$v(r,\varphi)=v\Big(\frac{1}{\cos\varphi},\varphi\Big)+\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{r}\frac{\varphi}{s}\,\mathrm{d}s=a\operatorname{tg}\varphi+\varphi\ln(r\cos\varphi)\,.$$

Dunque, tornando alle coordinate cartesiane,

$$u(x,y)=a\frac{y}{x}+\ln(x)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,.$$

L'aperto massimale di definizione è

$$\Omega=\{x>0\}\,.$$

Su $\Omega\cap\{1<x<2\}=(1,2)\times\boldsymbol{R}$*, i termini*

$$\ln(x)\,,\qquad \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,,$$

sono limitati. Invece

$$\Big|\frac{y}{x}\Big|\to\infty\,,\qquad |y|\to\infty\,.$$

Pertanto l'unico valore di a *che rende* u *limitata ove richiesto è* $a=0$.
R.

$$u(x,y)=a\frac{y}{x}+\ln(x)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,,\qquad (x,y)\in\Omega=(0,\infty)\times\boldsymbol{R}\,.$$
$$a=0\,.$$

46. [13/7/2009 (ex)II] Trovare la soluzione $u(x,y)$ del problema

$$xu_x+yu_y=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,,$$
$$u(1,s)=\ln(1+as^2)\,,\qquad s\in\boldsymbol{R}\,,$$

ove $a\geq 0$ è una costante.
Determinare anche l'aperto massimale di definizione Ω, e i valori di a che rendono la soluzione limitata in

$$\Omega\cap\{1<x<2\}\,.$$

R.

$$u(x,y)=\ln\Big[1+a\Big(\frac{y}{x}\Big)^2\Big]+\ln(x)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,,\qquad (x,y)\in\Omega=(0,\infty)\times\boldsymbol{R}\,.$$
$$a=0\,.$$

47. [15/9/2009 (ex)I] Si calcoli la soluzione del problema

$$xu_x+yu_y=x+y\,,$$
$$u(x,y)=a(x+y)\,,\qquad x^2+y^2=1\,,$$

ove $a \in \boldsymbol{R}$ è costante.
Si determinino inoltre gli eventuali valori di a che rendono la soluzione di classe $C^0(\boldsymbol{R}^2)$.
Soluzione
Passando a coordinate polari

$$v(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)\,,$$

si ottiene il problema

$$\begin{aligned} r v_r &= r \cos \varphi + r \sin \varphi\,, \\ v(1, \varphi) &= a(\cos \varphi + \sin \varphi)\,. \end{aligned}$$

Integrando l'equazione differenziale si ha

$$v(r, \varphi) = v(1, \varphi) + \int_1^r [\cos \varphi + \sin \varphi]\,\mathrm{d}\rho = r[\cos \varphi + \sin \varphi] + (a-1)[\cos \varphi + \sin \varphi]\,.$$

L'unico valore di a che rende v continua fino nell'origine è $a = 1$.
R.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x + y + (a-1)\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \\ v(r, \varphi) &= r[\cos \varphi + \sin \varphi] + (a-1)[\cos \varphi + \sin \varphi]\,; \\ a &= 1\,. \end{aligned}$$

48. [15/9/2009 (ex)II] Si calcoli la soluzione del problema

$$\begin{aligned} x u_x + y u_y &= x^2 + y^2\,, \\ u(x, y) &= a(x + y)\,, \qquad x^2 + y^2 = 1\,, \end{aligned}$$

ove $a \in \boldsymbol{R}$ è costante.
Si determinino inoltre gli eventuali valori di a che rendono la soluzione di classe $C^0(\boldsymbol{R}^2)$.
R.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{x^2+y^2-1}{2} + a\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \\ v(r, \varphi) &= \frac{r^2-1}{2} + a[\cos \varphi + \sin \varphi]\,; \\ a &= 0\,. \end{aligned}$$

49. [9/4/2010 (ex)I] Si determini la soluzione del problema

$$\begin{aligned} y u_x - x u_y &= u^2\,, \\ u(s, s) &= s^a\,, \qquad s > 0\,, \end{aligned}$$

ove $a > 0$ è una costante assegnata, e si mostri che l'aperto massimale di definizione non può contenere

$$A = \{(x, y) \mid 0 < y < x\}\,.$$

Soluzione

In coordinate polari

$$v(r, \varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,,$$

e

$$v_\varphi = -v^2\,, \qquad v\Big(r, \frac{\pi}{4}\Big) = \Big(\frac{r}{\sqrt{2}}\Big)^a\,,$$

da cui

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{\Big(\frac{\sqrt{2}}{r}\Big)^a + \varphi - \frac{\pi}{4}}\,.$$

Dunque l'aperto massimale di soluzione

$$\Omega = \Big\{(x, y) \mid \Big(\frac{\sqrt{2}}{r}\Big)^a + \varphi - \frac{\pi}{4} > 0\Big\}$$

soddisfa

$$A \cap \Omega = \Big\{r < \frac{1}{\sqrt{2}\Big(\frac{\pi}{4} - \varphi\Big)^{1/a}}\,, 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}\Big\} \neq A\,.$$

R.

$$u(x, y) = \frac{1}{\Big(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)^a + \varphi - \frac{\pi}{4}}\,,$$

$$\Omega = \Big\{(x, y) \mid \Big(\frac{\sqrt{2}}{r}\Big)^a + \varphi - \frac{\pi}{4} > 0\Big\}\,.$$

290. Edp del I ordine: modelli

1. [3/2/2003 (hw)I] Si consideri una popolazione di batteri; indichiamo con $n(x, t)$ la densità di batteri rispetto all'età x al tempo t. Cioè, per $0 \le x_1 < x_2$, $t \ge 0$,

$$\int_{x_1}^{x_2} n(x, t)\,\mathrm{d}x$$

è il numero di batteri con età compresa tra x_1 e x_2, nell'istante t. Assumiamo

- non nascono nuovi batteri;
- i batteri che hanno età x muoiono con un tasso proporzionale alla loro età x e al loro numero n; sia $\alpha > 0$ la costante di proporzionalità.

1) Dimostrare che n verifica

$$n_t + n_x = -\alpha x n \,.$$

[*Sugg.:* $n(x, t+h) - n(x-h, t) = \dots$.]
2) Che dimensioni fisiche hanno n e α?
3) Supponiamo che per $t = 0$, $n(x, 0) = c$, $a < x < b$, ove a, b, c sono costanti positive; determinare il numero totale di batteri $N(t)$ dopo un tempo t.
4) È possibile, nel modello matematico qui introdotto, considerare una popolazione di batteri che abbiano tutti la stessa età?
Soluzione
1) Vale per $h > 0$

$$n(x+h, t+h) - n(x, t) = -h\alpha x n(x, t) + o(h) \,,$$

poiché i batteri che hanno età $x+h$ al tempo $t+h$ sono quelli che avevano età x al tempo t, meno quelli morti in $(t, t+h)$. Dividendo per h, e mandando $h \to 0$ si ha

$$n_x + n_t = -\alpha x n \,.$$

2) Sia x che t hanno la dimensione T di un tempo. Dunque n per definizione ha dimensione T^{-1}, e per esempio dall'e.d.p. appena ricavata per n, la dimensione di α risulta essere T^{-2}.
3) Si tratta di risolvere

$$\begin{aligned} n_x + n_t &= -\alpha x n \,, \\ n(x, 0) &= c \,, \qquad\qquad a < x < b \,. \end{aligned}$$

Troviamo le caratteristiche al suolo, risolvendo

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= 1 \,, \qquad \varphi_1(0) = s \,, \\ \varphi_2' &= 1 \,, \qquad \varphi_2(0) = 0 \,, \end{aligned}$$

ove la curva che porta il dato è

$$(s, 0) \,, \qquad a < s < b \,.$$

Le curve caratteristiche sono dunque

$$\big(\varphi_1(\tau; s), \varphi_2(\tau; s)\big) = \big(\tau + s, \tau\big) \,, \qquad -\infty < \tau < \infty \,.$$

[Nel seguito possiamo considerare in modo formale anche valori negativi di τ, nonostante sopra si siano introdotti solo tempi positivi.] L'aperto spazzato da tali caratteristiche è perciò la striscia

$$t + a < x < t + b \,.$$

La

$$U(\tau) = n\big(\varphi_1(\tau; s), \varphi_2(\tau; s)\big)$$

risolve

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} &= -\alpha(\tau + s) U \,, \\ U(0) &= c \,. \end{aligned}$$

Quindi

$$U(\tau) = ce^{-\alpha\frac{(\tau+s)^2}{2}+\alpha\frac{s^2}{2}}\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,.$$

Tornando a (x, t):

$$n(x, t) = ce^{-\alpha xt+\frac{\alpha}{2}t^2}\,, \qquad a + t < x < b + t\,.$$

Infine

$$N(t) = \int_{a+t}^{b+t} n(x, t)\,\mathrm{d}x = \frac{ce^{-\frac{\alpha}{2}t^2}}{\alpha t}\left[e^{-\alpha at} - e^{-\alpha bt}\right].$$

Per $t \to 0$ si ha, come si deve, $N(t) \to (b - a)c$.
4) No, almeno se si vuole considerare un numero positivo M di batteri e una funzione regolare (diciamo continua) n: se tutti i batteri hanno età $x_0 > 0$, per definizione di n si ha

$$M = \int_{x_0-h}^{x_0+h} n(x, t)\,\mathrm{d}x\,,$$

per ogni $x_0 > h > 0$, mentre il termine a destra tende a zero per $h \to 0$.
R.

2) $[n] = T^{-1}\,, \quad [\alpha] = T^{-2}\,.$

3) $N(t) = \dfrac{ce^{-\frac{\alpha}{2}t^2}}{\alpha t}\left[e^{-\alpha at} - e^{-\alpha bt}\right].$

4) *No.*

300. Equazione delle onde

1. [6/2/2004 (hw)I] Risolvere

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2u_{xx} &= 0\,, \qquad && -ct < x < ct\,,\ 0 < t\,, \\ u(-ct, t) &= a(t)\,, && 0 < t\,, \\ u(ct, t) &= b(t)\,, && 0 < t\,. \end{aligned}$$

Dare condizioni su a e b perché la soluzione sia $C^2(\overline{Q})$, $Q = \{(x, t) \mid -ct < x < ct\,, 0 < t\}$.
Soluzione
Si sa che u risolve l'equazione delle onde in Q se e solo se

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)\,, \qquad (x, t) \in Q\,,$$

con f, g opportune funzioni di una variabile, di classe C^2. Per trovare f e g usiamo i dati al contorno

$$\begin{aligned} f(-2ct) + g(0) &= u(-ct, t) = a(t)\,, \\ f(0) + g(2ct) &= u(ct, t) = b(t)\,. \end{aligned}$$

Quindi, ponendo $s = -2ct < 0$, $\tau = 2ct > 0$,

$$\begin{aligned} f(s) &= a\Big(-\frac{s}{2c}\Big) - g(0)\,, \qquad & s < 0\,, \\ g(\tau) &= b\Big(\frac{\tau}{2c}\Big) - f(0)\,, \qquad & \tau > 0\,. \end{aligned}$$

Notiamo che in Q *valgono*

$$x - ct < 0\,, \qquad x + ct > 0\,,$$

e dunque si può scrivere

$$u(x,t) = a\Big(\frac{ct - x}{2c}\Big) + b\Big(\frac{x + ct}{2c}\Big) - g(0) - f(0)\,. \tag{1}$$

D'altronde, se u *deve essere continua in* $\overline{Q}$, *si deve avere*

$$a(0) = b(0) = u(0,0)\,,$$

per cui dalla (1) *segue*

$$a(0) = b(0) = u(0,0) = a(0) + b(0) - g(0) - f(0)\,.$$

Infine le costanti $f(0)$ *e* $g(0)$ *devono soddisfare*

$$f(0) + g(0) = a(0) = b(0)\,.$$

Si vede che nell'ipotesi $a(0) = b(0)$, a, $b \in C^2([0,\infty))$ *la* u *così definita risulta essere in* $C^2(\overline{Q})$.
R.

$$u(x,t) = a\Big(\frac{ct - x}{2c}\Big) + b\Big(\frac{x + ct}{2c}\Big) - a(0)\,,$$

se a, $b \in C^2([0,\infty))$, *con* $a(0) = b(0)$.

2. [6/2/2004 (hw)I] Risolvere

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, \qquad & -ct < x < ct\,,\ 0 < t\,, \\ u_t(-ct,t) &= a(t)\,, \qquad & 0 < t\,, \\ u(ct,t) &= b(t)\,, \qquad & 0 < t\,. \end{aligned}$$

Dare condizioni su a e b perché la soluzione sia $C^2(\overline{Q})$, $Q = \{(x,t) \mid -ct < x < ct\,, 0 < t\}$.
Soluzione
Si sa che u *risolve l'equazione delle onde in* Q *se e solo se*

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)\,, \qquad (x,t) \in Q\,,$$

con f, g *opportune funzioni di una variabile, di classe* C^2. *Per trovare* f *e* g *usiamo i dati al contorno*

$$\begin{aligned} -cf'(-2ct) + cg'(0) &= u_t(-ct,t) = a(t)\,, \\ f(0) + g(2ct) &= u(ct,t) = b(t)\,. \end{aligned}$$

Quindi, ponendo $s=-2ct<0$, $\tau=2ct>0$,

$$f'(s)=-\frac{1}{c}a\Big(-\frac{s}{2c}\Big)+g'(0)\,,\qquad s<0\,,\tag{1}$$
$$g(\tau)=b\Big(\frac{\tau}{2c}\Big)-f(0)\,,\qquad \tau>0\,.\tag{2}$$

Integrando la (1) *su* $(s,0)$ *si ha*

$$f(s)=f(0)-\frac{1}{c}\int_0^s a\Big(-\frac{\sigma}{2c}\Big)\,\mathrm{d}\sigma+g'(0)s\,.$$

Restano per ora indeterminate le costanti $g'(0)$ *e* $f(0)$. *La* $g'(0)$ *si ricava derivando la* (2):

$$g'(0)=\frac{1}{2c}b'(0)\,.$$

Allora si ha in Q

$$u(x,t)=f(0)-\frac{1}{c}\int_0^{x-ct}a\Big(-\frac{\sigma}{2c}\Big)\,\mathrm{d}\sigma+b'(0)\frac{x+ct}{2c}+b\Big(\frac{x+ct}{2c}\Big)-f(0)\,,$$

e quindi la scelta di $f(0)$ *è in effetti ininfluente nell'espressione di* u.
R.

$$u(x,t)=b\Big(\frac{x+ct}{2c}\Big)+b'(0)\frac{x-ct}{2c}+2\int_0^{\frac{ct-x}{2c}}a(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

se $a\in C^1([0,\infty))$, $b\in C^2([0,\infty))$.

3. [15/9/2004 (ex)I] Scegliere α in modo che il seguente problema abbia soluzioni in $C^1(\overline{\Omega})$, ove $\Omega=\{0<x<ct,t>0\}$, e determinarle:

$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx}&=0\,, && \text{in } \Omega,\\ u(0,t)&=0\,, && t\ge 0\,,\\ u_t(ct,t)&=\cos t-\alpha\,, && t\ge 0\,. \end{aligned}$$

Soluzione
Si sa che u *risolve l'equazione delle onde in* Ω *se e solo se*

$$u(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct)\,,\qquad (x,t)\in\Omega\,,$$

con f, g *opportune funzioni di una variabile, di classe* C^2.
Si può osservare subito che non *si avrà soluzione unica; se infatti* u *risolve il problema, anche ogni funzione nella forma*

$$v(x,t)=u(x,t)+\lambda x\,,\qquad \lambda\in\boldsymbol{R}$$

è soluzione. Ancora in via preliminare, se u *deve essere in* $C^1(\overline{\Omega})$, *si deve avere*

$$1-\alpha=u_t(0,0)=\frac{\partial}{\partial t}u(0,t)_{|t=0}=0\,,$$

e quindi

$$\alpha = 1\,.$$

Per trovare f e g usiamo i dati al contorno

$$\begin{aligned} f(-ct) + g(ct) &= u(0,t) = 0\,, \\ -cf'(0) + cg'(2ct) &= u_t(ct,t) = \cos t - 1\,. \end{aligned}$$

Quindi, ponendo $s = -ct < 0$, $\tau = 2ct > 0$,

$$\begin{aligned} f(s) &= -g(-s)\,, && s < 0\,, \\ g'(\tau) &= f'(0) + \frac{1}{c}\Big[\cos\frac{\tau}{2c} - 1\Big]\,, && \tau > 0\,, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} g(\tau) &= g(0) + f'(0)\tau + 2\sin\frac{\tau}{2c} - \frac{\tau}{c}\,, && \tau \geq 0\,, \\ f(s) &= -g(0) + f'(0)s + 2\sin\frac{s}{2c} - \frac{s}{c}\,, && s \leq 0\,. \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -g(0) + f'(0)(x-ct) + 2\sin\frac{x-ct}{2c} - \frac{x-ct}{c} \\ &\quad + g(0) + f'(0)(x+ct) + 2\sin\frac{x+ct}{2c} - \frac{x+ct}{c} \\ &= 2\Big(f'(0) - \frac{1}{c}\Big)x + 2\sin\frac{x-ct}{2c} + 2\sin\frac{x+ct}{2c}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

La costante $f'(0)$ non può essere determinata, come osservato sopra.
R.

$$u(x,t) = 4\sin\frac{x}{2c}\cos\frac{t}{2} + \lambda x\,, \qquad \lambda \in \boldsymbol{R}\,.$$

4. [15/9/2004 (ex)II] Scegliere α in modo che il seguente problema abbia soluzioni in $C^1(\overline{\Omega})$, ove $\Omega = \{0 < x < ct, t > 0\}$, e determinarle:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && \text{in } \Omega, \\ u(0,t) &= 0\,, && t \geq 0\,, \\ u_t(ct,t) &= e^t - \alpha\,, && t \geq 0\,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x,t) = 2e^{\frac{x+ct}{2c}} - 2e^{\frac{ct-x}{2c}} + \lambda x\,, \qquad \lambda \in \boldsymbol{R}\,.$$

5. [6/2/2006 (hw)I] Discutere l'unicità di soluzioni $u \in C^2(\overline{\Omega})$ del problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && \text{in } \Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < vt\,, t > 0\}, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(vt,t) &= 0\,, && t > 0\,. \end{aligned}$$

Qui $c > 0$, $v \geq c$ sono parametri assegnati.
(Si noti che $u \equiv 0$ è una soluzione. Si tratta di accertare se esistono altre soluzioni.)

Soluzione

È noto che deve essere per ogni fissata soluzione u

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)\,,$$

da cui, imponendo i dati al contorno,

$$f(-ct) + g(ct) = 0\,, \tag{1}$$
$$f((v-c)t) + g((v+c)t) = 0\,. \tag{2}$$

Nel caso $v = c$ si ha da (2) che g è costante; allora, per la (1), anche f è costante, e quindi u essendo costante deve essere la costante nulla.
Nel caso $v \neq c$, le (1)–(2) si possono anche scrivere come

$$f(-s) = -g(s)\,, \qquad s > 0\,, \tag{3}$$
$$f(-s) = -g(\beta s)\,, \qquad \beta s > 0\,, \tag{4}$$

ove si è definita per brevità la costante

$$\beta = \frac{c+v}{c-v}\,.$$

Se $v > c$, allora $\beta < -1$. In questo caso le (3)–(4) permettono di ottenere f in funzione di g sia per argomenti negativi che positivi. Quindi la soluzione u sarà data da

$$u(x,t) = \begin{cases} g(x+ct) - g(ct-x)\,, & 0 \leq x \leq ct\,, \\ g(x+ct) - g(\beta(ct-x))\,, & ct < x \leq vt\,. \end{cases} \tag{5}$$

Resta tuttavia da imporre che u sia in effetti in $C^2(\overline{\Omega})$. Si vede con calcoli elementari che questo segue da $g \in C^2([0,\infty))$, con

$$g'(0)(1-\beta) = 0\,, \quad g''(0)(1 \pm \beta^2) = 0\,, \qquad \text{cioè con} \qquad g'(0) = 0\,, \quad g''(0) = 0\,.$$

Quindi esistono infinite soluzioni, date dalla (5) al variare di g specificata come sopra.

Un caso interessante. *Il caso $v < c$, ossia $\beta > 1$, è interessante ma contiene qualche complicazione tecnica. In questo caso sia la (3) che la (4) valgono per $s > 0$, e quindi in particolare*

$$g(s) = g(s\beta^{-1})\,, \qquad \text{per ogni } s > 0.$$

Iterando quest'uguaglianza si ottiene, per ogni fissato $s > 0$, se L denota il limite finito di g nell'origine,

$$g(s) = g(s\beta^{-1}) = g(s\beta^{-2}) = \cdots = g(s\beta^{-n}) \to L\,,$$

da cui $g(s) = L$. Perciò g è costante, e quindi anche f lo è, per esempio per la (1). La soluzione u si mantiene quindi identicamente nulla.
Tuttavia si osservi che l'esistenza di L non è automatica: sia f che g potrebbero essere di classe C^2 solo, rispettivamente, in $(-\infty,0)$ e in $(0,\infty)$ (in questo caso

dovrebbero comportarsi vicino all'origine in modo tale da mantenere la regolarità di u). Occorre quindi dimostrare l'esistenza del limite finito L di g. L'argomento sopra implica

$$g(s) = g(\beta^n s)\,, \tag{6}$$

per ogni $s > 0$ e $n \geq 1$.
Considerando il comportamento di u sulla semiretta $x = \lambda t$, $t > 0$, per ogni fissato $0 \leq \lambda \leq v$, si ha in modo simile a quanto visto sopra,

$$g(\alpha s) = -f(-s) + u\big(\lambda(c-\lambda)^{-1}s, (c-\lambda)^{-1}s\big) =: -f(-s) + \omega(\lambda, s)\,, \tag{7}$$

per ogni $s > 0$, ove si è posto $\alpha = (c+\lambda)/(c-\lambda)$; si noti che l'uguaglianza precedente è vera per ogni $s > 0$ e ogni $1 \leq \alpha \leq \beta$. Per ogni $0 < \tau < 1$ esiste un unico n tale che $1 \leq \beta^n \tau < \beta$; scegliamo poi $\alpha = \beta^n \tau$. Vale allora (denotando $s = \alpha\tau$)

$$\begin{aligned} g(\tau) - g(1) &= g(\tau) - g(\beta^n \tau \alpha^{-1}) \\ &= g(\tau) - g(\tau\alpha^{-1}) = g(\alpha s) - g(s) = \omega(\lambda(\alpha), s) - \omega(1, s)\,. \end{aligned}$$

Si noti che α dipende da τ, ma in ogni caso

$$|\omega(\lambda, s)| \leq \max_{0 \leq t \leq (c-v)^{-1}s} |u(x,t)| =: \omega_0(s)\,,$$

che non dipende da λ. Quindi

$$|g(\tau) - g(1)| \leq 2\omega_0(\beta\tau) \to 0\,,$$

per $\tau \to 0$. Questo dimostra che il limite per $\tau \to 0$ esiste finito, e permette di ricondursi al caso precedente.
Un esempio importante. *Una funzione che soddisfa la (6), ma non è continua nell'origine, è, per $\beta > 1$,*

$$G(s) = \sin\left(2\pi \frac{\ln s}{\ln \beta}\right), \qquad s > 0\,.$$

Definiamo (prendendo $\beta = (c+v)/(c-v)$)

$$u(x,t) = G(x + ct) - G(ct - x);$$

questa u non *deve soddisfare almeno una delle proprietà richieste sopra, altrimenti contraddirebbe quanto detto. Quale?*

6. [18/4/2007 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & x > ct\,, t > 0\,, \\ u(ct, t) &= t\,, & t > 0\,, \\ u(x, 0) &= 0\,, & x > 0\,, \end{aligned}$$

e dimostrare che è unica.
SOLUZIONE
Si sa che deve valere

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali e al contorno si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) + g(x) &= 0\,, \qquad x > 0\,,\\
f(0) + g(2ct) &= t\,, \qquad t > 0\,.
\end{aligned}
$$

Dunque, ponendo $\tau = 2ct$,

$$
g(\tau) = -f(0) + \frac{\tau}{2c}\,, \qquad \tau > 0\,,
$$

e

$$
f(x) = -g(x) = f(0) - \frac{x}{2c}\,, \qquad x > 0\,.
$$

Ne segue

$$
u(x,t) = f(0) - \frac{x-ct}{2c} - f(0) + \frac{x+ct}{2c} = t\,.
$$

R.

$$
u(x,t) = t\,, \qquad x > ct\,, t > 0\,.
$$

7. [18/4/2007 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, \qquad x > ct\,, t > 0\,,\\
u(ct,t) &= 2t\,, \qquad t > 0\,,\\
u(x,0) &= 0\,, \qquad x > 0\,,
\end{aligned}
$$

e dimostrare che è unica.
R.

$$
u(x,t) = 2t\,, \qquad x > ct\,, t > 0\,.
$$

8. [16/9/2008 (ex)I] Si dimostri che se $u \in C^2(\overline{Q})$ soddisfa

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, \qquad (x,t) \in Q\,,\\
u_x(ct,t) &= 0\,, \qquad t > 0\,,\\
u_t(-ct,t) &= 0\,, \qquad t < 0\,,
\end{aligned}
$$

allora u è costante in Q, ove

$$
Q = \{(x,t) \mid -\infty < t < \infty\,, c|t| < x < \infty\}\,.
$$

Soluzione
Si sa che

$$
u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)\,,
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
u_x(x,t) &= f'(x-ct) + g'(x+ct)\,,\\
u_t(x,t) &= -cf'(x-ct) + cg'(x+ct)\,.
\end{aligned}
$$

Si noti che sia f che g sono calcolate sempre in argomenti non negativi. Dunque, per le condizioni al contorno,

$$
\begin{aligned}
f'(0) + g'(2ct) &= 0\,, \qquad t > 0\,,\\
-cf'(-2ct) + cg'(0) &= 0\,, \qquad t < 0\,.
\end{aligned}
$$

Dalla prima di queste equazioni segue che g' è costante, mentre dalla seconda segue che anche f' lo è; più in particolare le due equazioni si possono combinare ottenendo

$$
f' = -g' = -f'\,,
$$

che implica che entrambe f' e g' si annullino. Quindi f e g sono costanti e la tesi è dimostrata.

9. [16/9/2008 (ex)II] Si dimostri che se $u \in C^2(\overline{Q})$ soddisfa

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, \qquad (x,t) \in Q\,,\\
u_t(ct,t) &= 0\,, \qquad t > 0\,,\\
u_x(-ct,t) &= 0\,, \qquad t < 0\,,
\end{aligned}
$$

allora u è costante in Q, ove

$$
Q = \{(x,t) \mid -\infty < t < \infty\,, c|t| < x < \infty\}\,.
$$

10. [12/1/2009 (ex)I] Una funzione $u \in C^2(\boldsymbol{R}^2)$ soddisfa

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^2,\\
u(ct,t) &= 0\,, \qquad 0 \le t \le \frac{L}{c}\,,\\
u(L,t) &= 0\,, \qquad 0 \le t \le \frac{L}{c}\,,
\end{aligned}
$$

ove L, c sono costanti positive.
Determinare un aperto Ω di $\boldsymbol{R}^2$ ove $u \equiv 0$.
Soluzione
Si sa che

$$
u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)\,,
$$

da cui si ottiene subito, per le condizioni assegnate,

$$
\begin{aligned}
f(0) + g(2ct) &= 0\,,\\
f(L-ct) + g(L+ct) &= 0\,,
\end{aligned}
$$

per $0 \le t \le L/c$.
Queste due condizioni possono essere riscritte (introducendo le nuove variabili $y = 2ct$ e $z = L - ct$) come

$$
\begin{aligned}
g(y) &= -f(0)\,, \qquad && 0 \le y \le 2L\,,\\
f(z) &= -g(2L-z)\,, \qquad && 0 \le z \le L\,.
\end{aligned}
$$

Si noti che queste uguaglianze valgono per ogni valore di y e z negli intervalli specificati. Dunque si avrà

$$u(x,t) = f(x-ct)+g(x+ct) = f(z)+g(y) = -g(2L-z)+g(y) = f(0)-f(0) = 0\,,$$

ammesso che si possano scegliere y e z in modo che:

$$x - ct = z \in [0, L]\,, \qquad x + ct = y \in [0, 2L]\,,$$

cosicché valga anche $2L - z \in [0, 2L]$. Questo conduce a

$$ct \le x \le L + ct\,, \qquad -ct \le x \le 2L - ct\,.$$

R.

$$\Omega = \{(x,t) \mid ct < x < L + ct\,, -ct < x < 2L - ct\}\,.$$

11. [12/1/2009 (ex)II] Una funzione $u \in C^2(\boldsymbol{R}^2)$ soddisfa

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, &&\text{in } \boldsymbol{R}^2,\\ u(ct,t) &= 0\,, && 0 \le t \le \frac{L}{c}\,,\\ u\Big(x, \frac{L}{c}\Big) &= 0\,, && 0 \le x \le L\,, \end{aligned}$$

ove L, c sono costanti positive.
Determinare un aperto Ω di $\boldsymbol{R}^2$ ove $u \equiv 0$.
R.

$$\Omega = \{(x,t) \mid -L + ct < x < ct\,, -ct < x < 2L - ct\}\,.$$

310. Formula di D'Alembert

1. [30/1/2003 (hw)I] Consideriamo la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && x \in \boldsymbol{R},\, t > 0\,,\\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && x \in \boldsymbol{R}\,,\\ u_t(x,0) &= u_1(x)\,, && x \in \boldsymbol{R}. \end{aligned}$$

Assumiamo che $u_0 \equiv 0$. Dimostrare che, se u_1 è integrabile in $\boldsymbol{R}$, allora esiste, per ogni fissato x,

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = U_\infty\,,$$

ove la costante U_∞ è indipendente da x.

Soluzione

Per la formula di D'Alembert si ha

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2c} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_1(s)\,\mathrm{d}s =: U_\infty\,.$$

R.

$$U_\infty = \frac{1}{2c} \int\limits_{\boldsymbol{R}} u_1(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

2. [30/1/2003 (hw)I] a) Dare un esempio di dati u_0, u_1, ciascuno non identicamente nullo, tali che la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & x \in \boldsymbol{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, & x \in \boldsymbol{R}\,, \\ u_t(x,0) &= u_1(x)\,, & x \in \boldsymbol{R}\,, \end{aligned}$$

soddisfi

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } x \text{ fissato.}$$

b) Dare un esempio di dati u_0, u_1, ciascuno non identicamente nullo, tali che la soluzione del problema precedente soddisfi

$$\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t > 0 \text{ fissato.}$$

Soluzione

a) Per semplicità imponiamo che le due parti della formula di D'Alembert

$$J_1 = \frac{1}{2}[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)]\,, \qquad J_2 = \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

vadano ciascuna a zero. Dunque chiediamo

$$\lim_{s\to\infty} u_0(s) = \lim_{s\to-\infty} u_0(s) = 0\,,$$

e

$$u_1 \text{ integrabile in } \boldsymbol{R}, \text{ con } \int\limits_{\boldsymbol{R}} u_1(s)\,\mathrm{d}s = 0\,.$$

Per esempio

$$u_0(s) = e^{-s^2}\,, \qquad u_1(s) = s e^{-s^2}\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$

Oppure, eliminando la richiesta che ciascuna J_i vada a zero, e chiedendo solo $J_1 + J_2 \to 0$, si può prendere

$$u_0(s) - \frac{\sqrt{\pi}}{2c} \frac{s^2}{1+s^2}\,, \qquad u_1(s) = e^{-s^2}\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$

b) In questo caso basta chiedere

$$\lim_{s\to\infty} u_0(s) = 0\,, \qquad \lim_{s\to\infty} u_1(s) = 0\,.$$

Sotto queste ipotesi infatti è chiaro che $J_1 \to 0$ *se* $x \to \infty$, *mentre*

$$|J_2| \le \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} |u_1(s)|\,\mathrm{d}s \le t \sup_{[x-ct,x+ct]} |u_1| \to 0\,, \qquad x \to \infty\,.$$

3. [30/1/2003 (hw)I] Problema dell'impulso concentrato
Consideriamo la soluzione $u_{\varepsilon,\sigma}$ del problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & x &\in \boldsymbol{R},\ t > 0\,,\\ u(x,0) &= u_0(x)\,, & x &\in \boldsymbol{R}\,,\\ u_t(x,0) &= u_1(x)\,, & x &\in \boldsymbol{R}\,, \end{aligned}$$

con i dati $u_0 \equiv 0$ e $u_1(x) = f_{\varepsilon,\sigma}(x)$, ove

$$f_{\varepsilon,\sigma}(x) = \frac{1}{2\varepsilon^\sigma}\chi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(x)\,, \qquad \varepsilon > 0\,.$$

Qui $\sigma > 0$ è fissato. Si scriva la soluzione e se ne calcoli il limite per $\varepsilon \to 0$, per i vari valori di σ. Si colleghino i vari comportamenti al valore di

$$\ell_\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\boldsymbol{R}} f_{\varepsilon,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si discuta in particolare il caso in cui $\ell_\sigma \in (0,\infty)$.
Soluzione
Scriviamo la soluzione

$$u_{\varepsilon,\sigma}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} f_{\varepsilon,\sigma}(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4c\varepsilon^\sigma}\left|(x-ct,x+ct)\cap(-\varepsilon,\varepsilon)\right|\,,$$

ove $|I|$ *denota la lunghezza dell'intervallo* I.
A) Se $|x| > ct$, *si ha una e una sola delle due*

$$x + ct > x - ct > 0\,, \qquad x - ct < x + ct < 0\,.$$

Perciò

$$(x-ct,x+ct)\cap(-\varepsilon,\varepsilon) = \varnothing$$

per ε *piccolo a sufficienza, e quindi*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_{\varepsilon,\sigma}(x,t) = 0\,, \qquad |x| > ct > 0.$$

B) Se $|x| = ct$, *si ha una e una sola delle due*

$$x - ct = 0\,, \qquad x + ct = 0\,.$$

Perciò

$$|(x-ct,x+ct)\cap(-\varepsilon,\varepsilon)|=\varepsilon\,,$$

per ε piccolo a sufficienza, e

$$u_{\varepsilon,\sigma}(x,t)=\frac{\varepsilon^{1-\sigma}}{4c}\,,\qquad |x|=ct\,.$$

C) Se $|x|<ct$, si ha

$$x-ct<0<x+ct\,,$$

da cui

$$(x-ct,x+ct)\cap(-\varepsilon,\varepsilon)=(-\varepsilon,\varepsilon)\,,$$

per ε piccolo a sufficienza, e

$$u_{\varepsilon,\sigma}(x,t)=\frac{\varepsilon^{1-\sigma}}{2c}\,,\qquad |x|<ct\,.$$

R.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u_{\varepsilon,\sigma}(x,t)=\begin{cases}0\,, & |x|>ct\,,\\ \frac{1}{4c}\ell_\sigma\,, & |x|=ct\,,\\ \frac{1}{2c}\ell_\sigma\,, & |x|<ct\,.\end{cases}$$

4. [28/6/2004 (ex)I] Determinare $\lambda_0>0$ in modo che per ogni $\lambda\in(0,\lambda_0)$ valga

$$|u(x,t)-1-t|\le\frac{1}{10}\,,\qquad -\infty<x<\infty\,,0<t<1\,,$$

ove

$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx}&=0\,, && -\infty<x<\infty\,,0<t\,,\\ u(x,0)&=1+\lambda\sin x\,, && -\infty<x<\infty\,,\\ u_t(x,0)&=1\,, && -\infty<x<\infty\,.\end{aligned}$$

5. [28/6/2004 (ex)II] Determinare $\lambda_0>0$ in modo che per ogni $\lambda\in(0,\lambda_0)$ valga

$$|u(x,t)-2-2t|\le\frac{1}{10}\,,\qquad -\infty<x<\infty\,,0<t<2\,,$$

ove

$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx}&=0\,, && -\infty<x<\infty\,,0<t\,,\\ u(x,0)&=2+\lambda e^{-x^2}\,, && -\infty<x<\infty\,,\\ u_t(x,0)&=2\,, && -\infty<x<\infty\,.\end{aligned}$$

6. [16/9/2005 (ex)I] Scrivere mediante la formula di D'Alembert la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= x\,, && -\infty < x < \infty\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,, \\ u_t(x,0) &= \sin x\,, && -\infty < x < \infty\,. \end{aligned}$$

7. [16/9/2005 (ex)II] Scrivere mediante la formula di D'Alembert la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= -\cos x\,, && -\infty < x < \infty\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= \operatorname{arctg} x\,, && -\infty < x < \infty\,, \\ u_t(x,0) &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,. \end{aligned}$$

320. Formula di D'Alembert per problemi al contorno

1. [30/1/2003 (hw)I] Scrivere la soluzione del problema per la corda semi-infinita

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && x > 0,\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= \sin x\,, && x \geq 0\,, \\ u_t(x,0) &= 0\,, && x > 0\,, \\ u(0,t) &= t\,, && t \geq 0\,. \end{aligned}$$

[*Sugg.:* passare all'incognita $v = u - t$.]
Soluzione
La $v = u - t$ soddisfa

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= 0\,, && x > 0,\ t > 0\,, \\ v(x,0) &= \sin x\,, && x \geq 0\,, \\ v_t(x,0) &= -1\,, && x > 0\,, \\ v(0,t) &= 0\,, && t \geq 0\,, \end{aligned}$$

e quindi coincide con la restrizione a $x \geq 0$ della soluzione espressa dalla formula di D'Alembert con dati ottenuti per riflessione dispari:

$$\widetilde{v_0}(s) = \sin s\,, \qquad \widetilde{v_1}(s) = -\operatorname{sign}(s)\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$

Dunque per $x > 0$

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\big[\sin(x-ct) + \sin(x+ct)\big] - \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \operatorname{sign}(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

L'ultimo integrale vale

$$\int_{x-ct}^{x+ct} \operatorname{sign}(s)\,\mathrm{d}s = \begin{cases} 2ct\,, & x \geq ct\,, \\ 2x\,, & x < ct\,. \end{cases}$$

R.

$$u(x,t) = \sin(x)\cos(ct) + \begin{cases} 0\,, & x \geq ct\,, \\ t - \dfrac{x}{c}\,, & x < ct\,. \end{cases}$$

2. [1/4/2003 (ex)I] Calcolare, mediante la formula di D'Alembert, la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t < \infty\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u(x,0) &= \sin x\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= \cos(2x)\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Calcolare esplicitamente l'integrale che appare nella formula di D'Alembert.
SOLUZIONE
Occorre riflettere in modo pari i dati intorno a $x = 0$ e a $x = \pi$. La riflessione di u_0 deve perciò essere

$$\widetilde{u_0}(s) = |\sin s|\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

e quella di u_1 deve essere

$$\widetilde{u_1}(s) = \cos(2s)\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$

Quindi

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\,|\sin(x-ct)| + |\sin(x+ct)|\,\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \cos(2s)\,\mathrm{d}s\,.$$

R.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\,|\sin(x-ct)| + |\sin(x+ct)|\,\big] + \frac{1}{2c}\cos(2x)\sin(2ct)\,.$$

3. [23/9/2003 (ex)I] Risolvere mediante la formula di D'Alembert il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && x > 0\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= \sin x^2\,, && x > 0\,, \\ u_t(x,0) &= \sin x\,, && x > 0\,. \end{aligned}$$

SOLUZIONE
Occorre riflettere in modo pari i due dati intorno a $x = 0$. Si ha subito per l'estensione di u_0:

$$\widetilde{u_0}(s) = \sin s^2\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

e per quella di u_1:

$$\widetilde{u_1}(s) = |\sin s|\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$

R. *Per $x > 0$, $t > 0$ si ha*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\sin(x-ct)^2 + \sin(x+ct)^2\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} |\sin s|\,\mathrm{d}s\,.$$

4. [23/9/2003 (ex)II] Risolvere mediante la formula di D'Alembert il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && x < 0\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= x^2 \operatorname{arctg} x\,, && x < 0\,,\\ u_t(x,0) &= \cos x\,, && x < 0\,. \end{aligned}$$

SOLUZIONE
Occorre riflettere in modo dispari i due dati intorno a $x = 0$. Si ha subito per l'estensione di u_0:

$$\widetilde{u_0}(s) = s^2 \operatorname{arctg} s\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

e per quella di u_1:

$$\widetilde{u_1}(s) = -\operatorname{sign}(s)\cos s\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$

R. *Per $x > 0$, $t > 0$ si ha*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[(x-ct)^2 \operatorname{arctg}(x-ct) + (x+ct)^2 \operatorname{arctg}(x+ct)\big] - \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \operatorname{sign}(s)\cos s\,\mathrm{d}s\,.$$

5. [6/2/2004 (hw)I] Risolvere

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ u(x,0) &= \sin\frac{x}{4}\,, && 0 < x < \pi\,,\\ u_t(x,0) &= \sin\frac{x}{2}\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[u_0(x-ct)+u_0(x+ct)]+\frac{1}{c}\Big[\cos\Big(\frac{x-ct}{2}\Big)-\cos\Big(\frac{x+ct}{2}\Big)\Big],$$

ove u_0 è la funzione di periodo 4π definita su $\boldsymbol{R}$ da

$$u_0(x)=\begin{cases}-\cos\frac{x}{4}\,, & -2\pi<x<-\pi\,,\\ \sin\frac{x}{4}\,, & -\pi<x<\pi\,,\\ \cos\frac{x}{4}\,, & \pi<x<2\pi\,.\end{cases}$$

6. [14/4/2004 (ex)I] Scrivere mediante la formula di D'Alembert la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx}&=0\,, && 0<x<1\,,t>0\,,\\ u_x(0,t)&=0\,, && t>0\,,\\ u_x(1,t)&=0\,, && t>0\,,\\ u(x,0)&=1\,, && 0<x<1\,,\\ u_t(x,0)&=1-x\,, && 0<x<1\,.\end{aligned}$$

Soluzione

La soluzione è data da

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\widetilde{u}_0(x-ct)+\widetilde{u}_0(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}\widetilde{u}_1(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

con $\widetilde{u}_0$ e $\widetilde{u}_1$ trovati estendendo i dati iniziali per u e u_t in modo che si riflettano in modo pari intorno a $x=0$, $x=1$. Si ottiene subito

$$\widetilde{u}_0(x)=1\,,\qquad -\infty<x<\infty\,,$$

e

$$\widetilde{u}_1(x)=1-|x|\,,\qquad -1<x<1\,,$$

con $\widetilde{u}_1$ definita poi come funzione periodica di periodo 2 su $(-\infty,\infty)$.

R.

$$u(x,t)=1+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}\operatorname{dist}(s,\text{interi dispari})\,\mathrm{d}s\,.$$

7. [14/4/2004 (ex)II] Scrivere mediante la formula di D'Alembert la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx}&=0\,, && 0<x<1\,,t>0\,,\\ u(0,t)&=0\,, && t>0\,,\\ u(1,t)&=0\,, && t>0\,,\\ u(x,0)&=1\,, && 0<x<1\,,\\ u_t(x,0)&=\sin(\pi x)\,, && 0<x<1\,.\end{aligned}$$

R.
$$u(x,t)=\frac{1}{2}[(-1)^{\mathrm{Int}(x-ct)}+(-1)^{\mathrm{Int}(x+ct)}]+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}\sin(\pi s)\,\mathrm{d}s\,.$$
Qui $\mathrm{Int}\,x$ *denota il massimo intero non superiore a* x*.*

8. [1/4/2005 (ex)I] Risolvere con la formula di D'Alembert il problema
$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx}&=0\,, && 0<x\,,0<t\,,\\ u(0,t)&=0\,, && 0<t\,,\\ u(x,0)&=x\,, && 0<x\,,\\ u_t(x,0)&=x^2\,, && 0<x\,. \end{aligned}$$

Soluzione

La soluzione si trova come restrizione a $x>0$ *della soluzione di*
$$\begin{aligned} v_{tt}-c^2v_{xx}&=0\,, && -\infty<x<+\infty\,,0<t\,,\\ v(x,0)&=v_0(x)\,, && -\infty<x<+\infty\,,\\ v_t(x,0)&=v_1(x)\,, && -\infty<x<+\infty\,, \end{aligned}$$
ove v_0 *e* v_1 *sono le estensioni dispari dei corrispondenti dati per* u*. Infatti deve essere* $u(0,t)=0$*. Si ha dunque*
$$v_0(x)=x\,,\qquad v_1(x)=x|x|\,,\qquad -\infty<x<+\infty\,.$$
Perciò
$$u(x,t)=\frac{1}{2}[x+ct+x-ct]+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}s|s|\,\mathrm{d}s=x+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}s|s|\,\mathrm{d}s\,,$$
per $x>0$, $t>0$*.*

9. [1/4/2005 (ex)II] Risolvere con la formula di D'Alembert il problema
$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx}&=0\,, && 0<x\,,0<t\,,\\ u_x(0,t)&=0\,, && 0<t\,,\\ u(x,0)&=x^3\,, && 0<x\,,\\ u_t(x,0)&=x^4\,, && 0<x\,. \end{aligned}$$

Soluzione

La soluzione si trova come restrizione a $x>0$ *della soluzione di*
$$\begin{aligned} v_{tt}-c^2v_{xx}&=0\,, && -\infty<x<+\infty\,,0<t\,,\\ v(x,0)&=v_0(x)\,, && -\infty<x<+\infty\,,\\ v_t(x,0)&=v_1(x)\,, && -\infty<x<+\infty\,, \end{aligned}$$

ove v_0 e v_1 sono le estensioni pari dei corrispondenti dati per u. Infatti deve essere $u_x(0,t)=0$. Si ha dunque

$$v_0(x)=|x|^3\,,\qquad v_1(x)=x^4\,,\qquad -\infty<x<+\infty\,.$$

Perciò

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}[|x+ct|^3+|x-ct|^3]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}s^4\,\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2}[|x+ct|^3+|x-ct|^3]+\frac{1}{10c}[(x+ct)^5-(x-ct)^5]\,,\end{aligned}$$

per $x>0$, $t>0$.

