Modelli Matematici per la Meccanica
Esercizi di esame e di controllo

Daniele Andreucci
Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Università di Roma La Sapienza
via A.Scarpa 16, 00161 Roma
andreucci@dmmm.uniroma1.it

launch˙daexam 20100925 21.21

NOTE:

- (ex): esercizi d'esame; (hw): esercizi di controllo.
- *Salvo diverso avviso:*
  - coni e cilindri sono circolari retti;
  - i corpi rigidi sono omogenei;
  - si assume l'ipotesi dei lavori virtuali.
- Si usa la notazione degli *Appunti del corso*.

120. Conservazione dell'energia

1. [22/9/2006 (ex)I] Un punto materiale è vincolato a muoversi nel piano (x, y) ed è soggetto a un campo di forze di potenziale

$$U(x, y) = -kx^2y^2 \,.$$

Si dimostri che non si possono avere moti illimitati in cui il punto rimanga sempre nel settore

$$A = \{(x, y) \mid 0 < x < y < 2x\} \,.$$

Soluzione

Poiché le forze sono conservative, vale per ciascun moto $\boldsymbol{X}$

$$T(t) - U(\boldsymbol{X}(t)) = E \,, \qquad \text{per ogni } t,$$

ove l'energia E *è una costante reale. Dato che* $T \geq 0$*, deve essere*

$$E \geq -U(\boldsymbol{X}(t)) = kX_1(t)^2X_2(t)^2 \,.$$

Quindi lungo ciascun moto il prodotto $X_1^2X_2^2$ *resta limitato.*
Se invece il moto fosse illimitato, ossia almeno una delle coordinate X_i *divergesse a infinito (su una successione di istanti* $t_n \to \infty$*), anche l'altra coordinata dovrebbe divergere (sulla stessa successione), per la geometria di* A*, e quindi a maggior ragione divergerebbe il loro prodotto.*

2. [1/4/2008 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = \big(a\tau, b\tau^2, c\tau^3\big) \,, \qquad -\infty < \tau < \infty \,,$$

ed è soggetto a un campo di forze di potenziale

$$U(\boldsymbol{x}) = -\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}|^2} - \beta|\boldsymbol{x}|^2 \,, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\} \,.$$

Qui a, b, c, α, β sono costanti positive.
Dimostrare che ciascun moto $\boldsymbol{\varphi}$ soddisfa

$$\varepsilon \leq |\boldsymbol{\varphi}(t)| \leq C \,,$$

per due opportune costanti positive C, ε (dipendenti dal moto), e per ogni t per cui è definito.

Soluzione

I vincoli sono lisci, e le forze conservative. Quindi l'energia

$$E = T - U = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - U(\boldsymbol{x}) \,,$$

rimane costante lungo ciascun moto. In particolare dunque per ogni t per cui il moto è definito

$$U\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big) = -\frac{\alpha}{|\boldsymbol{\varphi}(t)|^2} - \beta|\boldsymbol{\varphi}(t)|^2 \geq -E\,.$$

Ne seguono

$$\frac{\alpha}{|\boldsymbol{\varphi}(t)|^2} \leq E\,, \qquad \beta|\boldsymbol{\varphi}(t)|^2 \leq E\,,$$

da cui la tesi con

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{E}}\,, \qquad C = \sqrt{\frac{E}{\beta}}\,.$$

150. Piano delle fasi

1. [18/7/2005 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r.
Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x) = kx|x|\,,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si determinino tutti i moti che rimangono limitati per $t \to \infty$.
Soluzione
Le orbite nel piano delle fasi corrispondono alle curve

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E + U(x)\big)}\,,$$

definite ove $E + U(x) \geq 0$.
Nel nostro caso occorre distinguere:

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - kx^2\big)}\,, \qquad x < 0\,,$$
$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E + kx^2\big)}\,, \qquad x \geq 0\,.$$

1) Caso $E > 0$:
$x < 0$: L'orbita qui coincide con la semiellisse

$$\frac{m}{2E}p^2 + \frac{k}{E}x^2 = 1\,, \qquad x < 0\,.$$

$x \geq 0$: L'orbita qui coincide con i due tratti di iperbole

$$\frac{m}{2E}p^2 - \frac{k}{E}x^2 = 1\,, \qquad x \geq 0\,.$$

Si noti che come è ovvio le due porzioni di orbita si raccordano su $x = 0$.

2) Caso $E=0$:
$x<0$: Le orbite non hanno componenti in questo semipiano.
$x\geq 0$: Le orbite qui sono le due semirette aperte

$$p=\sqrt{\frac{2k}{m}x}\,,\quad x>0\,;\qquad p=-\sqrt{\frac{2k}{m}x}\,,\quad x>0\,;$$

e il punto critico

$$p=0\,,\quad x=0\,.$$

3) Caso $E<0$:
$x<0$: Le orbite non hanno componenti in questo semipiano.
$x\geq 0$: L'orbita qui coincide con il ramo di iperbole

$$\frac{k}{|E|}x^2-\frac{m}{2|E|}p^2=1\,,\qquad x\geq\sqrt{\frac{|E|}{k}}\,.$$

Infine, per $t\to\infty$ tutte le orbite corrispondono a moti per cui $x(t)\to\infty$, con l'eccezione delle due orbite, nel caso $E=0$,

$$p=-\sqrt{\frac{2k}{m}x}\,,\quad x>0\,,\qquad (x,p)=(0,0)\,,$$

che corrispondono a moti nei quali $x(t)\to 0$.

2. [18/7/2005 (ex)II] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r.
Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x)=kx^3|x|\,,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si determinino tutti i moti che rimangono limitati per $t\to\infty$.

3. [7/4/2006 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r.
Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x)=k\cos x\,,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r, e k è una costante positiva.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si discuta qualitativamente l'andamento dei moti.
SOLUZIONE
Le orbite nel piano delle fasi corrispondono alle curve

$$p=\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E+k\cos x)}$$

definite ove $E+\cos x\geq 0$.

1) Caso $E > k$: La radice quadrata non si annulla mai, ed è sempre definita. Si hanno due orbite corrispondenti a due moti (uno in cui $\dot{x} > 0$, l'altro in cui $\dot{x} < 0$).
2) Caso $E = k$: La radice quadrata si annulla solo per $x = (2n+1)\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. In corrispondenza di tali valori, che sono di minimo per il potenziale, si hanno posizioni di equilibrio (instabile). Per i valori di x intermedi, risultano definite due orbite che connettono (in tmepo infinito) due di tali posizioni.
3) Caso $k > E > -k$: La radice quadrata è definita negli intervalli ove

$$\cos x \geq -\frac{E}{k} \in (-1, 1)\,.$$

In tali intervalli risulta definita un'orbita periodica.
4) Caso $E = -k$: La radice quadrata risulta definita solo nei punti $x = 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$, ove si annulla. In corrispondenza di tali valori, che sono di massimo per il potenziale, si hanno posizioni di equilibrio (stabile).

4. [13/12/2007 (ex)I] Tracciare nel piano delle fasi le orbite corrispondenti ai moti determinati da

$$m\ddot{x} = F(x)\,,$$

ove

$$F(x) = ax\sin(bx^2)\,,$$

e a, $b > 0$ sono costanti.
SOLUZIONE
Il potenziale è dato da

$$\int_0^x as\sin(bs^2)\,\mathrm{d}s + \gamma = \frac{a}{2b}\big[1 - \cos(bx^2)\big] + \gamma\,,$$

e quindi possiamo assumere

$$U(x) = -\frac{a}{2b}\cos(bx^2)\,.$$

Le orbite nel piano (x, p) delle fasi sono date da

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E + U(x)\big)} = \pm\sqrt{\frac{a}{mb}}\sqrt{E' - \cos(bx^2)}\,,$$

ridefinendo $E' = 2bE/a$.
Conviene distinguere i casi seguenti:
1) $E' < -1$: nessuna orbita.
2) $E' = -1$: le orbite degeneri

$$x = \pm\sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{b}}\,, \quad p = 0\,, \qquad n \geq 0\,,$$

corrispondenti a quiete in punti di equilibrio stabile.
3) $-1 < E' < 1$: orbite chiuse ciascuna corrispondente a un moto periodico intorno a uno dei punti di equilibrio stabile determinati nel punto 2).

4) $E' = 1$: le orbite degeneri:

$$x = \pm\sqrt{2n\frac{\pi}{b}}\,, \quad p = 0\,, \qquad n \geq 0\,, \tag{1}$$

corrispondenti a quiete in punti di equilibrio instabile, e le orbite

$$p = \pm\sqrt{\frac{a}{mb}}\sqrt{1-\cos(bx^2)}\,,$$

ciascuna definita tra due consecutivi punti della forma (1).
5) $E' > 1$: orbite definite per ogni $x \in \boldsymbol{R}$, sulle quali p non cambia segno, né si annulla.

5. [13/12/2007 (ex)II] Tracciare nel piano delle fasi le orbite corrispondenti ai moti determinati da

$$m\ddot{x} = F(x)\,,$$

ove

$$F(x) = -ax\cos(bx^2)\,,$$

e a, $b > 0$ sono costanti.

6. [1/7/2008 (ex)I] Disegnare il diagramma nel piano delle fasi corrispondente al potenziale

$$U(x) = -ax^2 + bx^5\,,$$

ove a, b sono costanti positive.

7. [1/7/2008 (ex)II] Disegnare il diagramma nel piano delle fasi corrispondente al potenziale

$$U(x) = -ax^4 + bx^7\,,$$

ove a, b sono costanti positive.

8. [12/6/2009 (ex)I] Tracciare il diagramma nel piano delle fasi per i moti

$$m\ddot{x} = U'(x)\,,$$

con

$$U(x) = kx^3e^{-ax}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui m, a, k sono costanti positive.
Soluzione
Per la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = U(x) + E\,,$$

da cui l'equazione delle orbite

$$p(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(U(x)+E)}\,.$$

Le orbite dunque sono definite, per ciascun valore dell'energia E, ove $E \geq -U(x)$. Si ha

$$U'(x) = k(3 - ax)x^2 e^{-ax} ,$$

e dunque $U(x)$ soddisfa:

- *U è crescente in $(-\infty, 3/a)$; è decrescente in $(3/a, \infty)$;*
- *$U'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ o $x = 3/a$;*
- $$U(0) = 0 , \qquad U(3/a) = 27k(ae)^{-3} = U_{\max} ;$$
- $$\lim_{x\to-\infty} U(x) = \infty , \qquad \lim_{x\to\infty} U(x) = 0 .$$

Distinguiamo dunque i casi:
A) $E > 0$. L'orbita è definita sulla semiretta (x_E, ∞), ove $x_E < 0$ è l'unica radice dell'equazione $-U(x_E) = E$.
Inoltre l'orbita interseca l'asse x in $x = x_E$, e per $x \to \infty$ si ha $p(x) \to \pm\sqrt{2E/m}$.
B) $E = 0$. A questo valore corrispondono tre orbite. Oltre alle due simmetriche

$$p(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}U(x)} , \qquad x > 0 ,$$

si ha infatti quella degenere $x = 0$, $p = 0$, corrispondente a un punto di equilibrio instabile.
C) $0 > E > -U_{\max}$. L'orbita è una curva chiusa definita nell'intervallo (x_E^1, x_E^2), ove x_E^1 e x_E^2 sono definiti da

$$\begin{aligned} -U(x_E^1) &= E , \qquad x_E^1 < \frac{3}{a} , \\ -U(x_E^2) &= E , \qquad x_E^2 > \frac{3}{a} . \end{aligned}$$

Per $E \to -U_{\max}$ l'orbita si stringe sul punto $(3/a, 0)$.
D) $E = -U_{\max}$. L'orbita è degenere, coincide con il punto $x = 3/a$, $p = 0$, e corrisponde a un punto di equilibrio stabile.
E) $E < -U_{\max}$. Non ci sono orbite in questo caso.

9. [12/6/2009 (ex)II] Tracciare il diagramma nel piano delle fasi per i moti

$$m\ddot{x} = U'(x) ,$$

con

$$U(x) = -k(x - 1)^3 e^{ax} , \qquad x \in \boldsymbol{R} .$$

Qui m, $a < 3$, k sono costanti positive.

10. [20/11/2009 (ex)I] Tracciare le orbite nel piano delle fasi relative al potenziale

$$U(x) = \frac{x}{1 + x^2} ,$$

e discutere la stabilità dei punti di equilibrio.

11. [22/2/2010 (ex)I] Tracciare nel piano delle fasi il diagramma delle orbite corrispondenti al potenziale

$$U(x) = \alpha \sin(\beta x|x|)\,,$$

ove α e β sono costanti positive, mettendo in evidenza tutti i punti di equilibrio.

12. [22/2/2010 (ex)II] Tracciare nel piano delle fasi il diagramma delle orbite corrispondenti al potenziale

$$U(x) = -\alpha \sin(\beta x|x|)\,,$$

ove α e β sono costanti positive, mettendo in evidenza tutti i punti di equilibrio.

220. Moti centrali e simili

1. [7/7/2006 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|^4}\,,$$

con $k > 0$ costante. Qui O è l'origine del sistema di riferimento fisso. Le condizioni iniziali del moto sono

$$P(0) = (r_0, 0, 0)\,, \qquad \boldsymbol{v}_P(0) = (0, v_0, 0)\,,$$

con r_0, $v_0 > 0$ tali che

$$k = r_0^2 v_0^2 m\,.$$

Determinare la traiettoria di P.
[Suggerimento: usare la formula di Binet.]
Soluzione
Il moto è centrale. Quindi è piano e ha luogo nel piano fisso (x_1, x_2), ove scegliamo coordinate polari r, φ con centro in O e tali che $\varphi = 0$ nella posizione iniziale di P. Ricordando la scomposizione polare della velocità si ha che, all'istante iniziale,

$$r(0) = r_0\,, \quad \dot r(0) = 0\,, \qquad \varphi(0) = 0\,, \quad \dot\varphi(0) = \frac{v_0}{r_0}\,.$$

Perciò un integrale primo del moto è dato da

$$r(t)^2 \dot\varphi(t) = r(0)^2 \dot\varphi(0) = r_0 v_0 =: c\,.$$

Per determinare la traiettoria possiamo usare la formula di Binet:

$$-\frac{c^2}{r^2}\Big[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\Big(\frac{1}{r}\Big)+\frac{1}{r}\Big]=a_r=-\frac{k}{mr^3}\,,$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\Big(\frac{1}{r}\Big)+\frac{1}{r}=\frac{k}{c^2mr}=\frac{1}{r}\,,$$

per le ipotesi. Dunque

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\Big(\frac{1}{r}\Big)=0\,,$$

e

$$\frac{1}{r(\varphi)}=k_1\varphi+k_2\,,$$

ossia

$$r(\varphi)=\frac{1}{k_1\varphi+k_2}\,,$$

con $k_2=1/r_0$ *e* k_1 *determinato da*

$$-\frac{k_1}{(k_1\varphi+k_2)^2}=r'(\varphi)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(\varphi(t))\frac{1}{\dot\varphi(t)}\,.$$

Per $t=0$ *si ha*

$$-\frac{k_1}{k_2^2}=0\,,$$

da cui $k_1=0$*, e il moto è circolare.*
R. *Circonferenza* $x_1^2+x_2^2=r_0^2$ *su* $x_3=0$*, percorsa con moto circolare uniforme.*

2. [7/7/2006 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}=-k\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|^4}\,,$$

con $k>0$ costante. Qui O è l'origine del sistema di riferimento fisso. Le condizioni iniziali del moto sono

$$P(0)=(0,r_0,0)\,,\qquad \boldsymbol{v}_P(0)=(-v_0,0,0)\,,$$

con r_0, $v_0>0$ tali che

$$k=r_0^2v_0^2m\,.$$

Determinare la traiettoria di P.
[Suggerimento: usare la formula di Binet.]
R. *Circonferenza* $x_1^2+x_2^2=r_0^2$ *su* $x_3=0$*, percorsa con moto circolare uniforme.*

3. [17/9/2007 (ex)I] Un punto P di massa m è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F}=k\left|\overrightarrow{OP}\right|^{\frac{1}{2}}\overrightarrow{OP}\,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e $k > 0$ è costante.
All'istante iniziale P occupa la posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = L\boldsymbol{e}_1 \,,$$

con velocità iniziale

$$\boldsymbol{v}(0) = \alpha \boldsymbol{e}_2 + \beta \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Si dimostri che il moto di P avviene su un piano fisso Π, si trovi l'equazione di Π, e si calcoli la velocità areolare di P.

Soluzione

Il moto è centrale, quindi è noto che avviene nel piano che passa per la posizione iniziale, e normale a

$$\overrightarrow{OP}(0) \wedge \boldsymbol{v}(0) = -L\beta \boldsymbol{e}_2 + L\alpha \boldsymbol{e}_3 \,.$$

L'equazione di Π è dunque

$$(x_1 - L)0 - x_2\beta + x_3\alpha = 0 \,.$$

La velocità areolare è per definizione

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{OP}(0) \wedge \boldsymbol{v}(0) \right| = \frac{L}{2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \,.$$

R.

$$\Pi : \quad \beta x_2 - \alpha x_3 = 0 \,,$$
$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \,.$$

4. [17/9/2007 (ex)II] Un punto P di massa m è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = -k \left| \overrightarrow{OP} \right|^4 \overrightarrow{OP} \,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e $k > 0$ è costante.
All'istante iniziale P occupa la posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = L\boldsymbol{e}_2 \,,$$

ove $L > 0$, con velocità iniziale

$$\boldsymbol{v}(0) = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Si dimostri che il moto di P avviene su un piano fisso Π, si trovi l'equazione di Π, e si calcoli la velocità areolare di P.
R.

$$\Pi : \quad \beta x_1 - \alpha x_3 = 0 \,,$$
$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \,.$$

5. [18/7/2008 (ex)I] Un punto P di massa m si muove sul piano $x_3 = 0$, soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha r^{-3} \cos^2 \varphi \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} ,$$

ove O è l'origine e r, φ sono le coordinate polari nel piano.
All'istante iniziale

$$\overrightarrow{OP}(0) = L\boldsymbol{e}_1 , \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_2 .$$

Qui α, L e v_0 sono costanti positive.

1. Si calcoli la velocità areolare di P, dimostrando che rimane costante nel moto.
2. Si dimostri che lungo il moto r è crescente.

Soluzione

Scomponendo l'equazione di moto nelle direzioni radiale e trasversa si ha

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \alpha r^{-3} \cos^2 \varphi , \tag{1}$$
$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 . \tag{2}$$

La velocità areolare, come è noto, è definita da

$$V(t) = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} .$$

Quindi

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{r} r \dot{\varphi} + \frac{1}{2} r^2 \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} r (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0 ,$$

per la (2)*. All'istante iniziale* $r(0) = L$ *e*

$$\boldsymbol{v}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_2 = \dot{r}\boldsymbol{u} + r\dot{\varphi}\boldsymbol{\tau} = \dot{r}\boldsymbol{e}_1 + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_2 ,$$

per cui

$$\dot{r}(0) = 0 , \qquad \dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{L} .$$

Perciò

$$V(t) = V(0) = \frac{1}{2} L^2 \frac{v_0}{L} = \frac{1}{2} L v_0 .$$

Da (1)*, si ha*

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 + \alpha m^{-1} r^{-3} \cos^2 \varphi > 0 .$$

Dato che $\dot{r}(0) = 0$*, ne segue che* $\dot{r}(t) > 0$ *per ogni* $t > 0$*.*

R.

$$V(t) = V(0) = \frac{1}{2} L v_0 .$$

6. [18/7/2008 (ex)II] Un punto P di massa m si muove sul piano $x_3 = 0$, soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha r^3 \sin^2 \varphi \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}\,,$$

ove O è l'origine e r, φ sono le coordinate polari nel piano.
All'istante iniziale

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_1\,.$$

Qui α, R e v_0 sono costanti positive.

1. Si calcoli la velocità areolare di P, dimostrando che rimane costante nel moto.
2. Si dimostri che lungo il moto r è crescente.

R.

$$V(t) = V(0) = -\frac{1}{2}Rv_0\,.$$

7. [9/4/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = k\frac{\overrightarrow{OP}}{|OP|}\,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
All'istante iniziale P occupa la posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_2 + R\boldsymbol{e}_3\,,$$

con velocità iniziale

$$\boldsymbol{v}(0) = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui α, β, k, R sono costanti positive.
Si dimostri che il moto avviene su un piano fisso e si determini l'equazione di tale piano.
Soluzione
Il moto avviene in un campo di forze centrale, e dunque si sa che il moto è piano per risultati generali. Anzi, il piano è quello che passa per la posizione iniziale e che è perpendicolare al vettore

$$\overrightarrow{OP} \wedge \boldsymbol{v}(0) = -\beta R\boldsymbol{e}_1 + \alpha R\boldsymbol{e}_2 - \alpha R\boldsymbol{e}_3\,.$$

R.

$$-\beta x_1 + \alpha(x_2 - R) - \alpha(x_3 - R) = 0\,.$$

330. Calcolo di quantità meccaniche in moti relativi

1. [18/7/2005 (ex)I] Sia $\mathit{\Pi}(t)$ il piano mobile di equazione

$$-\sin(\alpha t)x_1 + \cos(\alpha t)x_2 = 0\,,$$

nel riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3).
Un disco rigido omogeneo di massa m e raggio R è vincolato a giacere su $\mathit{\Pi}(t)$, e ad avere il centro C coincidente con un punto P solidale con $\mathit{\Pi}(t)$, a distanza $d > 0$ dall'asse x_3.
Si esprima in coordinate lagrangiane l'energia cinetica del disco nel sistema di riferimento fisso.
Soluzione
Sia $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ una base solidale con il disco, con $\boldsymbol{u}_1$ ortogonale a $\mathit{\Pi}(t)$.
Se φ è la coordinata lagrangiana, scelta per esempio come l'angolo tra $\boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{u}_3$, si ha

$$\boldsymbol{e}_3 = \cos\varphi \boldsymbol{u}_3 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_2\,.$$

Dunque si ha dal teorema di König

$$T = \frac{1}{2}m\alpha^2 d^2 + \frac{1}{2}I(2\dot\varphi^2 + \alpha^2)\,,$$

se I è il momento d'inerzia del disco rispetto a un suo diametro.
Infatti la velocità $\boldsymbol{v}_C$ del centro di massa C soddisfa

$$|\boldsymbol{v}_C|^2 = \alpha^2 d^2\,,$$

poiché C si muove di moto rotatorio uniforme.
La velocità angolare del disco rispetto a un sistema di riferimento che trasla con il suo centro di massa, mantenendo gli assi paralleli a quelli fissi, è poi

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi \boldsymbol{u}_1 + \alpha\sin\varphi \boldsymbol{u}_2 + \alpha\cos\varphi \boldsymbol{u}_3\,.$$

Un modo alternativo di calcolare T è attraverso l'integrale

$$T = \iint_{\text{disco}} \frac{1}{2}\frac{m}{\text{area(disco)}}\,|\boldsymbol{v}(P)|^2 \,\mathrm{d}P\,,$$

ove $\boldsymbol{v}(P)$ è la velocità nel sistema di riferimento fisso del generico punto P del disco. Per svolgere il calcolo, parametrizziamo il disco così:

$$\begin{aligned} P(r,\theta) = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} &= \big(d\cos(\alpha t), d\sin(\alpha t), x_{3C}\big) \\ &\quad + r\big(\cos(\theta+\varphi)\cos(\alpha t), \cos(\theta+\varphi)\sin(\alpha t), \sin(\theta+\varphi)\big)\,, \end{aligned}$$

ove x_{3C} è una costante irrilevante per il calcolo di T, e $0 \le r \le R$, $0 \le \theta \le 2\pi$. L'angolo θ ha il significato geometrico di anomalia polare (di polo C) misurata su $\mathit{\Pi}(t)$ a partire dalla semiretta di riferimento di φ. Dunque

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(P(r,\theta)) &= \alpha d\big(-\sin(\alpha t), \cos(\alpha t), 0\big) \\ &\quad - r\dot\varphi\big(\sin(\theta+\varphi)\cos(\alpha t), \sin(\theta+\varphi)\sin(\alpha t), -\cos(\theta+\varphi)\big) \\ &\quad + r\alpha\cos(\theta+\varphi)\big(-\sin(\alpha t), \cos(\alpha t), 0\big)\,. \end{aligned}$$

Si riconosce subito che $\boldsymbol{v}(P)$ è combinazione lineare di due versori ortonormali, e che

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{v}(P(r,\theta))|^2 &= \big(\alpha d + r\alpha\cos(\theta+\varphi)\big)^2 + \big(r\dot\varphi\big)^2 \\
&= \alpha^2 d^2 + 2r\alpha^2 d\cos(\theta+\varphi) + r^2\alpha^2\cos^2(\theta+\varphi) + r^2\dot\varphi^2 \,.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\frac{2\pi R^2}{m} T &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \mathrm{d}r\, r\alpha^2 d^2 + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \mathrm{d}r\, r 2r\alpha^2 d\cos(\theta+\varphi) \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \mathrm{d}r\, r r^2 \big(\alpha^2\cos^2(\theta+\varphi) + \dot\varphi^2\big) \\
&= \pi R^2\alpha^2 d^2 + \frac{\pi}{2} R^4\dot\varphi^2 + \alpha^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \,\Big(d\frac{2}{3}R^3\cos(\theta+\varphi) + \frac{1}{4}R^4\cos^2(\theta+\varphi)\Big) \\
&= \pi R^2\alpha^2 d^2 + \frac{\pi}{2} R^4\dot\varphi^2 + \alpha^2\frac{\pi}{4}R^4 \,,
\end{aligned}
$$

che coincide con l'espressione già trovata.
R.

$$
T = \frac{1}{2} m\alpha^2 d^2 + \frac{1}{2} I(2\dot\varphi^2 + \alpha^2) \,,
$$

2. [18/7/2005 (ex)II] Sia $\mathit{\Pi}(t)$ il piano mobile di equazione

$$
-\sin(\alpha t)x_2 + \cos(\alpha t)x_3 = 0 \,,
$$

nel riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3).
Una lamina quadrata rigida omogenea di massa m e lato $2L$ è vincolata a giacere su $\mathit{\Pi}(t)$, e ad avere il centro C coincidente con un punto P solidale con $\mathit{\Pi}(t)$, a distanza $d > 0$ dall'asse x_1.
Si esprima in coordinate lagrangiane l'energia cinetica della lamina nel sistema di riferimento fisso.
R.

$$
T = \frac{1}{2} m\alpha^2 d^2 + \frac{1}{2} I(2\dot\varphi^2 + \alpha^2) \,.
$$

3. [13/12/2006 (ex)I] Si trovi in termini delle opportune coordinate lagrangiane l'energia cinetica di un'asta rigida AB, omogenea, di lunghezza L, massa m, e sottoposta ai vincoli:

$$
\begin{aligned}
x_A^2 + y_A^2 &= z_A^2 \,, \\
x_B^2 + y_B^2 &= z_B^2 \,, \\
z_B &= z_A + \frac{L}{\sqrt{2}} \,.
\end{aligned}
$$

(Ossia, AB giace tutta sul cono $x^2 + y^2 = z^2$. Si assuma $z_A > 0$.)