10. [14/4/2005 (ex)I] Risolvere mediante la formula di D'Alembert il problema

$$\begin{aligned}u_{tt}-c^2u_{xx}&=0\,, &&0<x<\pi\,,0<t\,,\\u(0,t)&=0\,, &&0<t\,,\\u(\pi,t)&=0\,, &&0<t\,,\\u(x,0)&=\cos(x^2)\,, &&0<x<\pi\,,\\u_t(x,0)&=\sin(x)\,, &&0<x<\pi\,.\end{aligned}$$

11. [14/4/2005 (ex)II] Risolvere mediante la formula di D'Alembert il problema

$$\begin{aligned}u_{tt}-c^2u_{xx}&=0\,, &&0<x<\pi\,,0<t\,,\\u_x(0,t)&=0\,, &&0<t\,,\\u_x(\pi,t)&=0\,, &&0<t\,,\\u(x,0)&=\cos(x)\,, &&0<x<\pi\,,\\u_t(x,0)&=\sin(x^2)\,, &&0<x<\pi\,.\end{aligned}$$

12. [15/12/2005 (ex)I] Scrivere mediante la formula di D'Alembert la soluzione di

$$\begin{aligned}u_{tt}-c^2u_{xx}&=0\,, &&0<x<1\,,t>0\,,\\u(x,0)&=\cos x\,, &&0<x<1\,,\\u_t(x,0)&=\sin^2 x\,, &&0<x<1\,,\\u_x(0,t)&=0\,, &&t>0\,,\\u(1,t)&=0\,, &&t>0\,.\end{aligned}$$

13. [20/4/2006 (ex)I] Risolvere, usando la formula di D'Alembert,

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= x^3\,, && 0 < x < \pi\,,\\ u_t(x,0) &= \sin(x+1)\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

SOLUZIONE

I dati iniziali vanno riflessi in modo pari rispetto a $x = \pi$, e dispari rispetto a $x = 0$. Dunque, tali riflessioni saranno

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} x^3\,, & -\pi < x < \pi\,,\\ (2\pi - x)^3\,, & \pi < x < 2\pi\,,\\ (-2\pi - x)^3\,, & -2\pi < x < -\pi\,, \end{cases}$$

e

$$\widetilde{u_1}(x) = \begin{cases} \sin(x+1)\,, & 0 < x < \pi\,,\\ -\sin(-x+1)\,, & -\pi < x < 0\,,\\ \sin(2\pi - x + 1)\,, & \pi < x < 2\pi\,,\\ -\sin(2\pi + x + 1)\,, & -2\pi < x < -\pi\,, \end{cases}$$

ove si suppone poi, in entrambi i casi, che le funzioni siano prolungate su tutto $\boldsymbol{R}$ come funzioni periodiche di periodo 4π.

R.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\widetilde{u_0}(x+ct) + \widetilde{u_0}(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \widetilde{u_1}(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

ove

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} x^3\,, & -\pi < x < \pi\,,\\ \operatorname{sign}(x)(2\pi - |x|)^3\,, & \pi < |x| < 2\pi\,, \end{cases}$$

$$\widetilde{u_1}(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}(x)\sin(|x|+1)\,, & -\pi < x < \pi\,,\\ \operatorname{sign}(x)\sin(-|x|+1)\,, & \pi < |x| < 2\pi\,, \end{cases}$$

e $\widetilde{u_0}$, $\widetilde{u_1}$ sono poi prolungate come funzioni periodiche di periodo 4π su tutto $\boldsymbol{R}$.

14. [20/4/2006 (ex)II] Risolvere, usando la formula di D'Alembert,

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= \cos(2+x)\,, && 0 < x < \pi\,,\\ u_t(x,0) &= x^4\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\widetilde{u_0}(x+ct) + \widetilde{u_0}(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \widetilde{u_1}(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

ove

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} \cos(2+|x|)\,, & -\pi < x < \pi\,, \\ -\cos(2-|x|)\,, & \pi < |x| < 2\pi\,, \end{cases}$$
$$\widetilde{u_1}(x) = \begin{cases} x^4\,, & -\pi < x < \pi\,, \\ -(2\pi-|x|)^4\,, & \pi < |x| < 2\pi\,, \end{cases}$$

e $\widetilde{u_0}$, $\widetilde{u_1}$ sono poi prolungate come funzioni periodiche di periodo 4π su tutto $\boldsymbol{R}$.

15. [6/7/2006 (ex)I] Determinare una condizione su $\varepsilon > 0$ che garantisca che

$$|u(1,1) - v(1,1)| < \frac{1}{100}\,,$$

ove u e v risolvono

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & v_{tt} - c^2 v_{xx} &= 0\,, & & x>0\,, t>0\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, & v_x(0,t) &= 0\,, & & t>0\,, \\ u(x,0) &= \cos x^2\,, & v(x,0) &= \cos(x^2+\varepsilon)\,, & & x>0\,, \\ u_t(x,0) &= 0\,, & v_t(x,0) &= 0\,, & & x>0\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Le u e v si possono rappresentare mediante la formula di D'Alembert, usando i dati iniziali riflessi in modo pari rispetto a $x = 0$:

$$\widetilde{u_0}(x) = \cos x^2\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$
$$\widetilde{v_0}(x) = \cos(x^2+\varepsilon)\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Per il teorema di dipendenza continua della soluzione dai dati iniziali, si ha

$$\begin{aligned} |u(x,t) - v(x,t)| &\le \sup_{x\in\boldsymbol{R}} |\widetilde{u_0}(x) - \widetilde{v_0}(x)| \\ &= \sup_{x\in\boldsymbol{R}} \big|\cos x^2 - \cos(x^2+\varepsilon)\big| \le \varepsilon \sup_{x\in\boldsymbol{R}} |\sin x| = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

R.

$$\varepsilon < \frac{1}{100}\,.$$

16. [6/7/2006 (ex)II] Determinare una condizione su $\varepsilon > 0$ che garantisca che

$$|u(1,1) - v(1,1)| < \frac{1}{100}\,,$$

ove u e v risolvono

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & v_{tt} - c^2 v_{xx} &= 0\,, & & x > 0\,, t > 0\,,\\
u_x(0,t) &= 0\,, & v_x(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\
u(x,0) &= \sin x^4\,, & v(x,0) &= \sin(x^4 + \varepsilon)\,, & & x > 0\,,\\
u_t(x,0) &= 0\,, & v_t(x,0) &= 0\,, & & x > 0\,.
\end{aligned}$$

R.

$$\varepsilon < \frac{1}{100}\,.$$

17. [20/9/2006 (ex)I] Risolvere, usando la formula di D'Alembert, il problema

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & & 1 < x\,, 0 < t\,,\\
u_x(1,t) &= 0\,, & & 0 < t\,,\\
u(x,0) &= x\,, & & 1 < x\,,\\
u_t(x,0) &= \cos(x^2)\,, & & 1 < x\,.
\end{aligned}$$

Soluzione

Occorre riflettere in modo pari i dati intorno a $x = 1$. La riflessione di $u(x,0)$ è

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} x\,, & x > 1\,,\\ 2 - x\,, & x < 1\,,\end{cases}$$

mentre quella di $u_t(x,0)$ è

$$\widetilde{u_1}(x) = \begin{cases} \cos(x^2)\,, & x > 1\,,\\ \cos((2-x)^2)\,, & x < 1\,,\end{cases}$$

La formula di D'Alembert quindi fornisce la soluzione

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\widetilde{u_0}(x+ct) + \widetilde{u_0}(x-ct)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \widetilde{u_1}(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

per $x > 1$.

R.

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} x\,, & x > 1\,,\\ 2 - x\,, & x < 1\,;\end{cases} \qquad \widetilde{u_1}(x) = \begin{cases} \cos(x^2)\,, & x > 1\,,\\ \cos((2-x)^2)\,, & x < 1\,,\end{cases}$$

18. [15/12/2006 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\
u(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\
u_x(\pi,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\
u(x,0) &= 1\,, & & 0 < x < \pi\,,\\
u_t(x,0) &= x\,, & & 0 < x < \pi\,,
\end{aligned}$$

usando la formula di D'Alembert.

SOLUZIONE

Occorre riflettere i dati iniziali in modo pari intorno a $x = \pi$, e in modo dispari intorno a $x = 0$, prolungando poi su tutto $\boldsymbol{R}$ con periodicità 4π. Nel periodo $(-2\pi, 2\pi)$ le estensioni saranno date da:

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} -1\,, & -2\pi < x < 0\,, \\ 1\,, & 0 < x < 2\pi\,, \end{cases}$$

e da

$$\widetilde{u_1}(x) = \begin{cases} -2\pi - x\,, & -2\pi < x < -\pi\,, \\ x\,, & -\pi < x < \pi\,, \\ 2\pi - x\,, & \pi < x < 2\pi\,. \end{cases}$$

R.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\widetilde{u_0}(x+ct) + \widetilde{u_0}(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \widetilde{u_1}(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad 0 < x < \pi\,, t > 0\,,$$

ove

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} -1\,, & -2\pi < x < 0\,, \\ 1\,, & 0 < x < 2\pi\,; \end{cases} \quad \widetilde{u_1}(x) = \begin{cases} -2\pi - x\,, & -2\pi < x < -\pi\,, \\ x\,, & -\pi < x < \pi\,, \\ 2\pi - x\,, & \pi < x < 2\pi\,. \end{cases}$$

19. [2/4/2007 (ex)I] Risolvere mediante la formula di D'Alembert il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & & x > 0\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 1\,, & & t > 0\,, \\ u(x,0) &= x\,, & & x > 0\,, \\ u_t(x,0) &= x & & x > 0\,. \end{aligned}$$

SOLUZIONE

Per ricondursi a un problema con condizioni al bordo omogenee introduciamo la trasformazione

$$v(x,t) = u(x,t) - x\,.$$

Allora v risolve

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= 0\,, & & x > 0\,, t > 0\,, \\ v_x(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ v(x,0) &= 0\,, & & x > 0\,, \\ v_t(x,0) &= x & & x > 0\,. \end{aligned}$$

Per risolvere questo problema riflettiamolo in modo pari intorno a $x = 0$, cosicché v risulterà la restrizione a $x > 0$ della soluzione di

$$
\begin{aligned}
\widetilde{v}_{tt} - c^2 \widetilde{v}_{xx} &= 0\,, && x \in \boldsymbol{R}\,, t > 0\,,\\
\widetilde{v}(x,0) &= \widetilde{v}_0(x)\,, && x \in \boldsymbol{R}\,,\\
\widetilde{v}_t(x,0) &= \widetilde{v}_1(x) && x \in \boldsymbol{R}\,.
\end{aligned}
$$

I dati estesi sono

$$
\widetilde{v}_0(x) = 0\,, \qquad \widetilde{v}_1(x) = |x|\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.
$$

Quindi

$$
\widetilde{v}(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |s| \, \mathrm{d}s\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,, t > 0\,.
$$

R.

$$
u(x,t) = x + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |s| \, \mathrm{d}s = \begin{cases} x + xt\,, & x > ct\,,\\ x + \frac{x^2 + c^2 t^2}{2c}\,, & 0 < x < ct\,. \end{cases}
$$

20. [2/4/2007 (ex)II] Risolvere mediante la formula di D'Alembert il problema

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && x > 0\,, t > 0\,,\\
u_x(0,t) &= 2\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= 2x\,, && x > 0\,,\\
u_t(x,0) &= x && x > 0\,.
\end{aligned}
$$

R.

$$
u(x,t) = 2x + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |s| \, \mathrm{d}s = \begin{cases} 2x + xt\,, & x > ct\,,\\ 2x + \frac{x^2 + c^2 t^2}{2c}\,, & 0 < x < ct\,. \end{cases}
$$

21. [2/4/2007 (ex)I] Risolvere mediante la formula di D'Alembert il problema

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && x > 0\,, t > 0\,,\\
u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= x\,, && x > 0\,,\\
u_t(x,0) &= x && x > 0\,.
\end{aligned}
$$

22. [20/9/2007 (ex)I] Scrivere mediante l'opportuna formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && x < -1\,, t > 0\,,\\ u_x(-1,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= x\,, && x < -1\,,\\ u_t(x,0) &= x\sin x\,, && x < -1\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Occorre riflettere i dati iniziali in modo pari intorno a $x = -1$.
Si ottengono le estensioni

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} x\,, & x < -1\,,\\ -2 - x\,, & x > -1\,, \end{cases}$$

e

$$\widetilde{u_1}(x) = \begin{cases} x\sin x\,, & x < -1\,,\\ (2+x)\sin(2+x)\,, & x > -1\,, \end{cases}$$

R. *La soluzione è*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\widetilde{u_0}(x+ct) + \widetilde{u_0}(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \widetilde{u_1}(s)\,\mathrm{d}s\,, \qquad x < -1\,, t > 0\,,$$

ove

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} x\,, & x < -1\,,\\ -2 - x\,, & x > -1\,, \end{cases} \qquad \widetilde{u_1}(x) = \begin{cases} x\sin x\,, & x < -1\,,\\ (2+x)\sin(2+x)\,, & x > -1\,, \end{cases}$$

23. [28/3/2008 (ex)I] Trovare con la formula di D'Alembert la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= \cos\frac{x}{2}\,, && 0 < x < \pi\,,\\ u_t(x,0) &= x^2\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Occorre riflettere i dati in modo dispari intorno a $x = 0$, e in modo pari intorno a $x = \pi$. Si ottiene per u_0:

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} -\cos\dfrac{x}{2}\,, & -\pi < x < 0\,,\\ \cos\dfrac{x}{2}\,, & 0 < x < \pi\,,\\ \cos\dfrac{2\pi - x}{2}\,, & \pi < x < 2\pi\,,\\ -\cos\dfrac{2\pi - x}{2}\,, & 2\pi < x < 3\pi\,. \end{cases}$$

In modo simile si estende u_1. Poi entrambi i dati si estendono a tutto $\boldsymbol{R}$ come funzioni periodiche di periodo 4π.
R.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\widetilde{u_0}(x+ct) + \widetilde{u_0}(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \widetilde{u_1}(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

ove $\widetilde{u_0}$ e $\widetilde{u_1}$ *sono funzioni periodiche di periodo 4π tali che*

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} -\cos\dfrac{x}{2}\,, & -\pi < x < 0\,, \\ \cos\dfrac{x}{2}\,, & 0 < x < \pi\,, \\ -\cos\dfrac{x}{2}\,, & \pi < x < 2\pi\,, \\ \cos\dfrac{x}{2}\,, & 2\pi < x < 3\pi\,, \end{cases}$$

e

$$\widetilde{u_1}(x) = \begin{cases} x|x|\,, & -\pi < x < \pi\,, \\ (2\pi - x)|2\pi - x|\,, & \pi < x < 3\pi\,. \end{cases}$$

24. [28/3/2008 (ex)II] Trovare con la formula di D'Alembert la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \qquad & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, & t > 0\,, \\ u_x\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &= 0\,, & t > 0\,, \\ u(x,0) &= \cos\frac{x}{2}\,, & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, \\ u_t(x,0) &= x^2\,, & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\widetilde{u_0}(x+ct) + \widetilde{u_0}(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \widetilde{u_1}(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

ove $\widetilde{u_0}$ e $\widetilde{u_1}$ *sono funzioni periodiche di periodo 4π tali che*

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} -\cos\dfrac{x}{2}\,, & -\dfrac{\pi}{2} < x < 0\,, \\ \cos\dfrac{x}{2}\,, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ \sin\dfrac{x}{2}\,, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi\,, \\ -\sin\dfrac{x}{2}\,, & \pi < x < 3\dfrac{\pi}{2}\,, \end{cases}$$

e

$$\widetilde{u_1}(x) = \begin{cases} x|x|\,, & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ (\pi - x)|\pi - x|\,, & \dfrac{\pi}{2} < x < 3\dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

25. [13/7/2009 (ex)I] Esprimere mediante la formula di D'Alembert la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0 & & t > 0\,, \\ u_x\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &= 0 & & t > 0\,, \\ u(x,0) &= 1\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, \\ u_t(x,0) &= \cos x\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

SOLUZIONE

Occorre riflettere i dati iniziali in modo dispari intorno a $x = 0$, e in modo pari intorno a $x = \pi/2$, e poi estenderli in modo periodico su $\boldsymbol{R}$. Si ottiene

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 < x < \pi\,, \\ -1\,, & -\pi < x < 0\,. \end{cases}$$

Poi, per le proprietà del coseno,

$$\widetilde{u_1}(x) = \begin{cases} \lvert\cos x\rvert\,, & 0 < x < \pi\,, \\ -\lvert\cos x\rvert\,, & -\pi < x < 0\,. \end{cases}$$

R.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{u_0}(x-ct) + \widetilde{u_0}(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \widetilde{u_1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, t > 0\,,$$

ove $\widetilde{u_0}$ e $\widetilde{u_1}$, funzioni periodiche su $\boldsymbol{R}$ di periodo 2π, soddisfano

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 < x < \pi\,, \\ -1\,, & -\pi < x < 0\,; \end{cases} \qquad \widetilde{u_1}(x) = \begin{cases} \lvert\cos x\rvert\,, & 0 < x < \pi\,, \\ -\lvert\cos x\rvert\,, & -\pi < x < 0\,. \end{cases}$$

26. [13/7/2009 (ex)II] Esprimere mediante la formula di D'Alembert la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0 & & t > 0\,, \\ u_x\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &= 0 & & t > 0\,, \\ u(x,0) &= \cos x\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, \\ u_t(x,0) &= \sqrt{x}\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{u_0}(x-ct) + \widetilde{u_0}(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \widetilde{u_1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, t > 0\,,$$

ove $\widetilde{u_0}$ e $\widetilde{u_1}$, *funzioni periodiche su* $\boldsymbol{R}$ *di periodo* 2π, *soddisfano*

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} |\cos x|\,, & 0 < x < \pi\,, \\ -|\cos x|\,, & -\pi < x < 0\,; \end{cases} \qquad \widetilde{u_1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,, & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, \\ -\sqrt{|x|}\,, & -\frac{\pi}{2} < x < 0\,, \\ \sqrt{\pi - x}\,, & \frac{\pi}{2} < x < \pi\,, \\ -\sqrt{x-\pi}\,, & \pi < x < 3\frac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

350. Principio di Duhamel per l'equazione delle onde

1. [18/4/2008 (ex)I] Usando il principio di Duhamel si calcoli la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= at\sin x\,, & & -\infty < x < \infty\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, & & -\infty < x < \infty\,, \\ u_t(x,0) &= 0\,, & & -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

ove a è una costante positiva. Calcolare tutti gli integrali.
Soluzione
La u *si ottiene dal principio di Duhamel come*

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} a\tau \sin s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau = \frac{a}{2c}\int_0^t \tau[\cos(x+c\tau-ct) - \cos(x-c\tau+ct)]\,\mathrm{d}\tau\,.$$

R.

$$u(x,t) = \frac{at}{c^2}\sin x + \frac{a}{2c^3}[\cos(x+ct) - \cos(x-ct)]\,.$$

2. [18/4/2008 (ex)II] Usando il principio di Duhamel si calcoli la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= ate^x\,, & & -\infty < x < \infty\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, & & -\infty < x < \infty\,, \\ u_t(x,0) &= 0\,, & & -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

ove a è una costante positiva. Calcolare tutti gli integrali.
R.
$$u(x,t) = \frac{a}{2c^3}(e^{2ct} - 1)e^{x-ct} - \frac{a}{c^2} t e^x \,.$$

3. [12/2/2009 (ex)I] Determinare mediante il principio di Duhamel la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= x^2 \,, & & 0 < x < 1 \,, t > 0 \,, \\ u(0,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \\ u_x(1,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \\ u(x,0) &= 0 \,, & & 0 < x < 1 \,, \\ u_t(x,0) &= 0 \,, & & 0 < x < 1 \,. \end{aligned}$$

Soluzione
Occorrono due riflessioni, dispari intorno a $x = 0$, e pari intorno a $x = 1$. Dalla prima si ha, posto $f(x) = x$, $0 < x < 1$,

$$\widetilde{f}(x) = -f(-x) = -x^2 \,, \qquad -1 < x < 0 \,.$$

Infine mediante l'altra riflessione si ha

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(2-x) = \begin{cases} (2-x)^2 \,, & 1 < x < 2 \,, \\ -(2-x)^2 \,, & 2 < x < 3 \,. \end{cases}$$

R.
$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \widetilde{f}(s) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\tau \,,$$

ove

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} -x^2 \,, & -1 < x < 0 \,, \\ x^2 \,, & 0 < x < 1 \,, \\ (2-x)^2 \,, & 1 < x < 2 \,, \\ -(2-x)^2 \,, & 2 < x < 3 \,, \end{cases}$$

e poi $\widetilde{f}$ è estesa a tutto $\boldsymbol{R}$ in modo periodico con periodo 4.

4. [12/2/2009 (ex)II] Determinare mediante il principio di Duhamel la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= \sin x \,, & & 0 < x < 1 \,, t > 0 \,, \\ u_x(0,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \\ u(1,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \\ u(x,0) &= 0 \,, & & 0 < x < 1 \,, \\ u_t(x,0) &= 0 \,, & & 0 < x < 1 \,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}\widetilde{f}(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\,,$$

ove

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}\sin|x|\,, & -1<x<1\,,\\ -\sin|2-x|\,, & 1<x<3\,,\end{cases}$$

e poi $\widetilde{f}$ *è estesa a tutto* $\boldsymbol{R}$ *in modo periodico con periodo* 4.

5. [15/9/2009 (ex)I] Esprimere mediante la formula di Duhamel la soluzione del problema

$$\begin{aligned}u_{tt}-c^2u_{xx}&=\cos x^2\,, && 0<x<\infty\,,t>0\,,\\ u(0,t)&=0 && t>0\,,\\ u(x,0)&=0\,, && 0<x<\infty\,,\\ u_t(x,0)&=x^2\,, && 0<x<\infty\,.\end{aligned}$$

Soluzione

Occorre riflettere i dati in modo dispari intorno a $x=0$*. Si ottiene*

$$\widetilde{u_1}(x)=x|x|\,,\qquad \widetilde{f}(x)=\operatorname{sign}(x)\cos x^2\,.$$

Poi, per linearità, si ha $u=v+w$*, ove*

$$\begin{aligned}v_{tt}-c^2v_{xx}&=0\,, && -\infty<x<\infty\,,t>0\,,\\ v(x,0)&=0\,, && -\infty<x<\infty\,,\\ v_t(x,0)&=x|x|\,, && -\infty<x<\infty\,,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}w_{tt}-c^2w_{xx}&=\widetilde{f}(x)\,, && -\infty<x<\infty\,,t>0\,,\\ w(x,0)&=0\,, && -\infty<x<\infty\,,\\ w_t(x,0)&=0\,, && -\infty<x<\infty\,.\end{aligned}$$

R.

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}\widetilde{u_1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2c}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}\widetilde{f}(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\,,\qquad x>0\,,t>0\,,$$

ove

$$\widetilde{u_1}(x)=x|x|\,,\qquad \widetilde{f}(x)=\operatorname{sign}(x)\cos x^2\,.$$

6. [15/9/2009 (ex)II] Esprimere mediante la formula di Duhamel la soluzione del problema

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= \cos x^2 \,, && 0 < x < \infty \,, t > 0 \,, \\
u_x(0,t) &= 0 && t > 0 \,, \\
u(x,0) &= 0 \,, && 0 < x < \infty \,, \\
u_t(x,0) &= \sin x \,, && 0 < x < \infty \,.
\end{aligned}
$$

R.

$$
u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \widetilde{u_1}(\xi) \, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \widetilde{f}(s) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\tau \,, \qquad x > 0 \,, t > 0 \,,
$$

ove

$$
\widetilde{u_1}(x) = \sin|x| \,, \qquad \widetilde{f}(x) = \cos x^2 \,.
$$

420. Applicazioni del principio di max a prb per eq. del calore

1. [16/9/2005 (ex)I] Dimostrare che la soluzione u di

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0 \,, && 0 < x < 1 \,, t > 0 \,, \\
u_x(0,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\
u(1,t) &= 1 \,, && t > 0 \,, \\
u(x,0) &= x \,, && 0 < x < 1 \,,
\end{aligned}
$$

soddisfa

$$
\lim_{t \to \infty} |u(x,t) - 1| \, t^{100} = 0 \,.
$$

2. [16/9/2005 (ex)II] Dimostrare che la soluzione u di

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0 \,, && 0 < x < 2 \,, t > 0 \,, \\
u_x(0,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\
u(2,t) &= 3 \,, && t > 0 \,, \\
u(x,0) &= \frac{3}{2} x \,, && 0 < x < 2 \,,
\end{aligned}
$$

soddisfa

$$
\lim_{t \to \infty} |u(x,t) - 3| \, t^{100} = 0 \,.
$$

3. [15/12/2005 (ex)I] Determinare il massimo nel rettangolo $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$ della soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t < T\,, \\ u_x(\pi, t) &= 0\,, && 0 < t < T\,, \\ u(0, t) &= 0\,, && 0 < t < T\,, \\ u(x, 0) &= \cos x - 1\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

4. [7/4/2006 (ex)I] Determinare il massimo su $Q_T = [0, 2] \times [0, T]$ della soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= -1\,, && 0 < x < 2\,, 0 < t < T\,, \\ u(0, t) &= -t\,, && 0 < t < T\,, \\ u_x(2, t) &= 0\,, && 0 < t < T\,, \\ u(x, 0) &= x\,, && 0 < x < 2\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Il massimo deve venire assunto su $\partial_p Q_T$, per il principio di massimo. D'altronde non può venire raggiunto su $x = 2$ per $t > 0$ per il Lemma di Hopf.
Quindi

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max\Big(\max_{0\le t\le T}(-t)\,, \max_{0\le x\le 2} x\Big) = \max(0, 2) = 2\,.$$

R.

$$\max_{\overline{Q_T}} u = 2\,.$$

5. [7/4/2006 (ex)II] Determinare il minimo su $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ della soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 2\,, && 0 < x < 1\,, 0 < t < T\,, \\ u_x(0, t) &= 0\,, && 0 < t < T\,, \\ u(1, t) &= 3 + t\,, && 0 < t < T\,, \\ u(x, 0) &= 3x\,, && 0 < x < 1\,. \end{aligned}$$

R.

$$\min_{\overline{Q_T}} u = 0\,.$$

6. [20/4/2006 (ex)I] La soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, t > 0\,, \\ u(0, t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(1, t) &= 2\,, && t > 0\,, \\ u(x, 0) &= \frac{8}{\pi}\operatorname{arctg} x\,, && 0 < x < 1\,, \end{aligned}$$

soddisfa per due opportune costanti a, $b \in \boldsymbol{R}$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = ax + b\,, \qquad 0 < x < 1\,.$$

Determinare a e b, e dimostrare questa relazione di limite.

SOLUZIONE

Per determinare a e b studiamo il problema stazionario

$$\begin{aligned} -U_{xx}(x) &= 0\,, \\ U(0) &= 0\,, \\ U(1) &= 2\,, \end{aligned}$$

che ha come unica soluzione

$$U(x) = ax + b = 2x\,, \qquad 0 < x < 1\,,$$

ossia $a = 2$, $b = 0$. Per dimostrare la relazione di limite, poniamo

$$v(x,t) = u(x,t) - U(x) = u(x,t) - 2x\,.$$

Allora v soddisfa

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < 1\,, t > 0\,, \\ v(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ v(1,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ v(x,0) &= \frac{8}{\pi}\operatorname{arctg} x - 2x\,, & & 0 < x < 1\,, \end{aligned}$$

Confrontiamo v con la soprasoluzione

$$w(x,t) = Ce^{-t}\cos x\,,$$

con $C > 0$ da scegliere. È immediato vedere che

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < 1\,, t > 0\,, \\ w(0,t) &= Ce^{-t} > v(0,t) = 0\,, & & t > 0\,, \\ w(1,t) &= Ce^{-t}\cos 1 > v(1,t) = 0\,, & & t > 0\,. \end{aligned}$$

Infine

$$w(x,0) = C\cos x \geq C\cos 1 \geq v(x,0) = \frac{8}{\pi}\operatorname{arctg} x - 2x\,,$$

se C è scelta e.g.,

$$C = \frac{8}{\pi\cos 1}\,.$$

Dunque per questa scelta di C,

$$v = u - U \leq Ce^{-t}\cos x\,, \qquad 0 < x < 1\,, t > 0\,.$$

Consideriamo poi la sottosoluzione

$$z(x,t) = -C_0 e^{-t}\cos x\,,$$

con $C_0 > 0$ *da scegliere. La* z *soddisfa*

$$\begin{aligned} z_t - z_{xx} &= 0\,, & 0 < x < 1\,, t > 0\,, \\ z(0,t) &= -C_0 e^{-t} < v(0,t) = 0\,, & t > 0\,, \\ z(1,t) &= -C_0 e^{-t} \cos 1 < v(1,t) = 0\,, & t > 0\,. \end{aligned}$$

Infine

$$z(x,0) = -C_0 \cos x \le -C_0 \cos 1 \le v(x,0) = \frac{8}{\pi} \operatorname{arctg} x - 2x\,,$$

se C_0 *è scelta e.g.,*

$$C_0 = \frac{2}{\cos 1}\,.$$

Dunque per le scelte di C *e* C_0 *effettuate sopra,*

$$-C_0 e^{-t} \cos x \le u(x,t) - 2x \le C e^{-t} \cos x\,, \qquad 0 < x < 1\,, t > 0\,,$$

che dimostra la relazione di limite.
R.

$$a = 2\,, \qquad b = 0\,.$$

7. [20/4/2006 (ex)II] La soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & 0 < x < 2\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 1\,, & t > 0\,, \\ u(2,t) &= 0\,, & t > 0\,, \\ u(x,0) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} x\right)\,, & 0 < x < 2\,, \end{aligned}$$

soddisfa per due opportune costanti a, $b \in \boldsymbol{R}$

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = ax + b\,, \qquad 0 < x < 2\,.$$

Determinare a e b, e dimostrare questa relazione di limite.
R.

$$a = -\frac{1}{2}\,, \qquad b = 1\,.$$

8. [6/7/2006 (ex)I] Sia u la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, & t > 0\,, \\ u(\pi,t) &= 0\,, & t > 0\,, \\ u(x,0) &= (\pi - x)^2\,, & 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Dimostrare che

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

Soluzione

Per il principio del massimo, u deve assumere i suoi minimi sulla frontiera parabolica del dominio. Per il Lemma di Hopf, non può tuttavia assumerli su

$$\{x = 0\,, t > 0\}\,.$$

Ne segue che $u \geq 0$. Basterà dunque trovare un maggiorante di u che tenda a zero per $t \to \infty$. Consideriamo per esempio

$$w(x,t) = Ce^{-\frac{t}{16}} \cos\frac{x}{4}\,,$$

che soddisfa

$$\begin{aligned}
w_t - w_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\
w_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
w(\pi,t) &= Ce^{-\frac{t}{16}} \cos\frac{\pi}{4} > 0\,, && t > 0\,,\\
w(x,0) &= C\cos\frac{x}{4} \geq \frac{C}{\sqrt{2}}\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

Per il principio di massimo e il Lemma di Hopf applicati a $w - u$ si ha $w - u \geq 0$ purché

$$w(x,0) \geq u(x,0)\,,$$

il che si ottiene scegliendo per esempio

$$C = \sqrt{2}\pi^2\,.$$

Quindi

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} u(x,t) \leq \lim_{t\to\infty} w(x,t) = 0\,.$$

9. [6/7/2006 (ex)II] Sia u la soluzione di

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\
u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= -xe^x\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

Dimostrare che

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

10. [20/9/2006 (ex)I] Sia u la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 1\,, && t > 0\,, \\ u\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &= 2\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= \cos x + \frac{4x}{\pi}\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Dimostrare che

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1 + \frac{2x}{\pi}\,, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,.$$

SOLUZIONE
Consideriamo la nuova incognita

$$v(x,t) = u(x,t) - 1 - \frac{2x}{\pi}\,.$$

Questa soddisfa

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, t > 0\,, \\ v(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ v\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &= 0\,, && t > 0\,, \\ v(x,0) &= \cos x - 1 + \frac{2x}{\pi}\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Costruiamo un maggiorante di v che tenda a zero per $t \to \infty$. Consideriamo per esempio

$$w(x,t) = Ce^{-\frac{t}{4}} \cos\frac{x}{2}\,,$$

che soddisfa

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, t > 0\,, \\ w(0,t) &> 0 = v(0,t)\,, && t > 0\,, \\ w\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &> 0 = v\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big)\,, && t > 0\,, \\ w(x,0) &= C\cos\frac{x}{2}\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Si potrà dunque invocare il principio di massimo per asserire che $w \geq v$ se determiniamo C in modo che

$$w(x,0) \geq v(x,0)\,, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,.$$

Ma per tali x si ha, scegliendo per esempio $C = \sqrt{2}$,

$$w(x,0) = C\cos\frac{x}{2} \geq \frac{C}{\sqrt{2}} \geq \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} \geq \frac{2}{\pi}x \geq \cos x - 1 + \frac{2}{\pi}x = v(x,0)\,.$$

Troviamo poi una sottosoluzione

$$z(x,t) = -C_0 e^{-\frac{t}{4}} \cos\frac{x}{2}\,.$$

Ragionando come sopra, si ottiene che $v \geq z$ purché

$$z(x,0) \leq v(x,0)\,, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,.$$

Come sopra,

$$z(x,0) = -C_0 \cos\frac{x}{2} \leq -\frac{C_0}{\sqrt{2}} \leq -1 \leq \cos x - 1 + \frac{2}{\pi}x = v(x,0)\,,$$

di nuovo scegliendo $C_0 = \sqrt{2}$. Dunque

$$-\sqrt{2}e^{-\frac{t}{4}} \cos\frac{x}{2} \leq u(x,t) - 1 - \frac{2}{\pi}x \leq \sqrt{2}e^{-\frac{t}{4}} \cos\frac{x}{2}\,,$$

e per $t \to \infty$ si ha la tesi.

11. [20/9/2007 (ex)I] Si considerino le soluzioni dei due problemi

$$\begin{aligned}
u_{1t} - u_{1xx} &= 0\,, & u_{2t} - u_{2xx} &= 0\,, & & 0 < x < L\,, t > 0\,,\\
u_{1x}(0,t) &= 0\,, & u_{2x}(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\
u_{1x}(L,t) &= 0\,, & u_2(L,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\
u_1(x,0) &= u_0(x)\,, & u_2(x,0) &= u_0(x)\,, & & 0 < x < L\,,
\end{aligned}$$

ove $u_0 \in C([0,L])$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, $u_0(0) = u_0(L) = 0$.
Dimostrare che vale una delle due disuguaglianze:

$$u_1(x,t) \geq u_2(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } 0 < x < L,\ t > 0,$$

oppure

$$u_1(x,t) \leq u_2(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } 0 < x < L,\ t > 0.$$

Soluzione

Consideriamo la funzione

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)\,,$$

che soddisfa

$$\begin{aligned}
v_t - v_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < L\,, t > 0\,,\\
v_x(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\
v_x(L,t) &= -u_{2x}(L,t)\,, & & t > 0\,,\\
v(x,0) &= 0\,, & & 0 < x < L\,.
\end{aligned}$$

Per il lemma di Hopf, il minimo di v non può essere assunto su $x = 0$, $t > 0$.
D'altronde, su $x = L$, $t > 0$, u_2 raggiunge il suo valore minimo $u_2 = 0$, e dunque, ancora per il lemma di Hopf, $u_{2x} < 0$. Quindi

$$v_x(L,t) = -u_{2x}(L,t) > 0\,, \qquad t > 0\,,$$

e v non può assumere minimi su $x = L$, $t > 0$.
Perciò per il principio di minimo, il minimo di v è assunto su $t = 0$, ossia $v \geq 0$.
R.

$$u_1(x,t) \geq u_2(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } 0 < x < L,\ t > 0.$$

12. [14/12/2007 (ex)I] Trovare la condizione necessaria e sufficiente su $L > 0$ perché la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= u\,, & & 0 < x < L\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ u(L,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ u(x,0) &= L - x\,, & & 0 < x < L\,, \end{aligned}$$

soddisfi

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad 0 < x < L\,.$$

Soluzione
Consideriamo la funzione

$$v(x,t) = e^{-t}u(x,t)\,,$$

che soddisfa

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < L\,, t > 0\,, \\ v_x(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ v(L,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ v(x,0) &= L - x\,, & & 0 < x < L\,. \end{aligned}$$

Per riflessione pari, la v può essere considerata come la restrizione a $0 < x < L$ della soluzione di

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} &= 0\,, & & -L < x < L\,, t > 0\,, \\ w(-L,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ w(L,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ w(x,0) &= L - |x|\,, & & -L < x < L\,. \end{aligned}$$

La w ha la rappresentazione

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sin\Big(n\pi \frac{x+L}{2L}\Big)\,,$$

ove le α_n sono determinate da

$$\begin{aligned} &\alpha_n' + \frac{n^2\pi^2}{4L^2}\alpha_n = 0\,, \\ &\qquad \alpha_n(0) = \gamma_n := \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} (L - |x|) \sin\Big(n\pi \frac{x+L}{2L}\Big)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\alpha_n(t) = \gamma_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{4L^2}t} .$$

Quindi, per $0 < x < L$, $t > 0$

$$u(x,t) = e^t w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{\left(1-\frac{n^2\pi^2}{4L^2}\right)t} \sin\left(n\pi \frac{x+L}{2L}\right) .$$

Si noti anche che vale $\gamma_1 \neq 0$. *Quindi tutti i termini della serie tendono a* 0 *per* $t \to \infty$ *se e solo se*

$$1 < \frac{n^2\pi^2}{4L^2} , \qquad n = 1 .$$

R.

$$L < \frac{\pi}{2} .$$

13. [28/3/2008 (ex)I] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= ax , && 0 < x < L , t > 0 , \\ u(0,t) &= 0 , && t > 0 , \\ u(L,t) &= b , && t > 0 , \\ u(x,0) &= 1 , && 0 < x < L , \end{aligned}$$

ove a, b sono costanti positive.
Si dimostri che

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \omega(x) , \qquad 0 < x < L ,$$

e si identifichi la funzione ω.
Soluzione
Se il limite ω *esiste è ragionevole supporre che soddisfi*

$$-D\omega_{xx}(x) = ax , \qquad \omega(0) = 0 , \quad \omega(L) = b ,$$

che ammette l'unica soluzione

$$\omega(x) = \frac{b}{L}x + \frac{a}{6D}x(L^2 - x^2) .$$

Consideriamo quindi la funzione

$$v(x,t) = u(x,t) - \omega(x) ,$$

che soddisfa

$$\begin{aligned} v_t - Dv_{xx} &= 0 , && 0 < x < L , t > 0 , \\ v(0,t) &= 0 , && t > 0 , \\ v(L,t) &= 0 , && t > 0 , \\ v(x,0) &= 1 - \omega(x) , && 0 < x < L . \end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che
$$\lim_{t\to\infty} v(x,t) = 0\,.$$
Troviamo una soprasoluzione per v; la funzione
$$w(x,t) = ke^{-\frac{\pi^2}{16L^2}t^2}\cos\left(\frac{\pi}{4L}x\right)$$
è una soluzione dell'equazione del calore che soddisfa
$$w(0,t)\,, w(L,t) > 0\,.$$
Per dimostrare che $v \le w$, in virtù del principio di massimo, basta quindi scegliere k come segue:
$$v(x,0) \le 1 + b + \frac{aL^3}{6D} = \frac{k}{\sqrt{2}} = \min w(x,0)\,.$$
In modo simile si dimostra che $v \ge -w$ (per la stessa scelta di k). Dato che
$$\lim_{t\to\infty} w(x,t) = 0\,,$$
segue la tesi.
R.
$$\omega(x) = \frac{b}{L}x + \frac{a}{6D}x(L^2 - x^2)\,.$$

14. [28/3/2008 (ex)II] Si consideri la soluzione del problema
$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= a\,, & & 0 < x < L\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= b\,, & & t > 0\,,\\ u(L,t) &= b\,, & & t > 0\,,\\ u(x,0) &= 1\,, & & 0 < x < L\,, \end{aligned}$$
ove a, b sono costanti positive.
Si dimostri che
$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \omega(x)\,, \qquad 0 < x < L\,,$$
e si identifichi la funzione ω.
R.
$$\omega(x) = b + \frac{a}{2D}x(L - x)\,.$$

15. [18/4/2008 (ex)I] Dimostrare che la soluzione u del problema
$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= \alpha - u\,, & & 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ u_x(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\ u_x(\pi,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\ u(x,0) &= \cos x\,, & & 0 < x < \pi\,, \end{aligned}$$

ha limite

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \omega(x)\,,$$

e calcolare $\omega(x)$. Qui $\alpha > 0$ è una costante.

SOLUZIONE

Se ω esiste è ragionevole supporre che risolva il problema ai limiti

$$-D\omega_{xx} = \alpha - \omega\,, \qquad \omega_x(0) = \omega_x(\pi) = 0\,.$$

La e.d.o. ha integrale generale

$$\omega(x) = k_1 e^{\frac{x}{\sqrt{D}}} + k_2 e^{-\frac{x}{\sqrt{D}}} + \alpha\,.$$

Imponendo le condizioni al bordo si ottiene $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, cioè

$$\omega(x) = \alpha\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

Allora cambiamo variabile, in modo che la nuova incognita

$$v(x,t) = u(x,t) - \alpha\,,$$

che dovrebbe tendere a 0 per $t \to \infty$, risolva

$$\begin{aligned} v_t - Dv_{xx} &= -v\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ v_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ v_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ v(x,0) &= \cos x - \alpha\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

In considerazione della forma che ha assunto l'e.d.p., operiamo la nuova trasformazione di variabili

$$w(x,t) = e^t v(x,t)\,,$$

che dà

$$\begin{aligned} w_t - Dw_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ w_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ w_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ w(x,0) &= \cos x - \alpha\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Per il principio di massimo e per il lemma di Hopf

$$-1 - \alpha \le w(x,t) \le 1 - \alpha\,.$$

Dunque

$$|v(x,t)| \le (1+\alpha)e^{-t}\,,$$

e pertanto $v(x,t) \to 0$ se $t \to \infty$.

R.

$$\omega(x) = \alpha\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

16. [18/4/2008 (ex)II] Dimostrare che la soluzione u del problema

$$
\begin{aligned}
u_t - Du_{xx} &= \alpha - u\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\
u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= \cos x\,, && 0 < x < \pi\,,
\end{aligned}
$$

ha limite

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \omega(x)\,,$$

e calcolare $\omega(x)$. Qui $\alpha > 0$ è una costante.
R.

$$\omega(x) = -\frac{\alpha}{e^{\frac{\pi}{\sqrt{D}}} + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{D}}}}(e^{\frac{x}{\sqrt{D}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{D}}}) + \alpha\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

17. [14/7/2008 (ex)I] Dimostrare che la soluzione del problema

$$
\begin{aligned}
u_t - Du_{xx} &= a\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,,\\
u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(L,t) &= b\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < L\,,
\end{aligned}
$$

soddisfa

$$0 \le u(x,1) \le a + b\,, \qquad 0 < x < L\,.$$

Qui a, b, L sono costanti positive.
SOLUZIONE
Per il principio del massimo, la u deve assumere il minimo sulla frontiera parabolica del dominio, e quindi segue subito che

$$u(x,t) \ge 0\,, \qquad 0 < x < L\,, t > 0\,.$$

Inoltre, consideriamo la soprasoluzione

$$v(x,t) = at + b\,.$$

La $w = v - u$ soddisfa

$$
\begin{aligned}
w_t - Dw_{xx} &= 0\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,,\\
w(0,t) &= at + b \ge 0\,, && t > 0\,,\\
u(L,t) &= at \ge 0\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= b \ge 0\,, && 0 < x < L\,,
\end{aligned}
$$

e quindi, sempre per il principio di massimo, $w \ge 0$, ossia

$$u(x,t) \le a + bt\,, \qquad 0 < x < L\,, t > 0\,.$$

18. [14/7/2008 (ex)II] Dimostrare che la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= at\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= b\,, && t > 0\,,\\ u(L,t) &= b\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < L\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$0 \le u(x,1) \le \frac{a}{2} + b\,, \qquad 0 < x < L\,.$$

Qui a, b, L sono costanti positive.

19. [12/2/2009 (ex)I] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= 0\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_x(L,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= cx\,, && 0 < x < L\,. \end{aligned}$$

Qui D, L, c sono costanti positive.
Determinare un istante $\bar{t}$ in funzione di D, L, c, in cui

$$u(L,\bar{t}) \le \frac{1}{2}u(L,0) = \frac{1}{2}cL\,.$$

Soluzione

Consideriamo la soprasoluzione

$$v(x,t) = Ce^{-\frac{\pi^2}{4L^2}Dt}\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right),$$

che risolve

$$\begin{aligned} v_t - Dv_{xx} &= 0\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,,\\ v(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ v_x(L,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= C\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right), && 0 < x < L\,. \end{aligned}$$

Per dimostrare quindi che $v \ge u$ basterà, per il principio del massimo e il lemma di Hopf, determinare C in modo che

$$C\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \ge cx\,.$$

Perché $v(x,0)$ è concava, e $v(0,0) = u(0,0) = 0$, è sufficiente a questo scopo imporre

$$v(L,0) = C\sin\frac{\pi}{2} = C \ge u(L,0) = cL\,,$$

e quindi scegliere $C = cL$.

Perciò resta provato

$$u(x,t) \le cLe^{-\frac{\pi^2}{4L^2}Dt}\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right),$$

e in particolare

$$u(L,t) \le cLe^{-\frac{\pi^2}{4L^2}Dt} \le \frac{cL}{2},$$

se

$$t \ge \bar{t} = \frac{4L^2}{\pi^2 D}\ln 2\,.$$

R.

$$\bar{t} = \frac{4L^2}{\pi^2 D}\ln 2\,.$$

20. [12/2/2009 (ex)II] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned}
u_t - Du_{xx} &= 0\,, && -L < x < L\,, t > 0\,,\\
u(-L,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(L,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= c(L-|x|)\,, && -L < x < L\,.
\end{aligned}$$

Qui D, L, c sono costanti positive.
Determinare un istante $\bar{t}$ in funzione di D, L, c, in cui

$$u(0,\bar{t}) \le \frac{1}{2}u(0,0) = \frac{1}{2}cL\,.$$

R.

$$\bar{t} = \frac{4L^2}{\pi^2 D}\ln 2\,.$$

21. [13/7/2009 (ex)I] Si trovino tutti i punti di minimo e il valore di minimo della soluzione di

$$\begin{aligned}
u_t - Du_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\
u(0,t) &= 1 && t > 0\,,\\
u_x(\pi,t) &= 1 && t > 0\,,\\
u(x,0) &= \frac{x^2}{\pi} - x + 1\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

Soluzione

I punti di minimo possono venire assunti solo sulla frontiera parabolica per il principio di massimo. Però su $x = \pi$, $t > 0$, non possono esserci punti di minimo, perché in un punto $(\pi,\bar{t})$, $\bar{t} > 0$, che fosse di minimo si dovrebbe avere

$$u_x(\pi,\bar{t}) \le 0\,,$$

mentre $u_x = 1$ *su* $x = \pi$.
Con uno studio di funzione, si trova che il minimo del dato iniziale è assunto solo in $x = \pi/2$, *ove*
$$u\Big(\frac{\pi}{2}, 0\Big) = 1 - \frac{\pi}{4}\,.$$
Poiché $u = 1$ *su* $x = 0$, *il minimo della soluzione è assunto solo in* $(\pi/2, 0)$.
R.
$$u\Big(\frac{\pi}{2}, 0\Big) = 1 - \frac{\pi}{4}\,.$$

22. [13/7/2009 (ex)II] Si trovino tutti i punti di massimo e il valore di massimo della soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ u_x(0,t) &= 1 && t > 0\,,\\ u(\pi,t) &= 1 && t > 0\,,\\ u(x,0) &= -\frac{x^2}{\pi} + x + 1\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

R.
$$u\Big(\frac{\pi}{2}, 0\Big) = 1 + \frac{\pi}{4}\,.$$

23. [11/1/2010 (ex)I] Si consideri la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, t > 0\,,\\ Du_x(0,t) &= \alpha u(0,t)\,, && t > 0\,,\\ u(1,t) &= \beta\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < 1\,, \end{aligned}$$

ove $\alpha > 0$ e $\beta \in \boldsymbol{R}$, $\beta \neq 0$ sono costanti.
Dimostrare che $u(x,t)$ ha il segno di β per ogni (x,t), $t > 0$.
SOLUZIONE
A) Sia $\beta > 0$. *Per il principio di massimo, se* u *assume un minimo non positivo in*
$$[0,1] \times [0,\bar{t}]\,,$$
per $t > 0$, *questo deve essere preso su* $x = 0$. *Sia* $(0,\bar{t})$ *un punto di minimo di questo tipo. Allora*
$$Du_x(0,\bar{t}) = \alpha u(0,\bar{t}) \leq 0\,,$$
contro la disuguaglianza
$$u_x(0,\bar{t}) > 0\,,$$
che segue dal Lemma di Hopf parabolico.
B) Analogamente, se $\beta < 0$, *e* $(0,\bar{t})$ *è un punto di massimo non negativo con* $\bar{t} > 0$, *si avrebbe*
$$Du_x(0,\bar{t}) = \alpha u(0,\bar{t}) \geq 0\,,$$

contro la disuguaglianza

$$u_x(0, \bar{t}) < 0 \,,$$

che segue dal Lemma di Hopf parabolico.

24. [9/4/2010 (ex)I] Si consideri la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - D u_{xx} &= -u + 1 \,, & & 0 < x < L \,, t > 0 \,, \\ D u_x(0,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \\ u(L,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \\ u(x,0) &= 0 \,, & & 0 < x < L \,, \end{aligned}$$

ove $L > 0$.
Trovare $\omega \in C^1((0,L))$ tale che valga la relazione di limite

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \omega(x) \,, \qquad 0 < x < L \,,$$

e dimostrare tale relazione.
Soluzione
Se poniamo $u_t = 0$ nell'equazione differenziale, e sostituiamo u con il suo limite ω, si ottiene formalmente

$$\begin{aligned} -D\omega_{xx} &= -\omega + 1 \,, & & 0 < x < L \,, \\ D\omega_x(0) &= 0 \,, \\ \omega(L) &= 0 \,. \end{aligned}$$

Da qui

$$\omega(x) = 1 - \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{D}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{D}}}}{e^{\frac{L}{\sqrt{D}}} + e^{-\frac{L}{\sqrt{D}}}} \,.$$

Ora dimostriamo rigorosamente la relazione di limite: sia $v = u - \omega$. Allora vale

$$\begin{aligned} v_t - D v_{xx} &= -v \,, & & 0 < x < L \,, t > 0 \,, \\ D v_x(0,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \\ v(L,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \\ v(x,0) &= -\omega(x) \,, & & 0 < x < L \,. \end{aligned}$$

Con il cambiamento di variabili $w = e^t v$, si perviene a

$$\begin{aligned} w_t - D w_{xx} &= 0 \,, & & 0 < x < L \,, t > 0 \,, \\ D w_x(0,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \\ w(L,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \\ w(x,0) &= -\omega(x) \,, & & 0 < x < L \,. \end{aligned}$$

Usando per esempio la sottosoluzione e soprasoluzione

$$-Ce^{-\frac{\pi^2}{16L^2}t} \cos\frac{\pi x}{4L} \le w(x,t) \le Ce^{-\frac{\pi^2}{16L^2}t} \cos\frac{\pi x}{4L} \,,$$

ove $C = \sqrt{2}\max|w|$, *si ottiene*

$$\lim_{t\to\infty}|v(x,t)| \le \lim_{t\to\infty} e^{-t}Ce^{-\frac{\pi^2}{16L^2}t} = 0\,.$$

R.

$$\omega(x) = 1 - \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{D}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{D}}}}{e^{\frac{L}{\sqrt{D}}} + e^{-\frac{L}{\sqrt{D}}}}\,.$$

430. Applicazioni del principio di max a prb per eq. di Laplace

1. [1/4/2003 (ex)I] Si consideri la soluzione u del problema per l'equazione di Laplace

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, 0 < y < 1\,,\\
u(0,y) &= 0\,, && 0 < y < 1\,,\\
u(1,y) &= e^y - ye\,, && 0 < y < 1\,,\\
u(x,0) &= x\,, && 0 < x < 1\,,\\
u(x,1) &= 0\,, && 0 < x < 1\,.
\end{aligned}$$

Determinare una costante $c \in (0,1)$ tale che

$$u\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) \le c\,.$$

(*Sugg.* Usare una soprasoluzione v per il problema risolto da u.)
Soluzione
La stima

$$u\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) < 1$$

segue subito dal principio di massimo forte. Tuttavia non soddisfa il quesito. Consideriamo allora la funzione

$$v(x,y) = x\,,$$

che è una soprasoluzione del problema: infatti

$$\begin{aligned}
v_{xx} + v_{yy} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, 0 < y < 1\,,\\
v(0,y) &= 0 = u(0,y)\,, && 0 < y < 1\,,\\
v(1,y) &= 1 \ge e^y - ye = u(1,y)\,, && 0 < y < 1\,,\\
v(x,0) &= x = u(x,0)\,, && 0 < x < 1\,,\\
v(x,1) &= x \ge 0 = u(x,1)\,, && 0 < x < 1\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$u\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) \le v\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2} < 1\,.$$

2. [6/7/2006 (ex)I] Dimostrare che $u \geq v$ in $\Omega = (0,\pi) \times (0,\pi)$, ove u e v risolvono rispettivamente

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= -1\,, & \Delta v &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,,\\
u(0,y) &= 0\,, & v(0,y) &= 0\,, & & 0 < y < \pi\,,\\
u_x(\pi,y) &= 0\,, & v(\pi,y) &= 0\,, & & 0 < y < \pi\,,\\
u(x,0) &= x\,, & v(x,0) &= \sin x\,, & & 0 < x < \pi\,,\\
u(x,\pi) &= 2x\,, & v(x,\pi) &= 2\sin x\,, & & 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

Soluzione

Osserviamo che $\Delta u \leq 0$ in Ω. Dunque u assume i suoi minimi sulla frontiera $\partial\Omega$, ma, per il Lemma di Hopf, non sul lato

$$\{x = \pi\,, 0 < y < \pi\}\,.$$

Perciò $u \geq 0$ in $\overline{\Omega}$.
Consideriamo poi la funzione $w = u - v$, che soddisfa

$$
\begin{aligned}
\Delta w &= -1 \leq 0\,, & & 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,,\\
w(0,y) &= 0\,, & & 0 < y < \pi\,,\\
w(\pi,y) &= u(\pi,y) \geq 0\,, & & 0 < y < \pi\,,\\
w(x,0) &= x - \sin x \geq 0\,, & & 0 < x < \pi\,,\\
w(x,\pi) &= 2x - 2\sin x \geq 0\,, & & 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

Per il principio di massimo segue che $w \geq 0$ in Ω.

3. [6/7/2006 (ex)II] Dimostrare che $u \leq v$ in $\Omega = (0,\pi) \times (0,\pi)$, ove u e v risolvono rispettivamente

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 2\,, & \Delta v &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,,\\
u(0,y) &= -y\,, & v(0,y) &= -\sin y\,, & & 0 < y < \pi\,,\\
u(\pi,y) &= -y^2\,, & v(\pi,y) &= -(\sin y)^2\,, & & 0 < y < \pi\,,\\
u(x,0) &= 0\,, & v(x,0) &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,,\\
u_y(x,\pi) &= 0\,, & v(x,\pi) &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

4. [15/12/2006 (ex)I] Trovare il massimo su $\overline{Q}$ della soluzione u di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= \pi\,, & & \text{in } Q,\\
u(x,y) &= \cos x\,, & & \text{su } x^2 + 2y^2 = 1,\\
u(x,y) &= \sin y\,, & & \text{su } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,
\end{aligned}
$$

ove

$$Q = \Big\{(x,y) \mid x^2 + 2y^2 > 1\,, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\Big\}\,.$$

SOLUZIONE

Per il principio di massimo, il massimo di u su $\overline{Q}$ è assunto sulla frontiera ∂Q, cioè su una delle due ellissi

$$E_1: \quad x^2 + 2y^2 = 1\,, \qquad E_2: \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\,.$$

Su E_1, u assume tutti e soli i valori in $[\cos 1, 1]$ (perché $-1 \le x \le 1$ su E_1). Dunque

$$\max_{E_1} u = 1\,.$$

Dato che $u = \sin y \le 1$ su E_2, segue che

$$\max_{\overline{Q}} u = 1\,.$$

R.

$$\max_{\overline{Q}} u = 1\,.$$

5. [18/4/2007 (ex)I] Trovare tutti i punti di massimo assoluto della soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 10\,, & &\text{in } \Omega = \Big\{\frac{\pi^2}{16} < x^2 + y^2 < \pi^2\Big\}, \\ u(x,y) &= \sin y\,, & &x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{16}\,, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y) &= 0\,, & &x^2 + y^2 = \pi^2\,. \end{aligned}$$

SOLUZIONE

Per il principio di massimo forte i punti di massimo sono assunti solo sulla frontiera (poiché il dominio è connesso e la u non è costante). Inoltre, per il Lemma di Hopf, non possono essere assunti sulla circonferenza esterna $x^2 + y^2 = \pi^2$. Dunque sono assunti solo su $x^2 + y^2 = \pi^2/16$. Ma su questa curva

$$u(x,y) = \sin y\,, \qquad -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}\,,$$

e dunque

$$\max_{\overline{\Omega}} u = u\Big(0, \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

R.

$$\Big(0, \frac{\pi}{4}\Big)\,, \quad \text{ove} \quad u\Big(0, \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

6. [18/4/2007 (ex)II] Trovare tutti i punti di minimo assoluto della soluzione di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= -1\,, && \text{in } \Omega = \{1 < x^2 + y^2 < 4\},\\
u(x,y) &= \cos\frac{\pi y}{8}\,, && x^2 + y^2 = 4\,,\\
\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y) &= 0\,, && x^2 + y^2 = 1\,.
\end{aligned}
$$

R.

$$
(0,-2)\,,(0,2) \quad \textit{ove} \quad u(0,\pm 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.
$$

7. [12/7/2007 (ex)I] Dimostrare che la soluzione del problema

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && 0 < x < 2\,, 0 < y < 1\,,\\
u(0,y) &= 0\,, && 0 < y < 1\,,\\
u(2,y) &= 2y\,, && 0 < y < 1\,,\\
u(x,1) &= \frac{x^2}{2}\,, && 0 < x < 2\,,\\
u_y(x,0) &= 0\,, && 0 < x < 2\,,
\end{aligned}
$$

soddisfa

$$
u(1,y) < 1\,, \qquad 0 < y < 1\,.
$$

Soluzione

Consideriamo la soprasoluzione

$$
w(x,y) = x\,.
$$

La $v = w - u$ soddisfa

$$
\begin{aligned}
\Delta v &= 0\,, && 0 < x < 2\,, 0 < y < 1\,,\\
v(0,y) &= 0\,, && 0 < y < 1\,,\\
v(2,y) &> 0\,, && 0 < y < 1\,,\\
v(x,1) &> 0\,, && 0 < x < 2\,,\\
v_y(x,0) &= 0\,, && 0 < x < 2\,.
\end{aligned}
$$

Dunque, per il principio del massimo forte e per il lemma di Hopf la v ha minimo (non essendo costante) solo sulla frontiera $x = 0$, e perciò

$$
v(x,y) > 0\,, \qquad 0 < x < 2\,, 0 < y < 1\,.
$$

Ne segue che

$$
u(1,y) < w(1,y) = 1\,, \qquad 0 < y < 1\,.
$$

8. [12/7/2007 (ex)II] Dimostrare che la soluzione del problema

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && 0 < x < 2\,, 0 < y < 1\,,\\
u(0,y) &= 0\,, && 0 < y < 1\,,\\
u_x(2,y) &= 0\,, && 0 < y < 1\,,\\
u(x,1) &= \frac{x}{2}\,, && 0 < x < 2\,,\\
u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < 2\,,
\end{aligned}
$$

soddisfa

$$u\Big(x,\frac{1}{2}\Big) < \frac{1}{2}\,, \qquad 0 < x < 2\,.$$

Soluzione

Consideriamo la soprasoluzione

$$w(x,y) = y\,.$$

La $v = w - u$ soddisfa

$$
\begin{aligned}
\Delta v &= 0\,, && 0 < x < 2\,, 0 < y < 1\,,\\
v(0,y) &> 0\,, && 0 < y < 1\,,\\
v_x(2,y) &= 0\,, && 0 < y < 1\,,\\
v(x,1) &> 0\,, && 0 < x < 2\,,\\
v(x,0) &= 0\,, && 0 < x < 2\,.
\end{aligned}
$$

Dunque, per il principio del massimo forte e per il lemma di Hopf la v ha minimo (non essendo costante) solo sulla frontiera $y = 0$, e perciò

$$v(x,y) > 0\,, \qquad 0 < x < 2\,, 0 < y < 1\,.$$

Ne segue che

$$u\Big(x,\frac{1}{2}\Big) < w\Big(x,\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}\,, \qquad 0 < x < 2\,.$$

9. [18/4/2008 (ex)I] Sia u la soluzione del problema

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && \text{in } \Omega,\\
u(x,y) &= \operatorname{arctg}(|x|^3)\,, && \text{su } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\,,\\
\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y) &= 0\,, && \text{su } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 4\,,
\end{aligned}
$$

ove ν è la normale esterna a $\partial\Omega$, e

$$\Omega = \Big\{(x,y) \mid 1 < \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 4\Big\}\,.$$

Trovare tutti i punti di massimo e di minimo di u in $\overline{\Omega}$.

Soluzione
Per il principio di massimo, i punti di massimo e di minimo devono essere assunti sulla frontiera di Ω. Per il lemma di Hopf, i punti di estremo non possono essere assunti sulla curva
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=4\,.$$
Si tratta quindi di trovare i punti di massimo e di minimo di u su
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\,.$$
Poiché la funzione $s \mapsto \operatorname{arctg} s$ è crescente per $s>0$, dobbiamo solo trovare i punti ove $|x|$ è massimo o minimo.
R.
$$\max_{\overline{\Omega}} u = u(2,0) = u(-2,0) = \operatorname{arctg} 8\,,$$
$$\min_{\overline{\Omega}} u = u(0,3) = u(0,-3) = 0\,.$$

10. [18/4/2008 (ex)II] Sia u la soluzione del problema
$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && \text{in } \Omega,\\
u(x,y) &= \frac{1}{1+|y|}\,, && \text{su } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\,,\\
\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y) &= 0\,, && \text{su } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=4\,,
\end{aligned}$$
ove ν è la normale esterna a $\partial\Omega$, e
$$\Omega=\Big\{(x,y)\mid 1<\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<4\Big\}\,.$$
Trovare tutti i punti di massimo e di minimo di u in $\overline{\Omega}$.
R.
$$\max_{\overline{\Omega}} u = u(2,0) = u(-2,0) = 1\,,$$
$$\min_{\overline{\Omega}} u = u(0,3) = u(0,-3) = \frac{1}{4}\,.$$

11. [12/1/2009 (ex)I] Si considerino le soluzioni dei due problemi
$$\begin{aligned}
\Delta u_1 &= 0\,, && \text{in } \Omega_1, & \Delta u_2 &= 0\,, && \text{in } \Omega_2,\\
u_1(x,y) &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,, && \text{su } \partial\Omega_1, & u_2(x,y) &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,, && \text{su } \partial\Omega_2,
\end{aligned}$$
ove
$$\Omega_1=(1,2)\times(1,2)\,,\qquad \Omega_2=(a,a+1)\times(1,2)\,,$$

con $a > 2$.
Si trovino condizioni su a che implichino

$$u_1(x_1, y_1) > u_2(x_2, y_2)\,,$$

per ogni $(x_1, y_1) \in \Omega_1$, $(x_2, y_2) \in \Omega_2$.
Soluzione
Per il principio di massimo si ha che

$$u_1(x_1, y_1) \geq \min_{\partial\Omega_1} u_1 = \min_{(x,y)\in\partial\Omega_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,,$$
$$u_2(x_2, y_2) \geq \max_{\partial\Omega_2} u_2 = \max_{(x,y)\in\partial\Omega_2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,,$$

per ogni $(x_1, y_1) \in \Omega_1$, $(x_2, y_2) \in \Omega_2$. *Dunque si otterrà la disuguaglianza voluta se risulterà*

$$\min_{(x,y)\in\partial\Omega_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} > \max_{(x,y)\in\partial\Omega_2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,.$$

D'altra parte, per il significato geometrico di $\operatorname{arctg} y/x$, *che nel primo quadrante coincide con l'anomalia polare, si ha*

$$\min_{(x,y)\in\partial\Omega_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\,,$$
$$\max_{(x,y)\in\partial\Omega_2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{2}{a}\,.$$

Poiché l'arcotangente è una funzione crescente, si dovrà chiedere

$$\frac{2}{a} < \frac{1}{2}\,.$$

R.

$$a > 4\,.$$

12. [12/1/2009 (ex)II] Si considerino le soluzioni dei due problemi

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= 0\,, && \text{in } \Omega_1, & \Delta u_2 &= 0\,, && \text{in } \Omega_2,\\ u_1(x,y) &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,, && \text{su } \partial\Omega_1, & u_2(x,y) &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,, && \text{su } \partial\Omega_2, \end{aligned}$$

ove

$$\Omega_1 = (1,2) \times (1,2)\,, \qquad \Omega_2 = (1,2) \times (a, a+1)\,,$$

con $a > 2$.
Si trovino condizioni su a che implichino

$$u_1(x_1, y_1) < u_2(x_2, y_2)\,,$$

per ogni $(x_1, y_1) \in \Omega_1$, $(x_2, y_2) \in \Omega_2$.

R.
$$a > 4\,.$$

13. [12/2/2009 (ex)I] Determinare tutti i punti di massimo in $\overline{\Omega}$ della soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= \pi x^2\,, & &\text{in } \Omega,\\ u(x,y) &= x^2 + \frac{1}{9}y^2\,, & &\text{su } \partial\Omega,, \end{aligned}$$

ove
$$\Omega = \Big\{(x,y) \mid 1 < \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 4\Big\}\,.$$

Soluzione

Per il principio del massimo, visto che $\Delta\, u \geq 0$ in Ω, i massimi devono essere assunti sul bordo, che è costituito dalle due ellissi

$$E_1 = \Big\{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\Big\}\,, \qquad E_2 = \Big\{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 4\Big\}\,.$$

È chiaro che il massimo è assunto su E_2, per la forma del dato. Su E_2 si ha

$$u(x,y) = x^2 + \frac{1}{9}\Big(36 - \frac{9}{4}x^2\Big) = \frac{3}{4}x^2 + 4\,.$$

Perciò
$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{E_2} u = u(\pm 4, 0) = 16\,.$$

R.
$$\max_{\overline{\Omega}} u = u(\pm 4, 0) = 16\,.$$

14. [12/2/2009 (ex)II] Determinare tutti i punti di minimo in $\overline{\Omega}$ della soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= -y^2\,, & &\text{in } \Omega,\\ u(x,y) &= x^2 + 2y^2\,, & &\text{su } \partial\Omega,, \end{aligned}$$

ove
$$\Omega = \Big\{(x,y) \mid 1 < \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 4\Big\}\,.$$

R.
$$\min_{\overline{\Omega}} u = u(0, \pm 2) = 8\,.$$

15. [15/6/2009 (ex)I] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= xy\,, && \text{in } Q, \\ u(x,y) &= x^2+y^2\,, && \text{su } \partial Q, \end{aligned}$$

ove $Q=[0,1]\times[0,1]$.
Si dimostri che u soddisfa

$$u(x,y)=u(y,x)\,, \qquad \text{per ogni } (x,y)\in Q.$$

Soluzione
Definiamo

$$v(x,y)=u(y,x)\,.$$

Si noti che v risulta definita ancora in Q, e che

$$v_{xx}(x,y)=u_{yy}(y,x)\,, \qquad v_{yy}(x,y)=u_{xx}(y,x)\,.$$

Quindi

$$\Delta v(x,y)=\Delta u(y,x)=yx\,, \qquad \textit{in } Q.$$

Inoltre

$$v(x,y)=u(y,x)=y^2+x^2\,, \qquad \textit{su } \partial Q.$$

Dunque $w=u-v$ soddisfa

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0\,, && \textit{in } Q, \\ w(x,y) &= 0\,, && \textit{su } \partial Q, \end{aligned}$$

e perciò $w=0$ in Q per il principio di massimo. Dunque

$$u(x,y)=v(x,y)=u(y,x)\,, \qquad \textit{per ogni } (x,y)\in Q.$$

16. [15/9/2009 (ex)I] Si trovino tutti i punti di minimo e il valore di minimo della soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= -1\,, && \text{in } \Omega, \\ u(x,y) &= |x|-|y|\,, && \text{su } \partial\Omega, \end{aligned}$$

ove

$$\Omega=\Big\{(x,y)\mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\Big\}\,.$$

Soluzione
I punti di minimo possono venire assunti solo sulla frontiera per il principio di massimo forte, visto che u non è costante. Inoltre è chiaro che

$$\min_{\partial\Omega} u(x,y)=\min_{\partial\Omega}(|x|-|y|)=u(0,\pm 3)=-3\,.$$

R.

$$u(0, \pm 3) = -3\,.$$

17. [15/9/2009 (ex)II] Si trovino tutti i punti di massimo e il valore di massimo della soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= 1\,, && \text{in } \Omega, \\ u(x,y) &= |x| - |y|\,, && \text{su } \partial\Omega, \end{aligned}$$

ove

$$\Omega = \Big\{(x,y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\Big\}\,.$$

R.

$$u(\pm 2, 0) = 2\,.$$

18. [9/4/2010 (ex)I] Trovare il massimo e il minimo della soluzione del problema

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= 0\,, && \text{in } \Omega = A \setminus \overline{B}, \\ u(x,y) &= x^2 + y^2\,, && \text{su } \partial A, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0\,, && \text{su } \partial B, \end{aligned}$$

ove

$$A = \Big\{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\Big\}\,, \qquad B = \Big\{x^2 + y^2 < 1\Big\}\,.$$

Soluzione

Per il principio di massimo

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u\,, \qquad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u\,.$$

D'altronde per il lemma di Hopf, massimo e minimo non possono essere assunti su ∂B*. Perciò*

$$\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega}} u &= \max_{\partial A} x^2 + y^2 = \max_{\partial A} \operatorname{dist}\big((x,y),(0,0)\big)^2 = 9\,, \\ \min_{\overline{\Omega}} u &= \min_{\partial A} x^2 + y^2 = \min_{\partial A} \operatorname{dist}\big((x,y),(0,0)\big)^2 = 4\,. \end{aligned}$$

R.

$$\max_{\overline{\Omega}} u = 9\,, \qquad \min_{\overline{\Omega}} u = 4\,.$$

470. Semplici problemi al contorno per l'equazione del calore

1. [17/2/2003 (hw)I] a) Dimostrare, usando il principio del massimo, che la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \cos(xt)\,, && 0 < x < 10\,, 0 < t \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 \le x \le 10\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && 0 \le t\,, \\ u(10,t) &= 0\,, && 0 \le t\,, \end{aligned}$$

soddisfa $|u(x,t)| \le t$.
b) Mostrare anche che la soluzione non può essere di classe $C^{2,1}$ fino sulla frontiera parabolica.
Soluzione
a) Se $v = u - t$ allora $v_t - v_{xx} \le 0$, e $v \le 0$ sulla frontiera parabolica. Quindi $v \le 0$ nel rettangolo. In modo simmetrico si procede con $w = u + t$.
b) Per esempio in $(0,0)$, si dovrebbe altrimenti avere $u_t = 0$, $u_{xx} = 0$, a causa dei dati assegnati, ma questo contrasta con $u_t - u_{xx} = \cos 0 = 1$.

2. [17/2/2003 (hw)I] Dimostrare che la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < L\,, 0 < t \\ u(x,0) &= x\,, && 0 < x < L\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \\ u(L,t) &= M\,, && 0 < t\,, \end{aligned}$$

con $M > L$, soddisfa $0 \le u_x(0,t) \le M/L$ (si supponga che u sia di classe C^1 fino su $x = 0$).
Soluzione
Per il principio del massimo, $u \ge 0$. Dunque i punti su $x = 0$ sono punti di minimo, e perciò $u_x(0,t) \ge 0$.
Si consideri poi la funzione $v = u - Mx/L$. Si noti che $v_t - v_{xx} = 0$, e $v \le 0$ sulla frontiera parabolica. Dunque per il principio del massimo, $v \le 0$ nel rettangolo; ma $v(0,t) = 0$, e segue come sopra che $v_x(0,t) \le 0$.

3. [17/2/2003 (hw)I] Una piastra a pareti piane e parallele $x = 0$, $x = L$, è all'istante iniziale $t = 0$ a temperatura $u(x,0) = c(L - x)$, per $0 \le x \le L$. Possiamo assumere simmetria piana.
La parete $x = 0$ è adiabatica, quella $x = L$ è mantenuta a temperatura nulla.
Trovare una stima per $u(x,t)$ per tempi grandi, e dare dei valori di L per cui il valore di $u(0,t)$ cala almeno del 50% nell'intervallo di tempo $(0,1)$.
Soluzione
Considerare il problema riflesso in modo pari su $-L \le x \le L$. Qui usare la soprasoluzione $v = cLe^{-\alpha^2 t}\cos(\alpha x)$, con $\alpha = \pi/(2L)$.

Si vuole avere $u(0,1) \le cLe^{-\alpha^2} \le u(0,0)/2 = cL/2$, *ossia* $L \le \pi/(2\sqrt{\ln 2})$.

4. [16/4/2003 (ex)I] Dimostrare che se u è la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, && -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\,, 0 < t < \infty\,,\\
u\Big(-\frac{\pi}{4}, t\Big) &= 1\,, && 0 < t\,,\\
u\Big(\frac{\pi}{4}, t\Big) &= 1\,, && 0 < t\,,\\
u(x,0) &= e^{|x| - \frac{\pi}{4}}\,, && -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\,,
\end{aligned}
$$

allora per ogni $x \in (-\pi/4, \pi/4)$ fissato

$$
\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1\,.
$$

SOLUZIONE
Per il principio di massimo $u \le 1$ *(infatti il dato iniziale è un esponenziale con esponente non positivo). Basterà quindi dimostrare che* $u \ge v$ *con*

$$
\lim_{t\to\infty} v(x,t) = 1\,, \qquad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\,. \tag{1}
$$

Scegliamo

$$
v(x,t) = 1 - Ce^{-t}\cos x\,,
$$

con $C > 0$ *da scegliere cosicché* (1) *è senz'altro verificata. Valgono*

$$
\begin{aligned}
v_t - v_{xx} &= 0\,, && -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\,, 0 < t\,,\\
v\Big(-\frac{\pi}{4}, t\Big) &= 1 - \frac{C}{\sqrt{2}}e^{-t} \le u\Big(-\frac{\pi}{4}, t\Big) = 1\,, && 0 < t\,,\\
v\Big(\frac{\pi}{4}, t\Big) &= 1 - \frac{C}{\sqrt{2}}e^{-t} \le u\Big(\frac{\pi}{4}, t\Big) = 1\,, && 0 < t\,,\\
v(x,0) &= 1 - C\cos x \le 1 - \frac{C}{\sqrt{2}} \le e^{-\frac{\pi}{4}} \le u(x,0)\,, && -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\,,
\end{aligned}
$$

se $C \ge \sqrt{2}(1 - e^{-\pi/4})$. *Quindi* $u \ge v$ *per il principio di massimo.*

5. [16/4/2003 (ex)II] Dimostrare che se u è la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, 0 < t < \infty\,,\\
u(0,t) &= 3\,, && 0 < t\,,\\
u\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &= 3\,, && 0 < t\,,\\
u(x,0) &= 3 - x\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,,
\end{aligned}
$$

allora per ogni $x \in (0, \pi/2)$ fissato

$$
\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 3\,.
$$

SOLUZIONE
Definiamo $w = u - 3$. La tesi equivale allora a

$$\lim_{t\to\infty} w(x,t) = 0\,.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
w_t - w_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, 0 < t < \infty\,,\\
w(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\
w\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &= 0\,, && 0 < t\,,\\
w(x,0) &= -x\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) \geq 0\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,,
\end{aligned}$$

e quindi $w \geq 0$ per il principio di massimo. Basta dunque dimostrare che $w \leq v$ con

$$\lim_{t\to\infty} v(x,t) = 0\,, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,. \tag{1}$$

Scegliamo

$$v(x,t) = Ce^{-\frac{t}{4}} \cos\frac{x}{2}\,,$$

con $C > 0$ da scegliere, cosicché (1) è senz'altro verificata. Valgono

$$\begin{aligned}
v_t - v_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, 0 < t\,,\\
v(0,t) &= Ce^{-t} \geq w(0,t)\,, && 0 < t\,,\\
v\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &= \frac{C}{\sqrt{2}} e^{-t} \geq w\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big)\,, && 0 < t\,,\\
v(x,0) &= C\cos\frac{x}{2} \geq \frac{C}{\sqrt{2}} \geq \frac{\pi^2}{16} \geq w(x,0)\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,,
\end{aligned}$$

se $C \geq \sqrt{2}\pi^2/16$. Quindi $w \leq v$ per il principio di massimo.

6. [30/6/2003 (ex)I] Dimostrare che se u è la soluzione di

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t < \infty\,,\\
u(0,t) &= e^{-\frac{t}{2}}\,, && 0 < t < \infty\,,\\
u(\pi,t) &= e^{-\frac{t}{2}}\,, && 0 < t < \infty\,,\\
u(x,0) &= 1 + \sin x\,, && 0 < x < \pi\,,
\end{aligned}$$

allora per ogni $x \in (0,\pi)$ fissato

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0\,.$$

SOLUZIONE
È chiaro che $u \geq 0$ per il principio di massimo. Cerchiamo una soprasoluzione nella forma

$$v(x,t) = Ce^{-\frac{t}{2}} \sin\Big(\frac{x}{\sqrt{2}} + \alpha\Big)\,,$$

con $C > 0$ *e* $\alpha > 0$ *tale che*

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \alpha < \pi - \alpha \,, \tag{1}$$

per esempio prendendo $\alpha = \pi/1000$. *Vale*

$$\begin{aligned}
v_t - v_{xx} &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,, t > 0 \,, && (2)\\
v(0,t) &= Ce^{-\frac{t}{2}} \sin\alpha \geq u(0,t) \,, && t > 0 \,, && (3)\\
v(\pi,t) &= Ce^{-\frac{t}{2}} \sin\Big(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \alpha\Big) \geq u(\pi,t) \,, && t > 0 \,, && (4)\\
v(x,0) &= C \sin\Big(\frac{x}{\sqrt{2}} + \alpha\Big) \geq u(x,0) \,, && 0 < x < \pi \,, && (5)
\end{aligned}$$

ove (3), (4) *valgono perché per* (1)

$$C \sin\Big(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \alpha\Big) \geq C \sin\alpha \geq 1 \,,$$

pur di scegliere C *in modo opportuno. Infine* (5) *vale per ogni* $0 \leq x \leq \pi$ *perché*

$$C \sin\Big(\frac{x}{\sqrt{2}} + \alpha\Big) \geq C \sin\alpha \geq 2 \geq u(x,0) \,,$$

ancora scegliendo C *abbastanza grande (per esempio* $C = 2/\sin\alpha$*).*
Per il principio di massimo dunque $v \geq u$*, e perciò*

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} u(x,t) \leq \lim_{t\to\infty} v(x,t) = 0 \,.$$

7. [30/6/2003 (ex)II] Dimostrare che se u è la soluzione di

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,, 0 < t < \infty \,,\\
u(0,t) &= 2e^{-\frac{t}{3}} \,, && 0 < t < \infty \,,\\
u(\pi,t) &= 2e^{-\frac{t}{3}} \,, && 0 < t < \infty \,,\\
u(x,0) &= 2 + \sin x \,, && 0 < x < \pi \,,
\end{aligned}$$

allora per ogni $x \in (0,\pi)$ fissato

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \,.$$

8. [23/9/2003 (ex)I] Dimostrare che la soluzione u di

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0 \,, && 0 < x < 5 \,, 0 < t < \infty \,,\\
u(0,t) &= 0 \,, && 0 < t < \infty \,,\\
u_x(5,t) &= 0 \,, && 0 < t < \infty \,,\\
u(x,0) &= 25 - (x-5)^2 \,, && 0 < x < 5 \,,
\end{aligned}$$

soddisfa per ogni $x \in (0,5)$, $\alpha > 0$ fissati

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)t^\alpha = 0\,.$$

Soluzione

Prima di tutto osserviamo che $u \ge 0$ per il principio di massimo e per quello di Hopf. Consideriamo poi la v, riflessione pari intorno a $x = 5$ di u, che soddisfa

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 10\,, 0 < t < \infty\,,\\ v(0,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,,\\ v(10,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,,\\ v(x,0) &= 25 - (x-5)^2\,, && 0 < x < 10\,. \end{aligned}$$

Usiamo una soprasoluzione per mostrare che v (e quindi u) decade esponenzialmente. Sia

$$w(x,t) = Ce^{-\frac{\pi^2}{400}t}\sin\Big(\frac{\pi}{20}x + \frac{\pi}{4}\Big)\,, \qquad 0 < x < 10\,, t > 0\,,$$

con $C > 0$ da scegliere. È chiaro che w è una soluzione dell'equazione del calore con $w > 0$. Quindi è una soprasoluzione del problema per v se per $0 \le x \le 10$

$$w(x,0) = C\sin\Big(\frac{\pi}{20}x + \frac{\pi}{4}\Big) \ge C\sin\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{C}{\sqrt{2}} \ge 25 \ge v(x,0)\,,$$

ossia se per esempio $C = 25\sqrt{2}$. Dunque

$$0 \le \lim_{t\to\infty} t^\alpha u(x,t) \le \lim_{t\to\infty} t^\alpha 25\sqrt{2}e^{-\frac{\pi^2}{400}t}\sin\Big(\frac{\pi}{20}x + \frac{\pi}{4}\Big) = 0\,.$$

9. [23/9/2003 (ex)II] Dimostrare che la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && -\frac{\pi}{2} < x < 0\,, 0 < t < \infty\,,\\ u\Big(-\frac{\pi}{2},t\Big) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,,\\ u_x(0,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,,\\ u(x,0) &= \frac{\pi^2}{4} - x^2\,, && -\frac{\pi}{2} < x < 0\,, \end{aligned}$$

soddisfa per ogni $x \in (-\pi/2,0)$, $\alpha > 0$ fissati

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)t^\alpha = 0\,.$$

Soluzione

Prima di tutto osserviamo che $u \ge 0$ per il principio di massimo e per quello di Hopf. Consideriamo poi la v, riflessione pari intorno a $x = 0$ di u, che soddisfa

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= 0\,, && -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,, 0 < t < \infty\,,\\ v\Big(-\frac{\pi}{2},t\Big) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,,\\ v\Big(\frac{\pi}{2},t\Big) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,,\\ v(x,0) &= \frac{\pi^2}{4} - x^2\,, && -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Usiamo una soprasoluzione per mostrare che v (e quindi u) decade esponenzialmente. Sia

$$w(x,t) = Ce^{-t}\cos x\,, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,, t > 0\,,$$

con $C > 0$ da scegliere. È chiaro che w è una soluzione dell'equazione del calore con $w = 0$ se $x = \pm\pi/2$. Quindi è una soprasoluzione del problema per v se per $|x| \leq \pi/2$

$$w(x,0) = C\cos x \geq \frac{\pi^2}{4} - x^2 = v(x,0)\,.$$

Poiché $w = v = 0$ in $(-\pi/2, 0)$, e le due funzioni sono pari, basterà per esempio verificare che in $-\pi/2 < x < 0$ valga

$$w_x(x,0) = -C\sin x = C|\sin x| \geq -2x = 2|x| = v_x(x,0)\,.$$

Cioè basterà definire

$$C = 2\sup_{[-\frac{\pi}{2},0)} \left|\frac{x}{\sin x}\right|\,,$$

in vista del fatto che tale sup *è finito, come noto. Dunque*

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} t^\alpha u(x,t) \leq \lim_{t\to\infty} t^\alpha Ce^{-t}\cos x = 0\,.$$

10. [31/3/2004 (ex)I] Dimostrare che la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, 0 < t\,,\\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(1,t) &= \pi\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= \pi x\,, && 0 < x < 1\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$\lim_{t\to\infty}\ \sup_{0<x<1} |u(x,t) - \pi| = 0\,.$$

11. [31/3/2004 (ex)II] Dimostrare che la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, 0 < t\,,\\ u(0,t) &= 5\,, && t > 0\,,\\ u_x(1,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= x^2 + 5\,, && 0 < x < 1\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$\lim_{t\to\infty}\ \sup_{0<x<1} |u(x,t) - 5| = 0\,.$$

12. [14/4/2004 (ex)I] Consideriamo le soluzioni u_1 e u_2 di

$$\begin{aligned}
u_{1t} - u_{1xx} &= 4u\,, & u_{2t} - u_{2xx} &= 3u\,, & & 0 < x < \pi\,,\\
u_1(0,t) &= 0\,, & u_{2x}(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\
u_1(\pi,t) &= 0\,, & u_{2x}(\pi,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\
u_1(x,0) &= \sin x\,, & u_2(x,0) &= \cos x\,, & & 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

Dimostrare che per ogni fissato $0 < x < \pi$ esiste un t_x tale che

$$u_1(x,t) > u_2(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } t > t_x.$$

Soluzione

Le soluzioni u_i si trovano per separazione delle variabili: tentando con $u_1 = T_1(t)\sin x$ si ottiene per T_1 il problema

$$T_1' + T_1 = 4T_1\,, \qquad T_1(0) = 1\,,$$

ossia

$$T_1(t) = e^{3t}\,, \qquad t \geq 0\,.$$

Tentando con $u_2 = T_2(t)\cos x$ si ottiene per T_2 il problema

$$T_2' + T_2 = 3T_2\,, \qquad T_2(0) = 1\,,$$

ossia

$$T_2(t) = e^{2t}\,, \qquad t \geq 0\,.$$

Dunque la disuguaglianza richiesta si riduce a

$$e^{3t}\sin x > e^{2t}\cos x\,,$$

che è ovvia per ogni $t > t_x = 0$ se $\pi/2 \leq x < \pi$, mentre richiede

$$t > t_x = \max\left(0, \ln\frac{\cos x}{\sin x}\right),$$

se $0 < x < \pi/2$.