SOLUZIONE
Scegliamo $z = z_A$ e l'anomalia polare (cilindrica) φ di A come coordinate lagrangiane.
Allora

$$P(s) = \left(\left(z + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\cos\varphi, \left(z + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\sin\varphi, z + \frac{s}{\sqrt{2}}\right), \qquad 0 \le s \le L\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{v}(s) = \left(\dot z\cos\varphi - \left(z + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\dot\varphi\sin\varphi, \dot z\sin\varphi + \left(z + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\dot\varphi\cos\varphi, \dot z\right),$$

e

$$|\boldsymbol{v}(s)|^2 = 2\dot z^2 + \left(z + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2\dot\varphi^2\,.$$

Perciò

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{m}{L}\left(2\dot z^2 + \left(z + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2\dot\varphi^2\right)\mathrm{d}s\,.$$

R.

$$T = \frac{m}{2L}\left(2L\dot z^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(z + \frac{L}{\sqrt{2}}\right)^3\dot\varphi^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}z^3\dot\varphi^2\right).$$

4. [26/3/2007 (ex)I] Un cilindro circolare retto omogeneo di massa M, raggio R e altezza H è sottoposto ai seguenti vincoli:

- il suo centro O appartiene a una circonferenza fissa γ di raggio L, giacente su un piano fisso Π;
- il suo asse si mantiene ortogonale a Π.

Si trovi in termini delle opportune coordinate lagrangiane l'energia cinetica del cilindro.
SOLUZIONE
Sia $(\Omega, \boldsymbol{e}_i)$ un sistema di riferimento solidale con Π, ove Ω è il centro di γ, e $\boldsymbol{e}_3$ è ortogonale a Π.
Sia poi $(O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con il cilindro, tale che $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t.
Scegliamo come coordinate lagrangiane due angoli φ e θ tali che

$$\overrightarrow{\Omega O} = L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,, \tag{1}$$
$$\boldsymbol{u}_1 = \cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2\,. \tag{2}$$

Usiamo il teorema di König per trovare l'energia cinetica come

$$T = \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_O|^2 + T_{\mathcal{S}'}\,,$$

ove $\mathcal{S}' = (O, \boldsymbol{e}_i)$. Da (1) segue

$$\boldsymbol{v}_O = L\dot\varphi(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2)\,, \qquad |\boldsymbol{v}_O|^2 = L^2\dot\varphi^2\,.$$

Inoltre

$$T_{\mathcal{S}'} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}I_{33}\dot{\theta}^2\,,$$

ove $\boldsymbol{\sigma}$ è il tensore d'inerzia in O, e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare di $(\boldsymbol{u}_i)$ rispetto a $(\boldsymbol{e}_i)$, cosicché

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\theta}(t)\boldsymbol{e}_3\,.$$

R.

$$T = \frac{1}{2}ML^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\dot{\theta}^2\,.$$

5. [19/7/2007 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere l'estremo A sulla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\varphi\cos\varphi\,,\\ x_2 &= R\varphi\sin\varphi\,,\\ x_3 &= h\varphi\,, \end{aligned}$$

ove $0 < \varphi < \infty$. Qui R e h sono costanti positive.
Inoltre $\overrightarrow{AB}/2L$ si mantiene coincidente con

$$(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,.$$

Si calcoli l'energia cinetica di AB in funzione di opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione
Scegliamo il parametro φ corrispondente alla posizione di A come coordinata lagrangiana.
Una parametrizzazione di AB è

$$\overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}(s) = (R\varphi\cos\varphi, R\varphi\sin\varphi, h\varphi) + s(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,,$$

per $0 \le s \le 2L$. Perciò

$$\boldsymbol{v}(s) = [R\varphi\dot{\varphi} + s\dot{\varphi}](-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) + \dot{\varphi}(R\cos\varphi, R\sin\varphi, h)\,.$$

Dunque

$$|\boldsymbol{v}(s)|^2 = \dot{\varphi}^2[(R\varphi + s)^2 + R^2 + h^2]\,,$$

e

$$T^{\mathrm{L}}(\varphi,\dot{\varphi}) = \int_0^{2L}\frac{m}{2L}\dot{\varphi}^2[(R\varphi+s)^2 + R^2 + h^2]\,\mathrm{d}s = \frac{m}{2L}\dot{\varphi}^2\Big[\frac{1}{3}(R\varphi + 2L)^3 + (R^2+h^2)2L - \frac{1}{3}R^3\varphi^3\Big]\,.$$

R.

$$T^{\mathrm{L}}(\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{m}{2L}\dot{\varphi}^2\Big[\frac{1}{3}(R\varphi + 2L)^3 + (R^2+h^2)2L - \frac{1}{3}R^3\varphi^3\Big]\,.$$

6. [19/7/2007 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere il centro G sulla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\varphi\cos\varphi\,, \\ x_2 &= R\varphi\sin\varphi\,, \\ x_3 &= h\varphi\,, \end{aligned}$$

ove $0 < \varphi < \infty$. Qui R e h sono costanti positive.
Inoltre $\overrightarrow{AB}/2L$ si mantiene coincidente con

$$(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\,.$$

Si calcoli l'energia cinetica di AB in funzione di opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$T^{\mathrm{L}}(\varphi,\dot\varphi) = \frac{m}{2L}\dot\varphi^2\Big[\frac{1}{3}(R+L)^3 - \frac{1}{3}(R-L)^3 + 2L(R^2\varphi^2+h^2)\Big]\,.$$

7. [17/9/2007 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata:

- ad avere il centro M sulla circonferenza di raggio $R > 0$

$$\gamma \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \\ \qquad x_3 = 0\,; \end{cases}$$

- a giacere sul piano passante per l'asse x_3 e per il punto M (che è il piano ortogonale a γ in M).

Scrivere l'energia cinetica di AB in opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione
A) Scegliamo come coordinate lagrangiane

1. *l'anomalia polare φ di M nel piano $x_3 = 0$, con $\varphi \in (-\pi, \pi)$;*
2. *l'angolo θ formato da $\overrightarrow{AB}$ con il piano $x_3 = 0$, con $\theta \in (-\pi, \pi)$ (per la precisione θ è tale che $\overrightarrow{AB} \cdot \boldsymbol{e}_3 = 2L\sin\theta$).*

Quindi

$$\overrightarrow{OM} = R(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,,$$

e per un generico punto P di AB

$$\overrightarrow{MP} = s(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)\,, \qquad -L \le s \le L\,.$$

Dunque

$$\overrightarrow{OP} = \big(\cos\varphi(R + s\cos\theta), \sin\varphi(R + s\cos\theta), s\sin\theta\big)\,,$$

e

$$\boldsymbol{v}_P = \dot\varphi(R + s\cos\theta)(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) + s\dot\theta(-\cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)\,.$$

Quindi

$$|\boldsymbol{v}_P|^2 = \dot\varphi^2(R + s\cos\theta)^2 + s^2\dot\theta^2\,,$$

cosicché

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \frac{m}{2L}|\boldsymbol{v}_P|^2\,\mathrm{d}s = \frac{m}{2}\dot\varphi^2\Big(R^2 + \frac{L^2}{3}\cos^2\theta\Big) + \frac{m}{6}L^2\dot\theta^2\,.$$

B) In alternativa, l'energia cinetica si può calcolare con il teorema di König

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_M|^2 + T_{\mathcal{S}}\,,$$

ove $T_{\mathcal{S}}$ è l'energia cinetica di AB nel sistema di riferimento $\mathcal{S} = (M, \boldsymbol{e}_i)$. Quindi

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \frac{m}{2L}|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}P}|^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \frac{m}{2L}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{MP}(s)\right|^2\,\mathrm{d}s = \frac{m}{6}L^2(\dot\varphi^2\cos^2\theta + \dot\theta^2)\,.$$

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}\dot\varphi^2\Big(R^2 + \frac{L^2}{3}\cos^2\theta\Big) + \frac{m}{6}L^2\dot\theta^2\,.$$

8. [17/9/2007 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata:

- ad avere l'estremo A sulla circonferenza di raggio $R > 0$

$$\gamma\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \\ x_3 = 0\,; \end{cases}$$

- a giacere sul piano passante per l'asse x_3 e per il punto A (che è il piano ortogonale a γ in A).

Scrivere l'energia cinetica di AB in opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$T^{\mathrm{L}} = m\dot\varphi^2\Big(\frac{1}{2}R^2 + \frac{2L^2}{3}\cos^2\theta + RL\cos\theta\Big) + \frac{2m}{3}L^2\dot\theta^2\,.$$

9. [13/12/2007 (ex)I] Un cilindro C di massa M, raggio R e altezza h in un sistema di riferimento solidale è descritto da

$$C = \{(x, y, z) \mid (x - R)^2 + y^2 \le R^2\,, 0 \le z \le h\}\,.$$

Il cilindro è vincolato a mantenere i due punti $Q_1 = (0, 0, 0)$ e $Q_2 = (0, 0, h)$ fissi su un asse fisso r (e quindi a ruotare intorno a r).

Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sulla circonferenza

$$\gamma = \{(x, y, z) \mid (x-R)^2 + y^2 = R^2 \,, z = 0\} \,,$$

bordo della base del cilindro.
Scrivere l'energia cinetica del sistema.
SOLUZIONE
A) Scegliamo il sistema di riferimento fisso in modo che $\boldsymbol{e}_3$ giaccia su r,

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{h}\overrightarrow{Q_1 Q_2} \,.$$

Inoltre sia $O = Q_1$, e denotiamo con A il centro della base $z = 0$ del cilindro. Introduciamo anche l'angolo φ formato da $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{u}_1$. Allora l'energia cinetica del cilindro sarà

$$T_C = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_O(\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3)\cdot(\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{2}I_{33}\dot{\varphi}^2 \,,$$

ove I_{33} è il momento d'inerzia del cilindro rispetto a r.
B) Nel sistema di riferimento $(O, \boldsymbol{u}_i)$ solidale, si ha, per P, definito θ come l'angolo tra $\boldsymbol{u}_1$ e $\overrightarrow{AP}$,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = (R + R\cos\theta)\boldsymbol{u}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{u}_2 \,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = -R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 \,.$$

Inoltre la velocità $\boldsymbol{v}_P$ nel sistema fisso è data da

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_P &= \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega}\wedge\overrightarrow{AP} + \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\omega}\wedge(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}) + \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \\ &= \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 \wedge \big[(R + R\cos\theta)\boldsymbol{u}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{u}_2\big] - R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 \\ &= -R(\dot{\varphi} + \dot{\theta})\sin\theta\boldsymbol{u}_1 + \big[R(\dot{\varphi} + \dot{\theta})\cos\theta + R\dot{\varphi}\big]\boldsymbol{u}_2 \,.\end{aligned}$$

Infine

$$T_P = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + mR^2\dot{\varphi}(\dot{\varphi} + \dot{\theta})\cos\theta \,.$$

R.

$$T = \frac{1}{2}I_{33}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + mR^2\dot{\varphi}(\dot{\varphi} + \dot{\theta})\cos\theta \,.$$

10. [13/12/2007 (ex)II] Un cilindro C di massa M, raggio R e altezza h in un sistema di riferimento solidale è descritto da

$$C = \{(x, y, z) \mid (x-R)^2 + y^2 \le R^2 \,, 0 \le z \le h\} \,.$$

Il cilindro è vincolato a mantenere i due punti $Q_1 = (0, 0, 0)$ e $Q_2 = (0, 0, h)$ fissi su un asse fisso r (e quindi a ruotare intorno a r).

Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sulla circonferenza

$$\gamma = \{(x, y, z) \mid (x - R)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}\,, z = h\}$$

(circonferenza che quindi è solidale con il cilindro).
Scrivere l'energia cinetica del sistema.
R.

$$T = \frac{1}{2} I_{33} \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m \frac{R^2}{4} (\dot\varphi + \dot\theta)^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot\varphi (\dot\varphi + \dot\theta) \cos\theta\,.$$

11. [1/4/2008 (ex)I] Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata:

- ad avere il centro C appartenente alla sfera di centro l'origine O e di raggio $R > 0$;
- a essere ortogonale alla sfera stessa.

Calcolarne l'energia cinetica in funzione di opportune coordinate lagrangiane.

Soluzione

Il sistema ha 2 gradi di libertà. Scegliamo come coordinate lagrangiane le coordinate polari del centro C dell'asta:

$$\begin{aligned} x_{1C} &= R \cos\varphi \sin\theta\,, \\ x_{2C} &= R \sin\varphi \sin\theta\,, \\ x_{3C} &= R \cos\theta\,, \end{aligned}$$

con

$$-\pi < \varphi < \pi\,, \qquad 0 < \theta < \pi\,.$$

La parametrizzazione dell'asta sarà dunque

$$\overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OC} + s \frac{\overrightarrow{OC}}{R} = (R + s)(\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)\,,$$

per cui

$$|\boldsymbol{v}(s)|^2 = (R + s)^2 (\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta)\,.$$

Quindi

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \frac{m}{2L} (R + s)^2 (\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta) \,\mathrm{d}s = \frac{m}{6} (3R^2 + L^2)(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta)\,.$$

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{6} (3R^2 + L^2)(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta)\,.$$

12. [18/7/2008 (ex)I] Una circonferenza γ di centro O, raggio R e massa M è vincolata a ruotare intorno a un proprio diametro AB, che giace su un asse fisso. Anche i punti A e B sono solidali con γ e fissi.
Un'asta CD di lunghezza L e massa m è vincolata ad avere l'estremo C sulla circonferenza, e a mantenersi parallela ad AB (il che implica che CD giace sul piano di γ).
Scrivere l'energia cinetica del sistema in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
Scegliamo come prima coordinata lagrangiana l'angolo φ formato dal piano della circonferenza con la direzione fissa $\boldsymbol{e}_1$, avendo scelto il sistema di riferimento fisso in modo che l'origine sia il centro della circonferenza, e $\boldsymbol{e}_3$ sia parallelo ad $\overrightarrow{AB}$.
Allora

$$T^{\mathrm{L}}_{\gamma} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 ,$$

ove I è il momento di γ rispetto all'asse per AB.
Scegliamo poi come seconda coordinata lagrangiana l'angolo θ formato da $\overrightarrow{OC}$ e il diametro ortogonale ad $\overrightarrow{AB}$. Allora, nel sistema fisso, ogni P sull'asta è dato da

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = R\cos\theta(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2) + (R\sin\theta + s)\boldsymbol{e}_3 ,$$

per $0 \le s \le L$.
Dunque

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_P &= R(-\dot{\theta}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 \\ &\quad + R(-\dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2 \\ &\quad + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{e}_3 . \end{aligned}$$

Perciò

$$|\boldsymbol{v}_P|^2 = R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta) ,$$

e quindi

$$T^{\mathrm{L}}_{\mathrm{asta}} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{m}{L} R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2} m R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta) .$$

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta) .$$

13. [18/7/2008 (ex)II] Una circonferenza γ di centro O, raggio R e massa M è vincolata a ruotare intorno a un proprio diametro AB, che giace su un asse fisso. Anche i punti A e B sono solidali con γ e fissi.
Un'asta CD di lunghezza L e massa m è vincolata ad avere l'estremo C sulla circonferenza, a giacere sul piano di γ, e a mantenersi ortogonale ad AB.

Scrivere l'energia cinetica del sistema in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m R (R \dot{\theta}^2 + R \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + L \dot{\varphi}^2 \cos \theta) + \frac{1}{6} m L^2 \dot{\varphi}^2 \,.$$

14. [12/2/2009 (ex)I] Un disco di raggio L e massa m è così vincolato:

- il suo centro C appartiene alla curva

$$\boldsymbol{\psi}(s) = \big(R \cos \lambda s \,, R \sin \lambda s \,, h \lambda s\big) \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,.$$

  Qui s è la lunghezza d'arco, $\lambda = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, e R, $h > 0$ sono costanti.

- la normale al disco coincide con la binormale $\boldsymbol{B}$ alla curva.

Si calcoli il momento delle quantità di moto del disco in funzione di due opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione
Si scelgano come coordinate lagrangiane

$$z \in \boldsymbol{R} \,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi) \,,$$

tali che, indicando con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ *la terna intrinseca della curva* $\boldsymbol{\psi}$*,*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos \varphi \, \boldsymbol{T} + \sin \varphi \, \boldsymbol{N} \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= - \sin \varphi \, \boldsymbol{T} + \cos \varphi \, \boldsymbol{N} \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{B} \,, \end{aligned}$$

ove $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ *è una terna solidale con il disco. Il momento delle quantità di moto del disco è*

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega} \,,$$

ove $\boldsymbol{\sigma}$ *è calcolata in* C *e* $\boldsymbol{\omega}$ *è la velocità angolare del disco rispetto alla terna fissa. Per calcolare* $\boldsymbol{\omega}$ *usiamo la formula*

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \,,$$

ove $\mathcal{P}$ *è la terna fissa e* $\mathcal{N} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$*. Si sa che*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = -\tau \dot{z} \boldsymbol{T}(z) + k \dot{z} \boldsymbol{B}(z) = \lambda^2 \dot{z} [h \boldsymbol{T}(z) + R \boldsymbol{B}(z)] \,.$$

Infatti la seconda uguaglianza segue dai calcoli:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(s) &= \lambda\big(- R \sin \lambda s, R \cos \lambda s, h\big) \,, \\ \boldsymbol{N}(s) &= -\big(\cos \lambda s, \sin \lambda s, 0\big) \,, \\ \boldsymbol{B}(s) &= \lambda\big(h \sin \lambda s, -h \cos \lambda s, R\big) \,, \end{aligned}$$

da cui

$$k(s) = \lambda^2 s \,, \qquad \tau(s) = \frac{\mathrm{d} \boldsymbol{B}}{\mathrm{d} s} \cdot \boldsymbol{N} = -\lambda^2 h \,.$$

Poi si ha $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{B}$. *Dunque*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \lambda^2 \dot{z} h \boldsymbol{T}(z) + (\lambda^2 \dot{z} R + \dot{\varphi})\boldsymbol{B}(z) \\ &= \lambda^2 \dot{z} h \cos\varphi \boldsymbol{u}_1 - \lambda^2 \dot{z} h \sin\varphi \boldsymbol{u}_2 + (\lambda^2 \dot{z} R + \dot{\varphi})\boldsymbol{u}_3 \,.\end{aligned}$$

La matrice di $\boldsymbol{\sigma}$ *in* $\mathcal{M}$ *è, per motivi di simmetria,*

$$\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{diag}(I_{11}, I_{11}, 2I_{11}) \,.$$

R.

$$\boldsymbol{J} = I_{11}\lambda^2 \dot{z} h \cos\varphi \boldsymbol{u}_1 - I_{11}\lambda^2 \dot{z} h \sin\varphi \boldsymbol{u}_2 + 2I_{11}(\lambda^2 \dot{z} R + \dot{\varphi})\boldsymbol{u}_3 \,.$$

15. [12/2/2009 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- ad avere l'estremo A nell'origine O;
- ad avere l'estremo B sulla curva

  $$\boldsymbol{\psi}(s) = \big(\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)\big) \,, \qquad s \in (a, b) \,,$$

  ove s è l'ascissa curvilinea.

Determinare l'energia cinetica dell'asta in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana.

Soluzione

Parametrizziamo l'asta mediante

$$\overrightarrow{OP}(z) = \frac{z}{2L}\boldsymbol{\psi}(s) \,, \qquad 0 \le z \le 2L \,,$$

cosicché

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{z}{2L}\dot{s}\boldsymbol{\psi}'(s) \,,$$

e

$$|\boldsymbol{v}_P|^2 = \frac{z^2 \dot{s}^2}{4L^2} \,.$$

Dunque

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2L} \frac{m}{2L}\frac{z^2\dot{s}^2}{4L^2}\,\mathrm{d}z = \frac{m}{16L^3}\frac{8L^3}{3}\dot{s}^2 = \frac{m}{6}\dot{s}^2 \,.$$

R.

$$T = \frac{m}{6}\dot{s}^2 \,.$$

16. [12/2/2009 (ex)II] Un disco di raggio L e massa m è così vincolato:

- il suo centro C appartiene alla curva

  $$\boldsymbol{\psi}(s) = \big(R\sin\lambda s \,, R\cos\lambda s \,, h\lambda s\big) \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,.$$

  Qui s è la lunghezza d'arco, $\lambda = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, e R, $h > 0$ sono costanti.

- la normale al disco coincide con la binormale $\boldsymbol{B}$ alla curva.

Si calcoli il momento delle quantità di moto del disco in funzione di due opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$\boldsymbol{J} = I_{11}\lambda^2 \dot{z}h \cos\varphi \boldsymbol{u}_1 - I_{11}\lambda^2 \dot{z}h \sin\varphi \boldsymbol{u}_2 + 2I_{11}(\lambda^2 \dot{z}R + \dot{\varphi})\boldsymbol{u}_3 \,.$$

17. [12/2/2009 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- ad avere l'estremo A nell'origine O;
- ad avere il centro C sulla curva
$$\boldsymbol{\psi}(s) = \big(\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)\big) \,, \qquad s \in (a, b) \,,$$
ove s è l'ascissa curvilinea.

Determinare l'energia cinetica dell'asta in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana.
R.

$$T = \frac{2}{3} m\dot{s}^2 \,.$$

18. [12/6/2009 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza L e massa m soddisfa i vincoli

$$x_{1A}^2 + x_{2A}^2 - R^2 = 0 \,;$$
$$x_{3A} - x_{3B} = 0 \,;$$
$$x_{1A}x_{2B} - x_{2A}x_{1B} = 0 \,.$$

Qui m, L, $R > 0$ sono costanti.
Determinare l'energia cinetica dell'asta in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione
Si tratta di un'asta con l'estremo A su una superficie cilindrica (primo vincolo), che si mantiene ortogonale all'asse del cilindro (secondo vincolo), e con direzione radiale (terzo vincolo).
I vincoli non specificano se $\overrightarrow{AB}$ abbia il verso di $(x_{1A}, x_{2A}, 0)$ o il verso opposto; qui supponiamo pertanto che

$$\overrightarrow{AB} = 2L(x_{1A}\boldsymbol{e}_1 + x_{2A}\boldsymbol{e}_2) \,.$$

Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$z = x_{3A} \in \boldsymbol{R} \,,$$
$$\varphi \in (-\pi, \pi) \quad \textit{tale che} \quad x_{1A} = R\cos\varphi \,, \quad x_{2A} = R\sin\varphi \,.$$

Dunque l'asta è parametrizzata da

$$\overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}(s) = \\ R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 + s\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + s\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,, \qquad 0 \le s \le L \,.$$

Perciò

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}_P(z,\varphi;s) = -\dot\varphi(R+s)\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \dot\varphi(R+s)\cos\varphi \boldsymbol{e}_2 + \dot z \boldsymbol{e}_3 \,,$$

e

$$|\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}_P|^2 = \dot\varphi^2(R+s)^2 + \dot z^2 \,.$$

Dunque

$$T^{\mathrm{L}}(z,\varphi,\dot z,\dot\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{m}{L}[\dot\varphi^2(R+s)^2 + \dot z^2]\,\mathrm{d}s \,.$$

R.

$$T^{\mathrm{L}}(z,\varphi,\dot z,\dot\varphi) = \frac{m}{6}\dot\varphi^2(3R^2+3RL+L^2) + \frac{m}{2}\dot z^2 \,.$$

19. [12/6/2009 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza L e massa m soddisfa i vincoli

$$x_{1A}^2 + x_{2A}^2 - R^2 = 0\,;$$
$$x_{3A} - x_{3B} = 0\,;$$
$$x_{1A}x_{1B} + x_{2A}x_{2B} = 0\,.$$

Qui m, L, $R > 0$ sono costanti.
Determinare l'energia cinetica dell'asta in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

Soluzione

Si tratta di un'asta con l'estremo A su una superficie cilindrica (primo vincolo); l'asta si mantiene ortogonale all'asse del cilindro (secondo vincolo); sul piano ortogonale all'asse, che contiene l'asta, l'estremo B è su una retta ortogonale al raggio che unisce l'asse del cilindro ad A (terzo vincolo).
Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$z = x_{3A} \in \boldsymbol{R}\,,$$
$$\varphi \in (-\pi,\pi) \quad \text{tale che} \quad x_{1A} = R\cos\varphi\,, \quad x_{2A} = R\sin\varphi\,.$$

A) Usiamo il Teorema di König:

$$T^{\mathrm{L}}(z,\varphi,\dot z,\dot\varphi) = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,,$$

ove G è il centro dell'asta, $\boldsymbol{\sigma}$ è calcolata in G, e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare dell'asta rispetto alla terna fissa. Visto che, per i vincoli, la distanza di G dall'asse del cilindro è sempre uguale a $L/2$, si ha

$$\boldsymbol{v}_G = [\boldsymbol{v}_G]_{\parallel} + [\boldsymbol{v}_G]_{\perp}\,, \qquad [\boldsymbol{v}_G]_{\parallel} = \dot z\boldsymbol{e}_3\,, \quad |[\boldsymbol{v}_G]_{\perp}| = \frac{L}{2}|\dot\varphi|\,.$$

Si consideri infatti che, detto Q il punto intersezione del piano ortogonale all'asse del cilindro su cui giace l'asta, con l'asse medesimo, il triangolo QAB costituisce la metà di un rettangolo, di cui l'asta è la diagonale e G il centro, che si muove solidalmente all'asta.
Poi,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Perciò

$$T^{\mathrm{L}}(z, \varphi, \dot{z}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \Big(\frac{L^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \Big) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \,,$$

ove I denota il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse ortogonale in G.
B) In alternativa, usiamo la definizione di energia cinetica.
I vincoli non specificano se l'anomalia polare di B sia maggiore o minore di quella di A. Qui supponiamo pertanto che

$$\overrightarrow{AB} = L(\cos(\varphi + \theta_0 - \pi)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\varphi + \theta_0 - \pi)\boldsymbol{e}_2) \,,$$

ove

$$\theta_0 = \arccos \frac{R}{L} \,.$$

Osserviamo anche che l'altra scelta possibile sarebbe stata

$$\overrightarrow{AB} = L(\cos(\varphi - \theta_0 + \pi)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\varphi - \theta_0 + \pi)\boldsymbol{e}_2) \,.$$

Dunque l'asta è parametrizzata da

$$\begin{gathered}\overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}(s) = \\ R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 - s\cos(\varphi + \theta_0)\boldsymbol{e}_1 - s \sin(\varphi + \theta_0)\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad 0 \le s \le L \,.\end{gathered}$$

Perciò

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}_P(z, \varphi; s) = \dot{\varphi}(-R\sin\varphi + s\sin(\varphi + \theta_0))\boldsymbol{e}_1 + \dot{\varphi}(R\cos\varphi - s\cos(\varphi + \theta_0))\boldsymbol{e}_2 + \dot{z}\boldsymbol{e}_3 \,,$$

e

$$\left|\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}_P\right|^2 = \dot{\varphi}^2 (R^2 + s^2 - 2Rs\cos\theta_0) + \dot{z}^2 \,.$$

Dunque

$$T^{\mathrm{L}}(z, \varphi, \dot{z}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{m}{L} [\dot{\varphi}^2 (R^2 + s - 2Rs\cos\theta_0) + \dot{z}^2] \,\mathrm{d}s \,.$$

R.

$$T^{\mathrm{L}}(z, \varphi, \dot{z}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{6} L^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \dot{z}^2 \,.$$

20. [15/7/2009 (ex)I] Una sfera solida di raggio R e massa M è vincolata:

- ad avere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso;
- ad avere il punto solidale A mobile con equazione assegnata

$$\overrightarrow{OA} = R(a\cos ct\boldsymbol{e}_1 + a \sin ct\boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_3) \,.$$

Qui a, b, c sono costanti positive tali che $a^2 + b^2 = 1$.
Determinare l'energia cinetica della sfera in funzione di una opportuna coordinata lagrangiana.