R.

$$t_x = \begin{cases} 0\,, & \pi/2 \leq x < \pi\,,\\ \max\left(0, \ln\frac{\cos x}{\sin x}\right), & 0 < x < \pi/2\,. \end{cases}$$

13. [14/4/2004 (ex)II] Consideriamo le soluzioni u_1 e u_2 di

$$\begin{aligned}
u_{1t} - u_{1xx} &= 5u\,, & u_{2t} - u_{2xx} &= \frac{u}{2}\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,,\\
u_{1x}(0,t) &= 0\,, & u_2(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\
u_1\left(\frac{\pi}{2},t\right) &= 0\,, & u_{2x}\left(\frac{\pi}{2},t\right) &= 0\,, & & t > 0\,,\\
u_1(x,0) &= \cos x\,, & u_2(x,0) &= \sin x\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Dimostrare che per ogni fissato $0 < x < \pi/2$ esiste un t_x tale che

$$u_1(x,t) > u_2(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } t > t_x .$$

R.

$$t_x = \max\left(0, \frac{2}{9}\ln\frac{\sin x}{\cos x}\right).$$

14. [14/4/2005 (ex)I] Trovare il limite

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)\,,$$

ove u risolve il problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \\ u(1,t) &= 1\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= x^2\,, && 0 < x < 1\,. \end{aligned}$$

[Suggerimento: ridursi a un problema con dati omogenei al contorno.]

15. [14/4/2005 (ex)II] Trovare il limite

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)\,,$$

ove u risolve il problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 2\,, 0 < t\,, \\ u(0,t) &= \pi\,, && 0 < t\,, \\ u(2,t) &= \frac{\pi}{2}\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= \pi\Big(1 - \frac{x^3}{16}\Big)\,, && 0 < x < 2\,. \end{aligned}$$

[Suggerimento: ridursi a un problema con dati omogenei al contorno.]

16. [18/4/2007 (ex)I] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= u\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && 0 < x < \pi\,, \end{aligned}$$

- Dimostrare che la soluzione è limitata su $(0,\pi)\times(0,\infty)$, per ogni scelta del dato $u_0 \in C([0,\pi])$.

- Trovare un dato $u_0 \in C([0, \pi])$, con $u_0 \not\equiv 0$, tale che

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

Soluzione

Introduciamo la nuova incognita

$$v(x,t) = e^{-t} u(x,t)\,.$$

Si verifica subito che v risolve

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ v(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ v(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ v(x,0) &= u_0(x)\,, && 0 < x < \pi\,, \end{aligned}$$

Perciò

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-n^2 t} \sin(nx)\,,$$

con

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_0(x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x\,.$$

Quindi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(1-n^2)t} \sin(nx)\,,$$

per cui, per esempio, per $t \geq 1$,

$$|u(x,t)| \leq \sup_n |\alpha_n| \sum_{n=1}^{\infty} e^{1-n^2} \leq 2 \max|u_0| \sum_{n=1}^{\infty} e^{1-n^2} = \gamma\,.$$

Si ha inoltre

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \alpha_1 \sin x\,.$$

Per avere limite nullo, ossia $\alpha_1 = 0$, basta scegliere ad esempio $u_0(x) = \sin(2x)$. Per l'usuale relazione di ortogonalità si ha allora, infatti,

$$\alpha_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(2x) \sin x\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

R.

$$u_0(x) = \sin(2x)\,, \qquad 0 \leq x \leq \pi\,.$$

17. [18/4/2007 (ex)II] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 2u\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Trovare

1. un esempio di dato iniziale $u_0 \in C([0,\pi])$ per cui la soluzione diviene illimitata per $t \to \infty$;
2. un esempio di dato iniziale $u_0 \in C([0,\pi])$, $u_0 \not\equiv 0$, per cui la soluzione rimane limitata su $(0,\pi) \times (0,\infty)$.

R.

$$\begin{aligned} &1) \quad u_0(x) = \sin x\,, && 0 \le x \le \pi\,; \\ &2) \quad u_0(x) = \sin 2x\,, && 0 \le x \le \pi\,. \end{aligned}$$

18. [15/9/2009 (ex)I] Si consideri il problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= a - u\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(L,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && 0 < x < L\,. \end{aligned}$$

ove $a \in \boldsymbol{R}$ è una costante, e $u_0 \in C([0,L])$.
Determinare la funzione $\omega(x)$ tale che

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \omega(x)\,, \qquad 0 < x < L\,,$$

e dimostrare tale relazione.
Soluzione
La funzione ω si determina risolvendo il problema al contorno

$$\begin{aligned} -D\omega'' &= a - \omega\,, \qquad 0 < x < L\,, \\ \omega(0) &= \omega(L) = 0\,. \end{aligned}$$

L'equazione differenziale ha come integrale generale

$$\omega(x) = k_1 e^{\frac{x}{\sqrt{D}}} + k_2 e^{-\frac{x}{\sqrt{D}}} + a\,,$$

ove imponendo le condizioni ai limiti si ottiene

$$k_1 = a\frac{e^{-\frac{L}{\sqrt{D}}} - 1}{e^{\frac{L}{\sqrt{D}}} - e^{-\frac{L}{\sqrt{D}}}}\,, \qquad k_2 = a\frac{e^{\frac{L}{\sqrt{D}}} - 1}{e^{-\frac{L}{\sqrt{D}}} - e^{\frac{L}{\sqrt{D}}}}\,.$$

La funzione $v = u - \omega$ risolve

$$
\begin{aligned}
v_t - Dv_{xx} &= -v\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,,\\
v(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
v(L,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
v(x,0) &= u_0(x) - \omega(x)\,, && 0 < x < L\,.
\end{aligned}
$$

Passando alla variabile $w = e^t v$, si ha

$$
\begin{aligned}
w_t - Dw_{xx} &= 0\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,,\\
w(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
w(L,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
w(x,0) &= u_0(x) - \omega(x)\,, && 0 < x < L\,.
\end{aligned}
$$

Per il principio di massimo,

$$
|w(x,t)| \le C = \max|u_0 - \omega|\,,
$$

da cui

$$
|u(x,t) - \omega(x)| = |v(x,t)| \le Ce^{-t}\,,
$$

che dimostra la tesi.
R.

$$
\omega(x) = a\frac{e^{-\frac{L}{\sqrt{D}}} - 1}{e^{\frac{L}{\sqrt{D}}} - e^{-\frac{L}{\sqrt{D}}}}e^{\frac{x}{\sqrt{D}}} + a\frac{e^{\frac{L}{\sqrt{D}}} - 1}{e^{-\frac{L}{\sqrt{D}}} - e^{\frac{L}{\sqrt{D}}}}e^{-\frac{x}{\sqrt{D}}} + a\,.
$$

19. [15/9/2009 (ex)II] Si consideri il problema

$$
\begin{aligned}
u_t - Du_{xx} &= a - u\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,,\\
u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(L,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= u_0(x)\,, && 0 < x < L\,.
\end{aligned}
$$

ove $a \in \boldsymbol{R}$ è una costante, e $u_0 \in C([0,L])$.
Determinare la funzione $\omega(x)$ tale che

$$
\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \omega(x)\,, \qquad 0 < x < L\,,
$$

e dimostrare tale relazione.
R.

$$
\omega(x) = -a\frac{1}{e^{\frac{L}{\sqrt{D}}} + e^{-\frac{L}{\sqrt{D}}}}e^{\frac{x}{\sqrt{D}}} - a\frac{1}{e^{-\frac{L}{\sqrt{D}}} + e^{\frac{L}{\sqrt{D}}}}e^{-\frac{x}{\sqrt{D}}} + a\,.
$$

480. Semplici problemi al contorno per l'equazione di Laplace

1. [4/3/2003 (hw)I] Considerare la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < 1\,,\\ u(0, y) &= 0\,, && 0 < y < 1\,,\\ u(x, 1) &= 4\,, && 0 < x < \pi\,,\\ u(\pi, y) &= 0\,, && 0 < y < 1\,,\\ u(x, 0) &= \sin x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Determinare una stima inferiore per $u(\pi/2, 1/2)$.
SOLUZIONE
Una prima risposta viene subito dal principio di massimo forte: $u(\pi/2, 1/2) > 0$. *Per ottenere una stima migliore, usiamo la sottosoluzione* $v(x, y) = e^y \sin x$*, che dà in* $(\pi/2, 1/2)$, $u > v = \sqrt{e}$.

2. [1/4/2003 (ex)I] Calcolare la soluzione del problema per l'equazione di Laplace nella corona circolare

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && 1 < x^2 + y^2 < 4\,,\\ u(x, y) &= 1\,, && x^2 + y^2 = 1\,,\\ u(x, y) &= 3\,, && x^2 + y^2 = 4\,. \end{aligned}$$

(*Sugg.* Considerare la particolare geometria del dominio e dei dati.)
SOLUZIONE
Ricerchiamo la soluzione in forma radiale

$$u(x, y) = v(r)\,.$$

La v *deve quindi risolvere*

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\big(rv_r\big)_r &= 0\,, && 1 < r < 2\,,\\ v(1) &= 1\,,\\ v(2) &= 3\,, \end{aligned}$$

da cui segue

$$v(r) = \frac{2}{\ln 2}\ln r + 1\,, \qquad 1 < r < 2\,.$$

R.

$$u(x, y) = \frac{1}{\ln 2}\ln(x^2 + y^2) + 1\,, \qquad 1 < x^2 + y^2 < 4\,.$$

3. [23/9/2003 (ex)I] Posto

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}\,,$$

dimostrare che il problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && \text{in } A, \\ u(x,y) &= 7\,, && \text{su } \partial A, \end{aligned}$$

ha un'unica soluzione radiale limitata su tutto A, e trovare tale soluzione.

4. [23/9/2003 (ex)I] Determinare il valore massimo assunto sul cerchio chiuso $\overline{B}$, ove

$$B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}\,,$$

dalla soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= 0\,, && \text{in } B, \\ u &= f(x,y)\,, && \text{su } \partial B, \end{aligned}$$

ove f è la funzione che in coordinate polari si rappresenta come

$$f = r(1 + |\sin\varphi|)^2\,,$$

e trovare tutti i punti di $\overline{B}$ ove tale massimo è raggiunto.

Soluzione

Per il principio di massimo forte, visto che u non è costante (perché f non lo è su ∂B), il suo massimo è raggiunto solo su ∂B, e quindi ove $|\sin\varphi| = 1$, ossia per $\varphi = \pi/2$, $\varphi = 3\pi/2$.

Dunque il massimo di u su $\overline{B}$ vale 4, ed è raggiunto solo in $(0,1)$ e $(0,-1)$.

R.

$$\max_{\overline{B}} u = u(0,1) = u(0,-1) = 4\,.$$

5. [23/9/2003 (ex)II] Posto

$$B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 4\}\,,$$

dimostrare che il problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && \text{in } B, \\ u(x,y) &= -3\,, && \text{su } \partial B, \end{aligned}$$

ha un'unica soluzione radiale limitata su tutto B, e trovare tale soluzione.

6. [23/9/2003 (ex)II] Determinare il valore minimo assunto sul cerchio chiuso $\overline{A}$, ove

$$A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}\,,$$

dalla soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= 0\,, && \text{in } A, \\ u &= f(x,y)\,, && \text{su } \partial A, \end{aligned}$$

ove f è la funzione che in coordinate polari si rappresenta come

$$f = \rho^2 (1 - |\sin\varphi|)^2 ,$$

e trovare tutti i punti di $\overline{A}$ ove tale massimo è raggiunto.
R.

$$\min_{\overline{A}} u = u(0,1) = u(0,-1) = 0 .$$

7. [31/3/2004 (ex)I] Sia u la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 , && \text{in } \Omega = \{1/4 < x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x,y) &= x , && \text{su } x^2 + y^2 = 1, \\ u(x,y) &= 1 , && \text{su } x^2 + y^2 = 1/4. \end{aligned}$$

Trovare tutti i punti di $\overline{\Omega}$ ove u assume il suo massimo e il suo minimo assoluti.

8. [31/3/2004 (ex)II] Sia u la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 , && \text{in } \Omega = \{1/4 < x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x,y) &= -\frac{1}{2} , && \text{su } x^2 + y^2 = 1, \\ u(x,y) &= y , && \text{su } x^2 + y^2 = 1/4. \end{aligned}$$

Trovare tutti i punti di $\overline{\Omega}$ ove u assume il suo massimo e il suo minimo assoluti.

9. [14/4/2004 (ex)I] Consideriamo la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 , && \text{in } \Omega = A \setminus \overline{B}, \\ u(x,y) &= x^2 + y^2 , && \text{su } \partial\Omega, \end{aligned}$$

ove

$$A = \Big\{ (x,y) \mid \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} < 1 \Big\} , \qquad B = \Big\{ (x,y) \mid 4x^2 + y^2 < 1 \Big\} .$$

Dimostrare che u assume tutti i suoi valori sul segmento

$$L = \Big\{ (x,0) \mid \frac{1}{2} \le x \le 4 \Big\} \subset \overline{\Omega} .$$

Soluzione
Per il principio del massimo, u assume il minimo e il massimo sulla frontiera $\partial\Omega$. Dato che

$$u(x,y) = \operatorname{dist}\Big((x,y), (0,0) \Big)^2 , \qquad (x,y) \in \partial\Omega ,$$

si vede subito che

$$\min u = u\Big(\frac{1}{2}, 0\Big) = \frac{1}{4}\,,$$
$$\max u = u(4,0) = 16\,.$$

Sul segmento L che unisce i due punti la u è continua, e quindi assume tutti i valori intermedi ai valori raggiunti negli estremi del segmento, che sono poi i suoi valori massimo e minimo. Perciò su L la u assume tutti i suoi valori.

10. [14/4/2004 (ex)II] Consideriamo la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && \text{in } \Omega = A \setminus \overline{B}, \\ u(x,y) &= x^2 + y^2\,, && \text{su } \partial\Omega, \end{aligned}$$

ove

$$A = \Big\{(x,y) \mid \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} < 1\Big\}\,, \qquad B = \Big\{(x,y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1\Big\}\,.$$

Dimostrare che u assume tutti i suoi valori sul segmento

$$L = \{(0,y) \mid 2 \le y \le 5\} \subset \overline{\Omega}\,.$$

11. [15/9/2004 (ex)I] Trovare tutti i punti di minimo della soluzione $u \in C^2(\overline{A})$ di

$$\begin{aligned} \Delta u &= -1\,, && \text{in } A = \{x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x,y) &= x^2\,, && x^2 + y^2 = 1\,. \end{aligned}$$

12. [15/9/2004 (ex)II] Trovare tutti i punti di massimo della soluzione $u \in C^2(\overline{A})$ di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 1\,, && \text{in } A = \{x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x,y) &= y^2\,, && x^2 + y^2 = 1\,. \end{aligned}$$

13. [1/4/2005 (ex)I] Sia

$$\Omega = \Big[(0,2) \times (-1,1)\Big] \cup \Big[(-2,0] \times \Big(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\Big)\Big]\,.$$

Dimostrare che la soluzione di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && \text{in } \Omega,\\
u(x,-1) &= x\,, && 0<x<2\,,\\
u(x,1) &= x\,, && 0<x<2\,,\\
u(2,y) &= 2\,, && -1<y<1\,,\\
u(x,y) &= 0\,, && \text{su } \partial\Omega\cap\{x\le 0\},
\end{aligned}
$$

soddisfa

$$u(x,y) > x\,, \qquad \text{in } \Omega.$$

Soluzione

Si ha, posto $v = u - x$, che

$$
\begin{aligned}
\Delta v &= 0\,, && \text{in } \Omega,\\
v &\ge 0\,, && \text{su } \partial\Omega,
\end{aligned}
$$

e in particolare, per esempio,

$$v(-2,y) = 2 > 0\,, \qquad -\frac{1}{4} < y < \frac{1}{4}\,. \tag{1}$$

Dunque per il principio di massimo forte $v \ge 0$ in Ω, e anzi $v > 0$ in Ω perché altrimenti si avrebbe $v \equiv 0$ in Ω contro la (1). Quindi

$$u(x,y) - x > 0 \qquad \text{in } \Omega.$$

14. [1/4/2005 (ex)II] Sia

$$\Omega = \Big[\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\times(-1,0]\Big] \cup \Big[(-1,1)\times(0,2)\Big]\,.$$

Dimostrare che la soluzione di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && \text{in } \Omega,\\
u(-1,y) &= -y\,, && 0<y<2\,,\\
u(1,y) &= -y\,, && 0<y<2\,,\\
u(x,2) &= -2\,, && -1<x<1\,,\\
u(x,y) &= 0\,, && \text{su } \partial\Omega\cap\{y\le 0\},
\end{aligned}
$$

soddisfa

$$u(x,y) < -y\,, \qquad \text{in } \Omega.$$

Soluzione

Si ha, posto $v = u + y$, che

$$
\begin{aligned}
\Delta v &= 0\,, && \text{in } \Omega,\\
v &\le 0\,, && \text{su } \partial\Omega,
\end{aligned}
$$

e in particolare, per esempio,

$$v(x,-1) = -1 < 0\,, \qquad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\,. \tag{1}$$

Dunque per il principio di massimo forte $v \le 0$ in Ω, e anzi $v < 0$ in Ω perché altrimenti si avrebbe $v \equiv 0$ in Ω contro la (1). Quindi

$$u(x,y) + y < 0 \qquad \textit{in } \Omega.$$

15. [23/6/2005 (ex)I] Sia u la soluzione del problema

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= 0\,, &\qquad &\text{in } \Omega = \{(x,y) \mid 4 < x^2 + y^2 < 9\}, \\ u &= x^2 y^2\,, &\qquad &\text{su } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dimostrare che u assume tutti i suoi valori nel sottoinsieme di $\overline{\Omega}$ dato da

$$\overline{\Omega} \cap \{(x,y) \mid y \ge x \ge 0\}\,.$$

16. [23/6/2005 (ex)II] Sia u la soluzione del problema

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= 0\,, &\qquad &\text{in } \Omega = \{(x,y) \mid 1 < |x| + |y| < 2\}, \\ u &= |xy|\,, &\qquad &\text{su } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dimostrare che u assume tutti i suoi valori nel sottoinsieme di $\overline{\Omega}$ dato da

$$\overline{\Omega} \cap \{(x,y) \mid x \ge y \ge 0\}\,.$$

17. [15/12/2005 (ex)I] Trovare l'unica soluzione radiale del problema

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= 0\,, &\qquad & x^2 + y^2 > 1\,, \\ u(x,y) &= 1\,, &\qquad & x^2 + y^2 = 1\,, \\ \lim_{x^2+y^2 \to \infty} u(x,y) &= 1\,. \end{aligned}$$

18. [20/9/2007 (ex)I] Trovare la soluzione radiale

$$u(x,y) = v\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\,,$$

del problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, \qquad 1 < x^2 + y^2 < 4\,,\\ u(x,y) &= 1\,, \qquad x^2 + y^2 = 1\,,\\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 1\,, \qquad x^2 + y^2 = 4\,. \end{aligned}$$

Soluzione

In coordinate polari il problema diviene

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(rv_r)_r &= 0\,, \qquad 1 < r < 2\,,\\ v(1) &= 1\,,\\ \frac{\partial v}{\partial r}(2) &= 1\,. \end{aligned}$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$v(r) = k_1 \ln r + k_2\,,$$

e le costanti k_i si determinano con le condizioni alla frontiera:

$$\begin{aligned} v(1) &= k_2 = 1\,,\\ v_r(2) &= \frac{k_1}{2} = 1\,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x,y) = \ln(x^2 + y^2) + 1\,, \qquad 1 < x^2 + y^2 < 4\,.$$

19. [14/12/2007 (ex)I] Trovare tutte le soluzioni radiali

$$u(x,y) = v\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big)\,,$$

del problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}\,, \qquad 1 < x^2 + y^2\,,\\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0\,, \qquad x^2 + y^2 = 1\,. \end{aligned}$$

Soluzione

In coordinate polari il problema diviene

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(rv_r)_r &= \frac{1}{r}\,, \qquad 1 < r\,,\\ \frac{\partial v}{\partial r}(1) &= 0\,. \end{aligned}$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$v(r) = k_1 \ln r + k_2 + r\,.$$

Imponendo la condizione alla frontiera:

$$v_r(1) = 1 + k_1 = 0\,,$$

si ottiene $k_1 = -1$, mentre k_2 rimane arbitrario.
R.

$$u(x,y) = -\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + k_2\,, \qquad 1 < x^2+y^2\,.$$

20. [14/7/2008 (ex)I] Si considerino le soluzioni (radiali) $u \in C^2(\{x^2+y^2 \geq 1\})$ del seguente problema:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{-\alpha}, & \qquad \sqrt{x^2+y^2} &> 1\,, \\ \nabla u(x,y)\cdot\nu &= 0\,, & \sqrt{x^2+y^2} &= 1\,, \end{aligned}$$

ove ν è la normale a $\sqrt{x^2+y^2} = 1$, e $\alpha > 0$ è assegnata ad arbitrio.
Si dimostri che

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} u(x,y) = \infty\,.$$

Soluzione
Passando a coordinate radiali

$$v(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,, \qquad r > 0\,, \varphi \in (-\pi,\pi)\,,$$

il problema diviene

$$\begin{aligned} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r &= r^{-\alpha}\,, & \qquad r &> 1\,, \\ v_r(1) &= 0\,, & r &= 1\,. \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = r^{-\alpha+1}\,, \qquad r > 1\,,$$

da cui, assumendo per ora $\alpha \neq 2$,

$$rv_r(r) = \int_1^r \rho^{-\alpha+1}\,\mathrm{d}\rho = \frac{r^{-\alpha+2}-1}{2-\alpha}\,.$$

Dividendo per r e integrando si ha

$$v(r) - v(1) = \int_1^r \frac{s^{-\alpha+1} - s^{-1}}{2-\alpha}\,\mathrm{d}s\,.$$

Si vede subito che l'ultimo integrale tende a $+\infty$ se $r \to \infty$, il che prova la tesi.

Se poi $\alpha = 2$, si ha come sopra

$$\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = r^{-\alpha+1} = r^{-1}\,, \qquad r > 1\,,$$

da cui,

$$r v_r(r) = \int_1^r \rho^{-1}\,\mathrm{d}\rho = \ln r\,.$$

Dividendo per r e integrando si ha

$$v(r) - v(1) = \int_1^r \frac{\ln s}{s}\,\mathrm{d}s\,.$$

Anche quest'integrale diverge per $r \to \infty$.

21. [14/7/2008 (ex)II] Si considerino le soluzioni (radiali) $u \in C^2(\{x^2+y^2 \geq 1\})$ del seguente problema:

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= \big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^{\alpha}\,, & \sqrt{x^2+y^2} &> 2\,,\\ \nabla\, u(x,y)\cdot\nu &= 0\,, & \sqrt{x^2+y^2} &= 2\,, \end{aligned}$$

ove ν è la normale a $\sqrt{x^2+y^2} = 2$, e $\alpha < 0$ è assegnata ad arbitrio.
Si dimostri che

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} u(x,y) = \infty\,.$$

22. [11/1/2010 (ex)I] Sia $\Omega = (0,1)\times(0,1)$, e si considerino i due problemi al contorno

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= 0\,, & \Delta\, v &= 0\,, & &\text{in } \Omega,\\ u(x,0) &= 1\,, & v(x,0) &= 2\,, & &0 < x < 1\,,\\ u(x,1) &= 1\,, & v(x,1) &= 2\,, & &0 < x < 1\,,\\ u(0,y) &= 0\,, & v(0,y) &= -1\,, & &0 < y < 1\,,\\ u(1,y) &= 0\,, & v(1,y) &= -1\,, & &0 < y < 1\,. \end{aligned}$$

Dimostrare che vale

$$u\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = v\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\,.$$

(Sugg.: usare le simmetrie del problema, e il teorema di unicità di soluzioni.)
Soluzione
Definiamo

$$w(x,y) = v(x,y) - u(x,y)\,.$$

Allora w soddisfa

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0\,, && \textit{in } \Omega, \\ w(x,0) &= 1\,, && 0 < x < 1\,, \\ w(x,1) &= 1\,, && 0 < x < 1\,, \\ w(0,y) &= -1\,, && 0 < y < 1\,, \\ w(1,y) &= -1\,, && 0 < y < 1\,. \end{aligned}$$

Dobbiamo dimostrare che

$$w\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = 0\,.$$

Definiamo

$$w_1(x,y) = w(y,x)\,, \qquad w_2(x,y) = -w(x,y)\,, \qquad (x,y) \in \Omega\,.$$

Sia w_1 che w_2 risolvono il problema

$$\begin{aligned} \Delta z &= 0\,, && \textit{in } \Omega, \\ z(x,0) &= -1\,, && 0 < x < 1\,, \\ z(x,1) &= -1\,, && 0 < x < 1\,, \\ z(0,y) &= 1\,, && 0 < y < 1\,, \\ z(1,y) &= 1\,, && 0 < y < 1\,. \end{aligned}$$

Perciò per l'unicità $w_1 \equiv w_2$ e

$$w\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = w_1\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = w_2\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = -w\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\,.$$

520. Formula di rappresentazione eq. del calore

1. [17/2/2003 (hw)I] Trovare la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \infty\,, \\ u(x,0) &= \operatorname{arctg} x\,, && 0 \le x\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \end{aligned}$$

come restrizione a $x \ge 0$ di un opportuna soluzione al problema di Cauchy su $\boldsymbol{R}$.
R.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arctg}|\xi|\, \Gamma(x-\xi,t)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Infatti si verifica direttamente che questa soluzione è pari.

2. [17/2/2003 (hw)I] Trovare la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \infty\,,\\ u(x,0) &= \cos x\,, && 0 \le x\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \end{aligned}$$

come restrizione a $x \ge 0$ di un opportuna soluzione al problema di Cauchy su $\boldsymbol{R}$.
R.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\xi)\cos(\xi)\Gamma(x-\xi,t)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

($\operatorname{sign}(\xi) = 1$ *se* $\xi > 0$, $\operatorname{sign}(\xi) = -1$ *se* $\xi < 0$*) Infatti si verifica direttamente che questa soluzione è dispari.*

3. [17/2/2003 (hw)I] Dimostrare che la soluzione u del problema di Cauchy corrispondente al dato iniziale $u_0(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$ soddisfa

$$u(x,t) \ge \frac{1}{e\sqrt{\pi t}}\,, \qquad -1 \le x \le 1\,, 1 \le t\,.$$

Soluzione
Si utilizza la rappresentazione della u *mediante la soluzione fondamentale, stimando dal basso l'esponenziale che appare nell'integrale usando le* $-1 \le x \le 1$, $1 \le t$. *Iniziamo cioè con lo scrivere*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\boldsymbol{R}} \chi_{[-1,1]}(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Dato che $-1 \le x \le 1$, *nell'ultimo integrale si ha*

$$|x-\xi| \le 2\,,$$

e quindi, se $t \ge 1$,

$$e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \ge e^{-1}\,.$$

Quindi

$$u(x,t) \ge \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{1} e^{-1}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{e\sqrt{\pi t}}\,.$$

4. [1/4/2003 (ex)I] Dimostrare che se u è la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,, 0 < t < \infty\,,\\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

ove

$$u_0(x) = 1 - \chi_{(0,1)}(x) = \begin{cases} 1\,, & x \notin (0,1)\,, \\ 0\,, & x \in (0,1)\,, \end{cases}$$

allora per ogni $x \in \boldsymbol{R}$ fissato

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1\,.$$

5. [30/6/2003 (ex)I] Consideriamo le tre funzioni u_1, u_2, u_3 soluzioni limitate di

$$\begin{aligned} u_{1t} - u_{1xx} &= 0\,, && x \in \boldsymbol{R}\,, 0 < t < \infty\,, \\ u_1(x,0) &= \chi_{(0,+\infty)}(x) \operatorname{arctg} x\,, && x \in \boldsymbol{R}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{2t} - u_{2xx} &= 0\,, && x \ge 0\,, t \ge 0\,, \\ u_2(0,t) &= 0\,, && t \ge 0\,, \\ u_2(x,0) &= \operatorname{arctg} x\,, && x \ge 0\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{3t} - u_{3xx} &= 0\,, && x \ge 0\,, t \ge 0\,, \\ u_{3x}(0,t) &= 0\,, && t \ge 0\,, \\ u_3(x,0) &= \operatorname{arctg} x\,, && x \ge 0\,. \end{aligned}$$

Mostrare che

$$u_2(x,t) < u_1(x,t) < u_3(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } x > 0,\ t > 0.$$

6. [30/6/2003 (ex)II] Consideriamo le tre funzioni u_1, u_2, u_3 soluzioni limitate di

$$\begin{aligned} u_{1t} - u_{1xx} &= 0\,, && x \in \boldsymbol{R}\,, 0 < t < \infty\,, \\ u_1(x,0) &= \chi_{(0,+\infty)}(x) \frac{1}{x^2+1}\,, && x \in \boldsymbol{R}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{2t} - u_{2xx} &= 0\,, && x \ge 0\,, t \ge 0\,, \\ u_2(0,t) &= 0\,, && t \ge 0\,, \\ u_2(x,0) &= \frac{1}{x^2+1}\,, && x \ge 0\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{3t} - u_{3xx} &= 0\,, && x \ge 0\,, t \ge 0\,, \\ u_{3x}(0,t) &= 0\,, && t \ge 0\,, \\ u_3(x,0) &= \frac{1}{x^2+1}\,, && x \ge 0\,. \end{aligned}$$

Mostrare che

$$u_2(x,t) < u_1(x,t) < u_3(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } x>0,\ t>0.$$

7. [28/6/2004 (ex)I] Dimostrare che la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & -\infty < x < \infty\,, \quad t>0\,,\\ u(x,0) &= \chi_{(0,\infty)}(x)\,, & -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{1}{2}\,, \qquad \text{per ogni } x \in \boldsymbol{R}.$$

8. [28/6/2004 (ex)II] Dimostrare che la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & -\infty < x < \infty\,, \quad t>0\,,\\ u(x,0) &= -2\chi_{(-\infty,0)}(x)\,, & -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = -1\,, \qquad \text{per ogni } x \in \boldsymbol{R}.$$

9. [15/9/2004 (ex)I] Scrivere mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & 0<x<\infty\,, t>0\,,\\ u_x(0,t) &= 0\,, & t>0\,,\\ u(x,0) &= \frac{x}{1+x^2}\cos x\,, & 0<x<\infty\,, \end{aligned}$$

e dimostrare che è limitata su $(0,\infty)\times(0,\infty)$.

10. [15/9/2004 (ex)II] Scrivere mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & 0<x<\infty\,, t>0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, & t>0\,,\\ u(x,0) &= \frac{x}{1+x^2}\sin x\,, & 0<x<\infty\,, \end{aligned}$$

e dimostrare che è limitata su $(0,\infty)\times(0,\infty)$.

11. [1/4/2005 (ex)I] Dimostrare che la soluzione limitata di

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,, 0 < t\,,\\
u(x,0) &= \begin{cases} 1\,, & x > 0\,,\\ 0\,, & x < 0\,,\end{cases} && -\infty < x < \infty\,,
\end{aligned}
$$

soddisfa per ogni $t > 0$ fissato

$$\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 1\,.$$

Soluzione
Si ha dalla formula di rappresentazione

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(0,\infty)}(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z\,.$$

Dunque, per $t > 0$ fissato,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z &= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{k} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = 1\,.
\end{aligned}
$$

12. [1/4/2005 (ex)II] Dimostrare che la soluzione limitata di

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,, 0 < t\,,\\
u(x,0) &= \begin{cases} 0\,, & x > 0\,,\\ 1\,, & x < 0\,,\end{cases} && -\infty < x < \infty\,,
\end{aligned}
$$

soddisfa per ogni $t > 0$ fissato

$$\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = 1\,.$$

Soluzione
Si ha dalla formula di rappresentazione

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(-\infty,0)}(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,\mathrm{d}\xi\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z\,.
\end{aligned}
$$

Dunque, per $t > 0$ fissato,

$$\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \lim_{k\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{k}^{+\infty} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = 1\,.$$

13. [23/6/2005 (ex)I] Risolvere mediante la formula di rappresentazione di soluzioni del problema di Cauchy per l'equazione del calore il problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ u(x,0) &= \sin(x)\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

14. [23/6/2005 (ex)II] Risolvere mediante la formula di rappresentazione di soluzioni del problema di Cauchy per l'equazione del calore il problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\ u_x(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ u(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ u(x,0) &= \cos(x)\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

15. [7/4/2006 (ex)I] Sia u l'unica soluzione limitata di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,, t > 0\,,\\ u(x,0) &= \frac{2|x|}{(1+x^2)^2}\,, && -\infty < x < \infty\,. \end{aligned}$$

Determinare un tempo t_0 tale che per ogni $t \geq t_0$

$$u(x,t) < \frac{1}{10}\,, \qquad -\infty < x < \infty\,.$$

[Si noti che $\max u(x,0) > u(1,0) = 1/2 > 1/10$, quindi dovrà essere $t_0 > 0$.]
Soluzione

Maggioriamo la u a partire dalla formula di rappresentazione:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \frac{2|\xi|}{(1+\xi^2)^2} \, \mathrm{d}\xi \\
&\le \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2|\xi|}{(1+\xi^2)^2} \, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2} \, \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[-\frac{1}{1+\xi^2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} < \frac{1}{10} \,,
\end{aligned}
$$

se $t > 100/\pi$.
R.

$$
t_0 = \frac{100}{\pi} \,.
$$

16. [7/4/2006 (ex)II] Sia u l'unica soluzione limitata di

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0 \,, & -\infty < x < \infty \,, t > 0 \,, \\
u(x,0) &= \frac{2e^{2|x|}}{(1+e^{2|x|})^2} \,, & -\infty < x < \infty \,.
\end{aligned}
$$

Determinare un tempo t_0 tale che per ogni $t \ge t_0$

$$
u(x,t) < \frac{1}{10} \,, \qquad -\infty < x < \infty \,.
$$

[Si noti che $\max u(x,0) \ge u(0,0) = 1/2 > 1/10$, quindi dovrà essere $t_0 > 0$.]
Soluzione
Maggioriamo la u a partire dalla formula di rappresentazione:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \frac{2e^{2|\xi|}}{(1+e^{2|\xi|})^2} \, \mathrm{d}\xi \\
&\le \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{2|\xi|}}{(1+e^{2|\xi|})^2} \, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \frac{2e^{2\xi}}{(1+e^{2\xi})^2} \, \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[-\frac{1}{1+e^{2\xi}} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \frac{1}{2} < \frac{1}{10} \,,
\end{aligned}
$$

se $t > 25/\pi$.
R.

$$
t_0 = \frac{25}{\pi} \,.
$$

17. [2/4/2007 (ex)I] Sia u_0 una funzione continua e limitata su $\boldsymbol{R}$, periodica con periodo $a > 0$.

Si dimostri che la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & -\infty < x < \infty\,, t > 0\,,\\ u(x,0) &= u_0(x)\,, & -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

è periodica in x con periodo a, ossia

$$u(x+a,t) = u(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } x \in \boldsymbol{R},\ t > 0.$$

Soluzione

Usando la formula di rappresentazione si ha

$$u(x+a,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+a-\xi)^2}{4t}} u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{4t}} u_0(z+a)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{4t}} u_0(z)\,\mathrm{d}z = u(x,t)\,.$$

18. [2/4/2007 (ex)II] Sia u_0 una funzione continua e limitata su $\boldsymbol{R}$, con un unico punto x_0 di massimo assoluto su $\boldsymbol{R}$, tale cioè che

$$u_0(x_0) > u_0(x)\,, \qquad \text{per ogni } x \neq x_0.$$

Si dimostri che la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & -\infty < x < \infty\,, t > 0\,,\\ u(x,0) &= u_0(x)\,, & -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

soddisfa la disuguaglianza stretta

$$u(x,t) < u_0(x_0)\,, \qquad \text{per ogni } x \in \boldsymbol{R},\ t > 0.$$

19. [18/4/2007 (ex)I] Scrivere, usando la formula di rappresentazione dell'equazione del calore nel semipiano, la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & 0 < x < 1\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, & 0 < t < \infty\,,\\ u_x(1,t) &= 0\,, & 0 < t < \infty\,,\\ u(x,0) &= x^2\,, & 0 < x < 1\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Occorre riflettere il dato iniziale in modo dispari intorno a $x = 0$, e poi in modo pari intorno a $x = 1$. Si ottiene

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} -x^2\,, & -1 < x < 0\,, \\ x^2\,, & 0 < x < 1\,, \\ (2-x)^2\,, & 1 < x < 2\,, \\ -(2-x)^2\,, & 2 < x < 3\,. \end{cases}$$

La $\widetilde{u_0}$ va quindi estesa su $\boldsymbol{R}$ come funzione periodica con periodo 4.
R. *La soluzione è*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u_0}(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \,\mathrm{d}\xi\,,$$

ove $\widetilde{u_0}$ è una funzione periodica con periodo 4 tale che

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} -x^2\,, & -1 < x < 0\,, \\ x^2\,, & 0 < x < 1\,, \\ (2-x)^2\,, & 1 < x < 2\,, \\ -(2-x)^2\,, & 2 < x < 3\,. \end{cases}$$

20. [12/7/2007 (ex)I] Scrivere mediante la formula di rappresentazione di soluzioni del problema di Cauchy per l'equazione del calore la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= e^x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Soluzione
Occorre riflettere il dato iniziale in modo dispari intorno a $x = \pi$, e in modo pari intorno a $x = 0$. Si ottiene l'estensione

$$e^{|x|}\,, \quad 0 < |x| < \pi\,; \qquad -e^{2\pi - |x|}\,, \quad \pi < |x| < 2\pi\,.$$

Il dato iniziale da sostituire nella formula di rappresentazione si ottiene poi estendendo questa funzione in modo periodico su $\boldsymbol{R}$, con periodo 4π.
R. *La soluzione è*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \,\mathrm{d}\xi\,, \qquad 0 < x < \pi\,, t > 0\,,$$

ove u_0 è periodica su $\boldsymbol{R}$ con periodo 4π, e

$$u_0(x) = \begin{cases} e^{|x|}\,, & 0 < |x| < \pi\,; \\ -e^{2\pi - |x|}\,, & \pi < |x| < 2\pi\,. \end{cases}$$

21. [12/7/2007 (ex)II] Scrivere mediante la formula di rappresentazione di soluzioni del problema di Cauchy per l'equazione del calore la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= \frac{1}{1+x^2}\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

R. *La soluzione è*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \,\mathrm{d}\xi\,, \qquad 0 < x < \pi\,, t > 0\,,$$

ove u_0 è periodica su $\boldsymbol{R}$ con periodo 4π, e

$$u_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(x)}{1+x^2}\,, & 0 < |x| < \pi\,; \\ \dfrac{\operatorname{sign}(x)}{1+(2\pi - x)^2}\,, & \pi < |x| < 2\pi\,. \end{cases}$$

22. [14/12/2007 (ex)I] Scrivere mediante la formula di rappresentazione per il problema di Cauchy per l'equazione del calore la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= x \sin x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Occorre riflettere il dato iniziale in modo pari intorno a $x = \pi$, e in modo dispari intorno a $x = 0$.

Si ottiene l'estensione

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} |x| \sin x\,, & -\pi < x < \pi\,, \\ |2\pi - x| \sin(2\pi - x)\,, & \pi < x < 3\pi\,. \end{cases}$$

La $\widetilde{u_0}$ va poi intesa come estesa a tutto $\boldsymbol{R}$ in modo periodico, con periodo 4π.

R. *La soluzione è*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u_0}(s) e^{-\frac{|x-s|^2}{4t}} \,\mathrm{d}s\,, \qquad 0 < x < \pi\,, t > 0\,,$$

ove la $\widetilde{u_0}$ *ha periodo* 4π *e soddisfa*

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} |x| \sin x \,, & -\pi < x < \pi \,, \\ |2\pi - x| \sin(2\pi - x) \,, & \pi < x < 3\pi \,. \end{cases}$$

23. [16/9/2008 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - D u_{xx} &= 0 & & 0 < x < 1 \,, t > 0 \,, \\ u(x,0) &= 1 - x \,, & & 0 < x < 1 \,, \\ u(0,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \\ u_x(1,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \end{aligned}$$

mediante l'opportuna formula di rappresentazione.
Soluzione
Occorre riflettere il dato in modo dispari intorno a $x = 0$, *e in modo pari intorno a* $x = 1$, *ottenendo:*

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} -1 - x \,, & -1 < x < 0 \,, \\ 1 - x \,, & 0 < x < 1 \,, \\ -1 + x \,, & 1 < x < 2 \,, \\ -3 + x \,, & 2 < x < 3 \,. \end{cases}$$

R.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} \widetilde{u_0}(\xi) \, \mathrm{d}\xi \,, \qquad 0 < x < 1 \,, t > 0 \,,$$

ove $\widetilde{u_0}$ *è l'estensione periodica a* $\boldsymbol{R}$ *con periodo* 4 *di*

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} -1 - x \,, & -1 < x < 0 \,, \\ 1 - x \,, & 0 < x < 1 \,, \\ -1 + x \,, & 1 < x < 2 \,, \\ -3 + x \,, & 2 < x < 3 \,. \end{cases}$$

24. [16/9/2008 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - D u_{xx} &= 0 & & 0 < x < 1 \,, t > 0 \,, \\ u(x,0) &= 1 - x^2 \,, & & 0 < x < 1 \,, \\ u(0,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \\ u_x(1,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \end{aligned}$$

mediante l'opportuna formula di rappresentazione.
R.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} \widetilde{u_0}(\xi) \, \mathrm{d}\xi \,, \qquad 0 < x < 1 \,, t > 0 \,,$$

ove $\widetilde{u_0}$ *è l'estensione periodica a* $\boldsymbol{R}$ *con periodo* 4 *di*

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} -1 + x^2\,, & -1 < x < 0\,, \\ 1 - x^2\,, & 0 < x < 1\,, \\ -3 + 4x - x^2\,, & 1 < x < 2\,, \\ 3 - 4x + x^2\,, & 2 < x < 3\,. \end{cases}$$

25. [15/6/2009 (ex)I] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= -Cu\,, && 0 < x < \infty\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= \sin^2 x\,, && 0 < x < \infty\,. \end{aligned}$$

Qui D, C sono costanti positive.
Si dimostri che

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } x \in \boldsymbol{R}.$$

Soluzione
Mediante una riflessione pari intorno a $x = 0$*, possiamo passare a studiare la soluzione* v *del problema*

$$\begin{aligned} v_t - Dv_{xx} &= -Cv\,, && -\infty < x < \infty\,, t > 0\,, \\ v(x,0) &= \sin^2 x\,, && -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

poiché la restrizione di v *a* $x > 0$ *coincide con* u*.*
Introduciamo poi la nuova variabile

$$w(x,t) = e^{Ct} v(x,t)\,,$$

che risolve

$$\begin{aligned} w_t - Dw_{xx} &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,, t > 0\,, \\ w(x,0) &= \sin^2 x\,, && -\infty < x < \infty\,. \end{aligned}$$

Teoremi noti implicano che vale

$$0 = \min_{s\in\boldsymbol{R}} \sin^2 s \le w(x,t) \le \max_{s\in\boldsymbol{R}} \sin^2 s = 1\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,\ t > 0\,.$$

Dunque

$$0 \le v(x,t) = e^{-Ct} w(x,t) \le e^{-Ct}\,,$$

il che implica che vale la relazione di limite cercata (addirittura in modo uniforme su $\boldsymbol{R}$*).*

26. [15/6/2009 (ex)I] Esprimere mediante la formula di rappresentazione per l'equazione del calore la soluzione del problema

$$
\begin{aligned}
u_t - Du_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, t > 0\,,\\
u_x(0,t) &= 0 && t > 0\,,\\
u(1,t) &= 0 && t > 0\,,\\
u(x,0) &= \sin x\,, && 0 < x < 1\,.
\end{aligned}
$$

Soluzione
Occorre riflettere il dato iniziale in modo dispari intorno a $x = 1$, e in modo pari intorno a $x = 0$. Si ottiene

$$
\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} -\sin(2-x)\,, & 1 < x < 2\,,\\ \sin x\,, & 0 < x < 1\,,\\ |\sin x|\,, & -1 < x < 0\,,\\ -\sin(2+x)\,, & -2 < x < -1\,. \end{cases}
$$

R.

$$
u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \int_{\boldsymbol{R}} \widetilde{u_0}(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad 0 < x < 1\,, t > 0\,,
$$

ove

$$
\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} -\sin(2-x)\,, & 1 < x < 2\,,\\ \sin x\,, & 0 < x < 1\,,\\ |\sin x|\,, & -1 < x < 0\,,\\ -\sin(2+x)\,, & -2 < x < -1\,. \end{cases}
$$

27. [13/7/2009 (ex)I] Si consideri la soluzione del problema

$$
\begin{aligned}
u_t - Du_{xx} &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,, t > 0\,,\\
u(x,0) &= u_0(x)\,, && -\infty < x < \infty\,,
\end{aligned}
$$

con u_0 limitata e continua in $\boldsymbol{R}$, e tale inoltre che

$$
\lim_{x \to +\infty} u_0(x) = 0\,.
$$

Si dimostri che

$$
\lim_{x \to +\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad \text{per ogni fissato } t > 0.
$$

Soluzione
Si sa che la soluzione si può rappresentare come

$$
u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\,\mathrm{d}\xi\,.
$$

Prefissato $\varepsilon > 0$ *si scelga* x_ε *tale che*

$$|u_0(x)| \le \varepsilon\,, \qquad x \ge x_\varepsilon\,.$$

Consideriamo poi che

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \int_{-\infty}^{x_\varepsilon} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} \,\mathrm{d}\xi \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \int_{x_\varepsilon}^{\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} \,\mathrm{d}\xi =: J_1(x,t) + J_2(x,t)\,.$$

Si ha intanto

$$|J_2(x,t)| \le \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi D t}} \int_{x_\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} \,\mathrm{d}\xi \le \varepsilon\,,$$

per ogni (x,t).
Inoltre, se $M = \sup |u_0|$,

$$|J_1(x,t)| \le \frac{M}{2\sqrt{\pi D t}} \int_{-\infty}^{x_\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} \,\mathrm{d}\xi = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-x_\varepsilon}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-z^2} \,\mathrm{d}z \to 0\,,$$

per $x \to \infty$. *Si può quindi scegliere* $y_\varepsilon \ge x_\varepsilon$ *tale che*

$$|J_1(x,t)| \le \varepsilon\,, \qquad \text{per } x \ge y_\varepsilon.$$

Infine si ottiene

$$|u(x,t)| \le |J_1(x,t)| + |J_2(x,t)| \le 2\varepsilon\,, \qquad \text{per } x \ge y_\varepsilon,$$

che implica la relazione di limite cercata.