SOLUZIONE

Si tratta di una sfera vincolata a ruotare intorno a un asse mobile assegnato. Dunque ha in effetti un solo grado di libertà.
Visto che il moto è di precessione, si ha

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \,.$$

Si tratta perciò di trovare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ della sfera. Consideriamo un sistema di riferimento mobile $\Sigma = (O, \boldsymbol{w}_i)$, con $\boldsymbol{w}_3$ diretto lungo l'asse mobile, ossia per esempio

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= -\sin ct\boldsymbol{e}_1 + \cos ct\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{w}_2 &= -b\cos ct\boldsymbol{e}_1 - b\sin ct\boldsymbol{e}_2 + a\boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{w}_3 &= a\cos ct\boldsymbol{e}_1 + a\sin ct\boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Sia poi $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con la sfera, con

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{w}_3 \,.$$

Il moto di $\mathcal{S}$ rispetto a Σ perciò non può essere che una rotazione intorno all'asse comune $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{w}_3$; sia

$$\varphi \in (-\pi, \pi)$$

l'angolo che misura questa rotazione. Indichiamo anche $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_i)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$. Allora, per il teorema sulla composizione di velocità angolari,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \,,$$

ove per quanto sopra

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot\varphi\boldsymbol{u}_3 = \dot\varphi\boldsymbol{w}_3 \,.$$

Infine $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}}$ si trova con un calcolo esplicito: posto

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \boldsymbol{w}_i \,,$$

si sa che:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_2}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{w}_3 = (bc\sin ct\boldsymbol{e}_1 - bc\cos ct\boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{w}_3 \\
&= abc\sin ct\cos ct - abc\cos ct\sin ct = 0 \,, \\
\omega_2 &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_3}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{w}_1 = (-ac\sin ct\boldsymbol{e}_1 + ac\cos ct\boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{w}_1 = ac \,, \\
\omega_3 &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{w}_2 = (-c\cos ct\boldsymbol{e}_1 - c\sin ct\boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{w}_2 = bc \,.
\end{aligned}$$

Perciò

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = ac\boldsymbol{w}_2 + (bc + \dot\varphi)\boldsymbol{w}_3 \,.$$

Si noti che, per le proprietà di simmetria della sfera, nonostante che $\mathcal{P}$ non sia solidale, la matrice di $\boldsymbol{\sigma}$ in $\mathcal{P}$ è

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{P}} = \operatorname{diag}(I, I, I)\,,$$

ove I indica il momento diametrale della sfera. Dunque

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}(0, ac, bc+\dot\varphi)\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 0 \\ ac \\ bc+\dot\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I[a^2c^2+(bc+\dot\varphi)^2] = \frac{1}{2}I[c^2+2bc\dot\varphi+\dot\varphi^2]\,.$$

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}I[c^2+2bc\dot\varphi+\dot\varphi^2]\,.$$

21. [15/7/2009 (ex)I] Un disco di raggio R e massa M è vincolato:

- ad avere il centro C sull'asse fisso x_3;
- a mantenersi sempre ortogonale all'asse x_3.

Scrivere il momento della quantità di moto $\boldsymbol{J}_O$ del disco rispetto all'origine O, in funzione di opportune coordinate lagrangiane.

Soluzione

Il disco ha due gradi di libertà. Scegliamo come coordinate lagrangiane la coordinata $z = x_3$ del centro C del disco, con $z \in \boldsymbol{R}$, e un angolo φ che misuri la rotazione del disco intorno a $\boldsymbol{e}_3$; per esempio se $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$ indica un sistema di riferimento solidale con il disco, si ponga

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

Allora, come è noto,

$$\boldsymbol{J}_O = \boldsymbol{\sigma\omega} + M\overrightarrow{OC} \wedge [\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{CO}] = \boldsymbol{\sigma\omega}\,,$$

perché i tre vettori

$$\overrightarrow{OC} = z\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{v}_C = \dot z\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\boldsymbol{e}_3 = \dot\varphi\boldsymbol{u}_3\,,$$

sono paralleli. Dunque

$$\boldsymbol{J}_O = \boldsymbol{\sigma\omega} = I_{33}\dot\varphi\boldsymbol{e}_3\,,$$

dato che la $(\boldsymbol{u}_i)$ è principale d'inerzia.

R.

$$\boldsymbol{J}_O = I_{33}\dot\varphi\boldsymbol{e}_3\,.$$

22. [15/7/2009 (ex)II] Una sfera solida di raggio R e massa M è vincolata:

- ad avere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso;
- ad avere il punto solidale A mobile con equazione assegnata

$$\overrightarrow{OA} = \frac{R}{2}(a \sin ct \boldsymbol{e}_1 + a \cos ct \boldsymbol{e}_2 + b \boldsymbol{e}_3)\,.$$

Qui a, b, c sono costanti positive tali che $a^2 + b^2 = 1$.
Determinare l'energia cinetica della sfera in funzione di una opportuna coordinata lagrangiana.
R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} I [c^2 + 2bc\dot{\varphi} + \dot{\varphi}^2]\,.$$

23. [15/7/2009 (ex)II] Un disco di raggio R e massa M è vincolato:

- ad avere il centro C sull'asse fisso x_1;
- a mantenersi sempre ortogonale all'asse x_1.

Scrivere il momento della quantità di moto $\boldsymbol{J}_A$ del disco rispetto al punto A tale che $\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_1$, in funzione di opportune coordinate lagrangiane. Qui O è l'origine del sistema di riferimento.
R.

$$\boldsymbol{J}_O = I_{11} \dot{\varphi} \boldsymbol{e}_1\,.$$

24. [20/11/2009 (ex)I] Una lamina quadrata di massa M e lato $2L$ è vincolata a ruotare intorno all'asse mobile r

$$x_1 \cos \alpha t + x_2 \sin \alpha t = R\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

in modo che r coincida con l'asse comune di due lati opposti della lamina.
Il centro C della lamina occupa su r la posizione

$$\overrightarrow{OC} = R(\cos \alpha t \boldsymbol{e}_1 + \sin \alpha t \boldsymbol{e}_2)\,.$$

Calcolare in funzione delle opportune coordinate lagrangiane il momento delle quantità di moto della lamina, rispetto all'origine del sistema di riferimento fisso.
Soluzione
Introduciamo la coordinata lagrangiana $\varphi \in (-\pi, \pi)$ che misura la rotazione della lamina intorno a r. In particolare, sia $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema solidale con la lamina, dato da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= -\sin \alpha t \boldsymbol{e}_1 + \cos \alpha t \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{u}_3 \wedge \boldsymbol{u}_1\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \cos \varphi \boldsymbol{w}_1 + \sin \varphi \boldsymbol{e}_3 = \cos \varphi \cos \alpha t \boldsymbol{e}_1 + \cos \varphi \sin \alpha t \boldsymbol{e}_2 + \sin \varphi \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Qui $\boldsymbol{w}_1$ è il versore nel piano $x_3 = 0$ ortogonale a r, e φ è quindi l'angolo formato dalla lamina con $\boldsymbol{e}_3$; la direzione solidale $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale alla lamina, e la $\boldsymbol{u}_1$ è diretta lungo r.
Il tensore d'inerzia in C ha matrice rispetto alla terna $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ data da

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{pmatrix} .$$

Dunque

$$\boldsymbol{J}_O = M\overrightarrow{OC} \wedge \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} .$$

Si ha

$$\boldsymbol{v}_C = R\alpha(-\sin\alpha t\boldsymbol{e}_1 + \cos\alpha t\boldsymbol{e}_2) .$$

Resta da determinare $\boldsymbol{\omega}$; ma in $\mathcal{M}$ il moto della lamina è una rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_1$, dunque

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 .$$

Quindi

$$\boldsymbol{J}_O = MR^2\alpha\boldsymbol{e}_3 + I\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 .$$

R.

$$\boldsymbol{J}_O = I\dot{\varphi}(-\sin\alpha t\boldsymbol{e}_1 + \cos\alpha t\boldsymbol{e}_2) + MR^2\alpha\boldsymbol{e}_3 .$$

25. [25/1/2010 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di massa M e lato $2R$ è vincolata a giacere sul piano fisso $x_3 = 0$, mantenendo il lato AB sull'asse x_1 e rimanendo nel semipiano $x_2 > 0$.
Un'asta EF di lunghezza $2L$ e di massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, e ad avere l'estremo E coincidente con il centro K della lamina.
Si calcoli l'energia cinetica del sistema in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
Il sistema ha due gradi di libertà. Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1C} \in \boldsymbol{R} , \qquad \varphi \in (-\pi, \pi) ,$$

tali che, posto $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{EF}/(2L)$, si abbia

$$\boldsymbol{u} = \cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2 .$$

Calcoliamo a parte le energie della lamina e dell'asta.
Per il teorema di König

$$T^{\mathrm{L}}_{ABCD} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 .$$

Sempre per il teorema di König

$$T^{\mathrm{L}}_{EF} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 ,$$

ove G è il centro di massa dell'asta. Si ha poi

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OK} + L\boldsymbol{u} = (L\cos\varphi + x)\boldsymbol{e}_1 + (L\sin\varphi + R)\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{v}_G = (-L\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{x})\boldsymbol{e}_1 + L\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Perciò

$$T^{\text{L}}_{EF} = \frac{1}{2}m(L^2\dot{\varphi}^2 - 2L\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi + \dot{x}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 \,.$$

R.

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(L^2\dot{\varphi}^2 - 2L\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi + \dot{x}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 \,.$$

26. [25/1/2010 (ex)I] Un cilindro di altezza H, raggio R e massa M precede per inerzia intorno al suo centro C.
Il moto è tale che in un certo istante $\bar{t}$ si ha

$$\boldsymbol{\omega}(\bar{t}) = \alpha\overrightarrow{CA}(\bar{t}) + \beta\overrightarrow{CE}(\bar{t}) \,,$$
$$\overrightarrow{CA}(\bar{t}) = \frac{H}{2}\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \overrightarrow{CE}(\bar{t}) = R\boldsymbol{e}_1 \,,$$

ove A è il centro di una delle basi del cilindro, ed E appartiene alla circonferenza direttrice di centro C. Inoltre α, $\beta > 0$ sono costanti.
Determinare il momento della quantità di moto $\boldsymbol{J}_C(t)$ per ogni t, in termini della base fissa $(\boldsymbol{e}_i)$ e dei parametri del problema.
Soluzione
Scegliamo un sistema di riferimento $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ solidale con il cilindro, con

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{CE}}{\left|\overrightarrow{CE}\right|} \,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{CA}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|} \,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \wedge \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Allora

$$\boldsymbol{\omega}(\bar{t}) = \alpha R\boldsymbol{u}_1(\bar{t}) + \beta\frac{H}{2}\boldsymbol{u}_3(\bar{t}) \,.$$

In $\mathcal{S}$ la matrice $\boldsymbol{\sigma}$ è

$$\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{diag}(I_{11}, I_{11}, I_{33}) \,,$$

per motivi di simmetria. Dunque per i noti teoremi sulle precessioni per inerzia

$$\boldsymbol{J}_C(t) = \boldsymbol{J}_C(\bar{t}) = \boldsymbol{\sigma\omega}(\bar{t}) = I_{11}\alpha R\boldsymbol{u}_1(\bar{t}) + I_{33}\beta\frac{H}{2}\boldsymbol{u}_3(\bar{t}) = I_{11}\alpha R\boldsymbol{e}_1 + I_{33}\beta\frac{H}{2}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

R.

$$\boldsymbol{J}_C(t) = I_{11}\alpha R\boldsymbol{e}_1 + I_{33}\beta\frac{H}{2}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

27. [25/1/2010 (ex)II] Una lamina quadrata $ABCD$ di massa M e lato $2R$ è vincolata a giacere sul piano fisso $x_3 = 0$, mantenendo il lato AB sull'asse x_1 e rimanendo nel semipiano $x_2 < 0$.
Un'asta EF di lunghezza $2L$ e di massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, e ad avere l'estremo E coincidente con il vertice C della lamina.
Si calcoli l'energia cinetica del sistema in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(L^2\dot{\varphi}^2 - 2L\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi + \dot{x}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 \,.$$

28. [25/1/2010 (ex)II] Un cono di altezza H, raggio R e massa M precede per inerzia intorno al centro della sua base C.
Il moto è tale che in un certo istante $\bar{t}$ si ha

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\omega}(\bar{t}) = \alpha\overrightarrow{CA}(\bar{t}) + \beta\overrightarrow{CE}(\bar{t}) \,, \\ \overrightarrow{CA}(\bar{t}) = H\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \overrightarrow{CE}(\bar{t}) = R\boldsymbol{e}_1 \,,\end{gathered}$$

ove A è il vertice del cono, ed E appartiene alla circonferenza di base. Inoltre α, $\beta > 0$ sono costanti.
Determinare il momento della quantità di moto $\boldsymbol{J}_C(t)$ per ogni t, in termini della base fissa $(\boldsymbol{e}_i)$ e dei parametri del problema.
R.

$$\boldsymbol{J}_C(t) = I_{11}\alpha R\boldsymbol{e}_1 + I_{33}\beta H\boldsymbol{e}_3 \,.$$

29. [22/2/2010 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di raggio R, centro C e massa M è vincolata ad avere il centro sulla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos\varphi \,, \\ x_2 &= R\sin\varphi \,, \\ x_3 &= h\varphi \,, \end{aligned}$$

ove $-\infty < \varphi < \infty$ e h, R sono costanti positive. Inoltre la circonferenza è vincolata a giacere sul piano osculatore alla curva, ossia sul piano che ha normale $\boldsymbol{B}$.
Determinare l'energia cinetica di γ in funzione di opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione
Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$\psi \in \boldsymbol{R} \,, \qquad \theta \in (-\pi, \pi) \,,$$

ove θ è l'angolo formato da un raggio solidale con γ e da $\boldsymbol{T}$, mentre ψ è tale che

$$\overrightarrow{OC} = (R\cos\psi, R\sin\psi, h\psi) \,.$$

Sull'elica si ha con calcoli usuali che l'ascissa d'arco è data da

$$s = \lambda^{-1}\varphi\,, \qquad \lambda := (R^2 + h^2)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Inoltre la terna intrinseca e è data da

$$\boldsymbol{T} = \lambda(-R\sin(\lambda s), R\cos(\lambda s), h)\,, \qquad \boldsymbol{N} = -(\cos(\lambda s), \sin(\lambda s), 0)\,,$$
$$\boldsymbol{B} = \lambda(h\sin(\lambda s), -h\cos(\lambda s), R)\,,$$

mentre curvatura e torsione sono date da

$$k(s) = \lambda^2 R\,, \qquad \tau(s) = -\lambda^2 h\,.$$

Vogliamo determinare l'energia cinetica usando il teorema di König. Parametrizziamo la circonferenza con

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}\,,$$

ove P è il punto generico su γ. Si ha

$$\overrightarrow{CP} = R\cos(\theta + \sigma R^{-1})\boldsymbol{T}(s(\psi)) + R\sin(\theta + \sigma R^{-1})\boldsymbol{N}(s(\psi))\,,$$

ove $0 \le \sigma \le 2\pi R$ è l'ascissa curvilinea su γ.
Derivando si ha, posto $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{e}_i)$, e ricordando le formule di Frenet-Serret,

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(P) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{CP} = -R\sin(\theta + \sigma R^{-1})(\dot\theta + \lambda R\dot\psi)\boldsymbol{T}(s(\psi))$$
$$+ R\cos(\theta + \sigma R^{-1})(\dot\theta + \lambda R\dot\psi)\boldsymbol{N}(s(\psi)) - \lambda h R\dot\psi\sin(\theta + \sigma R^{-1})\boldsymbol{B}(s(\psi))\,.$$

Dunque

$$|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(P)|^2 = R^2(\dot\theta + \lambda R\dot\psi)^2 + \lambda^2 h^2 R^2 \dot\psi^2 \sin^2(\theta + \sigma R^{-1})\,.$$

Perciò l'energia cinetica relativa a C di γ è

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi R} \frac{M}{2\pi R}\Big\{R^2(\dot\theta + \lambda R\dot\psi)^2 + \lambda^2 h^2 R^2 \dot\psi^2 \sin^2(\theta + \sigma R^{-1})\Big\}\,\mathrm{d}\sigma$$
$$= \frac{1}{2}MR^2(\dot\theta + \lambda R\dot\psi)^2 + \frac{1}{4}M\lambda^2 h^2 R^2 \dot\psi^2\,.$$

Si ha infine subito

$$\frac{1}{2}M\,|\boldsymbol{v}(C)|^2 = \frac{1}{2}M(R^2 + h^2)\dot\psi^2\,.$$

R.

$$T = \frac{1}{2}M(R^2 + h^2)\dot\psi^2 + \frac{1}{2}MR^2(\dot\theta + \lambda R\dot\psi)^2 + \frac{1}{4}M\lambda^2 h^2 R^2 \dot\psi^2\,.$$

30. [22/2/2010 (ex)II] Una circonferenza materiale γ di raggio R, centro C e massa M è vincolata ad avere il centro sulla curva

$$x_1 = R\cos\varphi\,,$$
$$x_2 = R\sin\varphi\,,$$
$$x_3 = -h\varphi\,,$$

ove $-\infty < \varphi < \infty$ e h, R sono costanti positive. Inoltre la circonferenza è vincolata a giacere sul piano osculatore alla curva, ossia sul piano che ha normale $\boldsymbol{B}$.
Determinare l'energia cinetica di γ in funzione di opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$T = \frac{1}{2}M(R^2 + h^2)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}MR^2(\dot{\theta} + \lambda R\dot{\psi})^2 + \frac{1}{4}M\lambda^2 h^2 R^2 \dot{\psi}^2 .$$

31. [9/4/2010 (ex)I] Una lamina quadrata rigida omogenea $ABCD$ di massa m e lato $2L$ è vincolata a mantenere il lato AB sulla retta mobile

$$x_2 = R\cos(\alpha t) , \qquad x_3 = R\sin(\alpha t) ,$$

ove (O, x_i) è il sistema di riferimento fisso.
Si esprima l'energia cinetica della lamina, nel sistema di riferimento fisso, in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione
Si potrebbe usare il teorema di König, oppure direttamente la parametrizzazione lagrangiana, come sotto.
Indichiamo con $(A, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con la lamina, ossia

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 , \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 , , \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_1
\end{aligned}$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Si prende $\boldsymbol{u}_2$ ortogonale alla lamina. Indichiamo anche, per $x \in \boldsymbol{R}$,

$$\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{e}_1 + R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_3 .$$

Quindi x e φ sono le coordinate lagrangiane.
Allora, se P indica il punto generico sulla lamina, sulla quale introduciamo le coordinate solidali $(s_1, s_3) \in [0, 2L] \times [0, 2L]$,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = (x + s_3)\boldsymbol{e}_1 + [R\cos(\alpha t) + s_1\cos\varphi]\boldsymbol{e}_2 + [R\sin(\alpha t) + s_1\sin\varphi]\boldsymbol{e}_3 .$$

Perciò

$$\boldsymbol{v}_P = \dot{x}\boldsymbol{e}_1 - [\alpha R\sin(\alpha t) + \dot{\varphi}s_1\sin\varphi]\boldsymbol{e}_2 + [\alpha R\cos(\alpha t) + \dot{\varphi}s_1\cos\varphi]\boldsymbol{e}_3 ,$$

cosicché

$$|\boldsymbol{v}_P|^2 = \dot{x}^2 + \alpha^2 R^2 + \dot{\varphi}^2 s_1^2 + 2\alpha\dot{\varphi}Rs_1\cos(\varphi - \alpha t) .$$

Dunque

$$\begin{aligned}
T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\int_0^{2L}\int_0^{2L} \frac{m}{4L^2}|\boldsymbol{v}_P|^2 \,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_3 \\
= \frac{m}{4L}\int_0^{2L} [\dot{x}^2 + \alpha^2R^2 + \dot{\varphi}^2 s_1^2 + 2\alpha\dot{\varphi}Rs_1\cos(\varphi - \alpha t)]\,\mathrm{d}s_1 \\
= \frac{m}{4L}\Big[2L(\dot{x}^2 + \alpha^2R^2) + \frac{8}{3}L^3\dot{\varphi}^2 + 4L^2\alpha\dot{\varphi}R\cos(\varphi - \alpha t)\Big] .
\end{aligned}$$

R.
$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{4L}\Big[2L(\dot{x}^2 + \alpha^2 R^2) + \frac{8}{3}L^3\dot{\varphi}^2 + 4L^2\alpha\dot{\varphi}R\cos(\varphi - \alpha t)\Big]\,.$$

32. [8/7/2010 (ex)I] Calcolare in funzione delle opportune coordinate lagrangiane l'energia cinetica di una circonferenza materiale γ di raggio R e massa M.
La circonferenza è vincolata ad avere il centro C su un asse mobile r, a cui inoltre il piano di γ rimane ortogonale in ogni istante. L'asse r ha equazioni
$$-x_1\sin(\omega t) + x_2\cos(\omega t) = 0\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

SOLUZIONE
Scegliamo come coordinate lagrangiane l'ascissa $s \in \boldsymbol{R}$, misurata su r, del centro C di γ, e un angolo $\theta \in (-\pi, \pi)$ di rotazione di γ intorno a r.
Secondo il teorema di König
$$T = \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_C|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_C\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,,$$
ove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare di γ rispetto alla terna fissa.
Dato che
$$\overrightarrow{OC} = s\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + s\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,,$$
vale
$$\boldsymbol{v}_C = \dot{s}(\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2) + s\omega(-\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2)\,,$$
e quindi
$$|\boldsymbol{v}_C|^2 = \dot{s}^2 + s^2\omega^2\,.$$
Troviamo $\boldsymbol{\omega}$ usando il teorema di composizione di velocità angolari. Sia $\mathcal{P}$ la terna fissa, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ una terna solidale con γ, e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$ una terna tale che
$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1 = \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$
In questo modo $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1$ è il versore di r. Si ha
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \omega\boldsymbol{e}_3 + \dot{\theta}\boldsymbol{u}_1\,.$$
In $\mathcal{M}$ si ha
$$\boldsymbol{\sigma}_C = \operatorname{diag}(2I, I, I)\,.$$
Inoltre
$$\boldsymbol{e}_3 = \sin\theta\boldsymbol{u}_2 + \cos\theta\boldsymbol{u}_3\,,$$
e dunque
$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{u}_1 + \omega\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + \omega\cos\theta\boldsymbol{u}_3\,,$$
e
$$\boldsymbol{\sigma}_C\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = 2I\dot{\theta}^2 + I\omega^2\,.$$

R.
$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}M(\dot{s}^2 + s^2\omega^2) + \frac{1}{2}(2I\dot{\theta}^2 + I\omega^2) \,.$$

33. [7/9/2010 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato L è vincolata ad avere il centro G appartenente alla circonferenza γ
$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$
e a mantenere la sua normale coincidente con la normale principale a γ. Scrivere l'energia cinetica di $ABCD$ in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

Soluzione

Usiamo il Teorema di König. Si ha
$$T = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_G|^2 + T_{\mathcal{S}} \,.$$
Qui $\mathcal{S} = (G, (\boldsymbol{e}_i))$. *Scegliamo le coordinate lagrangiane* $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in (-\pi, \pi)$, *in modo che*
$$\overrightarrow{OG} = R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,,$$
ovviamente vale
$$|\boldsymbol{v}_G|^2 = R^2\dot{\varphi}^2 \,.$$
Consideriamo poi la terna $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$
$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{T} \,, \qquad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{N} \,, \qquad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{B} \,,$$
ove $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ *è la terna principale di* γ, *e* $\boldsymbol{w}_2$ *quindi è normale alla lamina. Consideriamo anche il sistema solidale con la lamina* $(G, \mathcal{M})$, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$, *ove*
$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{w}_2 \,,$$
e quindi $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_3$ *appartengono al piano della lamina. Indichiamo con* θ *l'angolo di rotazione di* $\boldsymbol{u}_1$ *intorno a* $\boldsymbol{w}_2$.
Pertanto, indicando con $\mathcal{P}$ *la terna fissa,*
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} \,.$$
Dato che il moto di $\mathcal{N}$ *rispetto a* $\mathcal{P}$ *è una rotazione di asse* $\boldsymbol{e}_3$, *la velocità angolare risulta data da*
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{w}_3 = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 \,.$$
Invece il moto di $\mathcal{M}$ *rispetto a* $\mathcal{N}$ *è una rotazione di asse* $\boldsymbol{w}_2$, *e quindi*
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} = \dot{\theta}\boldsymbol{w}_2 = \dot{\theta}\boldsymbol{u}_2 \,.$$
Scomponiamo la matrice d'inerzia $\boldsymbol{\sigma}$ *rispetto alla terna* $\mathcal{N}$, *ottenendo*
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{diag}(I, 2I, I) \,,$$
per la simmetria materiale della lamina.