28. [13/7/2009 (ex)II] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - D u_{xx} &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,, t > 0\,,\\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

con u_0 limitata e continua in $\boldsymbol{R}$, e tale inoltre che

$$\lim_{x\to-\infty} u_0(x) = 0\,.$$

Si dimostri che

$$\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad \text{per ogni fissato } t > 0.$$

29. [8/2/2010 (ex)I] Si consideri la soluzione u di

$$\begin{aligned} &u_t - Du_{xx} = 0\,, && -\infty < x < \infty\,, t > 0\,,\\ &u(x,0) = \begin{cases} 2|\sin x|\,, & x < 0\,,\\ |\sin x|\,, & x > 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Dimostrare che

$$u(-x,t) > u(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } x > 0,\ t > 0.$$

Soluzione

Si ha dalla formula di rappresentazione

$$\begin{aligned} u(-x,t) - u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[u_0(\xi)e^{-\frac{(-x-\xi)^2}{4Dt}} - u_0(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\Big]\,\mathrm{d}\xi\\ * &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[u_0(-\xi) - u_0(\xi)\Big]e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\,\mathrm{d}\xi\\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} |\sin\xi| e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} |\sin\xi| e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\,\mathrm{d}\xi\\ * &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} |\sin\xi| \Big[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4Dt}}\Big]\,\mathrm{d}\xi > 0\,, \end{aligned}$$

perché nell'ultimo integrale si ha $x > 0$, $\xi > 0$. Nei passaggi segnalati da $*$ si è usato il cambiamento di variabili $\xi \to -\xi$.

530. Formula di rappresentazione eq. di Laplace nel semipiano

1. [16/4/2003 (ex)I] Calcolare, mediante formule di rappresentazione, la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && 0 < x < \infty\,, 0 < y < \infty\,,\\ u_x(0,y) &= 0\,, && 0 < y < \infty\,,\\ u(x,0) &= \operatorname{arctg} x\,, && 0 < x < \infty\,. \end{aligned}$$

2. [16/4/2003 (ex)II] Calcolare, mediante formule di rappresentazione, la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && 0 < x < \infty\,, 0 < y < \infty\,,\\ u(0,y) &= 0\,, && 0 < y < \infty\,,\\ u(x,0) &= \frac{1}{1+x^2}\,, && 0 < x < \infty\,. \end{aligned}$$

3. [30/6/2003 (ex)I] Sia u la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, \qquad & x \in \boldsymbol{R}\,, y > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, \qquad & x \in \boldsymbol{R}\,, \end{aligned}$$

ove si assume che u_0 sia una funzione continua e limitata in $\boldsymbol{R}$, con

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)| \,\mathrm{d}x < \infty\,.$$

Dimostrare che allora vale per ogni $x \in \boldsymbol{R}$ fissato:

$$\int_{1}^{\infty} u(x,y)^2 \,\mathrm{d}y < \infty\,.$$

4. [30/6/2003 (ex)II] Sia u la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, \qquad & x \in \boldsymbol{R}\,, y > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, \qquad & x \in \boldsymbol{R}\,, \end{aligned}$$

ove si assume che u_0 sia una funzione continua e limitata in $\boldsymbol{R}$, con

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)| \,\mathrm{d}x < \infty\,.$$

Dimostrare che allora vale per ogni $x \in \boldsymbol{R}$ fissato:

$$\int_{2}^{\infty} u(x,y)^4 \,\mathrm{d}y < \infty\,.$$

5. [8/3/2004 (hw)I] Trovare la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= 0\,, \qquad & 0 < x < 1\,,\, y > 0\,, \\ u(0,y) &= 0\,, \qquad & y > 0\,, \\ u_x(1,y) &= 0\,, \qquad & y > 0\,, \\ u(x,0) &= x\,, \qquad & 0 < x < 1\,. \end{aligned}$$

R. *Si ha*

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} \,\mathrm{d}\xi\,,$$

ove u_0 *è dato da*

$$u_0(x) = \begin{cases} x\,, & -1 < x < 1\,, \\ 2 - x\,, & 1 < x < 3\,, \end{cases} \qquad u_0 \text{ periodica su } \boldsymbol{R} \text{ con periodo } 4.$$

6. [8/3/2004 (hw)I] Trovare la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 1\,, & & 0 < x < 1\,,\, y > 0\,, \\ u(0, y) &= 0\,, & & y > 0\,, \\ u_x(1, y) &= 0\,, & & y > 0\,, \\ u(x, 0) &= 0\,, & & 0 < x < 1\,. \end{aligned}$$

(*Sugg.*: cambiare l'incognita per ridursi a un problema per l'equazione di Laplace).

Soluzione

Se per esempio $v = u + [1 - (x - 1)^2]/2$, v *soddisfa un problema simile a quello soddisfatto da* u, *con le differenze che* $\Delta v = 0$, *e* $v(x, 0) = (2x - x^2)/2$. *Allora*

$$u(x, y) = -\frac{2x - x^2}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_0(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} \, d\xi\,,$$

ove v_0 *è definita da*

$$v_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2x - |x|x)\,, & -1 < x < 1\,, \\ \frac{1}{2}\big(4 - 2x - |2 - x|(2 - x)\big)\,, & 1 < x < 3\,, \end{cases}$$

e dalla condizione che v_0 *sia periodica su* $\boldsymbol{R}$ *con periodo* 4.

7. [31/3/2004 (ex)I] Trovare mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, & & x > 0\,, y > 0\,, \\ u(0, y) &= 0\,, & & y > 0\,, \\ u(x, 0) &= e^{-x^3}\,, & & x > 0\,. \end{aligned}$$

8. [31/3/2004 (ex)II] Trovare mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, & & x > 0\,, y > 0\,, \\ u_x(0, y) &= 0\,, & & y > 0\,, \\ u(x, 0) &= -\frac{1}{1 + x^3}\,, & & x > 0\,. \end{aligned}$$

9. [14/4/2004 (ex)I] Scrivere mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, & & x > 0\,, y < 0\,, \\ u_y(x,0) &= 0\,, & & x > 0\,, \\ u(0,y) &= \cos(y^2)\,, & & y < 0\,. \end{aligned}$$

Soluzione
Si tratta di riflettere in modo pari intorno a $y = 0$ il dato su $x = 0$ per ottenere il problema nel semipiano $x > 0$

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0\,, & & x > 0\,, \\ v(0,y) &= \cos(y^2)\,, & & -\infty < y < \infty\,. \end{aligned}$$

Poi si applica la formula risolutiva per l'equazione di Laplace nel semipiano.
R.

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (y-\eta)^2} \cos(\eta^2)\,\mathrm{d}\eta\,, \qquad x > 0\,, y < 0\,.$$

10. [14/4/2004 (ex)II] Scrivere mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, & & x > 0\,, y < 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, & & x > 0\,, \\ u(0,y) &= \sin(y^2)\,, & & y < 0\,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (y-\eta)^2} \sin(-\eta|\eta|)\,\mathrm{d}\eta\,, \qquad x > 0\,, y < 0\,.$$

11. [14/4/2005 (ex)I] Sia $u_0 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ una funzione continua e limitata non crescente, cioè tale che

$$u_0(x_2) \le u_0(x_1)\,, \qquad \text{per ogni } x_1,\, x_2 \in \boldsymbol{R},\, x_2 \ge x_1.$$

Dimostrare che la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, & & -\infty < x < \infty\,, 0 < y\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, & & -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$u(x_2,y) \le u(x_1,y)\,, \qquad \text{per ogni } x_1,\, x_2 \in \boldsymbol{R},\, x_2 \ge x_1 \text{ e } y > 0.$$

12. [14/4/2005 (ex)II] Sia $u_0 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ una funzione continua e limitata non decrescente, cioè tale che

$$u_0(x_2) \geq u_0(x_1) \,, \qquad \text{per ogni } x_1,\, x_2 \in \boldsymbol{R},\, x_2 \geq x_1.$$

Dimostrare che la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \,, & & -\infty < x < \infty \,, 0 < y \,, \\ u(x,0) &= u_0(x) \,, & & -\infty < x < \infty \,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$u(x_2, y) \geq u(x_1, y) \,, \qquad \text{per ogni } x_1,\, x_2 \in \boldsymbol{R},\, x_2 \geq x_1 \text{ e } y > 0.$$

13. [16/9/2005 (ex)I] Risolvere mediante la formula di rappresentazione di soluzioni dell'equazione di Laplace nel semipiano il problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \,, & & x > 1 \,, y > 0 \,, \\ u_x(1, y) &= 0 \,, & & y > 0 \,, \\ u(x, 0) &= e^{1-x} \,, & & x > 1 \,. \end{aligned}$$

14. [16/9/2005 (ex)II] Risolvere mediante la formula di rappresentazione di soluzioni dell'equazione di Laplace nel semipiano il problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \,, & & x > 0 \,, y > 1 \,, \\ u_y(x, 1) &= 0 \,, & & x > 0 \,, \\ u(0, y) &= \frac{1}{y} \,, & & y > 1 \,. \end{aligned}$$

15. [7/4/2006 (ex)I] Risolvere, mediante la formula di rappresentazione per l'equazione di Laplace nel semipiano,

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \,, & & x > 0 \,, y < 0 \,, \\ u(x, 0) &= 0 \,, & & x > 0 \,, \\ u(0, y) &= e^{y} \,, & & y < 0 \,. \end{aligned}$$

Soluzione

Occorre ricondursi a un problema posto nel semipiano $x > 0$, riflettendo in modo dispari il dato su $x = 0$. Il dato esteso sarà:

$$\widetilde{u}_0(y) = \begin{cases} e^y , & y < 0 , \\ -e^{-y} , & y > 0 . \end{cases}$$

Quindi la soluzione del problema esteso sarà

$$\widetilde{u}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(y-\xi)^2 + x^2} \widetilde{u}_0(\xi) \, \mathrm{d}\xi , \qquad x > 0 , -\infty < y < \infty .$$

R.

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(y-\xi)^2 + x^2} \operatorname{sign}(\xi) e^{-|\xi|} \, \mathrm{d}\xi , \qquad x > 0 , y < 0 .$$

16. [7/4/2006 (ex)II] Risolvere, mediante la formula di rappresentazione per l'equazione di Laplace nel semipiano,

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 , & x > 0 , y > 0 , \\ u_x(0, y) &= 0 , & y > 0 , \\ u(x, 0) &= \sin(x+1) , & x > 0 . \end{aligned}$$

Soluzione
Occorre ricondursi a un problema posto nel semipiano $y > 0$, riflettendo in modo pari il dato su $y = 0$. Il dato esteso sarà:

$$\widetilde{u}_0(x) = \begin{cases} \sin(x+1) , & x > 0 , \\ \sin(-x+1) , & x < 0 . \end{cases}$$

Quindi la soluzione del problema esteso sarà

$$\widetilde{u}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} \widetilde{u}_0(\xi) \, \mathrm{d}\xi , \qquad y > 0 , -\infty < x < \infty .$$

R.

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} \sin(|\xi| + 1) \, \mathrm{d}\xi , \qquad x > 0 , y > 0 .$$

17. [20/9/2006 (ex)I] Si consideri l'unica soluzione limitata di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 , & x \in \boldsymbol{R} , y > 0 , \\ u(x, 0) &= \chi_I(x) , & x \in \boldsymbol{R} , \end{aligned}$$

ove

$$I = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [2n, 2n+1) \,.$$

Supponendo noto che esiste una costante $c \in \boldsymbol{R}$ (indipendente da x) tale che

$$\lim_{y \to \infty} u(x,y) = c \,, \qquad \text{per ogni } x \in \boldsymbol{R},$$

si determini tale c. [Sugg.: usare l'invarianza dell'equazione di Laplace per traslazioni, e il teorema di unicità.]

Soluzione

Si consideri l'unica soluzione limitata v di

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \,, & x \in \boldsymbol{R} \,, y > 0 \,, \\ v(x,0) &= \chi_{I+1}(x) = \chi_I(x-1) \,, & x \in \boldsymbol{R} \,, \end{aligned}$$

ove

$$I + 1 = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x - 1 \in I\} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [2n+1, 2n+2) \,.$$

Dato che

$$w(x,y) = u(x-1,y)$$

soddisfa il problema per v ed è limitata, per il teorema di unicità segue che $w = v$. Dunque

$$\lim_{y \to \infty} v(x,y) = \lim_{y \to \infty} u(x-1,y) = c \,, \qquad \textit{per ogni } x \in \boldsymbol{R}.$$

D'altronde $z = u + v$ soddisfa

$$\begin{aligned} \Delta z &= 0 \,, & x \in \boldsymbol{R} \,, y > 0 \,, \\ z(x,0) &= 1 \,, & x \in \boldsymbol{R} \,, \end{aligned}$$

e pertanto coincide con l'unica soluzione limitata, costante, $z = 1$, sempre per il teorema di unicità. Dunque

$$1 = \lim_{y \to \infty} z(x,y) = \lim_{y \to \infty} u(x,y) + \lim_{y \to \infty} v(x,y) = 2c \,, \qquad \textit{per ogni } x \in \boldsymbol{R},$$

da cui $c = 1/2$.

R.

$$c = \frac{1}{2} \,.$$

18. [18/4/2007 (ex)I] Scrivere, usando la formula di rappresentazione dell'equazione di Laplace nel semipiano, la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \,, & 0 < x < 1 \,, y > 0 \,, \\ u(0,y) &= 0 \,, & 0 < y < \infty \,, \\ u_x(1,y) &= 0 \,, & 0 < y < \infty \,, \\ u(x,0) &= x^2 \,, & 0 < x < 1 \,. \end{aligned}$$

Soluzione

Occorre riflettere il dato al bordo $y = 0$ in modo dispari intorno a $x = 0$, e poi in modo pari intorno a $x = 1$. Si ottiene

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} -x^2\,, & -1 < x < 0\,, \\ x^2\,, & 0 < x < 1\,, \\ (2-x)^2\,, & 1 < x < 2\,, \\ -(2-x)^2\,, & 2 < x < 3\,. \end{cases}$$

La $\widetilde{u_0}$ va quindi estesa su $\boldsymbol{R}$ come funzione periodica con periodo 4.

R. *La soluzione è*

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u_0}(\xi)\frac{y}{y^2+(x-\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi\,,$$

ove $\widetilde{u_0}$ è una funzione periodica con periodo 4 tale che

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} -x^2\,, & -1 < x < 0\,, \\ x^2\,, & 0 < x < 1\,, \\ (2-x)^2\,, & 1 < x < 2\,, \\ -(2-x)^2\,, & 2 < x < 3\,. \end{cases}$$

19. [18/4/2007 (ex)II] Scrivere, usando la formula di rappresentazione dell'equazione di Laplace nel semipiano, la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && 0 < x < 2\,, y > 0\,, \\ u_x(0,y) &= 0\,, && 0 < y < \infty\,, \\ u(2,y) &= 0\,, && 0 < y < \infty\,, \\ u(x,0) &= x^3\,, && 0 < x < 2\,. \end{aligned}$$

R. *La soluzione è*

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u_0}(\xi)\frac{y}{y^2+(x-\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi\,,$$

ove $\widetilde{u_0}$ è una funzione periodica con periodo 8 tale che

$$\widetilde{u_0}(x) = \begin{cases} -x^3\,, & -2 < x < 0\,, \\ x^3\,, & 0 < x < 2\,, \\ -(4-x)^3\,, & 2 < x < 4\,, \\ (4-x)^3\,, & 4 < x < 6\,. \end{cases}$$

20. [14/7/2008 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & & -\infty < x < 0 \,, -\infty < y < 0 \,, \\ u(x,0) &= e^x \,, & & -\infty < x < 0 \,, \\ u_x(0,y) &= 0 \,, & & -\infty < y < 0 \,, \end{aligned}$$

mediante l'opportuna formula di rappresentazione.
Soluzione
Occorre riflettere il dato in modo pari intorno a $x = 0$, ottenendo:

$$\widetilde{u_0}(x) = e^{-|x|} \,, \qquad -\infty < x < \infty \,.$$

R.

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|y|}{(x-\xi)^2 + y^2} e^{-|\xi|} \, \mathrm{d}\xi \,, \qquad -\infty < x < 0 \,, -\infty < y < 0 \,.$$

21. [14/7/2008 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & & -\infty < x < 0 \,, -\infty < y < 0 \,, \\ u(x,0) &= 0 \,, & & -\infty < x < 0 \,, \\ u(0,y) &= e^y \,, & & -\infty < y < 0 \,, \end{aligned}$$

mediante l'opportuna formula di rappresentazione.
R.

$$u(x,y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\xi) e^{-|\xi|} \frac{|x|}{x^2 + (y-\xi)^2} \, \mathrm{d}\xi \,, \qquad x < 0 \,, y < 0 \,.$$

22. [12/1/2009 (ex)I] Risolvere con la formula di rappresentazione per il problema nel semipiano per l'equazione di Laplace il problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \,, & & x > 0 \,, y > 0 \,, \\ u(0,y) &= \arcsin\left(\frac{y}{1+y}\right) , & & y > 0 \,, \\ u_y(x,0) &= 0 \,, & & x > 0 \,. \end{aligned}$$

Soluzione
Per ricondurre il problema a uno nel semipiano $x > 0$ occorre riflettere il dato su $x = 0$ in modo pari intorno all'origine. Dunque l'estensione del dato sarà

$$\widetilde{u_0}(y) = \arcsin\left(\frac{|y|}{1+|y|}\right) , \qquad y \in \boldsymbol{R} \,.$$

R.

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\arcsin\Big(\frac{|\eta|}{1+|\eta|}\Big)\frac{x}{x^2+(y-\eta)^2}\,\mathrm{d}\eta\,,\qquad x>0\,,y>0\,.$$

23. [12/1/2009 (ex)II] Risolvere con la formula di rappresentazione per il problema nel semipiano per l'equazione di Laplace il problema

$$\begin{aligned}\Delta u&=0\,, && x>0\,,y>0\,,\\ u(0,y)&=\arcsin\Big(\frac{y}{1+y}\Big)\,, && y>0\,,\\ u(x,0)&=0\,, && x>0\,.\end{aligned}$$

R.

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\arcsin\Big(\frac{\eta}{1+|\eta|}\Big)\frac{x}{x^2+(y-\eta)^2}\,\mathrm{d}\eta\,,\qquad x>0\,,y>0\,.$$

535. Formula di rappresentazione eq. di Laplace nel cerchio

1. [8/3/2004 (hw)I] Si usi la formula di Poisson per dimostrare che la soluzione u di

$$\begin{aligned}\Delta u&=0\,, && \text{in } B=\{x^2+y^2<4\},\\ u(x,y)&=\chi_{\{x>0,y>0\}}(x,y)\,, && \text{su } \partial B,\end{aligned}$$

soddisfa

$$u(1,1)>u(-1,-1)\,.$$

2. [28/6/2004 (ex)I] Scrivere mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned}\Delta u&=0\,, && x^2+y^2<1\,,\\ u(x,y)&=\max(x^2-y^2,0)\,, && x^2+y^2=1\,.\end{aligned}$$

3. [28/6/2004 (ex)II] Scrivere mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned}\Delta u&=0\,, && x^2+y^2<1\,,\\ u(x,y)&=\min(xy,0)\,, && x^2+y^2=1\,.\end{aligned}$$

600. Teoria di Fourier

1. [8/3/2004 (hw)I] Siano f e g due funzioni in $L^2((-\pi,\pi))$, e siano a_n, b_n i coefficienti di Fourier di f, rispettivamente α_n, β_n quelli di g. Dimostrare che le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\alpha_n\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\beta_n\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\alpha_n\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\beta_n\,,$$

sono convergenti.

2. [23/6/2005 (ex)I] Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\beta_n\,,$$

ove i b_n e i β_n sono i coefficienti di Fourier definiti da

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) &= \pi - x\,, &\qquad \text{in } L^2(0,\pi),\\ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx) &= \left|\frac{\pi}{2} - x\right|\,, &\qquad \text{in } L^2(0,\pi). \end{aligned}$$

3. [23/6/2005 (ex)II] Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\beta_n\,,$$

ove i b_n e i β_n sono i coefficienti di Fourier definiti da

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) &= \left|\pi - 2x\right|\,, &\qquad \text{in } L^2(0,\pi),\\ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx) &= x\,, &\qquad \text{in } L^2(0,\pi). \end{aligned}$$

4. [20/4/2006 (ex)I] Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2\,,$$

ove i numeri reali α_n sono determinati dall'uguaglianza

$$f(x) = \left| x^2 - \frac{\pi^2}{4} \right| = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) \,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi)).$$

SOLUZIONE

Introduciamo il sistema ortonormale

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \,, \qquad \varphi_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \,, \quad n \geq 1 \,.$$

Allora

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (f, \varphi_0) \,,$$
$$\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (f, \varphi_n) \,, \quad n \geq 1 \,.$$

Dunque per l'identità di Parseval:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 = \pi \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \alpha_n^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 + \frac{\pi}{2} \alpha_0^2 \,.$$

Ne segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 = \frac{2}{\pi} \|f\|^2 - \alpha_0^2 \,.$$

Calcoliamo infine

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - x^2 \right) \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4} \right) \mathrm{d}x \right] = \frac{\pi^2}{4} \,,$$

e

$$\|f\|^2 = \int_0^{\pi} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{23}{240} \pi^5 \,.$$

R.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 = \frac{31}{240} \pi^4 \,.$$

5. [20/4/2006 (ex)II] Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 \,,$$

ove i numeri reali α_n sono determinati dall'uguaglianza

$$f(x) = \left|2x - \frac{\pi}{4}\right| = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx)\,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi)).$$

R.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 = \frac{3629}{3072}\pi^2\,.$$

6. [15/12/2006 (ex)I] Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n\,,$$

ove

$$f(x) = x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx)\,, \qquad 0 < x < \pi\,,$$
$$g(x) = x^{20} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx)\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

SOLUZIONE
Si sa che, posto

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)\,,$$

il sistema $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *è ortonormale e completo. Valgono le*

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(f, \varphi_n)\,, \qquad \beta_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(g, \varphi_n)\,.$$

Per le proprietà di $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *(e per le identità di Parseval), vale*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)(g, \varphi_n) = \frac{2}{\pi}(f, g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^{22}\, \mathrm{d}x = 2\frac{\pi^{22}}{23}\,.$$

R.

$$2\frac{\pi^{22}}{23}$$

7. [2/4/2007 (ex)I] Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2\,,$$

ove la successione α_n è definita da

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx)\,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi)),$$

e

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

Soluzione

Si ha che il sistema

$$\mathcal{C} = \Big\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots \Big\} =: \{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$$

è ortonormale completo in $L^2((0,\pi))$*. Dunque l'identità di Parseval implica che*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \varphi_n)^2\,.$$

D'altronde

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f, \varphi_0)\,, \qquad \alpha_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(f, \varphi_0)\,, \quad n \geq 1\,,$$

perciò

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 = \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 &= \frac{1}{\pi}(f, \varphi_0)^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)^2 \\ &= -\frac{1}{\pi}(f, \varphi_0)^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (f, \varphi_n)^2 = -\frac{1}{\pi}(f, \varphi_0)^2 + \frac{2}{\pi}\|f\|^2\,.\end{aligned}$$

Calcoliamo infine

$$\|f\|^2 = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \big[2\sqrt{x}\big]_0^{\pi} = 2\sqrt{\pi}\,,$$

$$(f, \varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{4}}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\pi}\,.$$

R.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 = \frac{20}{9\sqrt{\pi}}\,.$$

8. [2/4/2007 (ex)II] Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2\,,$$

ove la successione α_n è definita da

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx)\,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi)),$$

e

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[8]{x}}\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

R.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 = \frac{200}{147\sqrt[4]{\pi}}\,.$$

9. [18/4/2008 (ex)I] Determinare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n\,,$$

ove i coefficienti α_n e β_n sono definiti da

$$f(x) = \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos\big((2n+1)x\big)\,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi/2)),$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos\big((2n+1)x\big)\,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi/2)).$$

Soluzione

Si ha, definito il sistema ortonormale completo in $L^2((0,\pi/2))$

$$\varphi_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos(2n+1)x\,, \qquad n \geq 0\,,$$

che i coefficienti α_n *e* β_n *sono dati da*

$$\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(f, \varphi_n)\,, \qquad \beta_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(g, \varphi_n)\,.$$

Quindi si ha per l'identità di Parseval

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (f, \varphi_n)(g, \varphi_n) = \frac{4}{\pi}(f, g)$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \frac{12}{11}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{\frac{5}{6}}\,.$$

R.

$$\frac{12}{11}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{\frac{5}{6}}\,.$$

10. [18/4/2008 (ex)II] Determinare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n \,,$$

ove i coefficienti α_n e β_n sono definiti da

$$f(x) = x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin\big((2n+1)x\big) \,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi/2)),$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sin\big((2n+1)x\big) \,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi/2)).$$

R.

$$\frac{8}{7}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{\frac{4}{3}} .$$

11. [15/6/2009 (ex)I] Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n a_n \beta_n + n b_n \alpha_n) \,,$$

ove

$$f(x) = x^2 - \pi^2 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \,,$$

$$g(x) = e^x = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \,,$$

in $L^2((-\pi,\pi))$.

Soluzione

È noto che, essendo $f \in C^1([-\pi,\pi])$ con $f(\pi) = f(-\pi)$, allora

$$f'(x) = 2x = \sum_{n=1}^{\infty} (-n a_n \sin nx + n b_n \cos nx) \,.$$

In effetti $b_n = 0$ per ogni $n \geq 0$ perché f' è dispari (o perché f è pari).
Dunque, ricordando la definizione dei coefficienti di Fourier,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n a_n \beta_n + n b_n \alpha_n) = \sum_{i=1}^{\infty} (f',\varphi_i)(g,\varphi_i)\pi^{-1} \,,$$

ove $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ indica il sistema ortonormale di Fourier.
Per una conseguenza dell'identità di Parseval,

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f',\varphi_i)(g,\varphi_i) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) g(x) \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 2x e^x \,\mathrm{d}x = 2e^{\pi}(\pi - 1) + 2e^{-\pi}(\pi + 1) \,.$$

R.
$$2\pi^{-1}[e^{\pi}(\pi-1)+e^{-\pi}(\pi+1)]\,.$$

605. Calcolo di serie di Fourier

1. [16/4/2003 (ex)I] Calcolare i coefficienti della serie di coseni
$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)=\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\,,\qquad 0<x<\pi\,.$$
Calcolare la somma
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2\,.$$

2. [16/4/2003 (ex)II] Calcolare i coefficienti della serie di seni
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)=\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\,,\qquad 0<x<\pi\,.$$
Calcolare la somma
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\,.$$

3. [1/4/2003 (ex)I] Calcolare la serie di Fourier di
$$f(x)=2|\sin x|\,,\qquad -\pi<x<\pi\,.$$

4. [8/3/2004 (hw)I] Calcolare la serie di Fourier di
$$f(x)=\pi-|x|+\cos x\,,\qquad -\pi<x<\pi\,.$$
R.
$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos\big((2k+1)x\big)+\Big(1+\frac{4}{\pi}\Big)\cos x\,.$$

5. [31/3/2004 (ex)I] Una delle due funzioni seguenti *non* si può sviluppare in serie di Fourier in $(-\pi,\pi)$. Dire quale è, e perché. Trovare quindi lo sviluppo dell'altra.
$$1)\quad f(x)=\frac{x}{8}+e^{-|x|}\,;\qquad 2)\quad g(x)=(x+\pi)^{-1/2}\,.$$

6. [31/3/2004 (ex)II] Una delle due funzioni seguenti *non* si può sviluppare in serie di Fourier in $(-\pi, \pi)$. Dire quale è, e perché. Trovare quindi lo sviluppo dell'altra.

$$1) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi - x}}\,; \qquad 2) \quad g(x) = e^{|x|} + x\,.$$

7. [28/6/2004 (ex)I] Una sola delle seguenti funzioni f, g, h, definite in $(0, \pi)$, ha un'espansione in serie di seni su $(0, \pi)$ tale che i suoi coefficienti β_n soddisfino

$$|\beta_n| \leq \frac{\text{costante}}{n^2}\,, \qquad n \geq 1\,;$$

Dire quale è, come la si identifica, e calcolarne i coefficienti:

$$f(x) = (\pi - x)^2\,, \qquad g(x) = x(\pi - x)\,, \qquad h(x) = x\,.$$

8. [28/6/2004 (ex)II] Una sola delle seguenti funzioni f, g, h, definite in $(0, \pi)$, ha un'espansione in serie di seni su $(0, \pi)$ tale che i suoi coefficienti β_n soddisfino

$$|\beta_n| \leq \frac{\text{costante}}{n^2}\,, \qquad n \geq 1\,;$$

Dire quale è, come la si identifica, e calcolarne i coefficienti:

$$f(x) = |\pi - x|\,, \qquad g(x) = \left|x - \frac{\pi}{2}\right|\,, \qquad h(x) = \frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|\,.$$

9. [1/4/2005 (ex)I] Calcolare lo sviluppo

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\,,$$

ove

$$f(x) = \pi - |x| + \chi_{(0,1)}(x)\,, \qquad -\pi < x < \pi\,.$$

Soluzione

Scriviamo

$$f(x) = g(x) + \chi_{(0,1)}(x)\,,$$

con $g(x) = \pi - |x|$. *Calcoliamo prima i coefficienti dello sviluppo*

$$g(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)\,.$$

Dato che g è pari, si ha $\beta_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. Si ha poi

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (\pi - x) \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \,,$$

e, per ogni $n \geq 1$,

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|) \cos(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi n^2} \big(1 - (-1)^n\big) \,.$$

I coefficienti di

$$\chi_{(0,1)}(x) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos(nx) + \delta_n \sin(nx) \,,$$

sono dati da

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{(0,1)}(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \,,$$

e, per ogni $n \geq 1$, da

$$\gamma_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{(0,1)}(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{\sin n}{\pi n} \,,$$

$$\delta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{(0,1)}(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{1 - \cos n}{\pi n} \,.$$

Dunque

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \frac{2}{\pi n^2} \big(1 - (-1)^n\big) + \frac{\sin n}{\pi n} \Big\} \cos(nx) + \frac{1 - \cos n}{\pi n} \sin(nx) \,.$$

10. [1/4/2005 (ex)II] Calcolare lo sviluppo

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \,,$$

ove

$$f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{2} & 0 < x < \pi \,, \\ x + \dfrac{\pi}{2} + \chi_{(-1,0)}(x) \,, & -\pi < x < 0 \,. \end{cases}$$

Soluzione

Scriviamo

$$f(x) = g(x) + \chi_{(-1,0)}(x) \,,$$

con $g(x) = x - \mathrm{sign}(x)\pi/2$. *Calcoliamo prima i coefficienti dello sviluppo*

$$g(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx) \, .$$

Dato che g *è dispari, si ha* $\alpha_n = 0$ *per ogni* $n \geq 0$. *Si ha poi per ogni* $n \geq 1$,

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(x - \mathrm{sign}(x)\frac{\pi}{2} \Big) \sin(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \Big(x - \frac{\pi}{2} \Big) \sin(nx) \, \mathrm{d}x = -\frac{1 + (-1)^n}{n} \, .$$

I coefficienti di

$$\chi_{(-1,0)}(x) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos(nx) + \delta_n \sin(nx) \, ,$$

sono dati da

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{(-1,0)}(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \, ,$$

e, per ogni $n \geq 1$, *da*

$$\gamma_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{(-1,0)}(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{\sin n}{\pi n} \, ,$$

$$\delta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{(-1,0)}(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{\cos n - 1}{\pi n} \, .$$

Dunque

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\pi n} \cos(nx) + \Big\{ -\frac{1 + (-1)^n}{n} + \frac{\cos n - 1}{\pi n} \Big\} \sin(nx) \, .$$

11. [14/4/2005 (ex)I] Sia

$$f(x) = \min(1, \pi - x) \, , \qquad 0 < x < \pi \, .$$

Si determini quale tra i due sviluppi

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) \, , \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx) \, ,$$

ha i coefficienti che vanno a zero più rapidamente per $n \to \infty$.

12. [14/4/2005 (ex)II] Sia

$$f(x) = x(\pi - x)^2 \, , \qquad 0 < x < \pi \, .$$

Si determini quale tra i due sviluppi

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) \,, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx) \,,$$

ha i coefficienti che vanno a zero più rapidamente per $n \to \infty$.

13. [20/9/2006 (ex)I] Determinare lo sviluppo in serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin(2n+1)x \,, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2} \,,$$

ove

$$f(x) = \begin{cases} x \,, & 0 < x < \dfrac{\pi}{4} \,, \\ 1 \,, & \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2} \,. \end{cases}$$

Soluzione
Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin(2n+1)x \,\mathrm{d}x + \frac{4}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)x \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{4}{\pi} \left[\frac{x \cos(2n+1)x}{2n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \cos(2n+1)x}{2n+1} \,\mathrm{d}x \\ &\quad - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{4-\pi}{2n+1} \cos(2n+1)\frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)\frac{\pi}{4} \,. \end{aligned}$$

R.

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \frac{4-\pi}{2n+1} \cos(2n+1)\frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)\frac{\pi}{4} \,.$$

14. [12/7/2007 (ex)I] Sia

$$f(x) = \pi^2 - x^2 \,, \qquad 0 < x < \pi \,.$$

Uno solo tra i due sviluppi in serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx \,, \qquad f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx \,, \qquad 0 < x < \pi \,,$$

ha i coefficienti di ordine $O(n^{-2})$ per $n \to \infty$.
Spiegare quale è, e calcolarne tutti i coefficienti.

Soluzione

A) Come è noto, sviluppare f in $(0,\pi)$ in serie di seni equivale a sviluppare la riflessione dispari di f in $(-\pi,\pi)$ nel sistema di Fourier di seni e coseni. Viceversa, sviluppare f in $(0,\pi)$ in serie di coseni equivale a sviluppare la riflessione pari di f in $(-\pi,\pi)$ nello stesso sistema.
Poichè nel caso in esame l'estensione periodica a $\boldsymbol{R}$ della riflessione pari è più regolare della analoga estensione della riflessione dispari, lo sviluppo con i coefficienti che tendono a zero con maggior velocità è quello in serie di coseni.
B) Con i calcoli si ottiene per $n \geq 1$

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - x^2)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n^2}\,,$$

mentre

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2\,.$$

In effetti, si otterrebbe anche

$$\beta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - x^2)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{n} + \frac{4}{\pi n^3}[1-(-1)^n] \sim \frac{1}{n}\,.$$

R.

$$\alpha_0 = \frac{2}{3}\pi^2\,, \qquad \alpha_n \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n^2}\,, \quad n \geq 1\,.$$

15. [12/7/2007 (ex)II] Sia

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 - \frac{\pi^2}{4}\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

Uno solo tra i due sviluppi in serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx\,, \qquad f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx\,, \qquad 0 < x < \pi\,,$$

ha i coefficienti di ordine $O(n^{-3})$ per $n \to \infty$.
Spiegare quale è, e calcolarne tutti i coefficienti.
R.

$$\beta_n = \frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n - 1]\,.$$

16. [20/9/2007 (ex)I] Calcolare i coefficienti dello sviluppo di

$$f(x) = \sin 2x + \cos 5x\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

nel sistema ortonormale completo in $L^2((0,\pi))$

$$\mathcal{C} = \Big\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \,, \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x \,, \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos 2x \,, \dots \Big\} .$$

Soluzione

Scriviamo

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx \,,$$

e calcoliamo:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \big(\sin 2x + \cos 5x \big) \, \mathrm{d}x = 0 \,.$$

Poi, per $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 5x \cos nx \, \mathrm{d}x + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x \cos nx \, \mathrm{d}x \\
&= \delta_{5n} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \big[\sin(2+n)x + \sin(2-n)x \big] \, \mathrm{d}x \\
&= \delta_{5n} + \frac{1}{\pi} \Big[-\frac{1}{2+n} \cos(2+n)x - \frac{1}{2-n} \cos(2-n)x \Big]_0^{\pi} \\
&= \delta_{5n} + \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 - 4} \,.
\end{aligned}$$

Si è dovuto assumere che $n \neq 2$. In questo caso invece:

$$\alpha_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \big[\cos 5x \cos 2x + \sin 2x \cos 2x \big] \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 4x \, \mathrm{d}x = 0 \,.$$

R.

$$f(x) = \cos 5x + \frac{8}{3\pi} \cos x + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 - 4} \cos nx \,.$$

17. [14/12/2007 (ex)I] Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier (di seni e coseni) di

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi \,, & -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2} \,, \\ x \,, & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \,, \\ x - \pi \,, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \,. \end{cases}$$

Soluzione

La f è dispari, dunque

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx \,.$$

Calcoliamo:

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\pi)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

R.

$$
f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(-1)^k\sin 2kx\,.
$$

18. [28/3/2008 (ex)I] Data la funzione

$$
f(x) = x^2(\pi - x)\,, \qquad 0 < x < \pi\,,
$$

solo uno dei due sviluppi

$$
f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos(nx)\,, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin(nx)\,,
$$

soddisfa la maggiorazione

$$
|\text{coefficiente } n\text{-esimo}| \le \frac{\text{costante}}{n^3}\,.
$$

Dire quale è e determinarne i coefficienti.

Soluzione

Lo sviluppo in serie di seni corrisponde allo sviluppo di Fourier dell'estensione dispari della f, mentre quello in serie di coseni all'estensione pari.

Tra le due estensioni, quella dispari è più regolare perchè è l'unica che risulta di classe C^1.

Calcoliamo quindi i coefficienti della serie di seni:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\left[-x^2\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{4}{\pi n}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} - \frac{4}{\pi n^2}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n - 1]\,.
\end{aligned}
$$

Infine

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^3 \sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\left[-x^3\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{6}{\pi n}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\pi^2}{n}(-1)^{n+1} - \frac{12}{\pi n^2}\int_0^\pi x\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{12}{\pi n^3}\left[x\cos(nx)\right]_0^\pi - \frac{12}{\pi n^3}\int_0^\pi \cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{12}{n^3}(-1)^n \,.
\end{aligned}
$$

R.

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{n^3}[(-1)^n - 1] - \frac{12}{n^3}(-1)^n\right\}\sin(nx)\,.
$$

19. [28/3/2008 (ex)II] Data la funzione

$$
f(x) = x^2\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)\,, \qquad 0 < x < \pi\,,
$$

solo uno dei due sviluppi

$$
f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos(nx)\,, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin(nx)\,,
$$

soddisfa la maggiorazione

$$
|\text{coefficiente } n\text{-esimo}| \le \frac{\text{costante}}{n^2}\,.
$$

Dire quale è e determinarne i coefficienti.
R.

$$
f(x) = \frac{\pi^3}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\left\{\frac{\pi^2}{n^2}(-1)^n + \frac{3}{n^4}[1-(-1)^n]\right\}\cos(nx)\,.
$$

20. [16/9/2008 (ex)I] Si considerino gli sviluppi in serie

$$
f(x) = x(3\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin(nx) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\cos(nx)\,,
$$

in $L^2((0,\pi))$.
Determinare quale dei due sviluppi ha i coefficienti che tendono a zero con maggiore rapidità per $n\to\infty$, e calcolare questi coefficienti.
Soluzione

L'estensione periodica (di periodo 2π) della riflessione pari di f su $(-\pi,\pi)$ è di classe C^1 a tratti, e continua, mentre l'estensione della riflessione dispari non è neanche continua.
Lo sviluppo cercato sarà quindi quello in serie di coseni, che corrisponde all'estensione pari.
R.
$$\beta_0 = \frac{7\pi^2}{6}\,, \qquad \beta_n = \frac{2}{n^2}((-1)^n - 3)\,.$$

21. [16/9/2008 (ex)II] Si considerino gli sviluppi in serie
$$f(x) = 3x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos(nx)\,,$$
in $L^2((0,\pi))$.
Determinare quale dei due sviluppi ha i coefficienti che tendono a zero con maggiore rapidità per $n \to \infty$, e calcolare questi coefficienti.
R.
$$\alpha_n = \frac{12}{\pi n^3}((-1)^{n+1} + 1)\,.$$

22. [12/1/2009 (ex)I] Si determinino i coefficienti dello sviluppo
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx)\,, \qquad 0 < x < \pi\,,$$
ove
$$f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ x - \pi\,, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi\,. \end{cases}$$
Calcolare anche
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2\,.$$

Soluzione
Per definizione
$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \pi\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\pi + \frac{2}{n}\Big((-1)^n - \cos n\frac{\pi}{2}\Big)\Big]\,. \end{aligned}$$

Inoltre, si sa per l'identità di Parseval che

$$\sum_{n=1}^{2} (f, \varphi_n)^2 = \|f\|^2 ,$$

ove φ_n *è il sistema ortonormale*

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) .$$

Dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{2} (f, \varphi_n)^2 = \frac{2}{\pi} \|f\|^2 = \frac{\pi^2}{6} .$$

R.

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi n}(-1)^{n+1}(\pi - 2) - \frac{4}{\pi n} \cos n\frac{\pi}{2} ,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \frac{\pi^2}{6} .$$

23. [12/1/2009 (ex)II] Si determinino i coefficienti dello sviluppo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx) , \qquad 0 < x < \pi ,$$

ove

$$f(x) = \begin{cases} x , & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} , \\ \pi - x , & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi . \end{cases}$$

Calcolare anche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 .$$

R.

$$\alpha_n = \frac{4}{\pi n^2} \sin n\frac{\pi}{2} ,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \frac{\pi^2}{6} .$$

24. [12/2/2009 (ex)I] Determinare quale dei seguenti sviluppi in serie in $L^2((0, \pi))$ ha i coefficienti che tendono a zero più rapidamente per $n \to \infty$, e calcolarli (solo per questa tra le quattro serie).

$$f(x) = 1 + \frac{\pi^2}{4} - \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos nx\,;$$

$$g(x) = \frac{\pi^2}{4} - \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos nx\,.$$

Soluzione

Come è noto, sviluppare una funzione in $(0,\pi)$ *in serie di seni [coseni] equivale a svilupparne l'estensione dispari [pari] a* $(-\pi,\pi)$ *in serie di Fourier.*
Delle quattro estensioni l'unica di classe C^1, *quando è poi estesa periodicamente a* $\boldsymbol{R}$, *è quella dispari di* g. *Dunque i coefficienti cercati sono i* b_n.
Con i calcoli si ha

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \Big[\frac{\pi^2}{4} - \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)\Big] \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\Big\{ - \Big[\frac{\cos(nx)}{n} x\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x\Big\} \\
&\quad - \frac{2}{\pi}\Big\{ - \frac{1}{n}\left[x^2\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x\Big\} \\
&= -\frac{2\pi}{n}(-1)^n - \frac{2}{\pi}\Big\{(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^2}\left[x\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n^2}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x\Big\} \\
&= \frac{4}{\pi n^3}[1 - (-1)^n]\,.
\end{aligned}$$

R.

$$b_n = \frac{4}{\pi n^3}[1 - (-1)^n]\,.$$

25. [12/2/2009 (ex)II] Determinare quale dei seguenti sviluppi in serie in $L^2((0,\pi))$ ha i coefficienti che tendono a zero più rapidamente per $n \to \infty$, e calcolarli (solo per questa tra le quattro serie).

$$f(x) = \pi^2 - (2x - \pi)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos nx\,;$$

$$g(x) = \pi^2 - (2x - \pi)^2 - 2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos nx\,.$$

R.

$$a_n = \frac{16}{\pi n^3}[1-(-1)^n] .$$

26. [9/4/2010 (ex)I] Uno solo dei due sviluppi

$$f(x) = x^2 = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx , \qquad -\pi < x < \pi ,$$
$$g(x) = x^3 = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx , \qquad -\pi < x < \pi ,$$

ha i coefficienti che soddisfano

$$|\alpha_n| + |\beta_n| \leq \frac{\text{costante}}{n^2} , \qquad n \geq 1 .$$

Determinare quale è e calcolarne i coefficienti.

Soluzione

Consideriamo la funzione $\widetilde{f}$ [rispettivamente $\widetilde{g}$] definita come l'estensione periodica di periodo 2π di f [rispettivamente di g] a tutto $\boldsymbol{R}$. Si osserva che $\widetilde{f}$ è C^1 a tratti, mentre $\widetilde{g}$ non è neanche continua su $\boldsymbol{R}$.

Dunque lo sviluppo desiderato sarà quello di f. Essendo poi f una funzione pari, si deve avere $\beta_n = 0$, $n \geq 1$, nel suo sviluppo. Si calcola poi

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3} ,$$
$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \,\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{4}{n^2} .$$

R.

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx , \qquad -\pi < x < \pi .$$

610. Fourier equazione delle onde

1. [4/3/2003 (hw)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 , \qquad 0 < x < L , t > 0 , \\
u(0,t) &= 0 , \qquad t > 0 , \\
u(L,t) &= 0 , \qquad t > 0 , \\
u(x,0) &= 1 , \qquad 0 < x < L , \\
u_t(x,0) &= 0 , \qquad 0 < x < L .
\end{aligned}$$

Soluzione

Riportarsi nell'intervallo $(0,\pi)$ per sviluppare 1 in serie di seni.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\cos\Big(\frac{n\pi}{L}ct\Big)\,, \\ \beta_n &= \frac{2}{n\pi}\big(1-(-1)^n\big)\,. \end{aligned}$$

2. [19/3/2003 (hw)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= t^2\,, & & t > 0\,, \\ u(\pi,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Poniamo $v = u - (x-\pi)t^2$. Allora v soddisfa

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= -2(x-\pi)\,, & & 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ v_x(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ v(\pi,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ v(x,0) &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,, \\ v_t(x,0) &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Riflettiamo v in modo dispari intorno a $x=\pi$; chiamiamo w questa riflessione. Allora w risolve il problema

$$\begin{aligned} w_{tt} - c^2 w_{xx} &= -2(x-\pi)\,, & & 0 < x < 2\pi\,, t > 0\,, \\ w_x(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ w_x(2\pi,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ w(x,0) &= 0\,, & & 0 < x < 2\pi\,, \\ w_t(x,0) &= 0\,, & & 0 < x < 2\pi\,. \end{aligned}$$

Infatti *le riflessioni dispari dei dati iniziali e della* funzione sorgente *nell'equazione delle onde sono quelle indicate nel problema per w. Rappresentiamo*

$$w(x,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cos\Big(\frac{nx}{2}\Big)\,,$$

cosicché gli a_n soddisfano

$$a_n'' + \frac{c^2n^2}{4}a_n = f_n\,, \qquad a_n(0) = 0\,, \quad a_n'(0) = 0\,.$$

Qui gli f_n sono i coefficienti di Fourier

$$-2(x-\pi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\left(\frac{nx}{2}\right), \qquad f_n = \frac{8}{n^2\pi}(1-(-1)^n), \quad f_0 = 0.$$

Dunque

$$a_n(t) = \frac{4f_n}{n^2c^2}\left(1-\cos\left(\frac{nct}{2}\right)\right), \qquad a_0(t) = 0.$$

3. [16/4/2003 (ex)I] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\ u(0,t) &= 2\,, && 0 < t\,,\\ u(\pi,t) &= \cos t\,, && 0 < t\,,\\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,,\\ u_t(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Si assuma $c^2 > 1$.

4. [16/4/2003 (ex)II] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\ u(0,t) &= \cosh t\,, && 0 < t\,,\\ u(\pi,t) &= 4\,, && 0 < t\,,\\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,,\\ u_t(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

5. [17/3/2004 (hw)I] Risolvere

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= e^x\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= x\,, && 0 < x < \pi\,,\\ u_t(x,0) &= 1\,, && 0 < x < \pi\,, \end{aligned}$$

e dire quale è la classe di regolarità della soluzione.

6. [14/4/2004 (ex)I] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= xt^2\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,,\\ u_t(x,0) &= \sin x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Riflettiamo in modo pari il problema intorno a $x = 0$; si ottiene per la nuova incognita v

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= |x|t^2 \,, && 0 < x < \pi \,, 0 < t \,, \\ v(-\pi, t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\ v(\pi, t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\ v(x, 0) &= 0 \,, && -\pi < x < \pi \,, \\ v_t(x, 0) &= |\sin x| \,, && -\pi < x < \pi \,. \end{aligned}$$

Traslando e riscalando in modo opportuno il sistema ortonormale dei seni in $(0, \pi)$, cerchiamo v nella forma

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\Big(n \frac{x + \pi}{2}\Big) \,,$$

ove T_n risolve

$$T_n'' + c^2 \frac{n^2}{4} T_n = a_n t^2 \,, \qquad T_n(0) = 0 \,, \quad T_n'(0) = b_n \,.$$

Qui gli a_n sono i coefficienti della serie di Fourier di $|x|$, ossia

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin\Big(n \frac{x + \pi}{2}\Big) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{n} [1 - (-1)^n] \,.$$

Inoltre

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \sin\Big(n \frac{x + \pi}{2}\Big) \, \mathrm{d}x \,,$$

da cui

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \Big\{ \dfrac{1}{n+2} \sin\Big(\dfrac{n\pi}{2}\Big) - \dfrac{1}{n-2} \sin\Big(\dfrac{n\pi}{2}\Big) \,, & n \neq 2 \,, \\ 0 \,, & n = 2 \,. \end{cases}$$

Si vede che una soluzione particolare della e.d.o. per T_n è

$$A_n t^2 + C_n \,, \qquad A_n = \frac{4 a_n}{c^2 n^2} \,, \quad C_n = -\frac{32 a_n}{c^4 n^4} \,.$$

Segue che l'integrale generale della e.d.o. è

$$T_n(t) = k_{1n} \cos\Big(\frac{cn}{2} t\Big) + k_{2n} \sin\Big(\frac{cn}{2} t\Big) + A_n t^2 + C_n \,,$$

ove le costanti k_{1n}, k_{2n} sono individuate con l'aiuto dei dati iniziali:

$$\begin{cases} k_{1n} + C_n = T_n(0) = 0 \,, \\ \dfrac{cn}{2} k_{2n} = T_n'(0) = b_n \,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} k_{1n} = -C_n \,, \\ k_{2n} = \dfrac{2 b_n}{cn} \,. \end{cases}$$

R.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{-C_n\cos\Big(\frac{cn}{2}t\Big)+\frac{2b_n}{cn}\sin\Big(\frac{cn}{2}t\Big)+A_nt^2+C_n\Big\}\sin\Big(n\frac{x+\pi}{2}\Big)\,,$$
$$0<x<\pi\,,t>0\,.$$

7. [14/4/2004 (ex)II] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx}&=(x+1)t\,, && 0<x<\pi\,,0<t\,,\\ u(0,t)&=0\,, && t>0\,,\\ u_x(\pi,t)&=0\,, && t>0\,,\\ u(x,0)&=\cos x\,, && 0<x<\pi\,,\\ u_t(x,0)&=0\,, && 0<x<\pi\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Riflettiamo il problema in modo pari intorno a $x=\pi$, e otteniamo

$$\begin{aligned} v_{tt}-c^2v_{xx}&=f(x)t\,, && 0<x<2\pi\,,0<t\,,\\ v(0,t)&=0\,, && t>0\,,\\ v(2\pi,t)&=0\,, && t>0\,,\\ v(x,0)&=\cos x\,, && 0<x<2\pi\,,\\ v_t(x,0)&=0\,, && 0<x<2\pi\,, \end{aligned}$$

ove la sorgente f vale

$$f(x)=\begin{cases}(2\pi-x+1)\,, & \pi<x<2\pi\,,\\ (x+1)\,, & 0<x<\pi\,.\end{cases}$$

Scegliamo come sistema ortonormale per sviluppare v in serie il sistema:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\Big(\frac{nx}{2}\Big)\,,\qquad n=1\,,2\,,3\,,\dots$$

cosicché siamo condotti a ricercare i coefficienti α_n della serie

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(t)\sin\Big(\frac{nx}{2}\Big)\,.$$

Questi sono determinati dai problemi di Cauchy

$$\begin{aligned} \alpha_n''+\frac{c^2n^2}{4}\alpha_n&=\gamma_{0n}t\,,\\ \alpha_n(0)&=\gamma_{1n}\,,\\ \alpha_n'(0)&=0\,, \end{aligned}$$

ove

$$
\begin{aligned}
\gamma_{0n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\Big(\frac{nx}{2}\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin\Big(\frac{nx}{2}\Big)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi}(2\pi - x + 1)\sin\Big(\frac{nx}{2}\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n\pi}\big[1-(-1)^n\big] + \frac{8}{n^2\pi}\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\,,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\gamma_{1n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\sin\Big(\frac{nx}{2}\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big\{\frac{1-(-1)^n}{n+2} + \frac{1-(-1)^n}{n-2}\Big\}\,, \qquad n \neq 2\,, \\
\gamma_{12} &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Un integrale particolare della e.d.o. non omogenea lo si trova come polinomio di primo grado in t, ossia

$$
\frac{4\gamma_{0n}}{c^2n^2}t\,.
$$

Quindi l'integrale generale della e.d.o. sarà

$$
\alpha_n(t) = k_{1n}\cos\Big(\frac{cn}{2}t\Big) + k_{2n}\sin\Big(\frac{cn}{2}t\Big) + \frac{4\gamma_{0n}}{c^2n^2}t\,.
$$

Imponendo i dati iniziali si ha

$$
\begin{aligned}
k_{1n} &= \gamma_{1n}\,, \\
\frac{cn}{2}k_{2n} + \frac{4\gamma_{0n}}{c^2n^2} &= 0\,.
\end{aligned}
$$

R.

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\gamma_{1n}\cos\Big(\frac{cn}{2}t\Big) - \frac{8\gamma_{0n}}{c^3n^3}\sin\Big(\frac{cn}{2}t\Big) + \frac{4\gamma_{0n}}{c^2n^2}t\Big]\sin\Big(\frac{nx}{2}\Big)\,, \\
\gamma_{0n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin\Big(\frac{nx}{2}\Big)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi}(2\pi - x + 1)\sin\Big(\frac{nx}{2}\Big)\,\mathrm{d}x\,, \\
\gamma_{1n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\sin\Big(\frac{nx}{2}\Big)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
$$

8. [1/4/2005 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,, \\
u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \\
u(\pi,t) &= \pi t^2\,, && 0 < t\,, \\
u(x,0) &= x\,, && 0 < x < \pi\,, \\
u_t(x,0) &= 1\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

Soluzione

Per ridursi a un problema con dati al bordo omogenei si ponga per esempio

$$v(x,t) = u(x,t) - xt^2\,,$$

cosicché v risolve

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= -2x\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\ v(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ v(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ v(x,0) &= x\,, && 0 < x < \pi\,,\\ v_t(x,0) &= 1\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Si sviluppa quindi

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \sin(nx)\,.$$

Si ottiene la famiglia di problemi di Cauchy per e.d.o.:

$$\begin{cases} \beta_n'' + c^2 n^2 \beta_n = f_n := \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} (-2x) \sin(nx) \,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{n}(-1)^n\,,\\[2ex] \beta_n(0) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} x \sin(nx) \,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2} f_n = \dfrac{2}{n}(-1)^{n+1}\,,\\[2ex] \beta_n'(0) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(nx) \,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi n}\bigl(1 - (-1)^n\bigr)\,. \end{cases}$$

Usando l'integrale generale della e.d.o.:

$$\beta_n(t) = c_{1n} \cos(cnt) + c_{2n} \sin(cnt) + \frac{f_n}{c^2 n^2}\,,$$

si ottiene infine

$$\beta_n(t) = -\Bigl(\frac{1}{2} + \frac{1}{c^2n^2}\Bigr)\frac{4}{n}(-1)^n \cos(cnt) + \frac{2}{\pi c n^2}\bigl(1 - (-1)^n\bigr) \sin(cnt) + \frac{4}{c^2 n^3}(-1)^n\,,$$

e quindi

$$\begin{aligned} u(x,t) = xt^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl\{ &- \Bigl(\frac{1}{2} + \frac{1}{c^2n^2}\Bigr)\frac{4}{n}(-1)^n \cos(cnt)\\ &+ \frac{2}{\pi c n^2}\bigl(1 - (-1)^n\bigr) \sin(cnt) + \frac{4}{c^2 n^3}(-1)^n \Bigr\} \sin(nx)\,. \end{aligned}$$

9. [1/4/2005 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\
u_x(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\
u_x(\pi,t) &= 2\pi t\,, && 0 < t\,,\\
u(x,0) &= 1\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u_t(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

Soluzione

Per ridursi a un problema con dati al bordo omogenei si ponga per esempio

$$v(x,t) = u(x,t) - x^2 t\,,$$

cosicché v risolve

$$
\begin{aligned}
v_{tt} - c^2 v_{xx} &= 2c^2 t\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\
v_x(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\
v_x(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\
v(x,0) &= 1\,, && 0 < x < \pi\,,\\
v_t(x,0) &= -x^2\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

Si sviluppa quindi

$$v(x,t) = \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \cos(nx)\,.$$

Si ottiene la famiglia di problemi di Cauchy per e.d.o.:

$$
\begin{cases}
\alpha_0'' = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi 2c^2 t \,\mathrm{d}x = 2c^2 t\,,\\[2ex]
\alpha_0(0) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{d}x = 1\,,\\[2ex]
\alpha_0'(0) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi (-x^2) \,\mathrm{d}x = -\dfrac{\pi^2}{3}\,,
\end{cases}
$$

e, per ogni $n \geq 1$,

$$
\begin{cases}
\alpha_n'' + c^2 n^2 \alpha_n = f_n := \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi (2c^2 t) \cos(nx) \,\mathrm{d}x = 0\,,\\[2ex]
\alpha_n(0) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \cos(nx) \,\mathrm{d}x = 0\,,\\[2ex]
\alpha_n'(0) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi (-x^2) \cos(nx) \,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{n^2}(-1)^{n+1}\,.
\end{cases}
$$

Per $n = 0$ si ha, usando l'integrale generale della e.d.o.,

$$\alpha_0(t) = c_{10} + c_{20} t + c^2 \frac{t^3}{3} ,$$

e imponendo i dati di Cauchy,

$$\alpha_0(t) = 1 - \frac{\pi^2}{3} t + c^2 \frac{t^3}{3} .$$

Per ogni $n \geq 1$ si ha, usando l'integrale generale della e.d.o.,

$$\alpha_n(t) = c_{1n} \cos(cnt) + c_{2n} \sin(cnt) ,$$

e imponendo i dati di Cauchy,

$$\alpha_n(t) = \frac{4}{cn^3} (-1)^{n+1} \sin(cnt) .$$

Quindi

$$u(x,t) = x^2 t + 1 - \frac{\pi^2}{3} t + c^2 \frac{t^3}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{cn^3} (-1)^{n+1} \sin(cnt) \cos(nx) .$$

10. [7/4/2006 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= e^{t+x} , & & 0 < x < 1 , t > 0 , \\ u_x(0,t) &= 0 , & & t > 0 , \\ u_x(1,t) &= 0 , & & t > 0 , \\ u(x,0) &= e^x , & & 0 < x < 1 , \\ u_t(x,0) &= e^{2x} , & & 0 < x < 1 . \end{aligned}$$

Soluzione

Usiamo il sistema ortonormale in $L^2((0,1))$

$$\psi_n(x) = \sqrt{2} \cos(n\pi x) , \quad n \geq 1 , \qquad \psi_0(x) = 1 .$$

Quindi la soluzione u verrà espressa come

$$u(x,t) = \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \cos(n\pi x) .$$

Proiettando il problema sull'n-esima funzione ψ_n, $n \geq 1$, si ottiene il problema

$$\alpha_n'' + n^2 \pi^2 c^2 \alpha_n = 2 \int_0^1 e^{t+x} \cos(n\pi x) \, \mathrm{d}x = \gamma_{0n} e^t ,$$

$$\alpha_n(0) = 2 \int_0^1 e^x \cos(n\pi x) \, \mathrm{d}x = \gamma_{0n} := 2 \frac{(-1)^n e - 1}{1 + n^2 \pi^2} ,$$

$$\alpha_n'(0) = 2 \int_0^1 e^{2x} \cos(n\pi x) \, \mathrm{d}x = \gamma_{1n} := 4 \frac{(-1)^n e^2 - 1}{4 + n^2 \pi^2} .$$

L'integrale generale di questo problema di Cauchy è:

$$\alpha_n(t) = k_{1n}\cos(n\pi ct) + k_{2n}\sin(n\pi ct) + w_n(t)\,,$$

ove w_n *è una soluzione particolare della e.d.o. non omogenea. Provando con soluzioni della forma*

$$w_n(t) = C_n e^t\,,$$

si ottiene

$$w_n(t) = \frac{\gamma_{0n}}{1+n^2\pi^2c^2}e^t\,.$$

Quindi

$$k_{1n} = \frac{\gamma_{0n}n^2\pi^2c^2}{1+n^2\pi^2c^2}\,,$$
$$k_{2n} = \frac{1}{n\pi c}\left(\gamma_{1n} - \frac{\gamma_{0n}}{1+n^2\pi^2c^2}\right).$$

Infine per $n = 0$ *si ha*

$$\alpha_0'' = \int_0^1 e^{t+x}\,\mathrm{d}x = (e-1)e^t\,,$$
$$\alpha_0(0) = \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e-1\,,$$
$$\alpha_0'(0) = \int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^2-1}{2}\,.$$

Dall'integrale generale

$$\alpha_0(t) = k_{10}t + k_{20} + (e-1)e^t$$

si ottiene subito

$$\alpha_0(t) = \frac{(e-1)^2}{2}t + (e-1)e^t\,.$$

R.

$$u(x,t) = \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(t)\cos(n\pi x)\,,$$

con

$$\alpha_0(t) = \frac{(e-1)^2}{2}t + (e-1)e^t\,,$$

e

$$\alpha_n(t) = k_{1n}\cos(n\pi ct) + k_{2n}\sin(n\pi ct) + \frac{\gamma_{0n}}{1+n^2\pi^2c^2}e^t\,,$$

ove

$$\begin{aligned}
k_{1n} &= \frac{\gamma_{0n} n^2\pi^2c^2}{1+n^2\pi^2c^2}\,,\\
k_{2n} &= \frac{1}{n\pi c}\left(\gamma_{1n} - \frac{\gamma_{0n}}{1+n^2\pi^2c^2}\right),\\
\gamma_{0n} &= 2\frac{(-1)^n e - 1}{1+n^2\pi^2}\,,\\
\gamma_{1n} &= 4\frac{(-1)^n e^2 - 1}{4+n^2\pi^2}\,.
\end{aligned}$$

11. [7/4/2006 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= e^{2t+x}\,, && 0<x<1\,, t>0\,,\\
u(0,t) &= 0\,, && t>0\,,\\
u(1,t) &= 0\,, && t>0\,,\\
u(x,0) &= e^x\,, && 0<x<1\,,\\
u_t(x,0) &= e^{2x}\,, && 0<x<1\,.
\end{aligned}$$

R.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t)\sin(n\pi x)\,,$$

con

$$\beta_n(t) = k_{1n}\cos(n\pi ct) + k_{2n}\sin(n\pi ct) + \frac{\gamma_{0n}}{4+n^2\pi^2c^2}e^{2t}\,,$$

ove

$$\begin{aligned}
k_{1n} &= \frac{3+n^2\pi^2c^2}{4+n^2\pi^2c^2}\gamma_{0n}\,,\\
k_{2n} &= \frac{1}{n\pi c}\left(\gamma_{1n} - \frac{2\gamma_{0n}}{4+n^2\pi^2c^2}\right),\\
\gamma_{0n} &= 2\frac{(-1)^n e - 1}{1+n^2\pi^2}\,,\\
\gamma_{1n} &= 4\frac{(-1)^n e^2 - 1}{4+n^2\pi^2}\,.
\end{aligned}$$

12. [20/9/2006 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0<x<\pi\,, 0<t\,,\\
u(0,t) &= \sin(\omega t)\,, && 0<t\,,\\
u(\pi,t) &= 0\,, && 0<t\,,\\
u(x,0) &= 0\,, && 0<x<\pi\,,\\
u_t(x,0) &= x\,, && 0<x<\pi\,.
\end{aligned}$$

Qui ω e c sono costanti positive.
SOLUZIONE
Riconduciamoci a un problema con dati di Dirichlet nulli al contorno, mediante la trasformazione

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{x-\pi}{\pi}\sin(\omega t)\,.$$

La v soddisfa

$$\begin{aligned}
v_{tt} - c^2 v_{xx} &= -\omega^2 \frac{x-\pi}{\pi}\sin(\omega t)\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\
v(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\
v(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\
v(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,,\\
v_t(x,0) &= x + \frac{\omega}{\pi}(x-\pi)\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

Usiamo il sistema ortonormale in $(0,\pi)$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)\,, \qquad n \geq 1\,,$$

sviluppando la soluzione come

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\sin(nx)\,.$$

Si ottengono quindi i problemi di Cauchy per i coefficienti α_n:

$$\begin{aligned}
\alpha_n'' + n^2 c^2 \alpha_n &= \gamma_{0n}(t) := \Big(-\frac{\omega^2}{\pi}\gamma_{1n} + \omega^2\gamma_{2n}\Big)\sin(\omega t)\,, \qquad 0 < t\,,\\
\alpha_n(0) &= 0\,,\\
\alpha_n'(0) &= \Big(1 + \frac{\omega}{\pi}\Big)\gamma_{1n} - \omega\gamma_{2n}\,,
\end{aligned}$$

ove con calcoli elementari si ottiene

$$\begin{aligned}
\gamma_{1n} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\,,\\
\gamma_{2n} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\big(1-(-1)^n\big)\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\gamma_{0n}(t) = \frac{2\omega^2}{n\pi}\sin(\omega t)\,, \qquad \alpha_n'(0) = -\frac{2}{n}\Big((-1)^n + \frac{\omega}{\pi}\Big) =: \gamma_{3n}\,.$$

L'integrale generale della e.d.o. sarà dunque

$$\alpha_n(t) = k_{1n}\cos(nct) + k_{2n}\sin(nct) + w_n(t)\,,$$

ove la soluzione particolare w_n si cercherà, se $\omega \neq nc$, nella forma

$$w_n(t) = C_{1n} \sin(\omega t) \,,$$

ottenendo per semplice sostituzione

$$w_n(t) = \frac{2\omega^2}{\pi n} \frac{1}{n^2c^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \,.$$

Se invece $\omega = n_0 c$ per un $n_0 \geq 1$, si cercherà w_{n_0} nella forma

$$w_{n_0}(t) = t\Big[C_{1n_0} \sin(\omega t) + C_{2n_0} \cos(\omega t)\Big] \,,$$

ottenendo

$$w_{n_0}(t) = -\frac{c}{\pi} t \cos(\omega t) \,.$$

I coefficienti k_{in} si determinano ora imponendo le condizioni iniziali; si ottiene per ogni n

$$k_{1n} = 0 \,.$$

Poi, nel caso $\omega \neq nc$ si ha

$$k_{2n} = \frac{1}{nc}\Big[\gamma_{3n} - \frac{2\omega^3}{n\pi} \frac{1}{n^2c^2 - \omega^2}\Big] \,.$$

Nel caso $\omega = n_0 c$ si ha

$$k_{2n_0} = \frac{1}{n_0 c}\Big[\gamma_{3n_0} + \frac{c}{\pi}\Big] \,.$$

R. *Nel caso in cui $\omega \neq nc$ per ogni $n \geq 1$,*

$$\begin{aligned} u(x,t) = -\frac{x-\pi}{\pi} \sin(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ & k_{2n} \sin(nct) \\ & + \frac{2\omega^2}{\pi n} \frac{1}{n^2c^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \Big\} \sin(nx) \,, \end{aligned}$$

con

$$k_{2n} = \frac{1}{nc}\Big[-\frac{2}{n}\Big((-1)^n + \frac{\omega}{\pi}\Big) - \frac{2\omega^3}{n\pi} \frac{1}{n^2c^2 - \omega^2}\Big] \,.$$

Nel caso in cui $\omega = n_0 c$ per un $n_0 \geq 1$,

$$\begin{aligned} u(x,t) = \Big\{ & -\frac{x-\pi}{\pi} + \frac{1}{n_0 c}\Big[-\frac{2}{n_0}\Big((-1)^{n_0} + \frac{\omega}{\pi}\Big) + \frac{c}{\pi}\Big] \sin(n_0 x) \Big\} \sin(\omega t) \\ & - \frac{c}{\pi} t \cos(\omega t) \sin(n_0 x) \\ & + \sum_{n \neq n_0, n=1}^{\infty} \Big\{ k_{2n} \sin(nct) + \frac{2\omega^2}{\pi n} \frac{1}{n^2c^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \Big\} \sin(nx) \,, \end{aligned}$$

con k_{2n} come sopra.

13. [2/4/2007 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\
u_x(0,t) &= t\,, && 0 < t\,,\\
u_x(\pi,t) &= 1\,, && 0 < t\,,\\
u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u_t(x,0) &= \cos 2x\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

Soluzione

Per ridurci al caso di condizioni al bordo omogenee, introduciamo la nuova incognita

$$
v(x,t) = u(x,t) + \frac{t-1}{2\pi}x^2 - tx\,,
$$

che risolve il problema

$$
\begin{aligned}
v_{tt} - c^2 v_{xx} &= -c^2\frac{t-1}{\pi}\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\
v_x(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\
v_x(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\
v(x,0) &= -\frac{x^2}{2\pi}\,, && 0 < x < \pi\,,\\
v_t(x,0) &= \cos 2x + \frac{x^2}{2\pi} - x\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

Cerchiamo la soluzione nella forma

$$
v(x,t) = \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\cos(nx)\,,
$$

ove i coefficienti α_n saranno determinati dai problemi ai valori iniziali

$$
\begin{aligned}
\alpha_n'' + n^2c^2\alpha_n &= \gamma_{0n}(t-1)\,,\\
\alpha_n(0) &= \gamma_{1n}\,,\\
\alpha_n'(0) &= \gamma_{2n}\,,
\end{aligned}
$$

e (per $n \geq 1$)

$$
\gamma_{00} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{c^2}{\pi}\,\mathrm{d}x = -\frac{c^2}{\pi}\,, \quad \gamma_{0n} = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{c^2}{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0\,,
$$

$$
\gamma_{10} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{2\pi}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{6}\,, \quad \gamma_{1n} = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{2\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n^2}\,,
$$

$$
\gamma_{20} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big\{\cos 2x + \frac{x^2}{2\pi} - x\Big\}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{3}\,,
$$

$$
\gamma_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big\{\cos 2x + \frac{x^2}{2\pi} - x\Big\}\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \delta_{2n} + \frac{2(-1)^n}{\pi n^2} + 2\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\,.
$$

Pertanto per $n \geq 1$ la soluzione sarà data da

$$\alpha_n(t) = k_{1n} \cos(nct) + k_{2n} \sin(nct)\,,$$

con k_{1n}, k_{2n} determinati da

$$k_{1n} = \gamma_{1n}\,, \qquad nck_{2n} = \gamma_{2n}\,.$$

Se $n = 0$ si avrà invece

$$\alpha_0(t) = k_{10} + k_{20}t + \gamma_{00}\frac{(t-1)^3}{6}\,, \sin(nct)\,,$$

con k_{10}, k_{20} determinati da

$$\begin{aligned} k_{10} - \frac{\gamma_{00}}{6} &= \gamma_{10}\,, \\ k_{20} + \frac{\gamma_{00}}{2} &= \gamma_{20}\,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x,t) = \frac{1-t}{2\pi}x^2 + tx - \frac{\pi}{6} - \frac{c^2}{6\pi} + \Big(\frac{c^2}{2\pi} - \frac{\pi}{3}\Big)t - \frac{c^2}{6\pi}(t-1)^3$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n^2}\cos(nct) + \frac{1}{nc}\Big(\delta_{2n} + \frac{2(-1)^n}{\pi n^2} + 2\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\Big)\sin(nct)\Big\}\cos(nx)\,.$$

14. [2/4/2007 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,, \\ u_x(0,t) &= -1\,, && 0 < t\,, \\ u_x(\pi,t) &= -t\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= \cos 2x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x,t) = \frac{1-t}{2\pi}x^2 - x + \frac{\pi}{3} - \frac{c^2}{6\pi} + \Big(\frac{c^2}{2\pi} + \frac{\pi}{6}\Big)t - \frac{c^2}{6\pi}(t-1)^3$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{-\frac{2}{\pi n^2}\cos(nct) + (-1)^n\frac{1}{nc}\Big(\delta_{2n} + \frac{2(-1)^n}{\pi n^2} + 2\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\Big)\sin(nct)\Big\}\cos(nx)\,.$$

15. [2/4/2007 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,, \\ u_x(0,t) &= t\,, && 0 < t\,, \\ u_x(\pi,t) &= 1\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

16. [20/9/2007 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, 0 < t < \infty\,,\\ u(0,t) &= t^2\,, & & 0 < t < \infty\,,\\ u_x\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &= 0\,, & & 0 < t < \infty\,,\\ u(x,0) &= 0\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,,\\ u_t(x,0) &= 1\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Riconduciamoci a un problema con dati omogenei al contorno, per esempio con il cambiamento di incognita

$$v(x,t) = u(x,t) - t^2\,.$$

Si verifica che v risolve il problema

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= -2\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, 0 < t < \infty\,,\\ v(0,t) &= 0\,, & & 0 < t < \infty\,,\\ v_x\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &= 0\,, & & 0 < t < \infty\,,\\ v(x,0) &= 0\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,,\\ v_t(x,0) &= 1\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Cerchiamo v nella forma

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) \sin(2n+1)x\,.$$

Il coefficiente α_n, $n \geq 0$, è soluzione del problema

$$\alpha_n'' + c^2(2n+1)^2 \alpha_n = -2\gamma_{0n}\,, \qquad 0 < t < \infty\,, \tag{1}$$

$$\alpha_n(0) = 0\,, \tag{2}$$

$$\alpha_n'(0) = \gamma_{0n}\,, \tag{3}$$

ove denotiamo per $n \geq 0$

$$\gamma_{0n} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)x \,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi(2n+1)}\,.$$

Una soluzione particolare di (1) *si trova nella forma*

$$w(t) = C_{1n}\,.$$

Sostituendo nella (1) *si determina la costante*

$$C_{1n} = -2\frac{\gamma_{0n}}{c^2(2n+1)^2}\,.$$

Dunque per $n \geq 1$ *la soluzione di* (1)–(2) *è*

$$\alpha_n(t) = k_{1n}\cos(2n+1)ct + k_{2n}\sin(2n+1)ct + C_{1n}\,,$$

ove le costanti k_{1n} *e* k_{2n} *sono determinate imponendo le condizioni iniziali*

$$\begin{aligned}\alpha_n(0) &= k_{1n} + C_{1n} = 0\,,\\ \alpha_n'(0) &= c(2n+1)k_{2n} = \gamma_{0n}\,.\end{aligned}$$

R.

$$u(x,t) = t^2 + \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(t)\sin(2n+1)x\,,$$

ove

$$\begin{aligned}\alpha_n(t) = &-\frac{8}{\pi c^2(2n+1)^3}\big(1-\cos(2n+1)ct\big)\\ &+\frac{4}{\pi c(2n+1)^2}\sin(2n+1)ct\,.\end{aligned}$$

17. [14/12/2007 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2u_{xx} &= 0\,, && 0<x<\pi\,, 0<t<\infty\,,\\
u(0,t) &= \sin\omega t\,, && 0<t<\infty\,,\\
u(\pi,t) &= \sin\omega t\,, && 0<t<\infty\,,\\
u(x,0) &= 0\,, && 0<x<\pi\,,\\
u_t(x,0) &= \omega\,, && 0<x<\pi\,.
\end{aligned}$$

Qui $\omega > 0$ è una costante.

Soluzione

Riconduciamoci a un problema con dati omogenei al contorno, per esempio con il cambiamento di incognita

$$v(x,t) = u(x,t) - \sin\omega t\,.$$

Si verifica che v *risolve il problema*

$$\begin{aligned}
v_{tt} - c^2v_{xx} &= \omega^2\sin\omega t\,, && 0<x<\pi\,, 0<t<\infty\,,\\
v(0,t) &= 0\,, && 0<t<\infty\,,\\
v(\pi,t) &= 0\,, && 0<t<\infty\,,\\
v(x,0) &= 0\,, && 0<x<\pi\,,\\
v_t(x,0) &= 0\,, && 0<x<\pi\,.
\end{aligned}$$

Cerchiamo v nella forma

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sin(nx) .$$

Il coefficiente α_n, $n \geq 1$, è soluzione del problema

$$\alpha_n'' + c^2 n^2 \alpha_n = \gamma_{0n} \omega^2 \sin \omega t , \qquad 0 < t < \infty , \tag{1}$$

$$\alpha_n(0) = 0 , \tag{2}$$

$$\alpha_n'(0) = 0 , \tag{3}$$

ove denotiamo per $n \geq 1$

$$\gamma_{0n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n} .$$

L'integrale generale della (1) *ha la forma*

$$\alpha_n(t) = k_{1n} \cos(cnt) + k_{2n} \sin(cnt) + w_n(t) .$$

La ricerca della soluzione particolare ci conduce a distinguere i due casi seguenti.
A) $\omega \neq cn$: Una soluzione particolare di (1) *si trova nella forma*

$$w_n(t) = C_{1n} \sin(\omega t) .$$

Sostituendo nella (1) *si determina la costante*

$$C_{1n} = \frac{\omega^2 \gamma_{0n}}{c^2 n^2 - \omega^2} .$$

Dunque per $n \geq 1$, $n \neq \omega c^{-1}$ la soluzione di (1)–(2) *si trova imponendo le condizioni iniziali:*

$$\alpha_n(0) = k_{1n} = 0 ,$$
$$\alpha_n'(0) = cnk_{2n} + C_{1n}\omega = 0 .$$

B) $\omega = cn_0$ (possibile al più per un solo n_0): Una soluzione particolare di (1) *si trova nella forma*

$$w_{n_0}(t) = C_{1n_0} t \sin(\omega t) + C_{2n_0} t \cos(\omega t) .$$

Sostituendo nella (1) *si determinano le costanti*

$$C_{1n_0} = 0 , \qquad C_{2n_0} = -\frac{\omega \gamma_{0n_0}}{2} .$$

Dunque per $n = n_0 = \omega c^{-1}$ la soluzione di (1)–(2) *si trova imponendo le condizioni iniziali:*

$$\alpha_{n_0}(0) = k_{1n_0} = 0 ,$$
$$\alpha_{n_0}'(0) = cn_0 k_{2n_0} + C_{2n_0} = 0 .$$

R. *Se $n \neq \omega c^{-1}$ per ogni n:*

$$u(x,t) = \sin(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \gamma_{0n}}{c^2 n^2 - \omega^2} \Big[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{cn} \sin(cnt) \Big] \sin(nx) .$$

Se invece $n_0 = \omega c^{-1}$ per un $n_0 \in \boldsymbol{N}$:

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sin(\omega t) + \sum_{n \geq 1\,, n \neq n_0} \frac{\omega^2 \gamma_{0n}}{c^2 n^2 - \omega^2} \Big[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{cn} \sin(cnt) \Big] \sin(nx) \\ + \Big[\frac{\gamma_{0n_0}}{2} \sin(\omega t) - \frac{\omega \gamma_{0n_0}}{2} t \cos(\omega t) \Big] \sin(nx) . \end{aligned}$$

Qui

$$\gamma_{0n} = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n} \,, & n \text{ dispari;} \\ 0 \,, & n \text{ pari.} \end{cases}$$

18. [14/7/2008 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= a \cos(\beta x) \sin^2(bt) \,, && 0 < x < \pi \,, t > 0 \,, \\ u_x(0,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\ u_x(\pi,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\ u(x,0) &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,, \\ u_t(x,0) &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,. \end{aligned}$$

Qui $a > 0$, $b > 0$, $\beta > 0$ sono costanti.
Soluzione
Cerchiamo u nella forma

$$u(x,t) = \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \cos(nx) .$$

Il coefficiente α_n, $n \geq 1$, è soluzione del problema

$$\begin{aligned} \alpha_n'' + c^2 n^2 \alpha_n &= \gamma_{0n} \sin^2(bt) \,, \qquad t > 0 \,, && (1) \\ \alpha_n(0) &= 0 \,, && (2) \\ \alpha_n'(0) &= 0 \,, && (3) \end{aligned}$$

ove per $n \geq 1$

$$\gamma_{0n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \big[a \cos(\beta x) \big] \cos(nx) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{a}{\pi} \Big[\dfrac{\sin(n-\beta)\pi}{n-\beta} + \dfrac{\sin(n+\beta)\pi}{n+\beta} \Big] \,, & \beta \neq n \,, \\ a \,, & \beta = n \,. \end{cases}$$

Inoltre per $n = 0$ si ha

$$\begin{aligned} \alpha_0'' &= \gamma_{00} \sin^2(bt) \,, \qquad t > 0 \,, \\ \alpha_n(0) &= 0 \,, \\ \alpha_n'(0) &= 0 \,, \end{aligned}$$

ove

$$\gamma_{00} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \big[a\cos(\beta x) \big] \,\mathrm{d}x = a \frac{\sin(\beta\pi)}{\beta\pi} \,.$$

Per trovare la soluzione dei problemi di Cauchy per α_n osserviamo che

$$\sin^2(bt) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2bt) \,.$$

Dunque una soluzione particolare di (1) è data da

$$v_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\gamma_{0n}}{2c^2n^2} - \dfrac{\gamma_{0n}}{2(c^2n^2-4b^2)}\cos(2bt) \,, & b \neq \dfrac{cn}{2} \,, \\ \dfrac{\gamma_{0n}}{2c^2n^2} - \dfrac{\gamma_{0n}}{4b} t \sin(2bt) \,, & b = \dfrac{cn}{2} \,. \end{cases}$$

Dunque la soluzione del problema di Cauchy si trova imponendo i dati iniziali nell'integrale generale

$$\alpha_n(t) = k_{1n}\sin(nct) + k_{2n}\cos(nct) + v_n(t) \,.$$

Se invece $n = 0$, si ha integrando direttamente la e.d.o.

$$\alpha_0(t) = \gamma_{00}\frac{t^2}{4} - \gamma_{00}\frac{\cos(2bt)-1}{4b^2} \,.$$

R.

$$u(x,t) = \gamma_{00}\frac{t^2}{4} - \gamma_{00}\frac{\cos(2bt)-1}{4b^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[v_n(t) - v_n(0)\cos(nct) \Big] \cos(nx) \,,$$

ove

$$\gamma_{0n} = \begin{cases} \dfrac{a}{\pi}\Big[\dfrac{\sin(n-\beta)\pi}{n-\beta} + \dfrac{\sin(n+\beta)\pi}{n+\beta} \Big] \,, & \beta \neq n \,, \\ a \,, & \beta = n \,, \end{cases} \qquad n \geq 1 \,;$$

$$\gamma_{00} = a\frac{\sin(\beta\pi)}{\beta\pi} \,;$$

$$v_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\gamma_{0n}}{2c^2n^2} - \dfrac{\gamma_{0n}}{2(c^2n^2-4b^2)}\cos(2bt) \,, & b \neq \dfrac{cn}{2} \,, \\ \dfrac{\gamma_{0n}}{2c^2n^2} - \dfrac{\gamma_{0n}}{4b} t \sin(2bt) \,, & b = \dfrac{cn}{2} \,. \end{cases}$$

19. [14/7/2008 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= a\cos(\beta x)\cos^2(bt) \,, && 0 < x < \pi \,, t > 0 \,, \\ u_x(0,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\ u_x(\pi,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\ u(x,0) &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,, \\ u_t(x,0) &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,. \end{aligned}$$

Qui $a>0$, $b>0$, $\beta>0$ sono costanti.
R.

$$u(x,t) \;=\; \gamma_{00}\frac{t^2}{4} \;+\; \gamma_{00}\frac{\cos(2bt)-1}{4b^2} \;+\; \sum_{n=1}^{\infty}\Big[v_n(t) \;-\; v_n(0)\cos(nct)\Big]\cos(nx)\,,$$

ove

$$\gamma_{0n} = \begin{cases} \dfrac{a}{\pi}\Big[\dfrac{\sin(n-\beta)\pi}{n-\beta} + \dfrac{\sin(n+\beta)\pi}{n+\beta}\Big]\,, & \beta \neq n\,, \\ a\,, & \beta = n\,, \end{cases} \qquad n \geq 1\,;$$

$$\gamma_{00} = a\frac{\sin(\beta\pi)}{\beta\pi}\,;$$

$$v_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\gamma_{0n}}{2c^2n^2} + \dfrac{\gamma_{0n}}{2(c^2n^2-4b^2)}\cos(2bt)\,, & b \neq \dfrac{cn}{2}\,, \\ \dfrac{\gamma_{0n}}{2c^2n^2} + \dfrac{\gamma_{0n}}{4b}t\sin(2bt)\,, & b = \dfrac{cn}{2}\,. \end{cases}$$

20. [15/6/2009 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2u_{xx} &= 0\,, && 0<x<\pi\,, t>0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t>0\,, \\ u_x(\pi,t) &= \sin(\beta t)\,, && t>0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0<x<\pi\,, \\ u_t(x,0) &= 0\,, && 0<x<\pi\,. \end{aligned}$$

Qui $\beta>0$ è costante.
Soluzione
Per ridurci a un problema con dati al bordo omogenei passiamo alla nuova incognita

$$v(x,t) = u(x,t) - x\sin(\beta t)\,,$$

che risolve il problema

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2v_{xx} &= \beta^2 x\sin(\beta t)\,, && 0<x<\pi\,, t>0\,, \\ v(0,t) &= 0\,, && t>0\,, \\ v_x(\pi,t) &= 0\,, && t>0\,, \\ v(x,0) &= 0\,, && 0<x<\pi\,, \\ v_t(x,0) &= -\beta x\,, && 0<x<\pi\,. \end{aligned}$$

Cerchiamo lo sviluppo in serie

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x)\sin\frac{2n+1}{2}x\,.$$

I coefficienti α_n risolvono i problemi

$$\begin{aligned} \alpha_n'' + c^2\Big(\frac{2n+1}{2}\Big)^2\alpha_n &= \beta^2\gamma_{0n}\sin(\beta t)\,, \\ \alpha_n(0) &= 0\,, \\ \alpha_n'(1) &= -\beta\gamma_{0n}\,, \end{aligned}$$

ove

$$\gamma_{0n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin \frac{2n+1}{2} x \, \mathrm{d}x = \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2} \,, \qquad n \geq 0 \,.$$

Dunque, si ha

$$\alpha_n(t) = k_{1n} \cos\left(c\frac{2n+1}{2}t\right) + k_{2n} \sin\left(c\frac{2n+1}{2}t\right) + z_n(t) \,,$$

ove z_n *è una soluzione particolare della e.d.o. non omogenea. Per determinarla, se*

$$\beta \neq c\frac{2n+1}{2} \tag{1}$$

si procede con la sostituzione

$$z_n(t) = A_n \sin(\beta t) \,,$$

che conduce a

$$A_n = \frac{\beta^2 \gamma_{0n}}{c^2 \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 - \beta^2} \,.$$