Perciò

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + I\dot{\theta}^2\,,$$

se I è il momento d'inerzia della lamina in G rispetto all'asse comune di due suoi lati opposti.
R.

$$T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + I\dot{\theta}^2\,.$$

340. Calcolo di quantità cinematiche in moti relativi

1. [15/12/2005 (ex)I] Un sistema di riferimento $(O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ si muove rispetto al sistema di riferimento fisso $(\Omega, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ con

$$\boldsymbol{v}_O = c\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_2\,,$$

con c, $\omega > 0$ costanti. All'istante iniziale le terne fissa e mobile coincidono. Un punto P ha velocità nel sistema mobile data da

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = k\boldsymbol{u}_2\,, \qquad k > 0 \text{ costante.}$$

Determinare le componenti della velocità di P lungo $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.
Soluzione
Per la formula della velocità relativa

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}\wedge\overrightarrow{OP} = k\boldsymbol{u}_2(t) + c\boldsymbol{e}_1 + \omega\boldsymbol{e}_2 \wedge \sum_{i=1}^{3}\lambda_i(t)\boldsymbol{u}_i(t)\,.$$

Resta dunque da esprimere la terna mobile $(\boldsymbol{u}_i)$ nella terna fissa $(\boldsymbol{e}_i)$, e da determinare le coordinate λ_i di P nel sistema mobile.
Anzitutto si ha, per la definizione di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_2(t) &= \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Inoltre, per integrazione,

$$\lambda_1(t) = \lambda_1(0)\,, \quad \lambda_2(t) = \lambda_2(0) + kt\,, \quad \lambda_3(t) = \lambda_3(0)\,, \qquad t \geq 0\,.$$

Sostituendo nella formula della velocità si ha la soluzione.
R.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} = \big[c - \omega\lambda_1(t)\sin(\omega t) + \omega\lambda_3(t)\cos(\omega t)\big]\boldsymbol{e}_1 + k\boldsymbol{e}_2 \\
- \big[\omega\lambda_1(t)\cos(\omega t) + \omega\lambda_3(t)\sin(\omega t)\big]\boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

ove le coordinate di P nel sistema mobile sono date da

$$(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)) = (\lambda_1(0), \lambda_2(0) + kt, \lambda_3(0)) \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

2. [7/4/2006 (ex)I] Un sistema di riferimento $(O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ si muove rispetto al sistema di riferimento fisso $(\mathit{\Omega}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ con

$$\boldsymbol{v}_O = c\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_2 \,,$$

e in modo che all'istante iniziale

$$O = \mathit{\Omega} \,, \qquad \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{e}_i \,, \quad i = 1\,,2\,,3 \,.$$

Un punto P ha velocità nel sistema mobile data da

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = k\boldsymbol{u}_1 \,.$$

Qui c, ω, k sono costanti positive.
Determinare le componenti della velocità nel sistema fisso $\boldsymbol{v}$ di P lungo $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.
Soluzione
Per la formula della velocità relativa

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = k\boldsymbol{u}_1(t) + c\boldsymbol{e}_2 + \omega \boldsymbol{e}_2 \wedge \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t) \boldsymbol{u}_i(t) \,.$$

Resta dunque da esprimere la terna mobile $(\boldsymbol{u}_i)$ nella terna fissa $(\boldsymbol{e}_i)$, e da determinare le coordinate λ_i di P nel sistema mobile.
Anzitutto si ha, per la definizione di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_2(t) &= \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Inoltre, per integrazione,

$$\lambda_1(t) = \lambda_1(0) + kt \,, \quad \lambda_2(t) = \lambda_2(0) \,, \quad \lambda_3(t) = \lambda_3(0) \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

Sostituendo nella formula della velocità si ha la soluzione.
R.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} = \big[k\cos(\omega t) - \omega\lambda_1(t)\sin(\omega t) + \omega\lambda_3(t)\cos(\omega t)\big]\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_2 \\
+ \big[- k\sin(\omega t) - \omega\lambda_1(t)\cos(\omega t) - \omega\lambda_3(t)\sin(\omega t)\big]\boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

ove le coordinate di P nel sistema mobile sono date da

$$(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)) = (\lambda_1(0) + kt, \lambda_2(0), \lambda_3(0)) \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

3. [22/9/2006 (ex)I] Un punto si muove sulla circonferenza mobile

$$\gamma = \{R\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{u}_2 \mid 0 \le \varphi \le 2\pi\},$$

ove $(\boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare rispetto alla terna fissa data da

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{u}_3 .$$

Qui R, $\omega > 0$ sono costanti.
Il centro della circonferenza, l'origine del sistema di riferimento fisso, e l'origine del sistema di riferimento mobile O coincidono in ogni istante.
I due vettori $\boldsymbol{u}_3$ e $\boldsymbol{e}_3$ coincidono all'istante iniziale.
Sapendo che il moto del punto nel sistema di riferimento mobile è uniforme (cioè che la velocità relativa ha modulo costante c), si trovi la velocità del punto nel sistema di riferimento fisso.
Soluzione
Usando le formule della cinematica relativa si ha

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP},$$

ove si denota $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$. *D'altra parte, denotando con* $\varphi(t)$ *la coordinata lagrangiana di* P, *tale che*

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{u}_2 ,$$

si ha

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = R\dot\varphi(-\sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{u}_2),$$

per cui (a meno della scelta del segno)

$$|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}| = c \qquad \text{se e solo se} \qquad \dot\varphi = cR^{-1} .$$

Inoltre

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \omega \boldsymbol{u}_3 \wedge [R(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_2)] = \omega R(-\sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{u}_2) .$$

R.

$$\boldsymbol{v} = (cR^{-1} + \omega)\boldsymbol{e}_3 \wedge \overrightarrow{OP} .$$

4. [13/12/2006 (ex)I] Sia $(O, \boldsymbol{e}_i)$ il sistema di riferimento fisso, e sia $(\boldsymbol{u}_i)$ una terna mobile tale che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 ,\\
\boldsymbol{u}_2(t) &= -\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 ,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \boldsymbol{e}_3 .
\end{aligned}$$

Consideriamo un disco D di centro C, sottoposto ai vincoli

- $\overrightarrow{OC} = L\boldsymbol{u}_1(t)$;
- D giace nel piano ortogonale a $\boldsymbol{u}_1$;
- D ruota intorno all'asse ad esso ortogonale in C con velocità angolare (scalare) costante $\beta > 0$.

Determinare la velocità angolare vettoriale di D nel sistema di riferimento fisso, esprimendola nella base $(\boldsymbol{e}_i)$.
SOLUZIONE
Indichiamo con $\mathcal{P}$ la terna fissa $(\boldsymbol{e}_i)$, con $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$ una terna solidale con D, ove $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1$ è ortogonale a D, e con $\mathcal{M}$ la terna $(\boldsymbol{u}_i)$.
L'esercizio richiede la velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}}$ di $\mathcal{N}$ rispetto a $\mathcal{P}$.
È noto che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} .$$

D'altra parte

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} = \alpha \boldsymbol{e}_3 , \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} = \beta \boldsymbol{w}_1 .$$

Resta solo da scomporre $\boldsymbol{w}_1$ in $\mathcal{P}$. Si ha

$$\boldsymbol{w}_1(t) = \boldsymbol{u}_1(t) = \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 .$$

R.

$$\boldsymbol{\omega} = \beta\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \beta\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 + \alpha\boldsymbol{e}_3 .$$

5. [26/3/2007 (ex)I] Consideriamo tre terne $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$, $\mathcal{P} = (\boldsymbol{z}_i)$, tali che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} = \lambda \boldsymbol{u}_1 , \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NP}} = \mu \boldsymbol{w}_1 .$$

All'istante $t = 0$

$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{w}_i(0) = \boldsymbol{z}_i(0) , \qquad i = 1, 2, 3 .$$

Determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MP}}$ sia in termini di $(\boldsymbol{u}_i)$ che di $(\boldsymbol{z}_i)$.
SOLUZIONE
Si sa che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MP}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NP}} = \lambda\boldsymbol{u}_1 + \mu\boldsymbol{w}_1 .$$

Osserviamo che

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}}(t) = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}(t) \wedge \boldsymbol{u}_1(t) = -\lambda\boldsymbol{u}_1(t) \wedge \boldsymbol{u}_1(t) = 0 .$$

Quindi per ogni t

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t)\boldsymbol{w}_i(t) ,$$

con λ_i funzioni costanti, ossia, per le condizioni iniziali,

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \boldsymbol{w}_1(t) .$$

Perciò

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}(t) = (\lambda + \mu)\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

Resta da esprimere $\boldsymbol{u}_1$ in termini delle $\boldsymbol{z}_i$. Si ha come sopra

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}}(t) \wedge \boldsymbol{u}_1(t) = -(\lambda + \mu)\boldsymbol{u}_1(t) \wedge \boldsymbol{u}_1(t) = 0\,,$$

da cui

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \boldsymbol{z}_1(t)\,,$$

e

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}(t) = (\lambda + \mu)\boldsymbol{z}_1(t)\,.$$

R.

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}(t) = (\lambda + \mu)\boldsymbol{u}_1(t) = (\lambda + \mu)\boldsymbol{z}_1(t)\,.$$

6. [16/5/2007 (hw)I] Una terna $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ si muove rispetto a una terna $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$ con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ che soddisfa

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = -\alpha\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} + \boldsymbol{b}\,, \tag{1}$$

ove $\alpha > 0$ e $\boldsymbol{b}$ è un vettore solidale con $\mathcal{N}$. Sapendo che all'istante iniziale $t = 0$ vale

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(0) = \beta\boldsymbol{w}_1\,,$$

con $\beta \in \boldsymbol{R}$, si determini $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$.

Soluzione

Denotiamo

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^{3}\omega_i\boldsymbol{w}_i\,, \qquad \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3}b_i\boldsymbol{w}_i\,.$$

Allora la (1)*, ricordando che*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}}\,,$$

dà le

$$\begin{gathered}\dot{\omega}_i = -\alpha\omega_i + b_i\,, \qquad i = 1, 2, 3\,;\\ \omega_1(0) = \beta\,, \quad \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0\,.\end{gathered}$$

Si ottiene pertanto

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \beta e^{-\alpha t} + \frac{b_1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\,,\\ \omega_i(t) &= \frac{b_i}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\,, \qquad i = 2, 3\,.\end{aligned}$$

R.
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \frac{\boldsymbol{b}}{\alpha} + e^{-\alpha t}\Big[\Big(\beta - \frac{b_1}{\alpha}\Big)\boldsymbol{w}_1 - \frac{b_2}{\alpha}\boldsymbol{w}_2 - \frac{b_3}{\alpha}\boldsymbol{w}_2\Big]\,, \qquad t > 0\,.$$

7. [16/5/2007 (hw)I] Una terna $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ si muove rispetto a una terna $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$ con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ che soddisfa
$$\begin{aligned}\Big[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t}\Big]_{\mathcal{N}} &= \alpha\cos\varphi\boldsymbol{u}_1\,,\\ \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(0) &= 0\,,\end{aligned}$$
ove $\alpha > 0$ e φ è l'angolo tra $\boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{w}_2$. Si determini $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$, sapendo anche che
$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{w}_i(0)\,, \qquad i = 1, 2, 3\,.$$

Soluzione

Denotiamo
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^{3}\omega_i\boldsymbol{u}_i\,.$$
Allora la $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$, ricordando che
$$\Big[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t}\Big]_{\mathcal{M}} = \Big[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t}\Big]_{\mathcal{N}}\,,$$
soddisfa
$$\dot\omega_1 = \alpha\cos\varphi\,, \qquad \dot\omega_2 = 0\,, \qquad \dot\omega_3 = 0\,. \tag{1}$$
Perciò
$$\omega_2(t) = \omega_2(0) = 0\,, \qquad \omega_3(t) = \omega_3(0) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t > 0.$$
Ne segue che il moto di $\mathcal{M}$ rispetto a $\mathcal{N}$ è una rotazione intorno all'asse $\boldsymbol{u}_1$, cosicché per ogni $t > 0$:
$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,,\\ \boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi(t)\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi(t)\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\ \boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi(t)\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi(t)\boldsymbol{w}_3(t)\,,\end{aligned}$$
e
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \dot\varphi(t)\boldsymbol{u}_1(t) = \dot\varphi(t)\boldsymbol{w}_1(t)\,.$$
Segue allora da (1) che
$$\begin{aligned}\ddot\varphi &= \alpha\cos\varphi\,,\\ \dot\varphi(0) &= 0\,,\\ \varphi(0) &= 0\,.\end{aligned}$$

R.

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \sqrt{2\alpha \sin\varphi(t)}\boldsymbol{w}_1\,, \quad \textit{ove} \quad \int_0^{\varphi(t)} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2\alpha\sin s}} = t\,, \qquad t > 0\,.$$

8. [16/5/2007 (hw)I] Un punto A si muove su una circonferenza con centro il punto B, con velocità angolare costante $\omega_A\boldsymbol{e}$. A sua volta B si muove di moto circolare uniforme intorno al punto C (fisso), con velocità angolare costante $\omega_B\boldsymbol{e}$. Qui $\boldsymbol{e}$ è un versore costante, perpendicolare al piano delle orbite di A e B. Denotiamo

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = R\,, \qquad \left|\overrightarrow{CB}\right| = d\,.$$

Determinare se la velocità di A può annullarsi, e in quali posizioni del sistema. Si assuma $\omega_A \neq 0$, $\omega_B \neq 0$.

Soluzione

A) Introduciamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (B, \boldsymbol{e}_i)$, che ha velocità angolare nulla nel sistema fisso $(C, \boldsymbol{e}_i)$. Possiamo assumere $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_3$. Le formule della cinematica relativa danno subito

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \omega_B\boldsymbol{e}_3 \wedge \overrightarrow{CB} + \omega_A\boldsymbol{e}_3 \wedge \overrightarrow{BA}\,.$$

Segue che $\boldsymbol{v}_A = 0$ se e solo se (visto che $\boldsymbol{e}_3$ è ortogonale a $\overrightarrow{CB}$ e a $\overrightarrow{BA}$)

$$\omega_B\overrightarrow{CB} + \omega_A\overrightarrow{BA} = 0\,,$$

ossia

$$\overrightarrow{BA} = -\frac{\omega_B}{\omega_A}\overrightarrow{CB}\,.$$

Perciò le posizioni ricercate esistono se e solo se

$$R = \left|\frac{\omega_B}{\omega_A}\right| d\,,$$

caso nel quale sono:

1. *se $\omega_A\omega_B < 0$: i tre punti sono allineati, con B tra A e C;*
2. *se $\omega_A\omega_B > 0$: i tre punti sono allineati, con A tra B e C.*

B) In alternativa al metodo precedente, troviamo $\boldsymbol{v}_A$ derivando il vettore posizione $\overrightarrow{CA}$, parametrizzato in modo opportuno.
Introduciamo le coordinate φ e θ, definite come gli angoli formati da $\boldsymbol{e}_1$ con $\overrightarrow{CB}$ e, rispettivamente, con $\overrightarrow{BA}$. Allora

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = d(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) + R(\cos\theta, \sin\theta, 0)\,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{v}_A = (-d\dot\varphi\sin\varphi - R\dot\theta\sin\theta, d\dot\varphi\cos\varphi + R\dot\theta\cos\theta, 0)\,,$$

e

$$|\boldsymbol{v}_A|^2 = d^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2d\dot{\varphi}R\dot{\theta}\cos(\varphi - \theta) .$$

Questa forma quadratica, in

$$(d\dot{\varphi}, R\dot{\theta}) = (d\omega_B, R\omega_A) ,$$

risulta definita positiva a meno che

$$\cos^2(\varphi - \theta) = 1 ,$$

caso in cui è semidefinita positiva, e in effetti si annulla nei casi:

1. $\varphi = \theta + 2k\pi$, $d\omega_B + R\omega_A = 0$;
2. $\varphi = \theta + (2k+1)\pi$, $d\omega_B - R\omega_A = 0$.

Si sono quindi ritrovate le soluzioni ottenute nella parte A).
R. *Si hanno soluzioni se e solo se*

$$R = \left|\frac{\omega_B}{\omega_A}\right| d ;$$

le soluzioni sono:

1. *se* $\omega_A\omega_B < 0$: *i tre punti sono allineati, con* B *tra* A *e* C;
2. *se* $\omega_A\omega_B > 0$: *i tre punti sono allineati, con* A *tra* B *e* C.

9. [4/7/2007 (ex)I] Una terna mobile $(\boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna $(\boldsymbol{e}_i)$ data da

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha t \boldsymbol{u}_3 .$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante.
Determinare la scomposizione di $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ nella terna $(\boldsymbol{e}_i)$ sapendo che

$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{e}_i(0) , \qquad i = 1, 2, 3 .$$

Soluzione
Si ha

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_3}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{u}_3 = 0 .$$

Quindi

$$\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3 , \qquad t > 0 .$$

Perciò la coppia $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ *giace sul piano* $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ *e quindi, per un angolo* φ *opportuno si può scrivere*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 , &\qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t} &= \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2 , &\qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_2}{\mathrm{d}t} &= -\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 . \end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{u}_1 = \alpha t \boldsymbol{u}_3 \wedge \boldsymbol{u}_1 = \alpha t \boldsymbol{u}_2 \,,$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_2}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{u}_2 = \alpha t \boldsymbol{u}_3 \wedge \boldsymbol{u}_2 = -\alpha t \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Pertanto

$$\dot{\varphi}(t) = \alpha t \,, \qquad \varphi(t) = \frac{\alpha}{2} t^2 \,.$$

R.

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \cos\varphi(t) \boldsymbol{e}_1(t) + \sin\varphi(t) \boldsymbol{e}_2(t) \,,$$
$$\boldsymbol{u}_2(t) = -\sin\varphi(t) \boldsymbol{e}_1(t) + \cos\varphi(t) \boldsymbol{e}_2(t) \,,$$
$$\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3(t) \,,$$

con $\varphi(t) = \alpha t^2/2$.

10. [4/7/2007 (ex)II] Una terna mobile $(\boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna $(\boldsymbol{e}_i)$ data da

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \gamma t^2 \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante.
Determinare la scomposizione di $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ nella terna $(\boldsymbol{e}_i)$ sapendo che

$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{e}_i(0) \,, \qquad i = 1\,, 2\,, 3\,.$$

R.

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \boldsymbol{e}_1(t) \,,$$
$$\boldsymbol{u}_2(t) = \cos\varphi(t) \boldsymbol{e}_2(t) + \sin\varphi(t) \boldsymbol{e}_3(t) \,,$$
$$\boldsymbol{u}_3(t) = -\sin\varphi(t) \boldsymbol{e}_2(t) + \cos\varphi(t) \boldsymbol{e}_3(t) \,,$$

con $\varphi(t) = \gamma t^3/3$.

11. [1/7/2008 (ex)I] Determinare in funzione di due opportune coordinate la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di un disco di centro C soggetto ai vincoli

- C appartiene alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = -R \,;$$

- l'asse del disco si mantiene ortogonale all'asse x_3 e alla circonferenza.

Qui (O, x_i) è il sistema di riferimento fisso, e $R > 0$ è costante.
Soluzione
Introduciamo per comodità di notazione il punto A*, proiezione di* C *sull'asse* x_3*. Allora per ipotesi l'asse del disco si mantiene allineato con* $\overrightarrow{AC}$*.*

Scomponiamo poi
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{P}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} \,,$$
ove: $\mathcal{N}$ *è la terna fissa;* $\mathcal{P} = (\boldsymbol{z}_i)$ *è la terna data da*
$$\boldsymbol{z}_1 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{\overrightarrow{AC}}{R} \,, \qquad \boldsymbol{z}_3 = \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_3 \wedge \boldsymbol{z}_1 \,;$$
$\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ *è una terna solidale con il disco tale che*
$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{z}_1 \,.$$
Se φ *indica la coordinata tale che*
$$\overrightarrow{AC} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 \,,$$
è noto che
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{P}} = \dot\varphi\boldsymbol{e}_3 \,.$$
Inoltre, visto che $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{z}_1$*, il moto di* $\mathcal{M}$ *in* $\mathcal{P}$ *è di rotazione; sia* θ *l'angolo relativo, per esempio l'angolo tra* $\boldsymbol{u}_2$ *e il piano* $x_3 = 0$*. Allora*
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \dot\theta\boldsymbol{z}_1 = \dot\theta(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2) \,.$$

R.
$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\boldsymbol{e}_3 + \dot\theta(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2) \,.$$

12. [1/7/2008 (ex)II] Determinare in funzione di due opportune coordinate la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di un disco di centro C soggetto ai vincoli

- C appartiene alla circonferenza
$$x_1^2 + x_3^2 = R^2 \,, \qquad x_2 = R \,;$$
- l'asse del disco si mantiene ortogonale all'asse x_2 e alla circonferenza.

Qui (O, x_i) è il sistema di riferimento fisso, e $R > 0$ è costante.
R.
$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\boldsymbol{e}_2 + \dot\theta(\cos\varphi\boldsymbol{e}_3 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_1) \,.$$

13. [12/1/2009 (ex)I] Un cono circolare retto di altezza H e raggio di base R è vincolato ad avere il vertice nell'origine del sistema fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Inoltre è vincolato ad avere l'asse sul piano fisso $x_3 = 0$ (qui le x_i indicano le coordinate nel sistema di riferimento fisso).
Trovare la velocità angolare del cono nel sistema di riferimento fisso, in funzione di due opportune coordinate lagrangiane, e di $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

SOLUZIONE
La velocità angolare del cono, cioè di una terna solidale $\mathcal{M}$ rispetto alla terna fissa $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_i)$, verrà calcolata mediante la formula

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \,,$$

ove $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$ è la terna mobile (non solidale)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{w}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{w}_2 \,, \\ \boldsymbol{w}_2 &= -\sin\varphi \boldsymbol{w}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{w}_2 \,, \\ \boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Qui φ è scelto in modo che $\boldsymbol{w}_1$ sia diretto come l'asse del cono. Quindi

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = \dot{\varphi} \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Nel sistema di riferimento $(O, \mathcal{N})$ il cono dunque si muove con una rotazione intorno al proprio asse, per cui

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{P}} = \dot{\theta} \boldsymbol{w}_1 \,,$$

ove θ è appunto l'angolo che misura tale rotazione.
R.

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \dot{\theta} \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \dot{\theta} \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + \dot{\varphi} \boldsymbol{e}_3 \,.$$

14. [12/1/2009 (ex)II] Un cilindro circolare retto di altezza H e raggio di base R è vincolato ad avere il centro nell'origine del sistema fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$. Inoltre è vincolato ad avere l'asse sul piano fisso $x_3 = 0$ (qui le x_i indicano le coordinate nel sistema di riferimento fisso).
Trovare la velocità angolare del cilindro nel sistema di riferimento fisso, in funzione di due opportune coordinate lagrangiane, e di $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.
R.

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \dot{\theta} \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \dot{\theta} \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + \dot{\varphi} \boldsymbol{e}_3 \,.$$

15. [11/9/2009 (ex)I] Una lamina rettangolare $ABCD$ di massa M e lati

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = a \,, \qquad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = b \,,$$

è vincolata ad avere il lato $\overrightarrow{AD}$ sull'asse mobile r definito da

$$x_1 = L\cos\omega t \,, \qquad x_2 = L\sin\omega t \,, \qquad x_3 \in \boldsymbol{R} \,.$$

Supponiamo anche che

$$x_{3A} = 0 \,, \qquad x_{3D} = b \,.$$

Calcolare l'energia cinetica della lamina nel sistema fisso (O, x_i).

Soluzione
A) Usiamo il teorema di König:

$$T = \frac{1}{2} M |\boldsymbol{v}_G|^2 + T_{\mathcal{S}} ,$$

ove $T_{\mathcal{S}}$ è l'energia cinetica nel sistema di riferimento $\mathcal{S} = (G, \boldsymbol{e}_i)$, e G è il centro di massa della lamina.
Indichiamo con $\varphi \in (-\pi, \pi)$ l'angolo tale che

$$\overrightarrow{OG} = L \cos \omega t \boldsymbol{e}_1 + L \sin \omega t \boldsymbol{e}_2 + \frac{a}{2} \cos \varphi \boldsymbol{e}_1 + \frac{a}{2} \sin \varphi \boldsymbol{e}_2 + \frac{b}{2} \boldsymbol{e}_3 .$$

Si noti che φ è l'angolo che misura la rotazione della lamina nel sistema fisso.
Dunque, se I denota il momento d'ineria della lamina rispetto a AD,

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 ,$$

e

$$\boldsymbol{v}_G = \Big(- L\omega \sin \omega t - \frac{a}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi \Big) \boldsymbol{e}_1 + \Big(L\omega \cos \omega t + \frac{a}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \Big) \boldsymbol{e}_2 .$$

Allora

$$|\boldsymbol{v}_G|^2 = L^2 \omega^2 + \frac{a^2}{4} \dot{\varphi}^2 + L\omega a \dot{\varphi} \cos(\omega t - \varphi) .$$

R.

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \big(L^2 \omega^2 + \frac{a^2}{4} \dot{\varphi}^2 + L\omega a \dot{\varphi} \cos(\omega t - \varphi) \big) .$$

16. [11/9/2009 (ex)II] Una lamina quadrata $ABCD$ di massa M e lato b è vincolata ad avere il lato $\overrightarrow{AD}$ sull'asse mobile r definito da

$$x_1 = L \cos \omega t , \qquad x_2 = L \sin \omega t , \qquad x_3 \in \boldsymbol{R} .$$

Supponiamo anche che

$$x_{3A} = b , \qquad x_{3D} = 2b .$$

Calcolare l'energia cinetica della lamina nel sistema fisso (O, x_i).
R.

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \big(L^2 \omega^2 + \frac{b^2}{4} \dot{\varphi}^2 + L\omega b \dot{\varphi} \cos(\omega t - \varphi) \big) .$$

17. [9/4/2010 (ex)I] Un sistema di riferimento $(O, \boldsymbol{u}_i)$ si muove rispetto al sistema di riferimento fisso $(\Omega, \boldsymbol{e}_i)$ in modo che

$$\boldsymbol{v}_O = c \boldsymbol{e}_2 , \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_1 .$$

All'istante iniziale le terne fissa e mobile, e i due punti O e Ω, coincidono.

Un punto P ha velocità nel sistema di riferimento mobile data da

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(t) = k\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad t > 0 \,,$$

e all'istante iniziale

$$\overrightarrow{OP}(0) = L\boldsymbol{u}_1 \,.$$

Qui c, ω, k, L sono costanti positive.
Determinare le componenti della velocità di P nel sistema fisso lungo la terna $(\boldsymbol{u}_i)$, in funzione di c, ω, k, L.
SOLUZIONE
Per la formula delle velocità relative

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = k\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_2 + \omega\boldsymbol{e}_1 \wedge \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t)\boldsymbol{u}_i(t) \,.$$

Si ha per definizione di $\boldsymbol{\omega}$*:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= \cos\omega t\boldsymbol{e}_2 + \sin\omega t\boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\omega t\boldsymbol{e}_2 + \cos\omega t\boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = (k+c)\cos\omega t\boldsymbol{u}_2 - (k+c)\sin\omega t\boldsymbol{u}_3 + \omega\boldsymbol{u}_1 \wedge (\lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \lambda_3\boldsymbol{u}_3) \\ = [-\omega\lambda_3 + (k+c)\cos\omega t]\boldsymbol{u}_2 + [\omega\lambda_2 - (k+c)\sin\omega t]\boldsymbol{u}_3 \,. \end{aligned}$$

Infine dall'integrazione di

$$(\dot\lambda_1, \dot\lambda_2, \dot\lambda_3) = k(0, \cos\omega t, -\sin\omega t) \,,$$

si ha, tenuto conto delle condizioni iniziali,

$$\lambda_1(t) = L \,, \qquad \lambda_2(t) = \frac{k}{\omega}\sin\omega t \,, \qquad \lambda_3(t) = \frac{k}{\omega}(\cos\omega t - 1) \,.$$

R.

$$\boldsymbol{v} = (k + c\cos\omega t)\boldsymbol{u}_2 - c\sin\omega t\boldsymbol{u}_3 \,.$$

18. [7/9/2010 (ex)I] Una terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ si muove rispetto alla terna fissa $(\boldsymbol{e}_i)$ con velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 \,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.
Il sistema di riferimento $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$ ha l'origine coincidente con quella del sistema di riferimento fisso.