Se invece

$$\beta = c\frac{2n_0+1}{2} \tag{2}$$

si procede con la sostituzione

$$z_n(t) = C_{n_0} t \sin(\beta t) + B_{n_0} t \cos(\beta t) \,,$$

che conduce a

$$C_{n_0} = 0 \,, \qquad B_{n_0} = -\frac{\beta \gamma_{0n}}{2} \,.$$

Imponendo le condizioni al bordo si ha per $n \geq 0$*, se vale* (1)*,*

$$k_{1n} = 0 \,,$$
$$k_{2n} c \frac{2n+1}{2} + \beta A_n = -\beta \gamma_{0n} \,.$$

Se invece vale (2)*,*

$$k_{1n_0} = 0 \,,$$
$$k_{2n_0} c \frac{2n_0+1}{2} + B_{n_0} = -\beta \gamma_{0n_0} \,.$$

R. *Se*

$$\beta \neq c\frac{2n+1}{2}$$

per ogni $n \geq 0$ *la soluzione è*

$$u(x,t) = x \sin(\beta t) + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ k_{2n} \sin\left(c\frac{2n+1}{2}t\right) + A_n \sin(\beta t) \right\} \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) ;$$

se invece per un $n_0 \geq 0$ vale

$$\beta = c\frac{2n_0+1}{2}$$

la soluzione è

$$u(x,t) = x\sin(\beta t) + \sum_{n=0, n\neq n_0}^{\infty} \Big\{ k_{2n} \sin\Big(c\frac{2n+1}{2}t\Big) + A_n \sin(\beta t)\Big\} \sin\Big(\frac{2n+1}{2}x\Big)$$
$$- \Big\{ \frac{\gamma_{0n_0}}{2} \sin\Big(c\frac{2n_0+1}{2}t\Big) + c\frac{2n_0+1}{2}\gamma_{0n_0} t\cos(\beta t)\Big\} \sin\Big(\frac{2n_0+1}{2}x\Big) .$$

Qui

$$\gamma_{0n} = \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2} , \qquad A_n = \frac{\beta^2\gamma_{0n}}{c^2\Big(\frac{2n+1}{2}\Big)^2 - \beta^2} , \qquad k_{2n} = -\frac{2\beta(A_n+\gamma_{0n})}{c(2n+1)} .$$

21. [11/1/2010 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 , & & 0 < x < \pi , t > 0 , \\ u(0,t) &= e^{-t} , & & t > 0 , \\ u(\pi,t) &= 0 , & & t > 0 , \\ u(x,0) &= 1 , & & 0 < x < \pi , \\ u_t(x,0) &= \frac{x-\pi}{\pi} , & & 0 < x < \pi . \end{aligned}$$

SOLUZIONE

Introduciamo la nuova incognita

$$v(x,t) = u(x,t) + e^{-t}\frac{x-\pi}{\pi} ,$$

che soddisfa

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= e^{-t}\frac{x-\pi}{\pi} , & & 0 < x < \pi , t > 0 , \\ v(0,t) &= 0 , & & t > 0 , \\ v(\pi,t) &= 0 , & & t > 0 , \\ v(x,0) &= \frac{x}{\pi} , & & 0 < x < \pi , \\ v_t(x,0) &= 0 , & & 0 < x < \pi . \end{aligned}$$

Cerchiamone lo sviluppo in serie

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sin nx ,$$

i cui coefficienti devono soddisfare

$$\begin{aligned} \alpha_n'' + c^2 n^2 \alpha_n &= \gamma_{0n} e^{-t} , \\ \alpha_n(0) &= \gamma_{1n} , \\ \alpha_n'(0) &= 0 . \end{aligned}$$

Qui

$$\gamma_{0n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{x-\pi}{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x = -\frac{2}{n\pi} \,,$$

$$\gamma_{1n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{x}{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \,.$$

Perciò

$$\alpha_n(t) = k_{1n} \cos(cnt) + k_{2n} \sin(cnt) + w_n(t) \,,$$

ove la soluzione particolare w_n si ricerca nella forma

$$w_n(t) = A_n e^{-t} \,,$$

ottenendo per sostituzione

$$A_n = \frac{\gamma_{0n}}{1 + c^2 n^2} \,.$$

Quindi le k_{in} sono determinate dalle condizioni iniziali mediante le

$$\alpha_n(0) = k_{1n} + \frac{\gamma_{0n}}{1 + c^2 n^2} = \gamma_{1n} \,,$$

$$\alpha_n'(0) = cnk_{2n} - \frac{\gamma_{0n}}{1 + c^2 n^2} = 0 \,.$$

R.

$$u(x,t) = -e^{-t} \frac{x-\pi}{\pi} + \sum_{n=1}^\infty \Big[\Big(\gamma_{1n} - \frac{\gamma_{0n}}{1+c^2n^2} \Big) \cos(cnt) + \frac{\gamma_{0n}}{cn + c^3 n^3} \sin(cnt) + \frac{\gamma_{0n}}{1+c^2n^2} e^{-t} \Big] \sin nx \,,$$

ove per $n \geq 1$

$$\gamma_{0n} = -\frac{2}{n\pi} \,, \qquad \gamma_{1n} = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \,.$$

22. [9/4/2010 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= e^{x+t} \,, & & 0 < x < L \,, t > 0 \,, \\
u_x(0,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \\
u(L,t) &= 0 \,, & & t > 0 \,, \\
u(x,0) &= 0 \,, & & 0 < x < L \,, \\
u_t(x,0) &= \cos x \,, & & 0 < x < L \,,
\end{aligned}$$

ove $0 < L < \pi/2$ è una costante assegnata.
SOLUZIONE

Cerchiamone lo sviluppo in serie

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) \cos \omega_n x \,, \qquad \omega_n = (2n+1)\frac{\pi}{2L} \,,$$

i cui coefficienti devono soddisfare

$$\begin{aligned} \alpha_n'' + c^2\omega_n^2\alpha_n &= \gamma_{0n}e^t \,, \\ \alpha_n(0) &= 0 \,, \\ \alpha_n'(0) &= \gamma_{1n} \,. \end{aligned}$$

Qui

$$\gamma_{0n} = \frac{2}{L}\int_0^L e^x \cos \omega_n x \,\mathrm{d}x = \frac{12\pi n(-1)^n e^L - 8L}{4L^2 + (2n+1)^2\pi^2} \,,$$

$$\gamma_{1n} = \frac{2}{L}\int_0^L \cos x \cos \omega_n x \,\mathrm{d}x = \frac{2\cos(L+\pi n)}{2L + 2n\pi + \pi} - \frac{2\cos(L-\pi n)}{2L - 2n\pi - \pi} \,.$$

Perciò

$$\alpha_n(t) = k_{1n}\cos(c\omega_n t) + k_{2n}\sin(c\omega_n t) + w_n(t) \,,$$

ove la soluzione particolare w_n si ricerca nella forma

$$w_n(t) = A_n e^t \,,$$

ottenendo per sostituzione

$$A_n = \frac{\gamma_{0n}}{1 + c^2\omega_n^2} \,.$$

Quindi le k_{in} sono determinate dalle condizioni iniziali mediante le

$$\begin{aligned} \alpha_n(0) &= k_{1n} + \frac{\gamma_{0n}}{1 + c^2\omega_n^2} = 0 \,, \\ \alpha_n'(0) &= c\omega_n k_{2n} + \frac{\gamma_{0n}}{1 + c^2\omega_n^2} = \gamma_{1n} \,. \end{aligned}$$

R.

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[-\frac{\gamma_{0n}}{1 + c^2\omega_n^2}\cos(c\omega_n t) + \Big(\gamma_{1n} - \frac{\gamma_{0n}}{1 + c^2\omega_n^2}\Big)\frac{1}{c\omega_n}\sin(c\omega_n t) \\ + \frac{\gamma_{0n}}{1 + c^2\omega_n^2}e^t\Big] \cos \omega_n x \,, \end{aligned}$$

ove per $n \geq 1$, $\omega_n = (2n+1)\pi/(2L)$, e

$$\begin{aligned} \gamma_{0n} &= \frac{12\pi n(-1)^n e^L - 8L}{4L^2 + (2n+1)^2\pi^2} \,, \\ \gamma_{1n} &= \frac{2\cos(L+\pi n)}{2L + 2n\pi + \pi} - \frac{2\cos(L-\pi n)}{2L - 2n\pi - \pi} \,. \end{aligned}$$

620. Fourier equazione del calore dim. 1

1. [4/3/2003 (hw)I] Trovare la soluzione del problema

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, & 0 < x < L\,, t > 0\,,\\
u(0,t) &= 0\,, & t > 0\,,\\
u_x(L,t) &= 0\,, & t > 0\,,\\
u(x,0) &= \chi_{(L/2,L)}(x)\,, & 0 < x < L\,,
\end{aligned}
$$

con il metodo di Fourier.

Soluzione

I) Riflettere in modo pari u intorno a $x = L$. Si passa a un problema con dati $u = 0$ sui bordi laterali, posto per $0 < x < 2L$, da risolvere per serie di soli seni.

II) Usiamo il sistema ortonormale

$$\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\Big((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\Big)\,, \qquad n = 0\,, 1\,, 2\,, \dots\,,$$

ossia cerchiamo la soluzione nella forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) \sin\Big((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\Big)\,.$$

I coefficienti α_n sono determinati dai problemi di Cauchy

$$
\begin{aligned}
&\alpha_n' + \Big((2n+1)\frac{\pi}{2L}\Big)^2 \alpha_n = 0\,,\\
&\qquad \alpha_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \chi_{(L/2,L)}(x) \sin\Big((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\Big)\,\mathrm{d}x\\
&\qquad\qquad = \frac{4}{\pi(2n+1)} \cos\Big((2n+1)\frac{\pi}{4}\Big)\,.
\end{aligned}
$$

Perciò

$$\alpha_n(t) = \frac{4}{\pi(2n+1)} \cos\Big((2n+1)\frac{\pi}{4}\Big) e^{-[(2n+1)\frac{\pi}{2L}]^2 t}\,.$$

R.

$$I)\quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\Big[\cos\Big(\frac{n\pi}{4}\Big) - \cos\Big(\frac{3n\pi}{4}\Big)\Big] e^{-\frac{n^2\pi^2}{4L^2}t} \sin\Big(\frac{n\pi}{2L}x\Big)\,.$$

$$II)\quad u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \cos\Big((2n+1)\frac{\pi}{4}\Big) e^{-[(2n+1)\frac{\pi}{2L}]^2 t} \sin\Big((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\Big)\,.$$

2. [19/3/2003 (hw)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, & 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\
u(0,t) &= 0\,, & t > 0\,,\\
u(\pi,t) &= \cos t\,, & t > 0\,,\\
u(x,0) &= 0\,, & 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

SOLUZIONE

Rendiamo omogenei i dati al bordo laterale introducendo la nuova incognita $v = u - (x/\pi)\cos t$, *che soddisfa*

$$
\begin{aligned}
v_t - v_{xx} &= \frac{x}{\pi}\sin t\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\
v(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
v(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
v(x,0) &= -\frac{x}{\pi}\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

Poi scriviamo $v = v_1 + v_2$, *ove* v_1 *soddisfa l'equazione differenziale di* v, *con dati nulli sulla frontiera parabolica, e* v_2 *soddisfa l'equazione omogenea del calore con dato iniziale pari a* $-x/\pi$, *e si annulla su* $x = 0$, π. *Rappresentiamo*

$$
v_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t)\sin(nx)\,;
$$

si vede per sostituzione della serie nell'e.d.p. che si deve avere

$$
\beta_n' + n^2\beta_n = f_n\,, \qquad \beta_n(0) = 0\,,
$$

ove gli f_n *sono i coefficienti di Fourier di*

$$
\frac{x}{\pi}\sin t = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(nx)\,, \qquad f_n(t) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin t\,.
$$

Risolvendo la e.d.o. si ottiene

$$
\beta_n(t) = \frac{2n(-1)^{n+1}}{(n^4+1)\pi}\Big\{\sin t - \frac{\cos t - e^{-n^2 t}}{n^2}\Big\}\,.
$$

Infine, dal calcolo degli f_n, *e dall'usuale metodo di Fourier,*

$$
v_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n\pi} e^{-n^2 t}\sin(nx)\,.
$$

3. [1/4/2003 (ex)I] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, 0 < t < T\,,\\
u(0,t) &= e^{-t}\,, && 0 < t < T\,,\\
u(1,t) &= 0\,, && 0 < t < T\,,\\
u(x,0) &= 1 - x^2\,, && 0 < x < 1\,.
\end{aligned}
$$

4. [23/9/2003 (ex)I] Si trovi la soluzione u di

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t < T\,,\\
u(0,t) &= t\,, && 0 \le t \le T\,,\\
u(\pi,t) &= 1\,, && 0 \le t \le T\,,\\
u(x,0) &= \frac{x}{\pi}\,, && 0 \le x \le \pi\,,
\end{aligned}
$$

con il metodo di Fourier.

5. [23/9/2003 (ex)II] Si trovi la soluzione u di

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t < T\,,\\
u(0,t) &= 1\,, && 0 \le t \le T\,,\\
u(\pi,t) &= -t\,, && 0 \le t \le T\,,\\
u(x,0) &= 1 - \frac{x}{\pi}\,, && 0 \le x \le \pi\,,
\end{aligned}$$

con il metodo di Fourier.

6. [17/3/2004 (hw)I] Risolvere

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, t > 0\,,\\
u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(1,t) &= f(t)\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= x^2\,, && 0 < x < 1\,,
\end{aligned}$$

e dire quale è la classe di regolarità della soluzione. Qui

$$f(t) = \begin{cases} 0\,, & 0 \le t \le 1\,,\\ t-1\,, & t > 1\,. \end{cases}$$

7. [31/3/2004 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier il seguente problema

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= xt^2\,, && 0 < x < a\,, 0 < t\,,\\
u(0,t) &= 1\,, && t > 0\,,\\
u(a,t) &= t\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < a\,.
\end{aligned}$$

8. [31/3/2004 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier il seguente problema

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= x\,, && 0 < x < b\,, 0 < t\,,\\
u(0,t) &= 2\,, && t > 0\,,\\
u(b,t) &= t^2 + 1\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < b\,.
\end{aligned}$$

9. [15/9/2004 (ex)I] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= x\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\ u_x(0,t) &= 2t\,, && 0 < t\,,\\ u(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ u(x,0) &= x^2\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

10. [15/9/2004 (ex)II] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= x\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ u_x(\pi,t) &= 3t\,, && 0 < t\,,\\ u(x,0) &= x^2\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

11. [23/6/2005 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, 0 < t\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ u_x(1,t) &= t\,, && 0 < t\,,\\ u(x,0) &= x-1\,, && 0 < x < 1\,. \end{aligned}$$

12. [23/6/2005 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, 0 < t\,,\\ u_x(0,t) &= -t\,, && 0 < t\,,\\ u(1,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ u(x,0) &= x\,, && 0 < x < 1\,. \end{aligned}$$

13. [15/12/2005 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(\pi,t) &= t\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= \sin x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

14. [6/7/2006 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\
u(0,t) &= t^2\,, & & 0 < t\,,\\
u(\pi,t) &= 2\,, & & 0 < t\,,\\
u(x,0) &= \sin x\,, & & 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

Soluzione

Riconduciamoci a un problema con dati di Dirichlet nulli al contorno, mediante la trasformazione

$$
v(x,t) = u(x,t) - t^2 - \frac{x}{\pi}(2 - t^2)\,.
$$

La v soddisfa

$$
\begin{aligned}
v_t - v_{xx} &= 2t\Big(\frac{x}{\pi} - 1\Big)\,, & & 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\
v(0,t) &= 0\,, & & 0 < t\,,\\
v(\pi,t) &= 0\,, & & 0 < t\,,\\
v(x,0) &= \sin x - \frac{2x}{\pi}\,, & & 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

Usiamo il sistema ortonormale in $(0,\pi)$

$$
\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)\,, \qquad n \ge 1\,,
$$

sviluppando la soluzione come

$$
v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\sin(nx)\,.
$$

Si ottengono quindi i problemi di Cauchy per i coefficienti α_n:

$$
\begin{aligned}
\alpha_n' + n^2\alpha_n &= \gamma_{0n}t := t\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\Big(\frac{x}{\pi} - 1\Big)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\,, \qquad 0 < t\,,\\
\alpha_n(0) &= \gamma_{1n} := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Big(\sin x - \frac{2x}{\pi}\Big)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\,,
\end{aligned}
$$

ove con calcoli elementari si ottiene

$$
\gamma_{0n} = -\frac{4}{\pi n}\,, \quad \gamma_{1n} = \delta_{1n} + \frac{4(-1)^n}{\pi n}\,.
$$

L'integrale generale della e.d.o. sarà dunque

$$
\alpha_n(t) = k_n e^{-n^2 t} + w_n(t)\,,
$$

ove la soluzione particolare w_n si cercherà nella forma

$$w_n(t) = C_{1n}t + C_{2n}\,,$$

ottenendo per semplice sostituzione

$$w_n(t) = \frac{4}{\pi n^3}t - \frac{4}{\pi n^5}\,.$$

Il coefficiente k_n si determina ora imponendo la condizione iniziale; si ottiene

$$\alpha_n(t) = \Big(\gamma_{1n} + \frac{4}{\pi n^5}\Big)e^{-n^2t} + \frac{4}{\pi n^3}t - \frac{4}{\pi n^5}\,.$$

R.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= t^2 + \frac{x}{\pi}(2-t^2) \\ &\quad + e^{-t}\sin x + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\Big(\frac{2(-1)^n}{\pi n} + \frac{4}{\pi n^5}\Big)e^{-n^2t} + \frac{4}{\pi n^3}t - \frac{4}{\pi n^5}\Big\}\sin(nx)\,. \end{aligned}$$

15. [6/7/2006 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0<x<\pi\,, 0<t\,,\\ u(0,t) &= 1\,, && 0<t\,,\\ u(\pi,t) &= t^3\,, && 0<t\,,\\ u(x,0) &= \sin 2x\,, && 0<x<\pi\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Riconduciamoci a un problema con dati di Dirichlet nulli al contorno, mediante la trasformazione

$$v(x,t) = u(x,t) - 1 - \frac{x}{\pi}(t^3-1)\,.$$

La v soddisfa

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= -\frac{3xt^2}{\pi}\,, && 0<x<\pi\,, 0<t\,,\\ v(0,t) &= 0\,, && 0<t\,,\\ v(\pi,t) &= 0\,, && 0<t\,,\\ v(x,0) &= \sin 2x - \frac{1}{\pi} + \frac{x}{\pi}\,, && 0<x<\pi\,. \end{aligned}$$

Usiamo il sistema ortonormale in $(0,\pi)$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)\,, \qquad n\ge 1\,,$$

sviluppando la soluzione come

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(t)\sin(nx)\,.$$

Si ottengono quindi i problemi di Cauchy per i coefficienti α_n:

$$\alpha_n' + n^2\alpha_n = \gamma_{0n}t^2 := t^2\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Big(-\frac{3x}{\pi}\Big)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\,, \qquad 0 < t\,,$$

$$\alpha_n(0) = \gamma_{1n} := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Big(\sin 2x - 1 + \frac{x}{\pi}\Big)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\,,$$

ove con calcoli elementari si ottiene

$$\gamma_{0n} = \frac{6(-1)^n}{\pi n}\,, \quad \gamma_{1n} = \delta_{2n} + 2\frac{(-1)^n - 1}{\pi n} + \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2 n}\,.$$

L'integrale generale della e.d.o. sarà dunque

$$\alpha_n(t) = k_n e^{-n^2 t} + w_n(t)\,,$$

ove la soluzione particolare w_n si cercherà nella forma

$$w_n(t) = C_{1n}t^2 + C_{2n}t + C_{3n}\,,$$

ottenendo per semplice sostituzione

$$w_n(t) = \frac{6(-1)^n}{\pi n^3}t^2 + \frac{12(-1)^{n+1}}{\pi n^5}t + \frac{12(-1)^n}{\pi n^7}\,.$$

Il coefficiente k_n si determina ora imponendo la condizione iniziale; si ottiene

$$\alpha_n(t) = \Big(\gamma_{1n} - \frac{12(-1)^n}{\pi n^7}\Big)e^{-n^2 t} + \frac{6(-1)^n}{\pi n^3}t^2 + \frac{12(-1)^{n+1}}{\pi n^5}t + \frac{12(-1)^n}{\pi n^7}\,.$$

R.

$$\begin{aligned} u(x,t) = 1 + \frac{x}{\pi}(t^3 - 1) + e^{-4t}\sin 2x \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\Big(2\frac{(-1)^n - 1}{\pi n} + \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2 n} + \frac{12(-1)^{n+1}}{\pi n^7}\Big)e^{-n^2 t} \\ + \frac{6(-1)^n}{\pi n^3}t^2 + \frac{12(-1)^{n+1}}{\pi n^5}t + \frac{12(-1)^n}{\pi n^7}\Big\}\sin(nx)\,. \end{aligned}$$

16. [12/7/2007 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= x + t\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t < \infty\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u(\pi,t) &= 2\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u(x,0) &= \sin(\pi x)\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Riconduciamoci a un problema con dati omogenei al contorno, per esempio con il cambiamento di incognita

$$v(x,y) = u(x,y) - \frac{2}{\pi}x\,.$$

Si verifica che v risolve il problema

$$\begin{aligned}
v_t - v_{xx} &= x + t\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t < \infty\,,\\
v(0,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,,\\
v(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,,\\
v(x,0) &= \sin(\pi x) - \frac{2}{\pi}x\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

Cerchiamo v nella forma

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\sin(nx)\,.$$

Il coefficiente α_n, $n \geq 1$, è soluzione del problema

$$\alpha_n' + n^2\alpha_n = \gamma_{0n} + \gamma_{1n}t\,, \qquad 0 < t < \infty\,, \tag{1}$$

$$\alpha_n(0) = \gamma_{2n} - \frac{2}{\pi}\gamma_{0n}\,. \tag{2}$$

Qui denotiamo per $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\gamma_{0n} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\,,\\
\gamma_{1n} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi n}[1-(-1)^n]\,,\\
\gamma_{2n} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(\pi x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}\sin\pi^2\frac{n}{n^2-\pi^2}\,.
\end{aligned}$$

Una soluzione particolare di (1) si trova nella forma

$$w(t) = C_{1n} + C_{2n}t\,.$$

Sostituendo nella (1) si determinano le costanti

$$C_{1n} = \frac{\gamma_{0n}}{n^2} - \frac{\gamma_{1n}}{n^4}\,, \qquad C_{2n} = \frac{\gamma_{1n}}{n^2}\,.$$

Dunque per $n \geq 1$ la soluzione di (1)–(2) è

$$\alpha_n(t) = \Big(\gamma_{2n} - \frac{2}{\pi}\gamma_{0n} - \frac{\gamma_{0n}}{n^2} + \frac{\gamma_{1n}}{n^4}\Big)e^{-n^2t} + \frac{\gamma_{0n}}{n^2} - \frac{\gamma_{1n}}{n^4} + \frac{\gamma_{1n}}{n^2}t\,.$$

R.

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{2}{\pi}x \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(\gamma_{2n} - \frac{2}{\pi}\gamma_{0n} - \frac{\gamma_{0n}}{n^2} + \frac{\gamma_{1n}}{n^4}\Big)e^{-n^2 t} + \frac{\gamma_{0n}}{n^2} - \frac{\gamma_{1n}}{n^4} + \frac{\gamma_{1n}}{n^2}t\Big]\sin(nx)\,,
\end{aligned}
$$

ove

$$
\gamma_{0n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\,, \qquad \gamma_{1n} = \frac{2}{\pi n}[1-(-1)^n]\,, \qquad \gamma_{2n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}\sin \pi^2 \frac{n}{n^2-\pi^2}\,.
$$

17. [12/7/2007 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= t + \cos x\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t < \infty\,, \\
u(0,t) &= 1\,, && 0 < t < \infty\,, \\
u(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,, \\
u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

R.

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= 1 - \frac{x}{\pi} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(-\gamma_{1n} + \frac{1}{\pi}\gamma_{2n} - \frac{\gamma_{0n}}{n^2} + \frac{\gamma_{1n}}{n^4}\Big)e^{-n^2 t} + \frac{\gamma_{0n}}{n^2} - \frac{\gamma_{1n}}{n^4} + \frac{\gamma_{1n}}{n^2}t\Big]\sin(nx)\,,
\end{aligned}
$$

ove

$$
\begin{aligned}
\gamma_{0n} &= \frac{2}{\pi}[1-(-1)^{n+1}]\frac{n}{n^2-1}\,, \quad n > 1\,, \qquad \gamma_{01} = 0\,; \\
\gamma_{1n} &= \frac{2}{\pi n}[1-(-1)^n]\,; \qquad \gamma_{2n} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\,; \qquad n \geq 1\,.
\end{aligned}
$$

18. [18/4/2008 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_t - Du_{xx} &= F(x,t)\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\
u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\
u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\
u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,,
\end{aligned}
$$

ove, per due costanti positive λ e μ, si definisce

$$
F(x,t) = \begin{cases} \lambda\,, & \mu t < x < \pi\,, t < \dfrac{\pi}{\mu}\,, \\ 0\,, & \text{altrimenti.} \end{cases}
$$

Dedurre dall'espressione trovata il valore di

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)\,.$$

SOLUZIONE

Cerchiamo uno sviluppo in serie di u *della forma*

$$u(x,t) = \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\cos(nx)\,.$$

Per $n \geq 1$ *i coefficienti* α_n *saranno determinati dai problemi di Cauchy*

$$\begin{aligned} \alpha_n' + Dn^2\alpha_n &= F_n(t)\,, \\ \alpha_n(0) &= 0\,, \end{aligned}$$

ove per $0 < t < \pi/\mu$

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x,t)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{\mu t}^{\pi} \lambda\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2\lambda}{n\pi}\sin(n\mu t)\,. \end{aligned}$$

Invece

$$F_n(t) = 0\,, \qquad t > \frac{\pi}{\mu}\,.$$

Quindi, dalla formula risolutiva delle e.d.o. lineari del primo ordine si ha:

$$\alpha_n(t) = -\frac{2\lambda}{n\pi} e^{-Dn^2 t}\int_0^t e^{Dn^2\tau}\sin(n\mu\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad 0 < t < \frac{\pi}{\mu}\,,$$

$$\alpha_n(t) = -\frac{2\lambda}{n\pi} e^{-Dn^2 t}\int_0^{\frac{\pi}{\mu}} e^{Dn^2\tau}\sin(n\mu\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad \frac{\pi}{\mu} \leq t\,.$$

Se invece $n = 0$*, si ha il problema*

$$\begin{aligned} \alpha_0' &= F_0(t)\,, \\ \alpha_n(0) &= 0\,, \end{aligned}$$

ove per $0 < t < \pi/\mu$

$$F_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(x,t)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{\mu t}^{\pi} \lambda\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda(\pi - \mu t)}{\pi}\,.$$

Invece

$$F_0(t) = 0\,, \qquad t > \frac{\pi}{\mu}\,.$$

Quindi, in modo analogo a quanto visto sopra per $n \geq 1$,

$$\alpha_0(t) = \int_0^{\min(t, \frac{\pi}{\mu})} \frac{\lambda(\pi - \mu\tau)}{\pi} \, \mathrm{d}\tau \,.$$

Vista la convergenza della serie per $t \geq 1$, *e poiché i coefficienti* α_n, *per* $n \geq 1$, *tendono a 0, con rapidità esponenziale, si ha infine*

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \lim_{t \to \infty} \alpha_0(t) \,.$$

R. *La soluzione è data da*

$$u(x,t) = \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \cos(nx) \,,$$

ove

$$\alpha_0(t) = \frac{\lambda}{\pi}\Big(\pi t - \frac{\mu t^2}{2}\Big) \,, \qquad 0 < t < \frac{\pi}{\mu} \,,$$
$$\alpha_0(t) = \frac{\lambda \pi}{2\mu} \,, \qquad \frac{\pi}{\mu} \leq t \,,$$

e per $n \geq 1$

$$\alpha_n(t) = -\frac{2\lambda}{\pi} \frac{Dn \sin(n\mu t) - \mu \cos(n\mu t) + \mu e^{-Dn^2 t}}{D^2 n^4 + n^2 \mu^2} \,, \qquad 0 < t < \frac{\pi}{\mu} \,,$$
$$\alpha_n(t) = -\frac{2\lambda}{\pi} \frac{\mu(-1)^{n+1} e^{-Dn^2(t - \frac{\pi}{\mu})} + \mu e^{-Dn^2 t}}{D^2 n^4 + n^2 \mu^2} \,, \qquad \frac{\pi}{\mu} \leq t \,.$$

Segue che

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \frac{\lambda \pi}{2\mu} \,.$$

19. [18/4/2008 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= F(x,t) \,, && 0 < x < \pi \,, t > 0 \,, \\ u_x(0,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\ u_x(\pi,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\ u(x,0) &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,, \end{aligned}$$

ove, per due costanti positive λ e μ, si definisce

$$F(x,t) = \begin{cases} \mu \,, & 0 < x < \pi - \lambda t \,, t < \dfrac{\pi}{\lambda} \,, \\ 0 \,, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dedurre dall'espressione trovata il valore di

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)\,.$$

R. *La soluzione è data da*

$$u(x,t) = \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\cos(nx)\,,$$

ove

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= \frac{\mu}{\pi}\Big(\pi t - \frac{\lambda t^2}{2}\Big)\,, && 0 < t < \frac{\pi}{\lambda}\,,\\ \alpha_0(t) &= \frac{\mu\pi}{2\lambda}\,, && \frac{\pi}{\lambda} \le t\,, \end{aligned}$$

e per $n \ge 1$

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) &= (-1)^{n+1}\frac{2\mu}{\pi}\frac{Dn\sin(n\lambda t) - \lambda\cos(n\lambda t) + \lambda e^{-Dn^2 t}}{D^2n^4 + n^2\lambda^2}\,, && 0 < t < \frac{\pi}{\lambda}\,,\\ \alpha_n(t) &= -\frac{2\mu}{\pi}\frac{\lambda e^{-Dn^2(t-\frac{\pi}{\lambda})} + \lambda(-1)^{n+1}e^{-Dn^2 t}}{D^2n^4 + n^2\lambda^2}\,, && \frac{\pi}{\lambda} \le t\,. \end{aligned}$$

Segue che

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{\mu\pi}{2\lambda}\,.$$

20. [12/1/2009 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= Cu\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_x\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= \cos x\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, \end{aligned}$$

ove D e C sono costanti positive.
Nel caso poi in cui sia $D = C$, si determini il limite

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)\,, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,.$$

Soluzione
Cerchiamo uno sviluppo in serie di u *della forma*

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t)\sin(2n+1)x\,.$$

Per $n \ge 0$ *i coefficienti* α_n *saranno determinati dai problemi di Cauchy*

$$\begin{aligned} \alpha_n' + D(2n+1)^2\alpha_n &= C\alpha_n\,,\\ \alpha_n(0) &= \gamma_n\,, \end{aligned}$$

ove per $n \geq 1$

$$
\begin{aligned}
\gamma_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin(2n+1)x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \Big[\frac{1+(-1)^n}{n+1} + \frac{1-(-1)^n}{n} \Big] ,
\end{aligned}
$$

mentre

$$
\gamma_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} .
$$

Quindi, dalla formula risolutiva delle e.d.o. lineari del primo ordine si ha per ogni $n \geq 0$:

$$
\alpha_n(t) = \gamma_n e^{[C - D(2n+1)^2]t} , \qquad 0 < t < \infty .
$$

Se $D = C$, vista la convergenza della serie per $t \geq 1$, e poiché i coefficienti α_n, per $n \geq 1$, tendono a 0, con rapidità esponenziale, si ha infine

$$
\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \lim_{t \to \infty} \alpha_0(t) \sin x = \gamma_0 \sin x .
$$

R. *La soluzione è data da*

$$
u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{[C - D(2n+1)^2]t} \sin(2n+1)x ,
$$

ove

$$
\begin{aligned}
\gamma_n &= \frac{1}{\pi} \Big[\frac{1+(-1)^n}{n+1} + \frac{1-(-1)^n}{n} \Big] , \qquad && n \geq 1 , \\
\gamma_0 &= \frac{2}{\pi} , && n = 0 ,
\end{aligned}
$$

Segue che, se $D = C$,

$$
\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sin x .
$$

21. [12/1/2009 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_t - D u_{xx} &= C u , \qquad && 0 < x < \frac{\pi}{2} , t > 0 , \\
u_x(0,t) &= 0 , && t > 0 , \\
u\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &= 0 , && t > 0 , \\
u(x,0) &= \sin x , && 0 < x < \frac{\pi}{2} ,
\end{aligned}
$$

ove D e C sono costanti positive.

Nel caso poi in cui sia $D = C$, si determini il limite

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)\,, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,.$$

R. *La soluzione è data da*

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{[C-D(2n+1)^2]t} \cos(2n+1)x\,,$$

ove

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1+(-1)^n}{n+1} - \frac{1-(-1)^n}{n}\Big]\,, && n \geq 1\,, \\ \gamma_0 &= \frac{2}{\pi}\,, && n = 0\,, \end{aligned}$$

Segue che, se $D = C$,

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{2}{\pi}\cos x\,.$$

22. [15/9/2009 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= a\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(\pi,t) &= b\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Qui a, b sono costanti positive.
SOLUZIONE
Introducendo la nuova variabile

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{b}{\pi}x\,,$$

passiamo al problema

$$\begin{aligned} v_t - Dv_{xx} &= a\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ v(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ v(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ v(x,0) &= -\frac{b}{\pi}x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Cerchiamo la soluzione nella forma

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sin nx\,.$$

I coefficienti α_n *risolvono i problemi per* $n \geq 1$

$$\alpha_n' + Dn^2\alpha_n = \gamma_{0n} := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi a \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi n}[1-(-1)^n]\,,$$

$$\alpha_n(0) = \gamma_{1n} := -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{b}{\pi} x \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{2b}{n\pi}(-1)^n\,.$$

Dunque, si ha

$$\alpha_n(t) = \Big(\gamma_{1n} - \frac{\gamma_{0n}}{Dn^2}\Big)e^{-Dn^2t} + \frac{\gamma_{0n}}{Dn^2}\,.$$

R.

$$u(x,t) = \frac{b}{\pi}x + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(\gamma_{1n} - \frac{\gamma_{0n}}{Dn^2}\Big)e^{-Dn^2t} + \frac{\gamma_{0n}}{Dn^2}\Big]\sin nx\,,$$

ove

$$\gamma_{0n} = \frac{2a}{\pi n}[1-(-1)^n]\,, \qquad \gamma_{1n} = \frac{2b}{n\pi}(-1)^n\,, \qquad n \geq 1\,.$$

23. [15/9/2009 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= a\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= b\,, && t > 0\,,\\ u(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Qui a, b sono costanti positive.
R.

$$u(x,t) = b\Big(1 - \frac{x}{\pi}\Big) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(\gamma_{1n} - \frac{\gamma_{0n}}{Dn^2}\Big)e^{-Dn^2t} + \frac{\gamma_{0n}}{Dn^2}\Big]\sin nx\,,$$

ove

$$\gamma_{0n} = \frac{2a}{\pi n}[1-(-1)^n]\,, \qquad \gamma_{1n} = -\frac{2b}{n\pi}\,, \qquad n \geq 1\,.$$

630. Fourier equazione di Laplace

1. [4/3/2003 (hw)I] Trovare la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && 0 < x < L\,, 0 < y < H\,,\\ u_x(0,y) &= 0\,, && 0 < y < H\,,\\ u_y(x,H) &= 0\,, && 0 < x < L\,,\\ u(L,y) &= 1\,, && 0 < y < H\,,\\ u(x,0) &= x\,, && 0 < x < L\,. \end{aligned}$$

con il metodo di Fourier.

SOLUZIONE

Conviene scrivere $u = v + w$, ove v, w risolvono problemi simili a quello per u, ma con $v(L, y) = 0$, e $w(x, 0) = 0$. Riflettere v in modo dispari intorno a $x = L$, e ottenere un problema con dati di Neumann $v_x = 0$ su $x = 0$, $x = 2L$. Sviluppare in serie di coseni e ottenere

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\Big(\frac{n\pi}{2L}x\Big) \cosh\Big(\frac{n\pi}{2L}(y-H)\Big)\,, \\
\alpha_n \cosh\Big(\frac{n\pi}{2L}H\Big) &= \frac{4L}{(n\pi)^2}\big((-1)^n - 1\big) + \frac{4L}{n\pi}\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\,.
\end{aligned}
$$

Riflettere w in modo dispari intorno a $y = 0$. Si passa a un problema con dati $w_y = 0$ sui bordi $y = \pm H$, posto per $-H < y < H$, da risolvere per serie di soli coseni (in y):

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\Big(\frac{n\pi}{2H}(y+H)\Big) \cosh\Big(\frac{n\pi}{2H}x\Big)\,, \\
A_n \cosh\Big(\frac{n\pi}{2H}L\Big) &= -\frac{4}{n\pi}\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\,.
\end{aligned}
$$

2. [30/6/2003 (ex)I] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, & & 0 < x < L\,, 0 < y < L\,, \\
u_x(0,y) &= 0\,, & & 0 < y < L\,, \\
u(L,y) &= 0\,, & & 0 < y < L\,, \\
u(x,0) &= \sin^2\Big(\frac{\pi x}{L}\Big)\,, & & 0 < x < L\,, \\
u(x,L) &= 0\,, & & 0 < x < L\,.
\end{aligned}
$$

SOLUZIONE

Scegliamo di sviluppare la soluzione u nel sistema ortonormale

$$
\sqrt{\frac{2}{L}} \cos\Big((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\Big)\,, \qquad n = 0\,,1\,,2\,,\dots
$$

Cerchiamo quindi i coefficienti α_n della serie

$$
u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(y) \cos\Big((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\Big)\,.
$$

Questi si ottengono come soluzioni dei problemi al contorno

$$
\begin{aligned}
\alpha_n'' - \Big((2n+1)\frac{\pi}{2L}\Big)^2 \alpha_n &= 0\,, \\
\alpha_n(0) &= \gamma_{0n}\,, \\
\alpha_n(L) &= 0\,,
\end{aligned}
$$

ove

$$\gamma_{0n} = \frac{2}{L} \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{\pi} \left\{ \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n-3} \right\}.$$

L'integrale generale della e.d.o. è

$$\alpha_n(y) = k_{1n} e^{(2n+1)\frac{\pi y}{2L}} + k_{2n} e^{-(2n+1)\frac{\pi y}{2L}}.$$

Imponendo le condizioni al contorno si ottiene

$$\begin{aligned} k_{1n} + k_{2n} &= \gamma_{0n}, \\ k_{1n} e^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} + k_{2n} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}} &= 0. \end{aligned}$$

R.

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_{0n}}{e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}} - e^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}} \left[e^{(2n+1)[\frac{\pi y}{2L} - \frac{\pi}{2}]} - e^{(2n+1)[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2L}]} \right] \cos\left((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\right), \\ \gamma_{0n} &= \frac{(-1)^n}{\pi} \left\{ \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n-3} \right\}. \end{aligned}$$

3. [30/6/2003 (ex)II] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & & 0 < x < L, 0 < y < L, \\ u(0,y) &= 0, & & 0 < y < L, \\ u_x(L,y) &= 0, & & 0 < y < L, \\ u(x,L) &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right), & & 0 < x < L, \\ u(x,0) &= 0, & & 0 < x < L. \end{aligned}$$

4. [17/3/2004 (hw)I] Risolvere

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 1, & & 0 < x < L, 0 < y < H, \\ u_x(0,y) &= 0, & & 0 < y < H, \\ u(L,y) &= 0, & & 0 < y < H, \\ u(x,0) &= -x, & & 0 < x < L, \\ u(x,H) &= x, & & 0 < x < L, \end{aligned}$$

e dire quale è la classe di regolarità della soluzione.

5. [28/6/2004 (ex)I] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned}
\Delta u &= x^2\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,,\\
u(0,y) &= y\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u_x(\pi,y) &= 1 + y\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u_y(x,\pi) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

6. [28/6/2004 (ex)II] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned}
\Delta u &= -x^2\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,,\\
u(0,y) &= 2y\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u_y(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u_x(\pi,y) &= 1 + 2y\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u(x,\pi) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

7. [14/4/2005 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,,\\
u_x(0,y) &= 0\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u_x(\pi,y) &= 2\pi y\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u_y(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u(x,\pi) &= x\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

8. [14/4/2005 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,,\\
u(0,y) &= 2y\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u_x(\pi,y) &= 0\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u_y(x,0) &= -2\pi x\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u_y(x,\pi) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

9. [16/9/2005 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier l'unica soluzione limitata in

$$\Omega = \{(x,y) \mid x > 0\,, 0 < y < \pi\}$$

del problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && \text{in } \Omega\,, \\ u_y(x,0) &= 0\,, && x > 0\,, \\ u_y(x,\pi) &= 0\,, && x > 0\,, \\ u(0,y) &= y\sin y\,, && 0 < y < \pi\,. \end{aligned}$$

10. [16/9/2005 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier l'unica soluzione limitata in

$$\Omega = \{(x,y) \mid x < 0\,, 0 < y < \pi\}$$

del problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && \text{in } \Omega\,, \\ u_y(x,0) &= 0\,, && x < 0\,, \\ u_y(x,\pi) &= 0\,, && x < 0\,, \\ u(0,y) &= y\cos y\,, && 0 < y < \pi\,. \end{aligned}$$

11. [20/4/2006 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier

$$\begin{aligned} \Delta u &= x\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,, \\ u_x(0,y) &= y\,, && 0 < y < \pi\,, \\ u(\pi,y) &= y^2\,, && 0 < y < \pi\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_y(x,\pi) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Usiamo il sistema ortonormale in $(0,\pi)$

$$\psi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left[(2n+1)\frac{y}{2}\right]\,, \qquad n \geq 0\,,$$

sviluppando la soluzione come

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\sin\left[(2n+1)\frac{y}{2}\right]\,.$$

Si ottengono quindi i problemi ai limiti per i coefficienti α_n:

$$\alpha_n'' - \frac{(2n+1)^2}{4}\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin\left[(2n+1)\frac{y}{2}\right] \mathrm{d}y = \gamma_{0n} x\,, \qquad 0 < x < \pi\,,$$

$$\alpha_n'(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi y \sin\left[(2n+1)\frac{y}{2}\right] \mathrm{d}y = \gamma_{1n}\,,$$

$$\alpha_n(\pi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi y^2 \sin\left[(2n+1)\frac{y}{2}\right] \mathrm{d}y = \gamma_{2n}\,,$$

ove con calcoli elementari si ottiene

$$\gamma_{0n} = \frac{4}{\pi(2n+1)}\,, \quad \gamma_{1n} = \frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}\,, \quad \gamma_{2n} = \frac{16(-1)^n}{(2n+1)^2} - \frac{32}{\pi(2n+1)^3}\,.$$

L'integrale generale della e.d.o. sarà dunque

$$\alpha_n(x) = k_{1n} e^{\frac{2n+1}{2}x} + k_{2n} e^{-\frac{2n+1}{2}x} + w_n(x)\,,$$

ove la soluzione particolare w_n si cercherà nella forma

$$w_n(x) = C_n x\,,$$

ottenendo per semplice sostituzione

$$w_n(x) = -\frac{4\gamma_{0n}}{(2n+1)^2}x\,.$$

Per i coefficienti k_{1n}, k_{2n}, imponendo ora le condizioni ai limiti si ottiene il sistema

$$k_{1n} e^{\frac{2n+1}{2}\pi} + k_{2n} e^{-\frac{2n+1}{2}\pi} = \frac{4\gamma_{0n}}{(2n+1)^2}\pi + \gamma_{2n} =: \gamma_{3n}\,,$$

$$k_{1n} - k_{2n} = \frac{2}{2n+1}\left[\frac{4\gamma_{0n}}{(2n+1)^2} + \gamma_{1n}\right] =: \gamma_{4n}\,,$$

che conduce infine a

$$k_{1n} = \frac{\gamma_{3n} + \gamma_{4n} e^{-\frac{2n+1}{2}\pi}}{e^{\frac{2n+1}{2}\pi} + e^{-\frac{2n+1}{2}\pi}}\,, \quad k_{2n} = \frac{\gamma_{3n} - \gamma_{4n} e^{\frac{2n+1}{2}\pi}}{e^{\frac{2n+1}{2}\pi} + e^{-\frac{2n+1}{2}\pi}}\,.$$

R.