Determinare l'insieme dei punti solidali con $\mathcal{S}$ tali che la loro velocità (nel sistema fisso) si annulla.
SOLUZIONE
Si ha, come è noto,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = (\alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2) \wedge \overrightarrow{OP} \,.$$

Quindi $\boldsymbol{v} = 0$ *se e solo se*

$$\overrightarrow{OP} = \lambda(\alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2) \,, \qquad \lambda \in \boldsymbol{R} \,.$$

Questa è l'equazione di una retta solidale con $\mathcal{S}$*, che come è ovvio è anche fissa nel sistema di riferimento fisso.*
R. *La retta*

$$\overrightarrow{OP} = \lambda(\alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2) \,, \qquad \lambda \in \boldsymbol{R} \,.$$

350. Dinamica relativa

1. [4/7/2005 (ex)I] Una retta $r(t)$ si muove mantenendosi sovrapposta all'asse fisso x_1, con velocità di traslazione $-\alpha t \boldsymbol{e}_1$, con $\alpha > 0$ costante.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a $r(t)$, e al tempo $t = 0$ ha velocità relativa a $r(0)$ data da $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_1$, con $v_0 > 0$.
Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \,, \qquad \mu > 0 \text{ costante,}$$

ove $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ è la velocità di P relativa a $r(t)$.
Per quali valori dei parametri α, μ, v_0 il moto di P relativo a $r(t)$ è uniforme (cioè $|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}| \equiv$ costante)?
SOLUZIONE
Consideriamo un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$*, che trasla rispetto al sistema di riferimento fisso, con l'origine* O *solidale con* r*, e con un asse coordinato coincidente con* r*. Indichiamo con* s *l'ascissa su quest'asse, e con* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1$ *il versore corrispondente.*
L'equazione di moto in $\mathcal{S}$ *è*

$$m \boldsymbol{a}_{\mathcal{S}} = -\mu \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \,,$$

ove $\boldsymbol{a}_{\mathcal{S}}$ *e* $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ *denotano rispettivamente accelerazione e velocità relative a* $\mathcal{S}$*. Proiettando su* r *si ottiene*

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= -\mu \dot{s} + m\alpha \,, \\ \dot{s}(0) &= v_0 \,, \end{aligned}$$

dato che $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$ *e* $\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}$ *sono ortogonali a* $\boldsymbol{u}$*, e* $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = m\alpha \boldsymbol{u}$ *nel caso presente.*

La velocità $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \dot{s}\boldsymbol{u}$ *risulta perciò costante se e solo se*

$$-\mu v_0 + m\alpha = 0\,.$$

2. [4/7/2005 (ex)II] Una retta $r(t)$ si muove mantenendosi sovrapposta all'asse fisso x_1, con velocità di traslazione $\alpha t\boldsymbol{e}_1$, con $\alpha > 0$ costante.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a $r(t)$, e al tempo $t = 0$ ha velocità relativa a $r(0)$ data da $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = v_0\boldsymbol{e}_1$, con $v_0 < 0$.
Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -\mu\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}\,, \qquad \mu > 0 \text{ costante,}$$

ove $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ è la velocità di P relativa a $r(t)$.
Per quali valori dei parametri α, μ, v_0 il moto di P relativo a $r(t)$ è uniforme (cioè $|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}| \equiv$ costante)?
R.

$$-\mu v_0 = m\alpha$$

3. [16/5/2007 (hw)I] Un punto P di massa m è vincolato al piano ruotante $\Pi(t)$ di equazione

$$x_1 \sin(\alpha t) - x_2 \cos(\alpha t) = 0$$

(qui le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso). Si calcolino in funzione della posizione e della velocità di P le forze fittizie che agiscono su P nel sistema di riferimento $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ è data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2(t) &= -\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Si dimostri anche che il lavoro relativo

$$\int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}) \cdot \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \,\mathrm{d}t$$

dipende solo dalle posizioni di P agli istanti t_1 e t_2.
Soluzione
La velocità angolare di $\mathcal{M}$ *è*

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha\boldsymbol{u}_3\,.$$

Quindi, se, osservando che $\boldsymbol{u}_2$ *è sempre ortogonale a* Π*, denotiamo*

$$\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{X} = \lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_3\boldsymbol{u}_3\,,$$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O)] \\
&= \alpha^2 \boldsymbol{u}_3 \wedge [\boldsymbol{u}_3 \wedge (\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_3 \boldsymbol{u}_3)] = -\alpha^2 \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \,.
\end{aligned}
$$

Inoltre

$$
\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = 2\alpha \boldsymbol{u}_3 \wedge (\dot\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \dot\lambda_3 \boldsymbol{u}_3) = 2\alpha \dot\lambda_1 \boldsymbol{u}_2 \,.
$$

Pertanto

$$
\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = m\alpha^2 \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \,, \qquad \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} = -2m\alpha \dot\lambda_1 \boldsymbol{u}_2 \,.
$$

Infine

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}) \cdot \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \,\mathrm{d}t &= \int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}) \cdot (\dot\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \dot\lambda_3 \boldsymbol{u}_3) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} m\alpha^2 \lambda_1 \dot\lambda_1 \,\mathrm{d}t = m\alpha^2 \frac{\lambda_1^2(t_2) - \lambda_1^2(t_1)}{2} \,.
\end{aligned}
$$

R. *Se* $\overrightarrow{OP} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_3 \boldsymbol{u}_3$*:*

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = m\alpha^2 \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \,, \qquad \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} = -2m\alpha \dot\lambda_1 \boldsymbol{u}_2 \,; \\
\int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}) \cdot \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \,\mathrm{d}t = m\alpha^2 \frac{\lambda_1^2(t_2) - \lambda_1^2(t_1)}{2} \,.
\end{gathered}
$$

4. [15/7/2009 (ex)I] Consideriamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\omega t \, \boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t \, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\omega t \, \boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t \, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}
$$

Indichiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$. Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra di raggio R di equazioni

$$
y_1^2 + y_2^2 = R^2 \,, \qquad y_3 = 0 \,.
$$

La circonferenza è solidale con $\mathcal{S}$.
Il punto P è soggetto alla reazione vincolare $\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}$, che soddisfa

$$
|\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| = \mu \left| [\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}]_{\perp} \right| \,,
$$

ove $\mu > 0$ è costante e $[\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}]_{\perp}$ indica la componente di $\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}$ normale alla circonferenza. Inoltre $\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}$ ha componente tangenziale diretta in modo tale da opporsi al moto di P (relativo alla circonferenza).

1. Scrivere l'equazione di moto di P (almeno fino al primo istante in cui ha velocità nulla in $\mathcal{S}$), sapendo che all'istante iniziale

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{u}_1(0)\,, \qquad \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = v_0\boldsymbol{u}_2(0)\,,$$

   con $v_0 > 0$.

2. Dimostrare che in effetti $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(\bar{t}) = 0$ per qualche $\bar{t} > 0$.

Soluzione

1) Scegliendo l'ascissa curvilinea s sulla circonferenza γ in modo opportuno, questa risulta parametrizzata da

$$R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_2\,,$$

cosicché

$$\boldsymbol{T}(s) = -\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1 + \cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_2\,, \quad \boldsymbol{N}(s) = -\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1 - \sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_2\,, \quad \boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{u}_3\,,$$
$$k(s) = \frac{1}{R}\,.$$

Prendiamo s come coordinata per P; allora

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(t) = \dot{s}(t)\boldsymbol{T}(s(t))\,.$$

In $\mathcal{S}$ su P agiscono anche le forze fittizie: la forza di trascinamento

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) = m\omega^2\overrightarrow{OP} = -m\omega^2 R\boldsymbol{N}\,,$$

e quella di Coriolis

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = -2m\omega\dot{s}\boldsymbol{u}_3 \wedge \boldsymbol{T} = -2m\omega\dot{s}\boldsymbol{N}\,.$$

Dunque l'equazione di moto proiettata sulla terna intrinseca dà

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}\,, \\ m\frac{\dot{s}^2}{R} &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N} - m\omega^2 R - 2m\omega\dot{s}\,, \\ 0 &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Perciò l'equazione di moto, almeno finché $\dot{s} \geq 0$ (si noti che $\dot{s}(0) = v_0 > 0$), è data da

$$m\ddot{s} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = -\left|\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}\right| = -\mu\left|\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N}\right| = -\mu\Big(m\frac{\dot{s}^2}{R} + m\omega^2 R + 2m\omega\dot{s}\Big)\,. \quad (1)$$

2) Senz'altro, dalla (1) *si ha, finché $\dot{s} \geq 0$,*

$$\ddot{s} \leq -\mu\omega R\,,$$

e dunque

$$\dot{s}(t) \leq \dot{s}(0) - \mu\omega R t = v_0 - \mu\omega R t\,,$$

che implica che $\dot s(\bar t) = 0$ per qualche istante $\bar t < v_0/(\mu\omega^2 R)$.
R.

$$
\begin{aligned}
1)\qquad & \ddot s = -2\mu\omega\dot s - \frac{\mu}{R}\dot s^2 - \mu\omega^2 R\,; \\
2)\qquad & \dot s(\bar t) = 0\,, \quad \textit{per un } \bar t < v_0/(\mu\omega^2 R).
\end{aligned}
$$

5. [15/7/2009 (ex)II] Consideriamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\omega t\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t\,\boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t\,\boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}
$$

Indichiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$. Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra di raggio R di equazioni

$$
y_1^2 + y_2^2 = R^2\,, \qquad y_3 = R\,.
$$

La circonferenza è solidale con $\mathcal{S}$.
Il punto P è soggetto alla reazione vincolare $\boldsymbol{f}_{\text{vin}}$, che soddisfa

$$
|\boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| = \mu\,|[\boldsymbol{f}_{\text{vin}}]_\perp|\,,
$$

ove $\mu > 0$ è costante e $[\boldsymbol{f}_{\text{vin}}]_\perp$ indica la componente di $\boldsymbol{f}_{\text{vin}}$ normale alla circonferenza. Inoltre $\boldsymbol{f}_{\text{vin}}$ ha componente tangenziale diretta in modo tale da opporsi al moto di P (relativo alla circonferenza).

1. Scrivere l'equazione di moto di P (almeno fino al primo istante in cui ha velocità nulla in $\mathcal{S}$), sapendo che all'istante iniziale

   $$
   \overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{u}_2(0)\,, \qquad \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = -v_0\boldsymbol{u}_1(0)\,,
   $$

   con $v_0 > 0$.

2. Dimostrare che in effetti $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(\bar t) = 0$ per qualche $\bar t > 0$.

R.

$$
\begin{aligned}
1)\qquad & \ddot s = -2\mu\omega\dot s - \frac{\mu}{R}\dot s^2 - \mu\omega^2 R\,; \\
2)\qquad & \dot s(\bar t) = 0\,, \quad \textit{per un } \bar t < v_0/(\mu\omega^2 R).
\end{aligned}
$$

6. [22/2/2010 (ex)I] Un piano mobile $\Pi(t)$ si muove mantenendosi sovrapposto al piano fisso $y_3 = 0$, con velocità di traslazione data da

$$
\alpha t\boldsymbol{e}_2\,;
$$

qui (y_i) indica la terna delle coordinate nel sistema di riferimento fisso. Un punto materiale P è vincolato a $\Pi(t)$ e sottoposto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + k x_1 \boldsymbol{e}_1 \,,$$

ove (x_i) indica la terna di coordinate nel sistema solidale con $\Pi(t)$ dato da $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{e}_i)$; si assume che $O(0)$ coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso e che il piano $\Pi(t)$ coincida con $x_3 = 0$. Qui α, μ e k sono costanti positive.
Scrivere le equazioni di moto di P.
Soluzione
Si ha per le ipotesi che

$$\boldsymbol{v}_O(t) = \alpha t \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Inoltre è chiaro che la velocità angolare di $\mathcal{S}$ è data da $\boldsymbol{\omega} = 0$. Quindi in $\mathcal{S}$ le forze fittizie sono date da

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -m\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}} = -m\boldsymbol{a}_O = -m\alpha \boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} = 0 \,.$$

Le equazioni di moto sono dunque date da

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\mu \dot{x}_1 + k x_1 \,, \\ m\ddot{x}_2 &= -\mu \dot{x}_2 - m\alpha \,. \end{aligned}$$

R.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\mu \dot{x}_1 + k x_1 \,, \\ m\ddot{x}_2 &= -\mu \dot{x}_2 - m\alpha \,. \end{aligned}$$

7. [22/2/2010 (ex)II] Un piano mobile $\Pi(t)$ si muove mantenendosi sovrapposto al piano fisso $y_3 = 0$, con velocità di traslazione data da

$$\alpha t \boldsymbol{e}_1 \,;$$

qui (y_i) indica la terna delle coordinate nel sistema di riferimento fisso. Un punto materiale P è vincolato a $\Pi(t)$ e sottoposto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + k \boldsymbol{e}_2 \,,$$

ove (x_i) indica la terna di coordinate nel sistema solidale con $\Pi(t)$ dato da $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{e}_i)$; si assume che $O(0)$ coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso e che il piano $\Pi(t)$ coincida con $x_3 = 0$. Qui α, μ e k sono costanti positive.
Scrivere le equazioni di moto di P.
R.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\mu \dot{x}_1 - m\alpha \,, \\ m\ddot{x}_2 &= -\mu \dot{x}_2 + k \,. \end{aligned}$$

450. Corpi rigidi: precessioni

1. [4/7/2005 (ex)I] Un cilindro retto circolare omogeneo di massa m, raggio R e altezza h precede intorno al suo centro di massa G. Al tempo $t = 0$ la sua velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ nel sistema di riferimento fisso è

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{01}\boldsymbol{u}_1 + \omega_{03}\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \omega_{01}\,, \omega_{03} > 0\,,$$

ove $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ sono i versori del sistema di riferimento solidale con il cilindro, con origine in G. In particolare $\boldsymbol{u}_3$ è diretto come l'asse del cilindro.
Il cilindro è soggetto a un momento delle forze esterne (polo G)

$$\boldsymbol{M} = \lambda \cos(kt)\boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove λ, $k > 0$.
Determinare il valore massimo raggiunto da $|\boldsymbol{\omega}(t)|^2$ durante il moto.
SOLUZIONE
Usiamo le equazioni di Eulero per ricavare $\boldsymbol{\omega}(t)$. Il tensore d'inerzia nel sistema di riferimento solidale indicato vale

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{diag}(I_{11}, I_{11}, I_{33})\,,$$

per la simmetria del cilindro. Perciò le equazioni di Eulero si scrivono come

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 \,,\\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 \,,\\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= \lambda\cos(kt)\,. \end{aligned}$$

Dalla terza di queste equazioni si ricava subito

$$\omega_3(t) = \frac{\lambda}{I_{33}k}\sin(kt) + \omega_{03}\,, \qquad t \geq 0\,.$$

Dalle prime due si ottiene per ogni t

$$\dot{\omega}_1\omega_1 + \dot{\omega}_2\omega_2 = 0\,,$$

per cui

$$\omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2 = \omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2 = \omega_{01}^2\,, \qquad t \geq 0\,.$$

Quindi

$$|\boldsymbol{\omega}(t)|^2 = \omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2 + \omega_3(t)^2 = \omega_{01}^2 + \Big(\frac{\lambda}{I_{33}k}\sin(kt) + \omega_{03}\Big)^2\,.$$

Dato che $\omega_{03} > 0$ il massimo viene raggiunto quando $\sin(kt) = 1$, ossia

$$\max_{t\geq 0}|\boldsymbol{\omega}(t)|^2 = \omega_{01}^2 + \Big(\frac{\lambda}{I_{33}k} + \omega_{03}\Big)^2\,.$$

2. [4/7/2005 (ex)II] Un cono retto circolare omogeneo di massa m, raggio di base R e altezza h precede intorno al suo centro di massa G. Al tempo $t = 0$ la sua velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ nel sistema di riferimento fisso è

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{02}\boldsymbol{u}_2 + \omega_{03}\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \omega_{02}\,, \omega_{03} > 0 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ sono i versori del sistema di riferimento solidale con il cono, con origine in G. In particolare $\boldsymbol{u}_2$ è diretto come l'asse del cono.
Il cono è soggetto a un momento delle forze esterne (polo G)

$$\boldsymbol{M} = k \sin(\lambda t)\boldsymbol{u}_2 \,,$$

ove λ, $k > 0$.
Determinare il valore massimo raggiunto da $|\boldsymbol{\omega}(t)|^2$ durante il moto.
R.

$$\omega_{03}^2 + \Big(\omega_{02} + \frac{2k}{I_{22}\lambda}\Big)^2 \,.$$

3. [18/7/2005 (ex)I] Un cubo omogeneo di massa m e spigolo $2L$ precede intorno al suo centro di massa C. Il cubo è soggetto a una forza $\boldsymbol{F}$ di modulo costante μ, applicata a un suo vertice A; $\boldsymbol{F}$ si mantiene sempre ortogonale a $\overrightarrow{CA}$, e costante nel sistema di riferimento solidale con il cubo.
Sapendo che per $t = 0$ la velocità angolare del cubo nel sistema di riferimento fisso è nulla, dimostrare che il moto è una rotazione e determinare il primo istante $t_1 > 0$ in cui A torna a occupare la sua posizione iniziale.
Soluzione
Scegliamo un sistema di riferimento solidale con il cubo $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, con $\boldsymbol{u}_1$ parallelo a $\overrightarrow{CA}$ e $\boldsymbol{u}_2$ parallelo a $\boldsymbol{F}$. Per motivi di simmetria, in questo sistema di riferimento, come in ogni altro sistema di riferimento solidale con origine in C,

$$\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{diag}(I, I, I) \,,$$

ove I è il momento d'inerzia centrale. Si ha, scegliendo come polo C,

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = \overrightarrow{CA} \wedge \boldsymbol{F} = \sqrt{3}L\mu\boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2 = \sqrt{3}L\mu\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Dunque le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I\dot{\omega}_1 &= 0 \,, \\ I\dot{\omega}_2 &= 0 \,, \\ I\dot{\omega}_3 &= \sqrt{3}L\mu \,, \end{aligned}$$

da cui, usando il dato iniziale $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \sqrt{3}\frac{L\mu}{I}t\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Quindi il moto è una rotazione (non uniforme) intorno alla retta fissa per C con direzione $\boldsymbol{u}_3$.

Il primo istante $t_1 > 0$ in cui A torna a occupare la sua posizione iniziale sarà perciò quello in cui A compie il primo giro nel suo moto circolare; se chiamiamo θ la coordinata angolare di A nel piano ortogonale a $\boldsymbol{u}_3$ cui appartiene, è noto che

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\theta}(t)\boldsymbol{u}_3 \,, \quad \text{ossia} \quad \theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \omega_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{3}\frac{L\mu}{2I}t^2 \,.$$

Ne segue che $\theta(t) - \theta(0) = 2\pi$ quando

$$t = t_1 = \sqrt{\frac{4\pi I}{\sqrt{3}L\mu}} \,.$$

4. [18/7/2005 (ex)I] Una lamina quadrata omogenea di lato $2L$ e massa m è vincolata a ruotare intorno all'asse comune di due suoi lati opposti, che coincide con l'asse x_3 del riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3).
Inoltre il centro di massa della lamina è fisso.
I vincoli sono lisci.
Sulla lamina agisce una densità di forza

$$\lambda x_2 \boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \lambda > 0 \text{ costante.}$$

Sapendo che all'istante iniziale la lamina giace sul piano $x_1 = 0$, ed è ferma, determinarne l'energia cinetica nel primo istante positivo $t_1 > 0$ in cui la lamina torna a giacere sul piano $x_1 = 0$.
SOLUZIONE
Scegliamo un sistema di riferimento solidale con la lamina $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, con $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{u}_1$ ortogonale al piano della lamina. In questo sistema di riferimento

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \boldsymbol{u}_3 = \omega_3 \boldsymbol{e}_3 \,,$$

e quindi la terza equazione di Eulero è

$$I_{33}\dot{\omega}_3 = \boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3 \,,$$

se $\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}}$ indica il momento delle forze esterne (con polo in O). D'altronde, il momento delle reazioni vincolari ha componente nulla lungo $\boldsymbol{u}_3$, perché il vincolo è liscio.
Per calcolare $\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3$ parametrizziamo così la lamina: indicando con θ l'angolo formato dal piano della lamina con il piano fisso $x_2 = 0$, si ha nel sistema di riferimento fisso per il generico punto della lamina

$$P(s, r) = (s\cos\theta, s\sin\theta, r) \,, \qquad -L \le s \,, r \le L \,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3 = \int_{-L}^{L} \mathrm{d}s \int_{-L}^{L} \mathrm{d}r (s\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + s\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + r\boldsymbol{e}_3) \wedge \lambda s \sin\theta \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3$$
$$= -\frac{4}{3}L^4\lambda\sin^2\theta \,.$$

Tenendo presente che $\omega_3 = \dot\theta$*, la terza equazione di Eulero diviene*

$$I_{33}\ddot\theta = -\frac{4}{3}L^4\lambda\sin^2\theta\,, \tag{1}$$

da cui

$$I_{33}\ddot\theta\dot\theta = -\frac{4}{3}L^4\lambda\dot\theta\sin^2\theta\,,$$

e integrando sull'intervallo $[0,t]$

$$I_{33}\dot\theta(t)^2 = I_{33}\dot\theta(0)^2 - \frac{4}{3}L^4\lambda\Big(\theta(t)-\theta(0)-\frac{\sin 2\theta(t)-\sin 2\theta(0)}{2}\Big)\,.$$

Ricordando che all'istante $t=0$ *si ha*

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2}\,,\qquad \dot\theta(0) = 0\,,$$

si ottiene nell'istante t_1 *in cui* $\theta(t_1) = -\pi/2$*,*

$$I_{33}\dot\theta(t_1)^2 = -\frac{4}{3}L^4\lambda\Big(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{4}{3}\pi L^4\lambda\,,$$

e infine

$$T(t_1) = \frac{1}{2}I_{33}\dot\theta(t_1)^2 = \frac{2}{3}\pi L^4\lambda\,.$$

Si noti che i vincoli permetterebbero alla lamina di giacere di nuovo sul piano $x_1 = 0$ *in corrispondenza di uno qualsiasi dei due valori*

$$\theta(t_1) = -\frac{\pi}{2}\quad e\quad \theta(t_1) = \frac{3}{2}\pi\,.$$

Il primo è quello corretto secondo l'equazione di moto (1) *che in effetti implica subito che durante il moto* $\dot\theta$ *è sempre non crescente. Se poi si opera la scelta (sbagliata)* $\theta(t_1) = 3\pi/2$ *si trova* $T(t_1) < 0$.

R.

$$\frac{2}{3}\pi L^4\lambda\,.$$

5. [18/7/2005 (ex)II] Una sfera omogenea di massa m e raggio R precede intorno al suo centro di massa. La sfera è soggetta a una forza $\boldsymbol{F}$ di modulo costante λ, applicata a un punto A della sua superficie, solidale con la sfera medesima. La forza $\boldsymbol{F}$ si mantiene sempre tangente a una circonferenza massima della sfera, anch'essa solidale con la sfera medesima.
Sapendo che per $t = 0$ la velocità angolare della sfera nel sistema di riferimento fisso è nulla, dimostrare che il moto è una rotazione e determinare il primo istante $t_1 > 0$ in cui A torna a occupare la sua posizione iniziale.

R. *Se* I *è il momento d'inerzia centrale,*

$$t_1 = \sqrt{\frac{4\pi I}{R\lambda}}\,.$$

6. [18/7/2005 (ex)II] Una lamina quadrata omogenea di lato $2L$ e massa m è vincolata a ruotare intorno all'asse comune di due suoi lati opposti, che coincide con l'asse x_1 del riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3).
Inoltre il centro di massa della lamina è fisso.
I vincoli sono lisci.
Sulla lamina agisce una densità di forza

$$\mu x_3 \boldsymbol{e}_2 , \qquad \mu > 0 \text{ costante.}$$

Sapendo che all'istante iniziale la lamina giace sul piano $x_2 = 0$, ed è ferma, determinarne l'energia cinetica nel primo istante positivo $t_1 > 0$ in cui la lamina giace sul piano $x_3 = 0$.
R.

$$T = \frac{1}{2} I_{11} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{3} L^4 \lambda \pi .$$

7. [12/9/2005 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di raggio $R > 0$ ha il centro coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3), ed è vincolata a ruotare intorno all'asse verticale x_3. I suoi punti di intersezione $A = (0, 0, -R)$ e $B = (0, 0, R)$ con tale asse sono fissi.
Ciascuna delle due semicirconferenze γ_1 e γ_2 in cui γ è divisa dai punti A e B è omogenea, di massa rispettivamente m_1 e m_2.
All'istante iniziale γ giace sul piano $x_1 = 0$, con γ_1 nel semipiano $x_2 \geq 0$, e $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{30} \boldsymbol{e}_3$, $\omega_{30} > 0$.
Su γ agiscono il peso e le reazioni vincolari $\boldsymbol{f}_{\text{vin}}{}^A$ e $\boldsymbol{f}_{\text{vin}}{}^B$.
Si determinino le componenti nella base fissa $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, di

$$\boldsymbol{\mu} = \overrightarrow{OA} \wedge \boldsymbol{f}_{\text{vin}}{}^A + \overrightarrow{OB} \wedge \boldsymbol{f}_{\text{vin}}{}^B ,$$

come funzioni esplicite di m_1, m_2, R, g, ω_{30} e t.
Soluzione
Scegliamo una base solidale con γ, $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ in modo che $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$, e

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{G_2 G_1}}{\left|\overrightarrow{G_2 G_1}\right|} ,$$

ove G_i è il centro di massa di γ_i, $i = 1, 2$. Questa terna è principale d'inerzia in O. Scegliendo come polo O, per la seconda equazione cardinale si ha

$$d\boldsymbol{u}_1 \wedge (-m_1 g \boldsymbol{u}_3) + d(-\boldsymbol{u}_1) \wedge (-m_2 g \boldsymbol{u}_3) + \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega} ,$$

se denotiamo con $d > 0$ la comune distanza di ciascuno dei G_i dall'asse x_3. Dunque le tre equazioni di Eulero si riducono nell'ordine a

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0 , \\ &\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{u}_2 = (m_2 - m_1) d g , \\ &I_{33} \dot{\omega}_3 = 0 ; \end{aligned}$$

infatti $\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0$ perché i vincoli sono lisci.
Si ricava intanto

$$\omega_3(t) = \omega_{30} \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

Dunque l'angolo formato dal piano della circonferenza con il piano fisso $x_1 = 0$ all'istante t sarà $\theta(t) = \omega_{30} t$.
Infine

$$\boldsymbol{\mu} = (m_2 - m_1) d g \boldsymbol{u}_2 = (m_2 - m_1) d g \big[- \cos(\omega_{30} t) \boldsymbol{e}_1 - \sin(\omega_{30} t) \boldsymbol{e}_2 \big] \,.$$

Resta da calcolare d in funzione di R; un calcolo elementare dà $d = 2R/\pi$.

8. [12/9/2005 (ex)II] Una circonferenza materiale γ di raggio $R > 0$ ha il centro coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso

$$(O, x_1, x_2, x_3) \,,$$

ed è vincolata a ruotare intorno all'asse verticale x_2. I suoi punti di intersezione $A = (0, -R, 0)$ e $B = (0, R, 0)$ con tale asse sono fissi.
Ciascuna delle due semicirconferenze γ_1 e γ_2 in cui γ è divisa dai punti A e B è omogenea, di massa rispettivamente m_1 e m_2.
All'istante iniziale γ giace sul piano $x_1 = 0$, con γ_1 nel semipiano $x_3 \geq 0$, e $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{20} \boldsymbol{e}_2$, $\omega_{20} > 0$.
Su γ agiscono il peso e le reazioni vincolari ${\boldsymbol{f}_{\text{vin}}}^A$ e ${\boldsymbol{f}_{\text{vin}}}^B$.
Si determinino le componenti nella base fissa $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, di

$$\boldsymbol{\mu} = \overrightarrow{OA} \wedge {\boldsymbol{f}_{\text{vin}}}^A + \overrightarrow{OB} \wedge {\boldsymbol{f}_{\text{vin}}}^B \,,$$

come funzioni esplicite di m_1, m_2, R, g, ω_{20} e t.
R.

$$\boldsymbol{\mu} = (m_2 - m_1) \frac{2R}{\pi} g \big[\cos(\omega_{20} t) \boldsymbol{e}_1 - \sin(\omega_{20} t) \boldsymbol{e}_3 \big] \,.$$

9. [15/12/2005 (ex)I] Un cilindro retto di massa m, raggio R e altezza H precede intorno al suo centro O, con vincolo liscio. All'istante iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0 \boldsymbol{u}_3(0) \,, \qquad \omega_0 > 0 \,,$$

se $\boldsymbol{u}_3$ denota il versore della direzione dell'asse del cilindro.
Il cilindro è soggetto a un momento delle forze esterne (rispetto a O)

$$\boldsymbol{M}^{\text{ext}}(t) = -\mu \sqrt{|\boldsymbol{\omega}(t)|} \boldsymbol{u}_3(t) \,,$$

ove $\mu > 0$ è costante.
Descrivere il moto del cilindro fino all'istante in cui si arresta.
Soluzione

Scegliamo un sistema di riferimento solidale con il cilindro $(O, \boldsymbol{u}_i)$*, ove* $\boldsymbol{u}_3$ *si mantiene allineato con l'asse del cilindro. Le equazioni di Eulero, in questo sistema (che è principale), sono*

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 \,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 \,, \\ I_{33}\omega_3 &= -\mu\sqrt[4]{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} \,, \end{aligned}$$

con le condizioni iniziali

$$\omega_1(0) = 0 \,, \qquad \omega_2(0) = 0 \,, \qquad \omega_3(0) = \omega_0 \,.$$

Moltiplicando la i*-esima equazione per* ω_i*,* $i = 1$*, 2, e sommando le due equazioni si ha*

$$I_{11}(\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2) = 0 \,,$$

da cui, integrando in t*,*

$$\omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2 = \omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2 = 0 \,, \qquad \text{per ogni } t \geq 0.$$

Sostituendo nella terza equazione di Eulero, si ha

$$I_{33}\dot{\omega}_3 = -\mu\sqrt[4]{\omega_3^2} = -\mu\sqrt{\omega_3} \,,$$

almeno nell'intervallo massimale $[0, \bar{t})$ *ove* $\omega_3 > 0$*. In tale intervallo*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\sqrt{\omega_3}) = \frac{\dot{\omega}_3}{\sqrt{\omega_3}} = -\frac{\mu}{I_{33}} \,,$$

da cui

$$\sqrt{\omega_3(t)} - \sqrt{\omega_0} = -\frac{\mu}{2I_{33}}t \,,$$

e

$$\omega_3(t) = \Big(\sqrt{\omega_0} - \frac{\mu}{2I_{33}}t\Big)^2 \,, \qquad 0 \leq t < \bar{t} = \frac{2I_{33}}{\mu}\sqrt{\omega_0} \,.$$

Quindi il cilindro ruota di un angolo

$$\varphi(t) = -\frac{2I_{33}}{3\mu}\Big(\sqrt{\omega_0} - \frac{\mu}{2I_{33}}t\Big)^3 \,, \qquad 0 \leq t < \bar{t} \,,$$

ove si è scelto ad arbitrio, come indicato, il valore iniziale $\varphi(0)$*.*
R.

$$\varphi(t) = -\frac{2I_{33}}{3\mu}\Big(\sqrt{\omega_0} - \frac{\mu}{2I_{33}}t\Big)^3 \,, \qquad 0 \leq t < \bar{t} = \frac{2I_{33}}{\mu}\sqrt{\omega_0} \,.$$

10. [7/4/2006 (ex)I] Una circonferenza omogenea γ di massa $m > 0$ e raggio $R > 0$ è vincolata a ruotare intorno a un suo diametro, che giace su una retta fissa r. Il centro C della circonferenza è fisso su r.
La circonferenza è ferma all'istante iniziale $t = 0$ ed è soggetta alla forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{e} \,,$$

ove λ, $\mu > 0$ sono costanti e

- $\boldsymbol{u}$ è il versore normale al piano di γ;
- $\boldsymbol{e}$ è il versore della retta r.

La forza $\boldsymbol{F}$ è applicata in un punto P di γ, e con essa solidale, tale che

$$\boldsymbol{e} \cdot \overrightarrow{CP} = \frac{R}{\sqrt{2}} .$$

Si scrivano le equazioni di moto della circonferenza.

Soluzione

Scegliamo un sistema di riferimento solidale con la circonferenza $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$, con

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u} , \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e} .$$

Il punto P in questo sistema è individuato da

$$\overrightarrow{CP} = \frac{R}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) .$$

Quindi, scegliendo C come polo, e ricordando che il momento risultante delle reazioni vincolari lungo r è nullo, perché i vincoli sono lisci,

$$\boldsymbol{M}^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3 = \overrightarrow{CP} \wedge \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_3 = \Big[\frac{R}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) \wedge (\lambda \boldsymbol{u}_1 + \mu \boldsymbol{u}_3) \Big] \cdot \boldsymbol{u}_3 = -\lambda \frac{R}{\sqrt{2}} .$$

Perciò, essendo il moto una rotazione intorno alla direzione fissa $\boldsymbol{u}_3$, si ha $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \boldsymbol{u}_3$ (per un'opportuna scelta dell'angolo φ), e

$$I_{33} \dot{\omega}_3 = I_{33} \ddot{\varphi} = -\lambda \frac{R}{\sqrt{2}} , \qquad \omega_3(0) = \dot{\varphi}(0) = 0 .$$

R.

$$I_{33} \ddot{\varphi}(t) = -\lambda \frac{R}{\sqrt{2}} , \quad \dot{\varphi}(0) = 0 .$$

11. [19/7/2006 (ex)I] Un cilindro retto di raggio R e altezza H, rigido, omogeneo, è vincolato a ruotare intorno all'asse fisso passante per i centri A e B delle sue basi, mantenendo A e B fissi su tale asse.
Denotiamo con $(O, \boldsymbol{e}_i)$ un sistema di riferimento fisso, ove O è il centro del cilindro, e con $(O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con il cilindro, tali che

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3(t) = \frac{\overrightarrow{BA}}{H} , \qquad \text{per ogni } t.$$

Il cilindro è soggetto alle forze (con λ, $\mu > 0$ costanti)

$$\boldsymbol{F}_1 = \lambda \boldsymbol{e}_1 , \quad \text{applicata in } P_1, \text{ ove } \overrightarrow{AP_1} = R \boldsymbol{u}_1,$$
$$\boldsymbol{F}_2 = \mu \boldsymbol{u}_2 , \quad \text{applicata in } P_2, \text{ ove } \overrightarrow{BP_2} = R \boldsymbol{u}_1.$$

(Ossia P_1 e P_2 sono le intersezioni con le basi di una stessa generatrice del cilindro.)
I momenti delle reazioni vincolari lungo l'asse di rotazione sono nulli.
Il cilindro è fermo all'istante $t = 0$.
Determinare l'equazione di moto.
SOLUZIONE
Visto che il moto è una rotazione è sufficiente considerare per determinarlo quella delle tre equazioni scalari di Eulero che corrisponde alla direzione dell'asse di rotazione, cioè, in questo caso, alla direzione $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3$. *Se* $\varphi(t)$ *indica l'angolo tra* $\boldsymbol{u}_1(t)$ *e* $\boldsymbol{e}_1$ *(supponendo* $\varphi(0) = 0$*), si avrà*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t)\boldsymbol{e}_3 \,,$$

e (scegliendo O come polo)

$$I_{33}\ddot{\varphi} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3 \,.$$

Resta da calcolare

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} &= \overrightarrow{OP_1} \wedge (\lambda \boldsymbol{e}_1) + \overrightarrow{OP_2} \wedge (\mu \boldsymbol{u}_2) \\
&= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP_1}) \wedge (\lambda \boldsymbol{e}_1) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP_2}) \wedge (\mu \boldsymbol{u}_2) \\
&= \lambda \frac{H}{2} \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 + \lambda R \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1 - \mu \frac{H}{2} \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{u}_2 + \mu R \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2 \\
&= \lambda R \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1 + \mu R \boldsymbol{u}_3 + \text{un vettore ortogonale a } \boldsymbol{u}_3 .
\end{aligned}$$

Per calcolare $\boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1$ *ricordiamo che per definizione di* φ

$$\boldsymbol{u}_1 = \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,,$$

per cui infine

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = (\mu R - \lambda R \sin\varphi)\boldsymbol{u}_3 + \text{un altro vettore ortogonale a } \boldsymbol{u}_3 .$$

Il moto è quindi determinato dalla soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned}
& I_{33}\ddot{\varphi} = \mu R - \lambda R \sin\varphi \,, \\
& \varphi(0) = 0 \,, \\
& \dot{\varphi}(0) = 0 \,.
\end{aligned}$$

R. *Equazione di moto:*

$$I_{33}\ddot{\varphi} = \mu R - \lambda R \sin\varphi \,.$$

12. [19/7/2006 (ex)II] Un cilindro retto di raggio R e altezza H, rigido, omogeneo, è vincolato a ruotare intorno all'asse fisso passante per i centri A e B delle sue basi, mantenendo A e B fissi su tale asse.
Denotiamo con $(O, \boldsymbol{e}_i)$ un sistema di riferimento fisso, ove O è il centro del cilindro, e con $(O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con il cilindro, tali che

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3(t) = \frac{\overrightarrow{BA}}{H} \,, \qquad \text{per ogni } t.$$

Il cilindro è soggetto alle forze (con λ, $\mu > 0$ costanti)

$$\boldsymbol{F}_1 = \lambda \boldsymbol{u}_2 \,, \quad \text{applicata in } P_1, \text{ ove } \overrightarrow{AP_1} = R\boldsymbol{u}_1,$$
$$\boldsymbol{F}_2 = \mu \boldsymbol{e}_1 \,, \quad \text{applicata in } P_2, \text{ ove } \overrightarrow{BP_2} = R\boldsymbol{u}_1.$$

(Ossia P_1 e P_2 sono le intersezioni con le basi di una stessa generatrice del cilindro.)
I momenti delle reazioni vincolari lungo l'asse di rotazione sono nulli.
Il cilindro è fermo all'istante $t = 0$.
Determinare l'equazione di moto.
R. *Equazione di moto:*

$$I_{33}\ddot{\varphi} = \lambda R - \mu R \sin\varphi \,.$$

13. [13/12/2006 (ex)I] Un guscio sferico S di raggio R, massa m e centro C è vincolato a precedere intorno a un suo punto O, coincidente con l'origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Sia $(O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con S. In particolare sia $\overrightarrow{CO} = R\boldsymbol{u}_3$. Quindi $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ è una base (solidale con S) del piano tangente a S nei due suoi punti diametralmente opposti O e O', ove appunto $\overrightarrow{CO'} = -R\boldsymbol{u}_3$.
All'istante $t = 0$ il guscio S è fermo.
In O' è applicata una forza

$$\boldsymbol{F} = \mu[\cos(\lambda t)\boldsymbol{u}_1 + \sin(\lambda t)\boldsymbol{u}_2] \,.$$

Qui R, m, λ, μ sono costanti positive.
Si determini l'energia cinetica T di S come funzione del tempo.
Soluzione
Scriviamo le equazioni di Eulero, scegliendo il polo in O:

$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = \overrightarrow{OO'} \wedge \boldsymbol{F} = -2R\boldsymbol{u}_3 \wedge \boldsymbol{F} = 2R\mu[\sin(\lambda t)\boldsymbol{u}_1 - \cos(\lambda t)\boldsymbol{u}_2] \,.$$

Dunque, visto che per simmetria $I_{11} = I_{22}$,

$$\begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1 = (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 + 2R\mu\sin(\lambda t) \,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 = (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - 2R\mu\cos(\lambda t) \,, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 = 0 \,, \end{cases}$$

con i dati iniziali

$$\omega_1(0) = 0 \,, \qquad \omega_2(0) = 0 \,, \qquad \omega_3(0) = 0 \,.$$

Dunque

$$\omega_3(t) = 0 \,, \qquad t \geq 0 \,,$$

e, ponendo $\beta = 2R\mu/I_{11}$,

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \beta\sin(\lambda t) \,, \\ \dot{\omega}_2 = -\beta\cos(\lambda t) \,. \end{cases}$$

Perciò

$$\omega_1(t) = \frac{\beta}{\lambda}[1 - \cos(\lambda t)]\,,$$
$$\omega_2(t) = -\frac{\beta}{\lambda}\sin(\lambda t)\,.$$

L'energia cinetica è

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2}(I_{11}\omega_1\boldsymbol{u}_1 + I_{11}\omega_2\boldsymbol{u}_2)\cdot(\omega_1\boldsymbol{u}_1 + \omega_2\boldsymbol{u}_2) \\ &= \frac{1}{2}I_{11}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \\ &= \frac{1}{2}I_{11}\frac{\beta^2}{\lambda^2}[1 - 2\cos(\lambda t) + \cos^2(\lambda t) + \sin^2(\lambda t)] \\ &= I_{11}\frac{\beta^2}{\lambda^2}[1 - \cos(\lambda t)]\,. \end{aligned}$$

R.

$$T = I_{11}\frac{\beta^2}{\lambda^2}[1 - \cos(\lambda t)]\,.$$

14. [4/7/2007 (ex)I] Un cono circolare retto di altezza H, raggio di base R, e massa m è vincolato a precedere intorno al suo vertice O.
Introduciamo anche un sistema di riferimento solidale con il cono $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, con $\boldsymbol{u}_3$ diretto come l'altezza $\overrightarrow{OA}$ del cono (A è quindi il centro della base del cono), e $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ normali a $\overrightarrow{OA}$. Il cono è sottoposto a una distribuzione di forze (che agisce solo sulla base)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\text{base}} = \big[(\alpha - \beta x_2)\boldsymbol{u}_1 + (\alpha + \beta x_1)\boldsymbol{u}_2\big]\delta_{\{x_3 = H\}}\,.$$

Qui α, $\beta \in C(\boldsymbol{R})$ sono funzioni del tempo assegnate e positive.

- Scrivere le equazioni di Eulero.
- Determinare le condizioni perché la componente di $\boldsymbol{\omega}$ ortogonale a $\boldsymbol{u}_3$ sia solidale con $\mathcal{S}$, nell'ipotesi che $\boldsymbol{\omega}(0)\cdot\boldsymbol{u}_3(0) = \omega_{30} > 0$ all'istante iniziale.

Soluzione

A) Calcoliamo il momento delle forze (rispetto a O):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}^{\text{ext}} &= \iiint \overrightarrow{OP}\wedge \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\text{base}} \\ &= \iint_{x_1^2+x_2^2\le R^2} (x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + H\boldsymbol{u}_3)\wedge\big[(\alpha - \beta x_2)\boldsymbol{u}_1 + (\alpha + \beta x_1)\boldsymbol{u}_2\big]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \\ &= \iint_{x_1^2+x_2^2\le R^2} \Big\{\big[x_1(\alpha + \beta x_1) - x_2(\alpha - \beta x_2)\big]\boldsymbol{u}_3 \\ &\quad + H(\alpha - \beta x_2)\boldsymbol{u}_2 - H(\alpha + \beta x_1)\boldsymbol{u}_1\Big\}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \\ &= -H\pi R^2\alpha\boldsymbol{u}_1 + H\pi R^2\alpha\boldsymbol{u}_2 + \frac{\pi}{2}R^4\beta\boldsymbol{u}_3\,. \end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero quindi divengono

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - H\pi R^2\alpha\,,\\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + H\pi R^2\alpha\,,\\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= \frac{\pi}{2}R^4\beta\,,
\end{aligned}
$$

dove si è tenuto conto della simmetria del cono, che implica che le $\boldsymbol{u}_i$ siano direzioni principali in O, e che $I_{11} = I_{22}$.
B) Il vettore

$$\omega_1\boldsymbol{u}_1 + \omega_2\boldsymbol{u}_2$$

è solidale se e solo se $\dot{\omega}_1 = 0$, $\dot{\omega}_2 = 0$, cioè

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{\pi H R^2\alpha}{(I_{11} - I_{33})\omega_3} = \textit{costante}\,,\\
\omega_2 &= \frac{\pi H R^2\alpha}{(I_{11} - I_{33})\omega_3} = \textit{costante}\,.
\end{aligned}
$$

Dato che

$$\omega_3(t) = \omega_{30} + \frac{\pi R^4}{2I_{33}}\int_0^t \beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

questo è possibile se e solo se $I_{11} \neq I_{33}$ e

$$\alpha(t) = C\Big(\omega_{30} + \frac{\pi R^4}{2I_{33}}\int_0^t \beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,,$$

per un'opportuna costante C.
R.

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - H\pi R^2\alpha\,,\\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + H\pi R^2\alpha\,,\\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= \frac{\pi}{2}R^4\beta\,.
\end{aligned}
$$

La condizione richiesta è

$$I_{11} \neq I_{33}\,, \qquad \alpha(t) = C\Big(\omega_{30} + \frac{\pi R^4}{2I_{33}}\int_0^t \beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,, \qquad C \textit{ costante.}$$

15. [4/7/2007 (ex)II] Un cono circolare retto di altezza H, raggio di base R, e massa m è vincolato a precedere intorno al suo vertice O.
Introduciamo anche un sistema di riferimento solidale con il cono $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, con $\boldsymbol{u}_3$ diretto come l'altezza $\overrightarrow{OA}$ del cono (A è quindi il centro della base del cono), e $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ normali a $\overrightarrow{OA}$. Il cono è sottoposto a una distribuzione di forze (che agisce solo sulla base)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\text{base}} = \big[(\alpha + \beta x_2)\boldsymbol{u}_1 + (\alpha - \beta x_1)\boldsymbol{u}_2\big]\delta_{\{x_3=H\}}\,.$$

Qui α, $\beta \in C(\boldsymbol{R})$ sono funzioni del tempo assegnate e positive.

- Scrivere le equazioni di Eulero.
- Determinare le condizioni perché la componente di $\boldsymbol{\omega}$ ortogonale a $\boldsymbol{u}_3$ sia solidale con $\mathcal{S}$, nell'ipotesi che $\boldsymbol{\omega}(0) \cdot \boldsymbol{u}_3(0) = \omega_{30} < 0$ all'istante iniziale.

R.

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - H\pi R^2\alpha\,,\\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + H\pi R^2\alpha\,,\\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= -\frac{\pi}{2}R^4\beta\,.
\end{aligned}
$$

La condizione richiesta è

$$
I_{11} \neq I_{33}\,, \qquad \alpha(t) = C\Big(\omega_{30} - \frac{\pi R^4}{2I_{33}}\int_0^t \beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,, \qquad C \textit{ costante.}
$$

16. [19/7/2007 (ex)I] Una sfera di raggio R e massa m precede intorno al suo centro O, origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Al punto P tale che

$$
\overrightarrow{OP} = R\boldsymbol{e}_1\,,
$$

è applicata la forza

$$
\boldsymbol{F} = \lambda\boldsymbol{e}_2 + \mu\boldsymbol{e}_3\,,
$$

con λ e μ costanti positive.
La sfera ha velocità angolare al tempo $t = 0$

$$
\boldsymbol{\omega}(0) = \sum_{i=1}^{3}\omega_{i0}\boldsymbol{e}_i\,.
$$

Determinare le condizioni sui dati iniziali e gli altri parametri perché esista un istante $\bar{t} > 0$ tale che la sfera si arresti in $\bar{t}$.
SOLUZIONE
Conviene scomporre l'equazione

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}}
$$

lungo la terna $\boldsymbol{e}_i$, *perché, pur non essendo questa solidale, per motivi di simmetria si ha, ponendo*

$$
\boldsymbol{\omega}(t) = \sum_{i=1}^{3}\omega_i(t)\boldsymbol{e}_i\,,
$$

che

$$
\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}(t) = \sum_{i=1}^{3}I\omega_i(t)\boldsymbol{e}_i\,,
$$

ove la costante I è il momento d'inerzia della sfera intorno a un suo diametro. Perciò

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\sigma\omega}(t)=\sum_{i=1}^{3} I\dot{\omega}_i(t)\boldsymbol{e}_i\,.$$

Inoltre

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}}=\overrightarrow{OP}\wedge\boldsymbol{F}=-R\mu\boldsymbol{e}_2+R\lambda\boldsymbol{e}_3\,.$$

Perciò le equazioni di moto sono

$$\begin{aligned}
I\dot{\omega}_1&=0\,,\\
I\dot{\omega}_2&=-R\mu\,,\\
I\dot{\omega}_3&=R\lambda\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\Big(\omega_{10},\omega_{20}-\frac{R\mu}{I}t,\omega_{30}+\frac{R\lambda}{I}t\Big)\,.$$

Le condizioni perché la sfera si arresti per un $\bar{t}>0$ sono quindi date da $\boldsymbol{\omega}(\bar{t})=0$, ossia

$$\omega_{10}=0\,,\qquad \bar{t}:=\frac{I\omega_{20}}{R\mu}=-\frac{I\omega_{30}}{R\lambda}>0\,.$$

R.

$$\omega_{10}=0\,,\qquad \frac{\omega_{20}}{\mu}=-\frac{\omega_{30}}{\lambda}>0\,.$$

17. [19/7/2007 (ex)I] Un corpo rigido precede intorno a un suo punto O. Le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1&=(I_{22}-I_{33})\omega_2\omega_3\,, &(1)\\
I_{22}\dot{\omega}_2&=(I_{33}-I_{11})\omega_1\omega_3\,, &(2)\\
I_{33}\dot{\omega}_3&=(I_{11}-I_{22})\omega_1\omega_2+f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\,, &(3)
\end{aligned}$$

ove $f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$ è una funzione assegnata.
Determinare un integrale primo del moto in ciascuno dei due casi seguenti:

- $I_{11}=I_{22}$.
- $I_{22}=I_{33}$.

SOLUZIONE
A) Moltiplichiamo la (1) *per ω_1, la* (2) *per ω_2, e sommiamo membro a membro. Si ottiene*

$$I_{11}(\omega_1\dot{\omega}_1+\omega_2\dot{\omega}_2)=(I_{11}-I_{33}+I_{33}-I_{11})\omega_1\omega_2\omega_3=0\,,$$

ossia

$$\omega_1^2+\omega_2^2=\text{ costante}\,.$$

B) Dalla (1),

$$\dot{\omega}_1=0\,,$$

che dà subito

$$\omega_1 = \textit{costante}\,.$$

R.

$$\begin{aligned} I_{11} = I_{22} \,: &\qquad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \textit{costante}\,. \\ I_{22} = I_{33} \,: &\qquad \omega_1 = \textit{costante}\,. \end{aligned}$$

18. [19/7/2007 (ex)II] Una sfera di raggio R e massa m precede intorno al suo centro O, origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Al punto P tale che

$$\overrightarrow{OP} = R\boldsymbol{e}_1\,,$$

è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda \boldsymbol{e}_2 + \mu \boldsymbol{e}_3\,,$$

con λ e μ costanti positive.
La sfera ha velocità angolare al tempo $t = 0$

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{20}\boldsymbol{e}_2 + \omega_{30}\boldsymbol{e}_3\,.$$

Determinare le condizioni sui dati iniziali e gli altri parametri perché il moto sia una rotazione.
R.

$$\lambda\omega_{20} + \mu\omega_{30} = 0\,.$$

19. [19/7/2007 (ex)II] Un corpo rigido precede intorno a un suo punto O.
Le equazioni di Eulero sono

$$I_{11}\dot{\omega}_1 = (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3\,, \tag{1}$$
$$I_{22}\dot{\omega}_2 = (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\,, \tag{2}$$
$$I_{33}\dot{\omega}_3 = (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2\,, \tag{3}$$

ove $f \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$ è una funzione assegnata.
Determinare un integrale primo del moto in ciascuno dei due casi seguenti:

- $I_{11} = I_{22}$.
- $I_{11} = I_{33}$.

R.

$$\begin{aligned} I_{11} = I_{22} \,: &\qquad \omega_3 = \textit{costante}, \\ I_{11} = I_{33} \,: &\qquad \omega_1^2 + \omega_3^2 = \textit{costante}\,. \end{aligned}$$

20. [1/4/2008 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato $2L$ è vincolata ad avere il punto medio del lato AB nell'origine.
È soggetta alla forza, applicata nel vertice B, data da

$$\boldsymbol{F} = \frac{k}{4L^2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\,,$$

ove AB e BC sono due lati consecutivi, e $k > 0$ è costante.