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \sin\left[(2n+1)\frac{y}{2}\right],$$

ove:

$$\alpha_n(x) = k_{1n} e^{\frac{2n+1}{2}x} + k_{2n} e^{-\frac{2n+1}{2}x} - \frac{4\gamma_{0n}}{(2n+1)^2}x\,,$$

e

$$k_{1n} = \frac{\gamma_{3n} + \gamma_{4n} e^{-\frac{2n+1}{2}\pi}}{e^{\frac{2n+1}{2}\pi} + e^{-\frac{2n+1}{2}\pi}}\,, \quad k_{2n} = \frac{\gamma_{3n} - \gamma_{4n} e^{\frac{2n+1}{2}\pi}}{e^{\frac{2n+1}{2}\pi} + e^{-\frac{2n+1}{2}\pi}}\,,$$

con

$$\gamma_{3n} = \frac{4\gamma_{0n}}{(2n+1)^2}\pi + \gamma_{2n}\,, \quad \gamma_{4n} = \frac{2}{2n+1}\left[\frac{4\gamma_{0n}}{(2n+1)^2} + \gamma_{1n}\right].$$

Infine:

$$\gamma_{0n} = \frac{4}{\pi(2n+1)}\,, \quad \gamma_{1n} = \frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}\,, \quad \gamma_{2n} = \frac{16(-1)^n}{(2n+1)^2} - \frac{32}{\pi(2n+1)^3}\,.$$

12. [20/4/2006 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier

$$\begin{aligned}
\Delta u &= y+1\,, & & 0<x<\pi\,, 0<y<\pi\,,\\
u_x(0,y) &= 0\,, & & 0<y<\pi\,,\\
u(\pi,y) &= 0\,, & & 0<y<\pi\,,\\
u_y(x,0) &= x^2\,, & & 0<x<\pi\,,\\
u(x,\pi) &= x\,, & & 0<x<\pi\,.
\end{aligned}$$

R.

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(y)\cos\left[(2n+1)\frac{x}{2}\right],$$

ove:

$$\alpha_n(y) = k_{1n}e^{\frac{2n+1}{2}y} + k_{2n}e^{-\frac{2n+1}{2}y} - \frac{4\gamma_{0n}}{(2n+1)^2}(y+1)\,,$$

e

$$k_{1n} = \frac{\gamma_{3n} + \gamma_{4n}e^{-\frac{2n+1}{2}\pi}}{e^{\frac{2n+1}{2}\pi} + e^{-\frac{2n+1}{2}\pi}}\,, \quad k_{2n} = \frac{\gamma_{3n} - \gamma_{4n}e^{\frac{2n+1}{2}\pi}}{e^{\frac{2n+1}{2}\pi} + e^{-\frac{2n+1}{2}\pi}}\,,$$

con

$$\gamma_{3n} = \frac{4\gamma_{0n}}{(2n+1)^2}(\pi+1) + \gamma_{2n}\,, \quad \gamma_{4n} = \frac{2}{2n+1}\left[\frac{4\gamma_{0n}}{(2n+1)^2} + \gamma_{1n}\right].$$

Infine:

$$\gamma_{0n} = \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)}\,, \quad \gamma_{1n} = \frac{4\pi(-1)^n}{2n+1} - \frac{32(-1)^n}{\pi(2n+1)^3}\,, \quad \gamma_{2n} = \frac{4(-1)^n}{2n+1} - \frac{8}{\pi(2n+1)^2}\,.$$

13. [15/12/2006 (ex)I] Risolvere per serie di Fourier

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, & & 0<x<\pi\,, 0<y<\pi\,,\\
u(0,y) &= 0\,, & & 0<y<\pi\,,\\
u_x(\pi,y) &= 1\,, & & 0<y<\pi\,,\\
u(x,0) &= 1\,, & & 0<x<\pi\,,\\
u_y(x,\pi) &= 0\,, & & 0<x<\pi\,.
\end{aligned}$$

Soluzione

Per ridursi a un problema con dati omogenei conviene passare per esempio alla nuova incognita

$$v(x,y) = u(x,y) - x\,.$$

Questa soddisfa

$$\begin{aligned}
\Delta v &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,,\\
v(0,y) &= 0\,, & & 0 < y < \pi\,,\\
v_x(\pi,y) &= 0\,, & & 0 < y < \pi\,,\\
v(x,0) &= 1 - x\,, & & 0 < x < \pi\,,\\
v_y(x,\pi) &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

Usiamo il sistema ortonormale in $(0,\pi)$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left[(2n+1)\frac{x}{2}\right]\,, \qquad n \geq 0\,,$$

sviluppando la soluzione come

$$v(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(y) \sin\left[(2n+1)\frac{x}{2}\right]\,.$$

Si ottengono quindi i problemi ai limiti per i coefficienti α_n*:*

$$\begin{aligned}
&\alpha_n'' - \frac{(2n+1)^2}{4}\alpha_n = 0\,, & & 0 < y < \pi\,,\\
&\alpha_n(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1-x)\sin\left[(2n+1)\frac{x}{2}\right] \mathrm{d}x = \gamma_{1n}\,,\\
&\alpha_n'(\pi) = 0\,,
\end{aligned}$$

ove con calcoli elementari si ottiene

$$\gamma_{1n} = \frac{4}{\pi(2n+1)} + \frac{8(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)^2}\,.$$

L'integrale generale della e.d.o. sarà dunque

$$\alpha_n(y) = k_{1n} e^{\frac{2n+1}{2}y} + k_{2n} e^{-\frac{2n+1}{2}y}\,,$$

ove le costanti di integrazione k_{in} *andranno determinate imponendo i dati al contorno. Si ottiene il sistema*

$$\begin{aligned}
k_{1n} e^{\frac{2n+1}{2}\pi} - k_{2n} e^{-\frac{2n+1}{2}\pi} &= 0\,,\\
k_{1n} + k_{2n} &= \gamma_{1n}\,,
\end{aligned}$$

che conduce infine a

$$k_{1n} = \frac{\gamma_{1n} e^{-\frac{2n+1}{2}\pi}}{e^{\frac{2n+1}{2}\pi} + e^{-\frac{2n+1}{2}\pi}}\,, \quad k_{2n} = \frac{\gamma_{1n} e^{\frac{2n+1}{2}\pi}}{e^{\frac{2n+1}{2}\pi} + e^{-\frac{2n+1}{2}\pi}}\,.$$

R.

$$
u(x,y)=x+\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{4}{\pi(2n+1)}+\frac{8(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)^2}\Big]
$$
$$
\times\Big[\frac{e^{-\frac{2n+1}{2}\pi}}{e^{\frac{2n+1}{2}\pi}+e^{-\frac{2n+1}{2}\pi}}e^{\frac{2n+1}{2}y}+\frac{e^{\frac{2n+1}{2}\pi}}{e^{\frac{2n+1}{2}\pi}+e^{-\frac{2n+1}{2}\pi}}e^{-\frac{2n+1}{2}y}\Big]\sin\Big[(2n+1)\frac{x}{2}\Big].
$$

14. [18/4/2007 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione limitata in $Q=(0,\pi)\times(0,\infty)$ di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && \text{in } Q,\\
u_x(0,y) &= 0\,, && 0<y<\infty\,,\\
u_x(\pi,y) &= \sin y\,, && 0<y<\infty\,,\\
u(x,0) &= x-\frac{\pi}{2}\,, && 0<x<\pi\,.
\end{aligned}
$$

Soluzione

Riconduciamoci a un problema con dati omogenei al contorno, per esempio con il cambiamento di incognita

$$
v(x,y)=u(x,y)-\frac{x^2}{2\pi}\sin y\,.
$$

Si verifica che v risolve il problema

$$
\begin{aligned}
\Delta v &= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{x^2}{2}-1\Big)\sin y\,, && \textit{in } Q,\\
v_x(0,y) &= 0\,, && 0<y<\infty\,,\\
v_x(\pi,y) &= 0\,, && 0<y<\infty\,,\\
v(x,0) &= x-\frac{\pi}{2}\,, && 0<x<\pi\,;
\end{aligned}
$$

inoltre v è limitata in Q.
Cerchiamo v nella forma

$$
v(x,y)=\alpha_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(y)\cos(nx)\,.
$$

Il coefficiente α_n, $n\ge 0$, è soluzione del problema

$$
\begin{aligned}
\alpha_n''-n^2\alpha_n &= \gamma_{0n}\sin y\,, && 0<y<\infty\,,\\
\alpha_n(0) &= \gamma_{1n}\,, &&\\
\alpha_n \quad & \textit{limitato}, && \textit{in } (0,\infty).
\end{aligned}
$$

Qui denotiamo

$$
\gamma_{0n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\Big(\frac{x^2}{2}-1\Big)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^n}{\pi n^2}\,,\qquad n\ge 1\,,
$$
$$
\gamma_{00}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\Big(\frac{x^2}{2}-1\Big)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{\pi}\,,
$$

e

$$\gamma_{1n} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Big(x-\frac{\pi}{2}\Big)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1]\,, \qquad n\ge 1\,,$$
$$\gamma_{10} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(x-\frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Dunque per $n\ge 1$

$$\alpha_n(y) = k_{1n}e^{ny} + k_{2n}e^{-ny} + k_{3n}\sin y\,,$$

ove k_{3n} si determina per sostituzione:

$$-k_{3n}\sin y - n^2k_{3n}\sin y = \gamma_{0n}\sin y\,, \quad \textit{ossia} \quad k_{3n} = -\frac{\gamma_{0n}}{1+n^2}\,.$$

Quindi dovremo imporre, per le condizioni a $y=0$ e di limitatezza,

$$\begin{aligned} k_{1n}+k_{2n} &= \gamma_{1n}\,,\\ k_{1n} &= 0\,, \end{aligned}$$

ove la seconda uguaglianza è imposta appunto dalla richiesta che α_n resti limitata per $y\to\infty$.
Per $n=0$ invece si ha

$$\alpha_0(y) = -\gamma_{00}\sin y + k_{10}y + k_{20}\,,$$

con le condizioni

$$\begin{aligned} k_{20} &= \gamma_{10} = 0\,,\\ k_{10} &= 0\,. \end{aligned}$$

R.

$$\begin{aligned} u(x,y) = \frac{x^2}{2\pi}\sin y - \Big(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{\pi}\Big)\sin y \\ + \sum_{n=1}^\infty \Big[\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1]e^{-ny} - \frac{2(-1)^n}{\pi n^2}\frac{1}{1+n^2}\sin y\Big]\cos(nx)\,. \end{aligned}$$

15. [18/4/2007 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione limitata in $Q=(-\infty,0)\times(0,\pi)$ di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && \text{in } Q,\\ u_y(x,0) &= 0\,, && -\infty<x<0\,,\\ u_y(x,\pi) &= -\sin x\,, && -\infty<x<0\,,\\ u(0,y) &= 2y-\pi\,, && 0<y<\pi\,. \end{aligned}$$

R.

$$
u(x,y) = -\frac{y^2}{2\pi}\sin x + \Big(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{\pi}\Big)\sin x \\
+ \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{4}{\pi n^2}[(-1)^n - 1]e^{nx} + \frac{2(-1)^n}{\pi n^2}\frac{1}{1+n^2}\sin x\Big]\cos(ny)\,.
$$

16. [28/3/2008 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,, 0 < y < 1\,,\\
u_x(0,y) &= 0\,, & & 0 < y < 1\,,\\
u_x(\pi,y) &= y\,, & & 0 < y < 1\,,\\
u(x,0) &= x\,, & & 0 < x < \pi\,,\\
u_y(x,1) &= x\,, & & 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

Soluzione

Riconduciamoci a un problema con dati omogenei al contorno, per esempio con il cambiamento di incognita

$$
v(x,t) = u(x,t) - \frac{x^2 y}{2\pi}\,.
$$

Si verifica che v risolve il problema

$$
\begin{aligned}
\Delta v &= -\frac{y}{\pi}\,, & & 0 < x < \pi\,, 0 < y < 1\,,\\
v_x(0,y) &= 0\,, & & 0 < y < 1\,,\\
v_x(\pi,y) &= 0\,, & & 0 < y < 1\,,\\
v(x,0) &= x\,, & & 0 < x < \pi\,,\\
v_y(x,1) &= x - \frac{x^2}{2\pi}\,, & & 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

Cerchiamo v nella forma

$$
v(x,y) = \alpha_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(y)\cos(nx)\,.
$$

Il coefficiente α_n, $n \geq 1$, è soluzione del problema

$$
\begin{aligned}
\alpha_n'' - n^2\alpha_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(-\frac{y}{\pi}\Big)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0\,, & & 0 < y < 1\,,\\
\alpha_n(0) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x =: \gamma_{0n}\,,\\
\alpha_n'(1) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(x - \frac{x^2}{2\pi}\Big)\cos(nx)\,\mathrm{d}x =: \gamma_{1n}\,,
\end{aligned}
$$

ove per $n \geq 1$

$$\gamma_{0n} = -\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1] , \qquad \gamma_{1n} = -\frac{2}{\pi n^2} .$$

Inoltre per $n = 0$ *si ha*

$$\begin{aligned} \alpha_0'' &= -\frac{y}{\pi} , & 0 < y < 1 , \\ \alpha_n(0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} , \\ \alpha_n'(1) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(x - \frac{x^2}{2\pi}\Big) \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{3} . \end{aligned}$$

Gli integrali generali hanno la forma

$$\alpha_0(y) = -\frac{y^3}{6\pi} + k_{10}y + k_{20} , \qquad \alpha_n(y) = k_{1n}e^{-ny} + k_{2n}e^{ny} .$$

Sostituendo i dati al bordo si ottengono i coefficienti.
R.

$$\begin{aligned} u(x,y) = \frac{x^2y}{2\pi} - \frac{y^3}{6\pi} + \Big(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2\pi}\Big)y + \frac{\pi}{2} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ne^n\gamma_{0n} - \gamma_{1n})e^{-ny} + (ne^{-n}\gamma_{0n} + \gamma_{1n})e^{ny}}{n(e^n + e^{-n})} \cos(nx) . \end{aligned}$$

Qui

$$\gamma_{0n} = -\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1] , \qquad \gamma_{1n} = -\frac{2}{\pi n^2} .$$

17. [28/3/2008 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 , & 0 < x < \pi , 0 < y < 1 , \\ u_x(0,y) &= y , & 0 < y < 1 , \\ u_x(\pi,y) &= 0 , & 0 < y < 1 , \\ u_y(x,0) &= x , & 0 < x < \pi , \\ u(x,1) &= x , & 0 < x < \pi . \end{aligned}$$

R.

$$\begin{aligned} u(x,y) = \frac{(x-\pi)^2y}{2\pi} - \frac{y^3}{6\pi} + \frac{\pi}{3}y + \frac{1}{6\pi} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n - e^n)e^{-ny} + (n + e^{-n})e^{ny}}{n(e^n + e^{-n})}\gamma_{0n} \cos(nx) . \end{aligned}$$

Qui

$$\gamma_{0n} = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 2] .$$

18. [16/9/2008 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= f(x,y)\,, && -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\,,\\
u_x\Big(-\frac{\pi}{2}, y\Big) &= 0\,, && -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\,,\\
u_x\Big(\frac{\pi}{2}, y\Big) &= 1\,, && -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\,,\\
u\Big(x, -\frac{\pi}{2}\Big) &= 0\,, && -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,,\\
u_y\Big(x, \frac{\pi}{2}\Big) &= 1\,, && -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Qui

$$
f(x,y) = \begin{cases} 1\,, & y \geq x\,,\\ 0\,, & y < x\,. \end{cases}
$$

Soluzione

Introduciamo la variabile ausiliaria

$$
v(x,y) = u(x,y) - \frac{x^2}{\pi}\,,
$$

che risolve

$$
\begin{aligned}
\Delta v &= f(x,y) - \frac{2}{\pi}\,, && -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\,,\\
v_x\Big(-\frac{\pi}{2}, y\Big) &= 0\,, && -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\,,\\
v_x\Big(\frac{\pi}{2}, y\Big) &= 0\,, && -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\,,\\
v\Big(x, -\frac{\pi}{2}\Big) &= -\frac{x^2}{\pi}\,, && -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,,\\
v_y\Big(x, \frac{\pi}{2}\Big) &= 1\,, && -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Cerchiamo v nella forma

$$
v(x,y) = \alpha_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(y) \cos n\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big)\,.
$$

Il coefficiente α_n, $n \geq 1$, è soluzione del problema

$$
\alpha_n'' - n^2\alpha_n = \gamma_{0n}(y) := \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y) \cos n\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}x\,, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\,, \tag{1}
$$

$$
\alpha_n\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \gamma_{1n} := -\frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{\pi} \cos n\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}x\,, \tag{2}
$$

$$
\alpha_n'\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0\,. \tag{3}
$$

Invece per $n = 0$ si ha

$$\alpha_0'' = \gamma_{00}(y) - \frac{2}{\pi} := \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\,, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\alpha_0\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \gamma_{10} := -\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{\pi}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{12}\,.\,,$$

$$\alpha_0'\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 1\,.$$

Si ha con i calcoli

$$\gamma_{0n}(y) = \frac{2}{\pi n}\sin n\Big(y + \frac{\pi}{2}\Big)\,, \quad n \geq 1\,, \gamma_{00}(y) = \frac{y}{\pi} + \frac{1}{2}\,,$$

e

$$\gamma_{1n} = 2\frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi n^2}\,, \quad n \geq 1\,, \gamma_{10} = -\frac{\pi}{12}\,.$$

Per trovare la soluzione dei problemi di Cauchy per α_n osserviamo che una soluzione particolare di (1) *per $n \geq 1$ è data da*

$$w_n(y) = C_{1n}\sin n\Big(y + \frac{\pi}{2}\Big) + C_{2n}\cos n\Big(y + \frac{\pi}{2}\Big)\,,$$

ove le costanti C_{1n} e C_{2n} si determinano sostituendo la w_n nella e.d.o.. Si ottiene così

$$w_n(y) = -\frac{1}{\pi n^3}\sin n\Big(y + \frac{\pi}{2}\Big)\,.$$

Dunque la soluzione del problema di Cauchy si trova imponendo i dati iniziali nell'integrale generale

$$\alpha_n(y) = k_{1n}e^{ny} + k_{2n}e^{-ny} + w_n(y)\,.$$

Se invece $n = 0$, si ha integrando direttamente la e.d.o.

$$\alpha_0(y) = \frac{y^3}{6\pi} + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\Big)y^2 + k_{10}y + k_{20}\,.$$

Le costanti di integrazione k_{1n}, k_{2n} si determinano imponendo le condizioni al contorno.

R.

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & \frac{x^2}{\pi} + \frac{y^3}{6\pi} + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\Big)y^2 + \Big(2 - \frac{3\pi}{8}\Big)y + \frac{\pi}{3} - \frac{7\pi}{96} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[k_{1n}e^{ny} + k_{2n}e^{-ny} - \frac{1}{\pi n^3}\sin n\Big(y + \frac{\pi}{2}\Big)\Big]\cos n\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big)\,, \end{aligned}$$

ove

$$k_{1n} = \frac{1}{e^{n\pi} + e^{-n\pi}}\Big(\frac{(-1)^n}{\pi n^3}e^{\frac{n\pi}{2}} + 2\frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi n^2}e^{-\frac{n\pi}{2}}\Big)\,,$$

$$k_{2n} = \frac{1}{e^{n\pi} + e^{-n\pi}}\Big(\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n^3}e^{-\frac{n\pi}{2}} + 2\frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi n^2}e^{\frac{n\pi}{2}}\Big)\,.$$

19. [16/9/2008 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned}
\Delta u &= f(x,y)\,, && -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\,,-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\,,\\
u_x\Big(-\frac{\pi}{2},y\Big) &= 0\,, && -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\,,\\
u_x\Big(\frac{\pi}{2},y\Big) &= 3\,, && -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\,,\\
u\Big(x,-\frac{\pi}{2}\Big) &= 0\,, && -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\,,\\
u_y\Big(x,\frac{\pi}{2}\Big) &= \pi\,, && -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Qui

$$f(x,y)=\begin{cases}1\,, & y\le x\,,\\ 0\,, & y>x\,.\end{cases}$$

R.

$$\begin{aligned}
u(x,y)=\frac{3x^2}{\pi}-\frac{y^3}{6\pi}+\Big(\frac{1}{4}-\frac{3}{\pi}\Big)y^2+\Big(\frac{7\pi}{8}+3\Big)y+\frac{11\pi}{4}+\frac{29\pi^2}{96}\\
+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[k_{1n}e^{ny}+k_{2n}e^{-ny}+\frac{1}{\pi n^3}\sin n\Big(y+\frac{\pi}{2}\Big)\Big]\cos n\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big)\,,
\end{aligned}$$

ove

$$\begin{aligned}
k_{1n}&=\frac{1}{e^{n\pi}+e^{-n\pi}}\Big(\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n^3}e^{\frac{n\pi}{2}}+6\frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi n^2}e^{-\frac{n\pi}{2}}\Big)\,,\\
k_{2n}&=\frac{1}{e^{n\pi}+e^{-n\pi}}\Big(\frac{(-1)^{n}}{\pi n^3}e^{-\frac{n\pi}{2}}+6\frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi n^2}e^{\frac{n\pi}{2}}\Big)\,.
\end{aligned}$$

20. [12/2/2009 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned}
u_{xx}+u_{yy} &= 0\,, && 0<x<1\,,0<y<\pi\,,\\
u_y(x,\pi) &= 1\,, && 0<x<1\,,\\
u_y(x,0) &= 2\,, && 0<x<1\,,\\
u(0,y) &= y\,, && 0<y<\pi\,,\\
u_x(1,y) &= 0\,, && 0<y<\pi\,.
\end{aligned}$$

Soluzione
Passiamo alla nuova incognita

$$v(x,y)=u(x,y)+\frac{1}{2\pi}y^2-2y\,,$$

che risolve il problema

$$
\begin{aligned}
v_{xx} + v_{yy} &= \frac{1}{\pi}\,, && 0 < x < 1\,, 0 < y < \pi\,,\\
v_y(x,\pi) &= 0\,, && 0 < x < 1\,,\\
v_y(x,0) &= 0\,, && 0 < x < 1\,,\\
v(0,y) &= \frac{1}{2\pi}y^2 - y\,, && 0 < y < \pi\,,\\
v_x(1,y) &= 0\,, && 0 < y < \pi\,.
\end{aligned}
$$

Cerchiamone lo sviluppo in serie

$$
v(x,y) = \alpha_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\cos(ny)\,.
$$

I coefficienti α_n risolvono i problemi

$$
\begin{aligned}
\alpha_n'' - n^2\alpha_n &= \gamma_{0n}\,,\\
\alpha_n(0) &= \gamma_{1n}\,,\\
\alpha_n'(1) &= 0\,,
\end{aligned}
$$

ove

$$
\begin{aligned}
\gamma_{0n} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi}\cos(ny)\,\mathrm{d}y = 0\,, \qquad n \geq 1\,,\\
\gamma_{00} &= \frac{1}{\pi}\,,\\
\gamma_{1n} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(\frac{1}{2\pi}y^2 - y\Big)\cos(ny)\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi n^2}\,,\\
\gamma_{10} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(\frac{1}{2\pi}y^2 - y\Big)\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Dunque, si ha

$$
\begin{aligned}
\alpha_n(x) &= k_{1n}e^{nx} + k_{2n}e^{-nx}\,, && n \geq 1\,,\\
\alpha_0(x) &= k_{10} + k_{20}x + \gamma_{00}\frac{x^2}{2}\,, && n = 0\,.
\end{aligned}
$$

Imponendo le condizioni al bordo si ha per $n \geq 1$

$$
\begin{aligned}
k_{1n} + k_{2n} &= \gamma_{1n}\,,\\
nk_{1n}e^{n} - nk_{2n}e^{-n} &= 0\,,
\end{aligned}
$$

da cui

$$
k_{1n} = \frac{\gamma_{1n}e^{-2n}}{1 + e^{-2n}}\,, \qquad k_{2n} = \frac{\gamma_{1n}}{1 + e^{-2n}}\,.
$$

In modo simile

$$
k_{10} = \gamma_{10}\,, \qquad k_{20} = -\gamma_{00}\,.
$$

R.

$$
\begin{aligned}
u(x,y) = 2y - \frac{1}{2\pi}y^2 + \gamma_{10} - \gamma_{00}x + \gamma_{00}\frac{x^2}{2} \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{1n}}{1+e^{-2n}}\left(e^{nx-2n} + e^{-nx}\right)\cos(ny)\,,
\end{aligned}
$$

ove

$$
\gamma_{00} = \frac{1}{\pi}\,, \qquad \gamma_{1n} = \frac{2}{\pi n^2}\,, \qquad \gamma_{10} = -\frac{\pi}{3}\,.
$$

21. [12/2/2009 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < 1\,, \\
u_x(0,y) &= 3\,, && 0 < y < 1\,, \\
u_x(\pi,y) &= 2\,, && 0 < y < 1\,, \\
u(x,0) &= x\,, && 0 < x < \pi\,, \\
u_y(x,1) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

R.

$$
\begin{aligned}
u(x,y) = 3x - \frac{1}{2\pi}x^2 + \gamma_{10} - \gamma_{00}y + \gamma_{00}\frac{y^2}{2} \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{1n}}{1+e^{-2n}}\left(e^{ny-2n} + e^{-ny}\right)\cos(nx)\,,
\end{aligned}
$$

ove

$$
\gamma_{00} = \frac{1}{\pi}\,, \qquad \gamma_{1n} = \frac{2}{\pi n^2}[2 + (-1)^{n+1}]\,, \qquad \gamma_{10} = -\frac{5\pi}{6}\,.
$$

22. [13/7/2009 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= f(y)\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,, \\
u(0,y) &= 0\,, && 0 < y < \pi\,, \\
u_x(\pi,y) &= 0\,, && 0 < y < \pi\,, \\
u_y(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \\
u_y(x,\pi) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

Qui

$$
f(y) = \begin{cases} 1\,, & y \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right); \\[1ex] 0\,, & y \notin \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right). \end{cases}
$$

SOLUZIONE

Cerchiamo la soluzione nella forma

$$u(x,y) = \alpha_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \cos ny \,.$$

I coefficienti α_n *risolvono i problemi: per* $n \geq 1$

$$\alpha_n'' - n^2 \alpha_n = \gamma_{0n} := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \cos ny \, \mathrm{d}y \,,$$

$$\alpha_n(0) = 0 \,,$$

$$\alpha_n'(\pi) = 0 \,,$$

ove

$$\gamma_{0n} = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos ny \, \mathrm{d}y = \frac{2}{\pi n} \Big[\sin \frac{3}{4}\pi n - \sin \frac{\pi}{4} n \Big] \,, \qquad n \geq 1 \,.$$

Dunque, si ha

$$\alpha_n(x) = k_{1n} e^{-nx} + k_{2n} e^{nx} + z_n(x) \,,$$

ove z_n *è una soluzione particolare della e.d.o. non omogenea, che può essere scelta come*

$$z_n(x) = -\frac{\gamma_{0n}}{n^2} \,.$$

Imponendo le condizioni al bordo si ha per $n \geq 1$*,*

$$\alpha_n(0) = k_{1n} + k_{2n} - \frac{\gamma_{0n}}{n^2} = 0 \,,$$

$$\alpha_n'(\pi) = -n k_{1n} e^{-n\pi} + n k_{2n} e^{n\pi} = 0 \,.$$

Per $n = 0$ *si ha*

$$\alpha_0'' = \gamma_{00} := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \,,$$

$$\alpha_0(0) = 0 \,,$$

$$\alpha_0'(\pi) = 0 \,.$$

Dunque, si ha

$$\alpha_0(x) = \frac{x^2}{4} + k_{10} x + k_{20} \,,$$

Imponendo le condizioni al bordo si ha per $n = 0$*,*

$$\alpha_0(0) = k_{20} = 0 \,,$$

$$\alpha_0'(\pi) = \frac{\pi}{2} + k_{10} = 0 \,.$$

R.

$$u(x,y) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{on}}{n^2} \Big\{ \frac{1}{1 + e^{-2n\pi}} (e^{-nx} + e^{-2n\pi + nx}) - 1 \Big\} \cos ny \,,$$

ove

$$\gamma_{0n} = \frac{2}{\pi n}\Big[\sin\frac{3}{4}\pi n - \sin\frac{\pi}{4}n\Big], \qquad n \geq 1 .$$

23. [13/7/2009 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x) , && 0 < x < \pi , 0 < y < \pi , \\ u_x(0, y) &= 0 , && 0 < y < \pi , \\ u_x(\pi, y) &= 0 , && 0 < y < \pi , \\ u(x, 0) &= 0 , && 0 < x < \pi , \\ u_y(x, \pi) &= 0 , && 0 < x < \pi . \end{aligned}$$

Qui

$$f(x) = \begin{cases} 2 , & x \in \Big(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi\Big) ; \\ 0 , & x \notin \Big(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi\Big) . \end{cases}$$

R.

$$u(x, y) = \frac{y^2}{2} - \pi y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{on}}{n^2}\Big\{\frac{1}{1 + e^{-2n\pi}}(e^{-ny} + e^{-2n\pi+ny}) - 1\Big\} \cos nx ,$$

ove

$$\gamma_{0n} = \frac{4}{\pi n}\Big[\sin\frac{3}{4}\pi n - \sin\frac{\pi}{4}n\Big], \qquad n \geq 1 .$$

810. Metodi dell'energia per equazioni iperboliche

1. [30/1/2003 (hw)I] Sia $u \in C^2(\overline{Q_T})$, $Q_T = (0, L) \times (0, T)$, soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 , && 0 < x < L , 0 < t < T , \\ u(x, 0) &= u_0(x) , && 0 < x < L , \\ u_t(x, 0) &= u_1(x) , && 0 < x < L , \\ u(0, t) &= 0 , && 0 < t , \\ u(L, t) &= 0 , && 0 < t . \end{aligned}$$

a) Dare condizioni necessarie su u_0, u_1 perché una tale soluzione possa esistere.
b) Dimostrare, moltiplicando l'e.d.p. per u_t e integrando ripetutamente per parti su $(0, L) \times (0, t)$, che, per ogni $t > 0$,

$$\int_0^L u_t(x, t)^2 \,\mathrm{d}x + c^2 \int_0^L u_x(x, t)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^L u_1(x)^2 \,\mathrm{d}x + c^2 \int_0^L (u_0'(x))^2 \,\mathrm{d}x . \quad (1)$$

c) Dedurre dalla (1) un teorema di unicità di soluzioni per il problema in questione.
R.

a) $u_0 \in C^2([0,L])\,, u_1 \in C^1([0,L])\,;$
$u_0(0) = u_0(L) = 0\,, u_0''(0) = u_0''(L) = 0\,, u_1(0) = u_1(L) = 0\,.$

2. [30/6/2003 (ex)I] Si consideri la soluzione $v \in C^2([0,L] \times [0,T])$ di

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= -v_t\,, && 0 < x < L\,, 0 < t < T\,,\\ v(0,t) &= 0\,, && 0 \le t \le T\,,\\ v(L,t) &= 0\,, && 0 \le t \le T\,,\\ v(x,0) &= v_0(x)\,, && 0 \le x \le L\,,\\ v_t(x,0) &= v_1(x)\,, && 0 \le x \le L\,. \end{aligned}$$

Si dimostri che l'"energia"

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L v_t(x,t)^2 \,\mathrm{d}x + \frac{c^2}{2}\int_0^L v_x(x,t)^2 \,\mathrm{d}x\,,$$

è una funzione decrescente del tempo.

3. [30/6/2003 (ex)II] Si consideri la soluzione $v \in C^2([0,L] \times [0,T])$ di

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= v_t\,, && 0 < x < L\,, 0 < t < T\,,\\ v(0,t) &= 0\,, && 0 \le t \le T\,,\\ v(L,t) &= 0\,, && 0 \le t \le T\,,\\ v(x,0) &= v_0(x)\,, && 0 \le x \le L\,,\\ v_t(x,0) &= v_1(x)\,, && 0 \le x \le L\,. \end{aligned}$$

Si dimostri che l'"energia"

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L v_t(x,t)^2 \,\mathrm{d}x + \frac{c^2}{2}\int_0^L v_x(x,t)^2 \,\mathrm{d}x\,,$$

è una funzione crescente del tempo.

820. Metodi dell'energia per equazioni paraboliche

1. [15/12/2006 (ex)I] Dimostrare che

$$\int_0^\pi u(x,t)^2 \,\mathrm{d}x \le \frac{3}{2}\pi\,, \qquad t \ge 0\,,$$

se u risolve

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= 1 + \cos x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Soluzione
Moltiplichiamo l'equazione per u e integriamo per parti su $(0,\pi)\times(0,t)$, ottenendo:

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi u(x,t)^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\pi u(x,0)^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^t \int_0^\pi u_x(x,\tau)^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\tau = 0\,.$$

Eliminando il termine positivo che contiene u_x^2, si ha

$$\int_0^\pi u(x,t)^2 \,\mathrm{d}x \le \int_0^\pi u(x,0)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi (1 + 2\cos x + \cos^2 x) \,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\pi\,.$$

2. [14/7/2008 (ex)I] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= 0\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,, \\ Du_x(0,t) &= au(0,t)\,, && t > 0\,, \\ Du_x(L,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && 0 < x < L\,, \end{aligned}$$

ove a è una costante positiva, e $u_0 \in C^2([0,L])$, $u_0 > 0$.
Si dimostri che

$$U(t) = \int_0^L u(x,t) \,\mathrm{d}x\,, \qquad t > 0\,,$$

è decrescente in t. (Si assuma per u tutta la regolarità necessaria.)
Soluzione

Integrando la e.d.p. in $[0, L] \times [t_1, t_2]$, $t_1 < t_2$ *si ha*

$$\begin{aligned}\int_0^L u(x,t_2)\,\mathrm{d}x - \int_0^L u(x,t_1)\,\mathrm{d}x &= \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L u_\tau(x,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L Du_{xx}(x,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_1}^{t_2}\big[Du_x(L,\tau) - Du_x(0,\tau)\big]\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} au(0,\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned}$$

Quindi avremo dimostrato la tesi:

$$U(t_2) - U(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} au(0,\tau)\,\mathrm{d}\tau < 0\,,$$

se dimostriamo che $u > 0$.
Osserviamo intanto che $u > 0$ *all'istante iniziale. Su* $x = L$ *la* u *non può assumere minimi, per il Lemma di Hopf. Se* $u(0,\bar t)$ *è un minimo, per* $\bar t > 0$, *sempre per il Lemma di Hopf, e per la condizione al bordo prescritta, si deve avere*

$$u(0,\bar t) = a^{-1}Du_x(0,\bar t) > 0\,.$$

Perciò u *ha minimi solo positivi, e perciò è in effetti ovunque positiva.*

3. [14/7/2008 (ex)II] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= 0\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,,\\ Du_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ Du_x(L,t) &= -au(L,t)\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && 0 < x < L\,,\end{aligned}$$

ove a è una costante positiva, e $u_0 \in C^2([0,L])$, $u_0 > 0$.
Si dimostri che

$$U(t) = \int_0^L u(x,t)\,\mathrm{d}x\,, \qquad t > 0\,,$$

è decrescente in t. (Si assuma per u tutta la regolarità necessaria.)

910. Trasformata di Fourier: generalità

1. [18/4/2007 (ex)I] Consideriamo le due funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 3\,, & -\pi \le x \le \pi\,,\\ 0\,, & x \notin [-\pi,\pi]\,,\end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x|\,, & -1 \le x \le 1\,, \\ 0\,, & x \notin [-1,1]\,, \end{cases}$$

Decidere quale delle due trasformate di Fourier $\mathcal{F}[f]$ e $\mathcal{F}[g]$ tende a zero più rapidamente quando $\omega \to \infty$, e calcolare tale trasformata.
SOLUZIONE
La g è C^1 a tratti, e quindi più regolare della f, che non è neppure continua. Ne segue che la trasformata richiesta è quella della g.
Calcoliamo poi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} (\cos\omega x + i\sin\omega x)(1-|x|)\,\mathrm{d}x \qquad \textit{(per parità)} \\ &= 2\int_{0}^{1} \cos\omega x(1-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\omega^2}(1-\cos\omega)\,. \end{aligned}$$

R.

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{2}{\omega^2}(1-\cos\omega)\,, \quad \omega \ne 0\,, \qquad \mathcal{F}[g](0) = 1\,.$$

960. Trasformata di Laplace e risoluzione di EDO

1. [11/3/2007 (hw)I] Risolvere mediante la trasformata di Laplace il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y' + ay &= b\,, \qquad x > 0\,, \\ y(0) &= u_0\,. \end{aligned}$$

Qui $a \ne 0$, b, u_0 sono costanti reali.
SOLUZIONE
Applicando la trasformazione di Laplace all'equazione differenziale, e denotando $Y = \mathcal{L}[y]$, si ha

$$sY - u_0 + aY = \frac{b}{s}\,.$$

Dunque

$$Y(s) = \Big(\frac{b}{s} + u_0\Big)\frac{1}{a+s} = \mathcal{L}[b](s)\mathcal{L}[e^{-ax}](s) + \mathcal{L}[u_0 e^{-ax}](s)\,.$$

Ricordando la proprietà della trasformata di Laplace relativa alle convoluzioni di funzioni,

$$\mathcal{L}[b](s)\mathcal{L}[e^{-ax}](s) = \mathcal{L}[b * e^{-ax}](s)\,.$$

Infine (si noti l'abuso di notazione)

$$b * e^{-ax}(x) = \int_0^x b e^{-a\xi}\,\mathrm{d}\xi = b\frac{1-e^{-ax}}{a}\,.$$

R.

$$y(x) = u_0 e^{-ax} + b\frac{1-e^{-ax}}{a}\,, \qquad x \geq 0\,.$$

2. [11/3/2007 (hw)I] Risolvere mediante la trasformata di Laplace il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y &= 3\,, \qquad x > 0\,, \\ y(0) &= 1\,, \\ y'(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Applicando la trasformazione di Laplace all'equazione differenziale, e denotando $Y = \mathcal{L}[y]$, *si ha*

$$s^2 Y - s - 2(sY - 1) + Y = \frac{3}{s}\,.$$

Dunque

$$Y(s) = \frac{\frac{3}{s} + s - 2}{s^2 - 2s + 1} = \frac{2}{s}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s} = \mathcal{L}[2](s)\mathcal{L}[xe^x](s) + \mathcal{L}[1](s)\,.$$

Ricordando la proprietà della trasformata di Laplace relativa alle convoluzioni di funzioni,

$$\mathcal{L}[2](s)\mathcal{L}[xe^x](s) = \mathcal{L}[2 * (xe^x)](s)\,.$$

Infine (si noti l'abuso di notazione)

$$2 * (xe^x)(x) = \int_0^x 2\xi e^{\xi}\,\mathrm{d}\xi = 2xe^x + 2(1 - e^x)\,.$$

R.

$$y(x) = 1 + 2xe^x + 2(1 - e^x)\,, \qquad x \geq 0\,.$$

3. [11/3/2007 (hw)I] Risolvere mediante la trasformata di Laplace il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= e^{-x}\,, \qquad x > 0\,, \\ y(0) &= 0\,, \\ y'(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Applicando la trasformazione di Laplace all'equazione differenziale, e denotando $Y = \mathcal{L}[y]$, si ha

$$s^2 Y + 4Y = \frac{1}{s+1}\,.$$

Dunque

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}\frac{1}{s^2+4} = \mathcal{L}[e^{-x}](s)\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right](s)\,.$$

Ricordando la proprietà della trasformata di Laplace relativa alle convoluzioni di funzioni,

$$Y(s) = \mathcal{L}\left[e^{-x} * \Big(\frac{1}{2}\sin(2x)\Big)\right](s)\,.$$

Infine (si noti l'abuso di notazione)

$$e^{-x} * \Big(\frac{1}{2}\sin(2x)\Big)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-(x-\xi)}\sin(2\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{10}(\sin(2x) - 2\cos(2x) + 2e^{-x})\,.$$

R.

$$y(x) = \frac{1}{10}(\sin(2x) - 2\cos(2x) + 2e^{-x})\,, \qquad x \geq 0\,.$$

4. [2/4/2007 (ex)I] Risolvere mediante la trasformazione di Laplace il problema

$$\begin{aligned} y'' - 4y' - 5y &= e^{3x}\,,\\ y(0) &= 1\,,\\ y'(0) &= -1\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Applicando la trasformazione di Laplace all'equazione differenziale, e denotando $Y = \mathcal{L}[y]$, si ha

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4(sY(s) - y(0)) - 5Y(s) = \mathcal{L}[e^{3x}](s) = \frac{1}{s-3}\,,$$

da cui

$$Y(s)(s^2 - 4s - 5) = \frac{1}{s-3} + s - 5\,.$$

Dunque

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{1}{s-3}\frac{1}{(s+1)(s-5)} + \frac{1}{s+1}& \\ &= -\frac{1}{6}\frac{1}{s-3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-3}\frac{1}{s-5} + \frac{1}{s+1}\,.\,. \end{aligned}$$

Ricordando le proprietà della trasformata di Laplace,

$$Y(s) = -\frac{1}{6}\mathcal{L}[e^{3x} * e^{-x}](s) + \frac{1}{6}\mathcal{L}[e^{3x} * e^{5x}](s) + \mathcal{L}[e^{-x}](s)\,.$$

R.
$$y(x) = \frac{25}{24}e^{-x} + \frac{1}{12}e^{5x} - \frac{1}{8}e^{3x}\,, \qquad x \geq 0\,.$$

5. [18/4/2007 (ex)I] Risolvere mediante la trasformazione di Laplace il seguente problema
$$\begin{aligned} y'' + 16y &= 1 + \sin 2x\,, \\ y(0) &= 0\,, \\ y'(0) &= 3\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Applichiamo la trasformazione di Laplace alla e.d.o. e otteniamo (denotando $Y = \mathcal{L}[y]$)
$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 16Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{4+s^2}\,,$$
da cui
$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{16+s^2}\,\frac{1}{s} + \frac{2}{4+s^2}\,\frac{1}{16+s^2} + \frac{3}{16+s^2} \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}[\sin 4x](s)\mathcal{L}[1](s) + \frac{1}{4}\mathcal{L}[\sin 4x](s)\mathcal{L}[\sin 2x](s) + \frac{3}{4}\mathcal{L}[\sin 4x](s) \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}[\sin 4x * 1](s) + \frac{1}{4}\mathcal{L}[\sin 4x * \sin 2x](s) + \frac{3}{4}\mathcal{L}[\sin 4x](s)\,. \end{aligned}$$
Quindi
$$y(x) = \frac{1}{4}\int_0^x \sin 4\xi \,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{4}\int_0^x \sin 2\xi \sin(4x - 4\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{3}{4}\sin 4x\,.$$

R.
$$y(x) = \frac{19}{24}\sin 4x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{16} - \frac{1}{12}\sin 2x\,.$$

6. [12/7/2007 (ex)I] Risolvere mediante la trasformazione di Laplace il seguente problema
$$\begin{aligned} y'' - \pi y' &= \cos x\,, \\ y(0) &= \pi\,, \\ y'(0) &= \pi^2\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Applichiamo la trasformazione di Laplace alla e.d.o. e otteniamo (denotando $Y = \mathcal{L}[y]$)
$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - \pi(sY(s) - y(0)) = \frac{s}{1+s^2}\,,$$

da cui

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{\pi}{s-\pi} + \frac{1}{(s-\pi)(1+s^2)} \\ &= \pi\mathcal{L}[e^{\pi x}](s) + \mathcal{L}[e^{\pi x}](s)\mathcal{L}[\sin x](s) \\ &= \pi\mathcal{L}[e^{\pi x}](s) + \mathcal{L}[e^{\pi x} * \sin x](s)\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$y(x) = \pi e^{\pi x} + \int_0^x e^{\pi(x-\xi)} \sin\xi \, \mathrm{d}\xi\,.$$

R.

$$y(x) = \Big(\pi + \frac{1}{1+\pi^2}\Big) e^{\pi x} - \frac{1}{1+\pi^2}(\cos x + \pi \sin x)\,.$$