1. Scrivere le equazioni di moto.

2. Trovare i moti in cui l'energia cinetica rimane costante.

Soluzione
Il moto è una precessione.
A) Introduciamo il sistema solidale con il rigido $(O, \boldsymbol{u}_i)$, ove O è scelto coincidente con il punto medio di AB, e dunque fisso, e

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2L}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{BC}}{2L}\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2\,.$$

In questo sistema si ha

$$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{u}_3\,,$$

e quindi rispetto al polo O

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = \overrightarrow{OB} \wedge k\boldsymbol{u}_3 = -Lk\boldsymbol{u}_2\,.$$

Perciò, ricordando che

$$I_{33} = I_{11} + I_{22}\,,$$

le equazioni di Eulero si scrivono come

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 = -I_{11}\omega_2\omega_3\,,\\
I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - Lk = I_{22}\omega_1\omega_3 - Lk\,,\\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2\,.
\end{aligned}$$

B) Si ha come in tutte le precessioni

$$T = \frac{1}{2}\Big\{I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 + I_{33}\omega_3^2\Big\}\,,$$

e dunque

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = I_{11}\omega_1\dot{\omega}_1 + I_{22}\omega_2\dot{\omega}_2 + I_{33}\omega_3\dot{\omega}_3 = -Lk\omega_2\,.$$

Quindi se

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0\,, \qquad \alpha < t < \beta\,,$$

si deve avere

$$\omega_2(t) = 0\,, \qquad \alpha < t < \beta\,,$$

da cui segue per la prima equazione di Eulero che anche ω_1 è costante. Dalla terza equazione segue poi che anche ω_3 è costante. Quindi $\boldsymbol{\omega}$ deve essere costante con

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_{10}, 0, \omega_{30})$$

e

$$\omega_{10}\omega_{30} = \frac{Lk}{I_{11}},$$

per la seconda equazione di Eulero.
R. *Le equazioni di moto sono:*

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= -I_{11}\omega_2\omega_3 , \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= I_{22}\omega_1\omega_3 - Lk , \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 . \end{aligned}$$

I moti in cui si conserva l'energia cinetica sono quelli con

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_{10}, 0, \omega_{30}) , \qquad \omega_{10}\omega_{30} = \frac{Lk}{I_{11}} .$$

21. [1/7/2008 (ex)I] Una lamina quadrata omogenea di lato $2L$ e massa m precede intorno al proprio centro O.
Sia $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con la lamina, tale che $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ siano paralleli ai lati della lamina, e indichiamo con (x_1, x_2, x_3) le coordinate in $\mathcal{S}$.
La lamina è soggetta a una distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \big(\alpha x_1^2 x_2 \boldsymbol{u}_1 + \beta x_1 x_2^2 \boldsymbol{u}_3\big) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 ,$$

ove α, $\beta \in \boldsymbol{R}$.
La lamina all'istante iniziale è ferma.
Determinare i valori di α e β in corrispondenza dei quali il moto è una rotazione intorno a uno degli assi di $\mathcal{S}$, e risolvere le equazioni di Eulero in questi casi.
Soluzione
Per usare le equazioni di Eulero, dobbiamo calcolare il momento delle forze esterne (di polo O), che secondo la definizione è dato da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} &= \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} \big[(x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2) \wedge (\alpha x_1^2 x_2 \boldsymbol{u}_1 + \beta x_1 x_2^2 \boldsymbol{u}_3)\big] \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \\ &= \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} \big[\beta x_1 x_2^3 \boldsymbol{u}_1 - \beta x_1^2 x_2^2 \boldsymbol{u}_2 - \alpha x_1^2 x_2^2 \boldsymbol{u}_3\big] \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \\ &= -\beta\Big(\frac{2}{3}L^3\Big)^2 \boldsymbol{u}_2 - \alpha\Big(\frac{2}{3}L^3\Big)^2 \boldsymbol{u}_3 . \end{aligned}$$

Dunque, tenuto presente che nel caso della lamina si ha in O

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} , \qquad I_{11} = I_{22} ,$$

le equazioni di Eulero divengono

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= -I_{11}\omega_2\omega_3 \,, \\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= I_{11}\omega_1\omega_3 - \frac{4}{9}\beta L^6 \,, \\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= -\frac{4}{9}\alpha L^6 \,.
\end{aligned}
$$

Si hanno come è ovvio tre casi, in corrispondenza delle tre rotazioni possibili:
A) $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \boldsymbol{u}_1$*: in questo caso* ω_2 *e* ω_3 *si annullano identicamente. La prima equazione di Eulero implica che allora* ω_1 *è costante, ossia nulla, per le condizioni iniziali. La seconda e la terza equazione, per essere soddisfatte, richiedono che* $\alpha = \beta = 0$*. La rotazione quindi si riduce alla quiete.*
B) $\boldsymbol{\omega} = \omega_2 \boldsymbol{u}_2$*: in questo caso* ω_1 *e* ω_3 *si annullano identicamente. La prima equazione di Eulero implica che allora* ω_1 *è costante, ossia nulla, per le condizioni iniziali. La terza equazione, per essere soddisfatta, richiede che* $\alpha = 0$*. La rotazione quindi si ottiene risolvendo la seconda equazione.*
C) $\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \boldsymbol{u}_3$*: in questo caso* ω_1 *e* ω_2 *si annullano identicamente. La prima equazione di Eulero implica che allora* ω_1 *è costante, ossia nulla, per le condizioni iniziali. La seconda equazione, per essere soddisfatta, richiede che* $\beta = 0$*. La rotazione quindi si ottiene risolvendo la terza equazione.*
R. *Per ogni* $t > 0$*:*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}(t) &= 0 \,, && \text{se } \alpha = \beta = 0; \\
\boldsymbol{\omega}(t) &= -\frac{4}{9}\frac{\beta L^6}{I_{11}} t \boldsymbol{u}_2 \,, && \text{se } \alpha = 0; \\
\boldsymbol{\omega}(t) &= -\frac{4}{9}\frac{\alpha L^6}{I_{33}} t \boldsymbol{u}_3 \,, && \text{se } \beta = 0.
\end{aligned}
$$

22. [1/7/2008 (ex)II] Una lamina quadrata omogenea di lato $2L$ e massa m precede intorno al proprio centro O.
Sia $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con la lamina, tale che $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ siano paralleli ai lati della lamina, e indichiamo con (x_1, x_2, x_3) le coordinate in $\mathcal{S}$.
La lamina è soggetta a una distribuzione di forze

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \big(\alpha x_1 x_2^2 \boldsymbol{u}_2 + \beta x_1^2 x_2 \boldsymbol{u}_3\big) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \,,
$$

ove α, $\beta \in \boldsymbol{R}$.
La lamina all'istante iniziale è ferma.
Determinare i valori di α e β in corrispondenza dei quali il moto è una rotazione intorno a uno degli assi di $\mathcal{S}$, e risolvere le equazioni di Eulero in questi casi.

R. *Per ogni $t > 0$:*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = 0\,, \qquad \text{se } \alpha = \beta = 0;$$
$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{4}{9}\frac{\beta L^6}{I_{11}} t\boldsymbol{u}_1\,, \qquad \text{se } \alpha = 0;$$
$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{4}{9}\frac{\alpha L^6}{I_{33}} t\boldsymbol{u}_3\,, \qquad \text{se } \beta = 0.$$

23. [18/7/2008 (ex)I] Si consideri un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove O è fisso, e le coordinate in $\mathcal{S}$ sono indicate da (λ_i). Un corpo rigido è dato da

$$C = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \le R^2\}\,,$$

con densità

$$\rho(\lambda) = \big[\rho_0 + m\delta_{\{P\}}(\lambda)\big]\,\mathrm{d}\lambda\,,$$

ove ρ_0, $m > 0$ sono costanti e

$$P = \Big(0, \frac{1}{4}R, \frac{\sqrt{15}}{4}R\Big)\,.$$

Si tratta dunque di una sfera omogenea con un punto fissato alla sua superficie.
C è vincolato a precedere intorno al punto fisso O, ed è soggetto a due forze $\boldsymbol{F}_A$ e $\boldsymbol{F}_B$ applicate rispettivamente nei punti A e B tali che

$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_3\,, \qquad \overrightarrow{OB} = -R\boldsymbol{u}_3\,.$$

Le due forze possono venire scelte ad arbitrio, con la sola restrizione che

$$|\boldsymbol{F}_A| \le \mu\,, \qquad |\boldsymbol{F}_B| \le \mu\,,$$

con $\mu > 0$ costante.
Determinare i valori di ω_3 per cui è possibile che il moto sia una rotazione uniforme con velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \boldsymbol{u}_3\,.$$

Soluzione

Scriviamo la matrice $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{M}}$ del tensore d'inerzia rispetto alla terna $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$. Questa terna è principale per la sfera omogenea, mentre i momenti di P sono

$$I_{11}^P = mR^2\,, \qquad I_{22}^P = \frac{15}{16}mR^2\,, \qquad I_{33}^P = \frac{1}{16}mR^2\,,$$
$$I_{12}^P = 0\,, \qquad I_{13}^P = 0\,, \qquad I_{23}^P = -\frac{\sqrt{15}}{16}mR^2\,.$$

Dunque se I è il momento d'inerzia diametrale della sfera,

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} I + I^P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I + I^P_{22} & I^P_{23} \\ 0 & I^P_{23} & I + I^P_{33} \end{pmatrix} .$$

Le equazioni di Eulero sono date da

$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} ,$$

ossia, nell'ipotesi che si abbia un moto di rotazione come richiesto, da

$$0 = I^P_{23}\omega_3^2 + (\boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{M}_B) \cdot \boldsymbol{u}_1 ,$$
$$0 = I^P_{23}\dot{\omega}_3 = (\boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{M}_B) \cdot \boldsymbol{u}_2 ,$$
$$0 = (I + I^P_{23})\dot{\omega}_3 = (\boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{M}_B) \cdot \boldsymbol{u}_3 .$$

Qui

$$\boldsymbol{M}_A = \overrightarrow{OA} \wedge \boldsymbol{F}_A , \qquad \boldsymbol{M}_B = \overrightarrow{OB} \wedge \boldsymbol{F}_B .$$

Si deve avere quindi

$$|I^P_{23}|\omega_3^2 = (\boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{M}_B) \cdot \boldsymbol{u}_1 = |\boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{M}_B| =: M ,$$

e M può assumere qualunque valore in $[0, 2R\mu]$.
R.

$$|\omega_3| \leq \sqrt{\frac{32\mu}{\sqrt{15}mR}} .$$

24. [18/7/2008 (ex)II] Si consideri un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove O è fisso, e le coordinate in $\mathcal{S}$ sono indicate da (λ_i). Un corpo rigido è dato da

$$C = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \leq R^2\} ,$$

con densità

$$\rho(\lambda) = \left[\rho_0 + m\delta_{\{P\}}(\lambda)\right] \mathrm{d}\lambda ,$$

ove ρ_0, $m > 0$ sono costanti e

$$P = \Big(0, \frac{3}{4}R, \frac{\sqrt{7}}{4}R\Big) .$$

Si tratta dunque di una sfera omogenea con un punto fissato alla sua superficie.
C è vincolato a precedere intorno al punto fisso O, ed è soggetto a due forze $\boldsymbol{F}_A$ e $\boldsymbol{F}_B$ applicate rispettivamente nei punti A e B tali che

$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_3 , \qquad \overrightarrow{OB} = -R\boldsymbol{u}_3 .$$

Le due forze possono venire scelte ad arbitrio, con la sola restrizione che

$$|\boldsymbol{F}_A| \leq \mu\,, \qquad |\boldsymbol{F}_B| \leq \mu\,,$$

con $\mu > 0$ costante.
Determinare i valori di ω_3 per cui è possibile che il moto sia una rotazione uniforme con velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \boldsymbol{u}_3\,.$$

R.

$$|\omega_3| \leq \sqrt{\frac{32\mu}{3\sqrt{7}mR}}\,.$$

25. [12/9/2008 (ex)I] Un cilindro retto circolare rigido di massa m, altezza H e raggio R è vincolato a precedere intorno al suo centro O.
Su due punti A e B diametralmente opposti di una delle circonferenze di base sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = a\overrightarrow{AB} \wedge \boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = b\overrightarrow{AB} \wedge \boldsymbol{u}\,,$$

con a, $b > 0$ costanti, e $\boldsymbol{u}$ versore solidale con il cilindro, diretto come il suo asse (nel verso tale che $\overrightarrow{AO} \cdot \boldsymbol{u} > 0$).
Il cilindro è fermo al tempo iniziale.

- Determinare una condizione su a e b che rende il moto una rotazione.
- Nell'ipotesi che l'ellissoide d'inerzia in O sia una sfera, determinare T per ogni valore di a, $b > 0$.

Soluzione
A) Scegliamo come sistema di riferimento solidale $(O, \boldsymbol{u}_i)$, ove

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2R}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \wedge \boldsymbol{u}_1\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}\,.$$

Perciò

$$\overrightarrow{AB} \wedge \boldsymbol{u} = 2R\boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_3 = -2R\boldsymbol{u}_2\,.$$

Il momento delle forze esterne quindi è

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}^{\text{ext}} &= \overrightarrow{OA} \wedge \boldsymbol{F}_A + \overrightarrow{OB} \wedge \boldsymbol{F}_B \\
&= \Big(-\frac{H}{2}\boldsymbol{u}_3 - R\boldsymbol{u}_1\Big) \wedge (-2Ra\boldsymbol{u}_2) + \Big(-\frac{H}{2}\boldsymbol{u}_3 + R\boldsymbol{u}_1\Big) \wedge (2Ra\boldsymbol{u}_2) \\
&= \frac{H}{2}2R(-a+b)\boldsymbol{u}_1 + 2R^2(a+b)\boldsymbol{u}_3\,.
\end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero sono perciò

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 + HR(b-a)\,, \\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3\,, \\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= 2R^2(a+b)\,.
\end{aligned}
$$

Si ha perciò una rotazione, intorno all'asse $\boldsymbol{u}_3$, se $a = b$, caso in cui la soluzione del sistema è

$$
\omega_1(t) = 0\,, \qquad \omega_2(t) = 0\,, \qquad \omega_3(t) = 2\frac{R^3}{I_{33}}(a+b)t\,, \qquad t > 0\,.
$$

B) Nel caso $I_{11} = I_{33}$, le equazioni di Eulero diventano

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= HR(b-a)\,, \\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= 0\,, \\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= 2R^2(a+b)\,.
\end{aligned}
$$

Dunque

$$
T = \frac{1}{2}I_{11}|\boldsymbol{\omega}|^2 = \frac{1}{2}I_{11}\Big[H^2R^2(b-a)^2 + \frac{4R^2}{I_{11}}(a+b)^2\Big]t^2\,.
$$

R. *Si ha una rotazione se $a = b$. Se l'ellissoide è sferico*

$$
T = \frac{1}{2}I_{11}\Big[H^2R^2(b-a)^2 + \frac{4R^2}{I_{11}}(a+b)^2\Big]t^2\,.
$$

26. [12/9/2008 (ex)I] Un parallelepipedo di massa m e di spigoli $a < b < c$ precede per inerzia intorno al suo centro O.
All'istante iniziale

$$
\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha\boldsymbol{u}_1(0) + \beta\boldsymbol{u}_2(0) + \gamma\boldsymbol{u}_3(0)\,,
$$

ove $(O, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con il parallelepipedo, con versori $\boldsymbol{u}_i$ ortogonali alle facce del solido, e coincidente al tempo $t = 0$ con il sistema di riferimento fisso. Qui a, b, c, α, β, γ sono costanti positive.

- Si determini il piano fisso su cui rotola l'ellissoide d'inerzia.
- Si determini la condizione su α, β, γ per cui tale piano ha normale parallela a
$$
\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\,.
$$

Soluzione
A) È noto che, fissata ad arbitrio la costante di scala $c > 0$ dell'ellissoide d'inerzia, tale piano ha equazione

$$
\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{J}_O = \mu = 2c\sqrt{T(0)}\,,
$$

ove l'energia cinetica T, costante lungo il moto, è data da

$$T(0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma\omega}(0) \cdot \boldsymbol{\omega}(0) = \frac{1}{2}(I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2) .$$

Invece il vettore $\boldsymbol{J}_O$, costante lungo il moto, è dato da

$$\boldsymbol{J}_O = \boldsymbol{\sigma\omega}(0) = I_{11}\alpha\boldsymbol{u}_1(0) + I_{22}\beta\boldsymbol{u}_2(0) + I_{33}\gamma\boldsymbol{u}_3(0) = I_{11}\alpha\boldsymbol{e}_1 + I_{22}\beta\boldsymbol{e}_2 + I_{33}\gamma\boldsymbol{e}_3 .$$

B) Dunque la normale del piano, ossia $\boldsymbol{J}_O$, è parallela a

$$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 .$$

se e solo se

$$I_{11}\alpha = I_{22}\beta = I_{33}\gamma .$$

R.

$$I_{11}\alpha x_1 + I_{22}\beta x_2 + I_{33}\gamma x_3 = 2c\sqrt{\frac{1}{2}(I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2)} .$$
$$I_{11}\alpha = I_{22}\beta = I_{33}\gamma .$$

27. [12/9/2008 (ex)II] Un cilindro retto circolare rigido di massa m, altezza H e raggio R è vincolato a precedere intorno al suo centro O.
Su due punti A e B diametralmente opposti di una delle circonferenze di base sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = a\overrightarrow{AB} \wedge \boldsymbol{u} , \qquad \boldsymbol{F}_B = b\overrightarrow{AB} \wedge \boldsymbol{u} ,$$

con a, $b \in \boldsymbol{R}$ costanti, e $\boldsymbol{u}$ versore solidale con il cilindro, diretto come il suo asse (nel verso tale che $\overrightarrow{AO} \cdot \boldsymbol{u} > 0$).
Il cilindro è fermo al tempo iniziale.

- Riconoscere che sono possibili due distinti moti di rotazione (non banale), in corrispondenza di particolari condizioni soddisfatte da a e b, e determinare tali condizioni.
- Nell'ipotesi che l'ellissoide d'inerzia in O sia una sfera, determinare T per ogni valore di a, b.

R. *Si ha una rotazione se $a = b$, o se $a = -b$. Se l'ellissoide è sferico*

$$T = \frac{1}{2}I_{11}\Big[H^2R^2(b-a)^2 + \frac{4R^2}{I_{11}}(a+b)^2\Big]t^2 .$$

28. [12/9/2008 (ex)II] Un parallelepipedo di massa m e di spigoli $a > b > c > 0$ precede per inerzia intorno al suo centro O.

All'istante iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \boldsymbol{u}_1(0) + \beta \boldsymbol{u}_2(0) + \gamma \boldsymbol{u}_3(0)\,,$$

ove $(O, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con il parallelepipedo, con versori $\boldsymbol{u}_i$ ortogonali alle facce del solido, e coincidente al tempo $t = 0$ con il sistema di riferimento fisso. Qui a, b, c, α, β, γ sono costanti.

- Si determini il piano fisso su cui rotola l'ellissoide d'inerzia.
- Si determini la condizione su α, β, γ per cui tale piano ha normale parallela a
$$\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3\,.$$

R.

$$I_{11}\alpha x_1 + I_{22}\beta x_2 + I_{33}\gamma x_3 = 2c\sqrt{\frac{1}{2}(I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2)}\,.$$
$$I_{11}\alpha = -I_{22}\beta = -I_{33}\gamma\,.$$

29. [12/1/2009 (ex)I] Un disco di raggio R e massa m è vincolato a ruotare intorno alla direzione fissa $\boldsymbol{e}_3$, ortogonale al disco stesso, mantenendo il suo centro C fisso nell'origine del sistema di riferimento fisso. Consideriamo anche un sistema di riferimento solidale con il disco, $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$, con $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$; denotiamo con (x_1, x_2, x_3) le coordinate in $\mathcal{S}$.
Sul disco agiscono:

- la distribuzione di forze
$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = \alpha x_1 \boldsymbol{u}_2\,;$$
- la forza elastica applicata in P
$$\boldsymbol{F}_e = -k\overrightarrow{P_0P}\,,$$
ove $\overrightarrow{CP_0} = L\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{CP} = R\boldsymbol{u}_1$.

Qui α, k, L sono costanti positive.
All'istante iniziale il disco è fermo, e $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$.

- Si determini l'equazione di moto del disco.
- Supponendo che il disco compia un giro completo, si determini la sua energia cinetica nell'istante in cui completa il primo giro.

Soluzione

Usiamo le equazioni di Eulero

$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_e + \boldsymbol{M}_{\text{vin}} \,,$$

ove il polo è C, $\boldsymbol{M}_1$ [$\boldsymbol{M}_e$] denota il momento di $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1$ [$\boldsymbol{F}_e$], e $\boldsymbol{M}_{\text{vin}}$ quello delle reazioni vincolari.
In questo caso

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3 \,,$$

se φ denota l'angolo tra $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{u}_1$, cosicché

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2 \,. \end{aligned}$$

Inoltre con i calcoli si ha

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1 = \iint_{\{\lambda_1^2+\lambda_2^2\le R^2\}} & (\lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2) \wedge \alpha\lambda_1\boldsymbol{u}_2 \,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 \\ &= \alpha \iint_{\{\lambda_1^2+\lambda_2^2\le R^2\}} \lambda_1^2 \,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 \boldsymbol{u}_3 = \frac{\alpha\pi}{4} R^4 \boldsymbol{u}_3 \,. \end{aligned}$$

Invece

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_e = \overrightarrow{CP} \wedge \boldsymbol{F}_e = -k\overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{P_0P} = k\overrightarrow{CP} \wedge [\overrightarrow{P_0C} + \overrightarrow{CP}] \\ = kRL\boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1 = -kRL\sin\varphi \boldsymbol{u}_3 \,, \end{aligned}$$

perché

$$\boldsymbol{e}_1 = \cos\varphi \boldsymbol{u}_1 - \sin\varphi \boldsymbol{u}_2 \,.$$

Per determinare il moto è sufficiente la terza equazione di Eulero, ove ricordiamo che, essendo il vincolo liscio,

$$\boldsymbol{M}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0 \,.$$

Dunque l'equazione di moto è

$$I_{33}\ddot{\varphi} = \frac{\alpha\pi}{4} R^4 - kRL\sin\varphi \,,$$

cui vanno aggiunte le condizioni iniziali

$$\varphi(0) = 0 \,, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0 \,.$$

Moltiplicando l'equazione di moto per $\dot{\varphi}$ e integrando su $(0,t)$ si ha

$$\frac{I_{33}}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{\alpha\pi}{4} R^4 \varphi(t) + kRL(\cos\varphi - 1) \,.$$

Supponendo che in $\bar{t}$ valga $\varphi(\bar{t}) = 2\pi$, si ha

$$T(\bar{t}) = \frac{I_{33}}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{\alpha\pi^2}{2} R^4 \,.$$

Il fatto che il disco faccia un giro completo è garantito per esempio se vale la prima delle disuguaglianze seguenti:

$$\frac{\alpha\pi}{4}R^4 > kLR > kLR\frac{1-\cos\varphi}{\varphi} \,,$$

ove la seconda disuguaglianza vale per ogni $\varphi > 0$, *perché* $1 - \cos\varphi < \varphi$.
R. *L'equazione di moto è*

$$I_{33}\ddot{\varphi} = \frac{\alpha\pi}{4}R^4 - kRL\sin\varphi \,.$$

L'energia cinetica quando $\varphi(\bar{t}) = 2\pi$ *vale*

$$T(\bar{t}) = \frac{I_{33}}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{\alpha\pi^2}{2}R^4 \,.$$

30. [12/1/2009 (ex)II] Un disco di raggio R e massa m è vincolato a ruotare intorno alla direzione fissa $\boldsymbol{e}_3$, ortogonale al disco stesso, mantenendo il suo centro C fisso nell'origine del sistema di riferimento fisso. Consideriamo anche un sistema di riferimento solidale con il disco, $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$, con $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$; denotiamo con (x_1, x_2, x_3) le coordinate in $\mathcal{S}$.
Sul disco agiscono:

- la distribuzione di forze
$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = \alpha x_1 \boldsymbol{u}_2 \,;$$
- la forza elastica applicata in P
$$\boldsymbol{F}_e = -k\overrightarrow{P_0P} \,,$$
ove $\overrightarrow{CP_0} = L\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{CP} = R\boldsymbol{u}_2$.

Qui α, k, L sono costanti positive.
All'istante iniziale il disco è fermo, e $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$.

- Si determini l'equazione di moto del disco.
- Supponendo che il disco compia un giro completo, si determini la sua energia cinetica nell'istante in cui completa il primo giro.

R. *L'equazione di moto è*

$$I_{33}\ddot{\varphi} = \frac{\alpha\pi}{2}R^4 - kRL\cos\varphi \,.$$

L'energia cinetica quando $\varphi(\bar{t}) = 2\pi$ *vale*

$$T(\bar{t}) = \frac{I_{33}}{2}\dot{\varphi}^2 = \alpha\pi^2 R^4 \,.$$

31. [12/2/2009 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di lato $2L$, non omogenea, ha densità dipendente dalla distanza dal lato AB:

$$\rho(P) = \begin{cases} \rho_1 \,, & \text{se } \operatorname{dist}(P, AB) \le L, \\ \rho_2 \,, & \text{se } \operatorname{dist}(P, AB) > L. \end{cases}$$

Qui $\rho_1 > \rho_2 > 0$ sono costanti.
La lamina è vincolata a precedere intorno al suo centro geometrico O, che si mantiene fisso.
Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_3$. Alla lamina è applicata anche la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{u} \chi_{AB} \,\mathrm{d}s + \beta \boldsymbol{u} \chi_{BC} \,\mathrm{d}s$$

che è diversa da zero appunto solo sui lati AB e BC. Qui $\mathrm{d}s$ è l'elemento di lunghezza su tali lati, e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale alla lamina, ad essa ortogonale. Qui α e β sono costanti.
All'istante iniziale la lamina è ferma in posizione orizzontale, con $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Eulero.
- Trovare una condizione su α e β perché la lamina resti in equilibrio nella posizione iniziale.

Soluzione
Scriveremo le equazioni di Eulero rispetto al polo O. Scegliamo un sistema solidale con la lamina, con $\boldsymbol{u}_1$ diretto come $\overrightarrow{CB}$, e $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}$. L'origine viene presa in O.
Il momento delle forze esterne è dato da

$$\boldsymbol{M}^{\text{ext}} = \boldsymbol{M}_{\text{peso}} + \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{F}} \,,$$

ove come è noto

$$\boldsymbol{M}_{\text{peso}} = \overrightarrow{OG} \wedge (-mg\boldsymbol{e}_3) \,.$$

Qui la massa è data da

$$m = \rho_1 \frac{4L^2}{2} + \rho_2 \frac{4L^2}{2} = 2L^2(\rho_1 + \rho_2) \,,$$

e il centro di massa G, definendo G_i come il centro di massa della metà con densità ρ_i, da

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \Big(\rho_1 \frac{4L^2}{2} \overrightarrow{OG_1} + \rho_2 \frac{4L^2}{2} \overrightarrow{OG_2} \Big) = \frac{2L^2}{m} (\rho_1 - \rho_2) \overrightarrow{OG_1} = \frac{L}{2} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Il momento del peso è dunque

$$\boldsymbol{M}_{\text{peso}} = -mg \frac{L}{2} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 = \mu_2 \boldsymbol{u}_2 + \mu_3 \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove le componenti μ_i dipenderanno dalla posizione della terna mobile, ossia dagli angoli di Eulero.
Si ha poi

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M_F} = \int_{-L}^{L} (L\boldsymbol{u}_1 + s\boldsymbol{u}_2) \wedge \alpha \boldsymbol{u}_3 \, \mathrm{d}s + \int_{-L}^{L} (s\boldsymbol{u}_1 + L\boldsymbol{u}_2) \wedge \beta \boldsymbol{u}_3 \, \mathrm{d}s \\
= 2\beta L^2 \boldsymbol{u}_1 - 2\alpha L^2 \boldsymbol{u}_2 \,.
\end{aligned}
$$

Dunque le equazioni di Eulero sono, visto che $(\boldsymbol{u}_i)$ è una terna principale d'inerzia,

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot\omega_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 + 2\beta L^2 \,, \\
I_{22}\dot\omega_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \mu_2 - 2\alpha L^2 \,, \\
I_{33}\dot\omega_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + \mu_3 \,.
\end{aligned}
$$

La lamina rimane in equilibrio se e solo se

$$
\boldsymbol{\omega}(t) = 0 \,, \qquad t > 0 \,,
$$

il che, per le condizioni iniziali, è garantito dall'annullarsi di $\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}}$. Si noti anche che, per le condizioni iniziali, per $t = 0$ si ha $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$, e quindi

$$
\boldsymbol{M}_{\mathrm{peso}} = mg \frac{L}{2} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \boldsymbol{u}_2 \,.
$$

R.

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot\omega_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 + 2\beta L^2 \,, \\
I_{22}\dot\omega_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \mu_2 - 2\alpha L^2 \,, \\
I_{33}\dot\omega_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + \mu_3 \,.
\end{aligned}
$$

$$
\beta = 0 \,, \qquad \alpha = \frac{mg}{4L} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \,.
$$

32. [12/2/2009 (ex)I] Un cono circolare retto di altezza h e raggio di base R precede per inerzia intorno al suo vertice O, che rimane fisso.
All'istante iniziale la sua velocità angolare è

$$
\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_3 \,,
$$

ove $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con il cono, con $\boldsymbol{u}_3$ parallelo all'asse del cono. Qui h, R, α, β sono costanti positive.
Determinare $\boldsymbol{\omega}(t)$ per ogni $t > 0$.
Soluzione
Scriviamo le equazioni di Eulero:

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot\omega_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 \,, \\
I_{11}\dot\omega_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 \,, \\
I_{33}\dot\omega_3 &= 0 \,,
\end{aligned}
$$

ove si è tenuto conto che $I_{11} = I_{22}$*, per simmetria. Se* $I_{11} = I_{33}$ *la soluzione è banale.*
In caso contrario,

$$\omega_3 = \beta\,, \qquad \text{per ogni } t,$$

e

$$\ddot{\omega}_1 = (1 - I_{33}I_{11}^{-1})\dot{\omega}_2\beta = -c^2\omega_1\,,$$

ove

$$c = (1 - I_{33}I_{11}^{-1})\beta\,.$$

Perciò

$$\omega_1(t) = k_1 \cos ct + k_2 \sin ct\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali

$$\omega_1(0) = \alpha\,, \qquad \dot{\omega}_1(0) = 0\,,$$

quest'ultima ricavata dal sistema di Eulero, si ha

$$\omega_1(t) = \alpha \cos ct\,,$$

da cui, per la prima equazione del sistema,

$$\omega_2(t) = c^{-1}\dot{\omega}_1(t) = -\alpha \sin ct\,.$$

R. *Se* $I_{11} \neq I_{33}$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha \cos ct\boldsymbol{u}_1 - \alpha \sin ct\boldsymbol{u}_2 + \beta\boldsymbol{u}_3\,, \qquad c = (1 - I_{33}I_{11}^{-1})\beta\,.$$

Se $I_{11} = I_{33}$*,*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_3\,.$$

33. [12/2/2009 (ex)II] Una lamina quadrata $ABCD$ di lato $2L$, non omogenea, ha densità dipendente dalla distanza dal lato AB:

$$\rho(P) = \begin{cases} \rho_1\,, & \text{se } \operatorname{dist}(P, AB) \leq L, \\ \rho_2\,, & \text{se } \operatorname{dist}(P, AB) > L. \end{cases}$$

Qui $\rho_2 > \rho_1 > 0$ sono costanti.
La lamina è vincolata a precedere intorno al suo centro geometrico O, che si mantiene fisso.
Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_3$. Alla lamina è applicata anche la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{u}\chi_{AB}\,\mathrm{d}s + \beta\boldsymbol{u}\chi_{AD}\,\mathrm{d}s$$

che è diversa da zero appunto solo sui lati AB e AD. Qui $\mathrm{d}s$ è l'elemento di lunghezza su tali lati, e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale alla lamina, ad essa ortogonale. Qui α e β sono costanti.
All'istante iniziale la lamina è ferma in posizione orizzontale, con $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Eulero.
- Trovare una condizione su α e β perché la lamina resti in equilibrio nella posizione iniziale.

R.

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 - 2\beta L^2 \,, \\
I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \mu_2 - 2\alpha L^2 \,, \\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + \mu_3 \,.
\end{aligned}$$

$$\beta = 0 \,, \qquad \alpha = \frac{mg}{4L}\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \,.$$

34. [12/2/2009 (ex)II] Un cilindro circolare retto di altezza h e raggio di base R precede per inerzia intorno al suo centro O, che rimane fisso.
All'istante iniziale la sua velocità angolare è

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con il cilindro, con $\boldsymbol{u}_1$ parallelo all'asse del cilindro. Qui h, R, α, β sono costanti positive.
Determinare $\boldsymbol{\omega}(t)$ per ogni $t > 0$.
R. *Se* $I_{11} \neq I_{22}$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha \boldsymbol{u}_1 - \beta \sin ct \boldsymbol{u}_2 + \beta \cos ct \boldsymbol{u}_3 \,, \qquad c = (I_{11} I_{22}^{-1} - 1)\alpha \,.$$

Se $I_{11} = I_{22}$,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_3 \,.$$

35. [11/9/2009 (ex)I] Un cilindro di altezza $2H$, raggio R, massa M, è vincolato a precedere intorno al suo centro C.
Introduciamo il sistema solidale con il cilindro $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$, ove $\boldsymbol{u}_3$ è diretto come l'asse del cilindro.
Sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}_1 \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{u}_1 \,,$$

nei punti A e B rispettivamente dati da

$$\overrightarrow{CA} = R\boldsymbol{u}_2 + H\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \overrightarrow{CB} = -R\boldsymbol{u}_2 - H\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Agisce anche un momento d'attrito di polo C pari a

$$\boldsymbol{M}_{\text{attrito}} = -\mu\boldsymbol{\omega} \,.$$

Qui k, $\mu > 0$ sono costanti.

- Scrivere le equazioni di Eulero del cilindro.
- Determinare l'unico valore di $\boldsymbol{\omega}(0)$ che rende $\boldsymbol{\omega}$ costante durante il moto.

SOLUZIONE
1) Scriviamo le equazioni di Eulero del cilindro, con polo in C. Il momento di $\boldsymbol{F}_A$ e $\boldsymbol{F}_B$ è dato da

$$\overrightarrow{CA} \wedge \boldsymbol{F}_A + \overrightarrow{CB} \wedge \boldsymbol{F}_B = 2\overrightarrow{CA} \wedge \boldsymbol{F}_A = 2k(H\boldsymbol{u}_2 - R\boldsymbol{u}_3)\,.,$$

Perciò le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - \mu\omega_1\,,\\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - \mu\omega_2 + 2kH\,,\\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= -\mu\omega_3 - 2kR\,.
\end{aligned}$$

B) Se deve essere $\boldsymbol{\omega}$ costante, ossia $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$, dalla terza delle equazioni di Eulero si ha subito

$$\omega_3 = -\frac{2kR}{\mu}\,.$$

Sostituendo nelle prime due equazioni si ottiene il sistema non singolare

$$\begin{aligned}
\mu\omega_1 + \alpha\omega_2 &= 0\,,\\
\alpha\omega_1 - \mu\omega_2 &= -2kH\,,
\end{aligned}$$

ove si è posto

$$\alpha = \frac{2kR}{\mu}(I_{11} - I_{33})\,.$$

R.

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - \mu\omega_1\,,\\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - \mu\omega_2 + 2kH\,,\\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= -\mu\omega_3 - 2kR\,.
\end{aligned}$$

$$\omega_1 = -\frac{2kH\alpha}{\mu^2 + \alpha^2}\,, \quad \omega_2 = \frac{2kH\mu}{\mu^2 + \alpha^2}\,, \quad \omega_3 = -\frac{2kR}{\mu}\,; \qquad \alpha := \frac{2kR}{\mu}(I_{11} - I_{33})\,.$$

36. [11/9/2009 (ex)II] Un parallelepipedo con sezione quadrata, di altezza $2H$, lato della base $2R$, massa M, è vincolato a precedere intorno al suo centro C.
Introduciamo il sistema solidale con il parallelepipedo $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$, ove $\boldsymbol{u}_3$ è diretto come l'asse del parallelepipedo, e $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ sono ortogonali alle facce laterali del solido.
Sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}_1\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{u}_1\,,$$

nei punti A e B rispettivamente dati da

$$\overrightarrow{CA} = R\boldsymbol{u}_2 + H\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \overrightarrow{CB} = -R\boldsymbol{u}_2 - H\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Agisce anche un momento d'attrito di polo C pari a

$$\boldsymbol{M}_{\text{attrito}} = -\mu\boldsymbol{\omega} \,.$$

Qui k, $\mu > 0$ sono costanti.

- Scrivere le equazioni di Eulero del rigido.
- Determinare l'unico valore di $\boldsymbol{\omega}(0)$ che rende $\boldsymbol{\omega}$ costante durante il moto.

R.

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - \mu\omega_1 \,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - \mu\omega_2 + 2kH \,, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= -\mu\omega_3 - 2kR \,. \end{aligned}$$

$$\omega_1 = -\frac{2kH\alpha}{\mu^2 + \alpha^2} \,, \quad \omega_2 = \frac{2kH\mu}{\mu^2 + \alpha^2} \,, \quad \omega_3 = -\frac{2kR}{\mu} \,; \qquad \alpha := \frac{2kR}{\mu}(I_{11} - I_{33}) \,.$$

37. [20/11/2009 (ex)I] Un disco rigido di massa M e raggio R precede intorno al suo centro O.
Il sistema $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ è solidale con il disco, e il versore $\boldsymbol{u}_3$ è ad esso ortogonale.
Al disco sono applicate le forze

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_A &= -\lambda\boldsymbol{u}_1 \,, &&\text{nel punto } A \text{, tale che } \overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_2; \\ \boldsymbol{F}_B &= \mu\boldsymbol{e}_1 \,, &&\text{nel punto } B \text{, tale che } \overrightarrow{OB} = R\boldsymbol{u}_1. \end{aligned}$$

Qui λ e μ sono costanti positive.
Determinare le eventuali posizioni di equilibrio del disco.
Sotto l'ulteriore vincolo

$$\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad t \geq 0 \,,$$

scrivere le equazioni di moto del disco.
Soluzione
A) Dobbiamo imporre che $\boldsymbol{M}^{\text{ext}} = 0$, *ossia*

$$\overrightarrow{OA} \wedge \boldsymbol{F}_A + \overrightarrow{OB} \wedge \boldsymbol{F}_B = 0 \,,$$

che equivale a

$$\boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1 = -\frac{\lambda}{\mu}\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Se scriviamo

$$\boldsymbol{e}_1 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \boldsymbol{u}_i$$

all'equilibrio, si ha

$$\alpha_2 \boldsymbol{u}_3 - \alpha_3 \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1 = -\frac{\lambda}{\mu}\boldsymbol{u}_3 \,,$$

da cui

$$\alpha_3 = 0 \,, \qquad \alpha_2 = -\frac{\lambda}{\mu} \,, \qquad \alpha_1 = \pm\sqrt{1 - \Big(\frac{\lambda}{\mu}\Big)^2} \,.$$

Bisogna di necessità assumere $\lambda \le \mu$.
B) Visto che il rigido in questo caso è vincolato a ruotare intorno a un asse fisso, ha un solo grado di libertà. Introduciamo come coordinata lagrangiana l'angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ formato da $\boldsymbol{u}_1$ con $\boldsymbol{e}_1$, cosicché

$$\boldsymbol{u}_1 = \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,.$$

In questo modo

$$\boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1 = -\sin\varphi \boldsymbol{e}_3 = -\sin\varphi \boldsymbol{u}_3 \,.$$

La terza equazione di Eulero quindi dà

$$I\ddot{\varphi} = \boldsymbol{M}^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3 = R\lambda - R\mu \sin\varphi \,.$$

R. *A) Posizioni di equilibrio si hanno solo se $\lambda \le \mu$; in questo caso si ha equilibrio se e solo se si ha*

$$\boldsymbol{e}_1 = \pm\sqrt{1 - \Big(\frac{\lambda}{\mu}\Big)^2}\boldsymbol{u}_1 - \frac{\lambda}{\mu}\boldsymbol{u}_2 \,.$$

B)

$$I\ddot{\varphi} = R\lambda - R\mu \sin\varphi \,.$$

38. [22/2/2010 (ex)I] Un cubo omogeneo di spigolo $2L$, centro C e massa M è vincolato a precedere intorno a un suo vertice A, che rimane fisso.
Il cubo è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}_C = \lambda e^{-\beta t} \boldsymbol{u} \,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale con il cubo e ortogonale a $\overrightarrow{CA}$; inoltre λ, $\beta > 0$ sono costanti.
Il cubo è fermo all'istante iniziale $t = 0$.
Determinare una costante che limiti l'energia cinetica del cubo per tutti i tempi positivi.
Soluzione
Scegliamo una terna principale $(\boldsymbol{u}_i)$ in C in modo che

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} \,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u} \,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2 \,.$$

Per un noto teorema, la $(\boldsymbol{u}_i)$ *è principale anche in* A.
Scriviamo le equazioni di Eulero di polo A *rispetto a questa terna. Troviamo i momenti d'inerzia* I_{kk}. *Se* I *denota il valore comune a tutti i momenti d'inerzia in* C, *per il teorema di Huygens si ha in* A

$$I_{11} = I\,, \qquad I_{22} = I_{33} = I + M\,|AC|^2 = I + 3ML^2\,.$$

Il momento di $\boldsymbol{F}$ *è*

$$\overrightarrow{AC} \wedge \boldsymbol{F} = -L\sqrt{3}\boldsymbol{u}_1 \wedge (\lambda e^{-\beta t}\boldsymbol{u}_2) = -\sqrt{3}\lambda L e^{-\beta t}\boldsymbol{u}_3\,.$$

Dunque si ottiene

$$\begin{aligned}
&I_{11}\dot\omega_1 = 0\,,\\
&I_{22}\dot\omega_2 = (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_3 0\,,\\
&I_{22}\dot\omega_3 = (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 - \sqrt{3}\lambda L e^{-\beta t}\,.
\end{aligned}$$

Dato che $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$, *segue subito che per ogni* $t > 0$

$$\omega_1(t) = 0\,, \quad \omega_2(t) = 0\,, \quad \omega_3(t) = -\frac{\sqrt{3}\lambda L}{\beta I_{22}}(1 - e^{-\beta t})\,.$$

Dunque

$$T(t) = \frac{1}{2} I_{22}^{-1} \frac{3\lambda^2 L^2}{\beta^2}(1 - e^{-\beta t})^2\,,$$

e

$$\sup_{t\geq 0} T(t) = \frac{1}{2} I_{22}^{-1} \frac{3\lambda^2 L^2}{\beta^2}\,.$$

R.

$$\frac{3}{2}(I + 3ML^2)^{-1}\frac{\lambda^2 L^2}{\beta^2}\,.$$

39. [22/2/2010 (ex)II] Un cubo omogeneo di spigolo $2L$, centro C e massa M è vincolato a precedere intorno a un suo vertice A, che rimane fisso.
Il cubo è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}_C = \frac{\lambda}{1 + \beta^2 t^2}\boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale con il cubo e ortogonale a $\overrightarrow{CA}$; inoltre λ, $\beta > 0$ sono costanti.
Il cubo è fermo all'istante iniziale $t = 0$.
Determinare una costante che limiti l'energia cinetica del cubo per tutti i tempi positivi.
R.

$$\frac{3\pi^2}{8\beta^2}(I + 3ML^2)^{-1}L^2\lambda^2\,.$$

40. [8/7/2010 (ex)I] Una sfera di raggio R, massa M e centro C precede per inerzia intorno a un punto fisso O sulla sua superficie.
All'istante iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \frac{\overrightarrow{OC}}{R} + \beta \boldsymbol{u} \,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore tale che $\boldsymbol{u} \perp \overrightarrow{OC}$. Qui α, β sono costanti positive.
Determinare $\boldsymbol{\omega}(t)$.
SOLUZIONE
Scegliamo come sistema di riferimento solidale con il rigido $(O, \boldsymbol{u}_i)$, *con*

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{u} \,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{OC}}{R} \,.$$

Si noti che questo sistema è principale d'inerzia, perché traslato di un sistema principale centrale lungo uno dei suoi assi. Per il teorema di Huygens si ha nella base $(\boldsymbol{u}_i)$

$$\boldsymbol{\sigma}_O = \operatorname{diag}\big(I + MR^2, I + MR^2, I\big) \,.$$

Dunque le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} (I + MR^2)\dot{\omega}_1 &= MR^2 \omega_2 \omega_3 \,, \\ (I + MR^2)\dot{\omega}_2 &= -MR^2 \omega_1 \omega_3 \,, \\ I\dot{\omega}_3 &= 0 \,. \end{aligned}$$

Le condizioni iniziali sono

$$\omega_1(0) = \beta \,, \qquad \omega_2(0) = 0 \,, \qquad \omega_3(0) = \alpha \,.$$

Quindi dalla terza equazione

$$\omega_3(t) = \alpha \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

A questo punto le altre due equazioni danno

$$\ddot{\omega}_1 + \lambda^2 \omega_1 = 0 \,, \qquad \lambda := \frac{MR^2 \alpha}{I + MR^2} \,.$$

R.

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \big(\beta \cos \lambda t, -\beta \sin \lambda t, \alpha\big) \,, \qquad \lambda := \frac{MR^2 \alpha}{I + MR^2} \,.$$

41. [7/9/2010 (ex)I] Un cubo di massa m e spigolo $2L$ è vincolato a precedere intorno al suo centro C.
Sul cubo agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda \boldsymbol{u} \,,$$

applicata in un suo vertice A, ove il versore solidale con il cubo

$$\boldsymbol{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2L}$$

è diretto come lo spigolo AB.
Scrivere le equazioni di moto del cubo.
SOLUZIONE
Scegliamo il sistema principale in C dato da: $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}$; $\boldsymbol{u}_2$ normale a una faccia fissata tra le due che contengono sia A che B; $\boldsymbol{u}_3$ di conseguenza.
Quindi in particolare

$$\overrightarrow{CA} = L\boldsymbol{u}_2 - L\boldsymbol{u}_1 - L\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Il momento della forza dunque risulta

$$\overrightarrow{CA} \wedge \boldsymbol{F}_A = -\lambda L(\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) \,.$$

Perciò le equazioni di Eulero, stante la simmetria dei momenti d'inerzia centrali, risultano

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= 0 \,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= -\lambda L \,, . \\ I_{11}\dot{\omega}_3 &= -\lambda L \end{aligned}$$

R.

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= 0 \,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= -\lambda L \,, . \\ I_{11}\dot{\omega}_3 &= -\lambda L \end{aligned}$$

470. Corpi rigidi: equazioni cardinali

1. [7/7/2006 (ex)I] Denotiamo con $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ il sistema di riferimento fisso. Un parallelepipedo omogeneo di spigoli a, b, $c > 0$ e di massa $m > 0$ è soggetto a due forze

$$\boldsymbol{F}_1 = k\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = -k\boldsymbol{e}_1 \,,$$

con $k > 0$ costante, applicate rispettivamente nei centri di due facce opposte A_1 e A_2.
All'istante iniziale il parallelepipedo è fermo, con le facce A_1 e A_2 parallele al piano $x_3 = 0$, e le altre facce perpendicolari agli assi fissi.
Si determini il massimo raggiunto dall'energia cinetica durante il moto.
SOLUZIONE
Per la prima equazione cardinale

$$m\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{F}^{\text{ext}} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0 \,,$$

per cui

$$\boldsymbol{v}_G(t) = 0 \,, \qquad \text{per ogni } t > 0.$$

Quindi il centro di massa del corpo resta fermo durante il moto.

Scegliamo una terna solidale $(\boldsymbol{u}_i)$ *con* $\boldsymbol{u}_3$ *ortogonale ad* A_1, A_2, *e tale che*

$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{e}_i \,, \qquad i = 1, 2, 3 \,.$$

Denotiamo

$$\boldsymbol{e}_1 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t) \boldsymbol{u}_i(t) \,,$$

cosicché il momento delle forze esterne è (chiamando a *proprio la lunghezza dello spigolo normale ad* A_i*)*

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = 2\frac{a}{2} \boldsymbol{u}_3(t) \wedge k \boldsymbol{e}_1 = ak[\lambda_1(t) \boldsymbol{u}_2(t) - \lambda_2(t) \boldsymbol{u}_1(t)] \,.$$

Proiettando la seconda equazione cardinale lungo gli assi solidali corrispondenti si trovano dunque le

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 - ak\lambda_2(t) \,, \\
I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + ak\lambda_1(t) \,, \\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 \,,
\end{aligned}$$

che vanno unite alle condizioni iniziali

$$\omega_i(0) = 0 \,, \qquad i = 1, 2, 3 \,.$$

Il moto sarà dunque una rotazione non uniforme intorno all'asse $\boldsymbol{u}_2$, *e di conseguenza*

$$\lambda_1(t) = \boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{e}_1 = \cos\theta(t) \,, \quad \lambda_2(t) = \boldsymbol{u}_2(t) \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0 \,,$$

ove θ *rappresenta l'angolo di rotazione di* $\boldsymbol{u}_1$ *nel piano fisso ortogonale a* $\boldsymbol{u}_2$*. Inoltre*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (0, \dot{\theta}(t), 0) \,,$$

e $\theta(t)$ *risolve*

$$I_{22}\ddot{\theta} = ak\cos\theta \,.$$

Moltiplicando questa equazione per $\dot{\theta}$ *e integrando si ha*

$$\frac{1}{2} I_{22} \dot{\theta}(t)^2 = ak \sin\theta(t) \,.$$

Dunque

$$\max T = \max \frac{1}{2} I_{22} \dot{\theta}(t)^2 = ak \,.$$

R.

$$\max T = ak \,.$$

2. [7/7/2006 (ex)I] Una lamina quadrata di lato $2L$ e massa m è vincolata ad avere un lato sull'asse verticale fisso x_3. Il vincolo è tale che la risultante delle reazioni vincolari, e il loro momento risultante, hanno componente nulla lungo x_3.

Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_3. La lamina è anche soggetta a una forza $\boldsymbol{F}$ ad essa ortogonale, applicata nel suo centro di massa G, e di modulo

$$k|x_{3G}|\,,$$

con $k > 0$ costante. Determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ della lamina sapendo che questa è ferma all'istante iniziale con $G = (0, L, 0)$.
[Suggerimento: iniziare determinando la $x_{3G}(t)$ usando la prima equazione cardinale.]

Soluzione

Per la prima equazione cardinale

$$m\boldsymbol{a}_G = -mg\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{f}_{\text{vin}}\,.$$

Dato che $\boldsymbol{F}$ *e* $\boldsymbol{f}_{\text{vin}}$ *non hanno componenti lungo* $\boldsymbol{e}_3$*, ne segue che*

$$m\ddot{x}_{3G} = -mg\,,$$

ossia che

$$x_{3G}(t) = -g\frac{t^2}{2}\,.$$

Quindi la seconda equazione cardinale dà

$$I_{33}\dot{\omega}_3 = (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + Lkg\frac{t^2}{2}\,.$$

Poiché la lamina ruota intorno all'asse x_3*, si avrà* $\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\theta}(t)\boldsymbol{e}_3$ *per un opportuno angolo di rotazione* θ*, il che conduce a*

$$\ddot{\theta} = \frac{Lkg}{2I_{33}}t^2\,,$$

ossia a (tenuto conto delle condizioni iniziali)

$$\theta(t) = \frac{Lkg}{24I_{33}}t^4\,.$$

R.

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{Lkg}{6I_{33}}t^3\boldsymbol{e}_3\,.$$

3. [7/7/2006 (ex)II] Denotiamo con $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ il sistema di riferimento fisso. Un parallelepipedo omogeneo di spigoli a, b, $c > 0$ e di massa $m > 0$ è soggetto a due forze

$$\boldsymbol{F}_1 = -2k\boldsymbol{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = 2k\boldsymbol{e}_2\,,$$

con $k > 0$ costante, applicate rispettivamente nei centri di due facce opposte A_1 e A_2.

All'istante iniziale il parallelepipedo è fermo, con le facce A_1 e A_2 parallele al piano $x_3 = 0$, e le altre facce perpendicolari agli assi fissi.
Si determini il massimo raggiunto dall'energia cinetica durante il moto.
R.

$$\max T = 2ak \,.$$

4. [7/7/2006 (ex)II] Una lamina quadrata di lato L e massa m è vincolata ad avere un lato sull'asse verticale fisso x_1. Il vincolo è tale che la risultante delle reazioni vincolari, e il loro momento risultante, hanno componente nulla lungo x_1.
Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_1. La lamina è anche soggetta a una forza $\boldsymbol{F}$ ad essa ortogonale, applicata nel suo centro di massa G, e di modulo

$$k|x_{1G}| \,,$$

con $k > 0$ costante. Determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ della lamina sapendo che questa è ferma all'istante iniziale con $G = (0, L/2, 0)$.
[Suggerimento: iniziare determinando la $x_{1G}(t)$ usando la prima equazione cardinale.]
R.

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{Lkg}{12 I_{11}} t^3 \boldsymbol{e}_1 \,.$$

5. [22/9/2006 (ex)I] Una lamina materiale a forma di disco è poggiata su un piano Π inclinato sull'orizzontale con un angolo $\alpha \in (0, \pi/2)$. Il coefficiente di attrito statico tra la lamina e il piano è $\mu > 0$. Si assuma $\mu \cos\alpha > \sin\alpha$.
Il piano Π è mobile, con equazione

$$x_2 \sin\alpha - x_3 \cos\alpha = -\frac{ct^2}{2} \sin\alpha \,,$$

ove $c > 0$; i punti solidali con il piano abbiano velocità orizzontale. Il peso quindi risulta diretto nel verso negativo dell'asse x_3.
Si determini il valore massimo del modulo c dell'accelerazione del piano che permette al disco di restare in equilibrio relativo al piano, partendo da condizioni iniziali compatibili con l'equilibrio stesso.
SOLUZIONE
Imponiamo che le forze esterne che agiscono sulla lamina in un sistema di riferimento $\mathcal{S}$ solidale con il piano mobile Π abbiano risultante nulla.
Scegliamo $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, con O coincidente con la posizione del centro del disco all'istante iniziale, $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al piano Π , $\boldsymbol{u}_1$ orizzontale e tangente a Π, e quindi $\boldsymbol{u}_2$ tangente al medesimo piano, con $\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \sin\alpha > 0$.
Scriviamo dunque

$$\boldsymbol{F}^{\text{ext}} = \boldsymbol{F}_{\text{peso}} + \boldsymbol{f}_{\text{vin}} + \boldsymbol{F}_{\text{T}} = 0 \,.$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\text{peso}} &= -mg\sin\alpha\boldsymbol{u}_2 - mg\cos\alpha\boldsymbol{u}_3\,,\\
\boldsymbol{f}_{\text{vin}} &= \boldsymbol{f}_{\text{vin}}^{\text{tang}} + \boldsymbol{f}_{\text{vin}}^{\text{norm}}\,,\\
\boldsymbol{F}_{\text{T}} &= -m\boldsymbol{a}_O = mc\boldsymbol{e}_2 = mc\cos\alpha\boldsymbol{u}_2 - mc\sin\alpha\boldsymbol{u}_3\,.
\end{aligned}
$$

Proiettando lungo $\boldsymbol{u}_2$ *e lungo* $\boldsymbol{u}_3$*:*

$$
\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{f}_{\text{vin}}^{\text{tang}}\right| &= |mg\sin\alpha - mc\cos\alpha|\,,\\
\left|\boldsymbol{f}_{\text{vin}}^{\text{norm}}\right| &= mg\cos\alpha + mc\sin\alpha\,.
\end{aligned}
$$

Dato che deve essere

$$
\left|\boldsymbol{f}_{\text{vin}}^{\text{tang}}\right| \le \mu\left|\boldsymbol{f}_{\text{vin}}^{\text{norm}}\right|\,,
$$

si hanno (discutendo i valori assoluti) i due sistemi

$$
\begin{aligned}
g\sin\alpha - c\cos\alpha &\ge 0\,,\\
-c(\mu\sin\alpha + \cos\alpha) &\le g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)\,,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
g\sin\alpha - c\cos\alpha &< 0\,,\\
c(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) &\le g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)\,.
\end{aligned}
$$

Il primo sistema si riduce alla sua prima condizione, ossia a

$$
c \le g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.
$$

Se

$$
\cos\alpha - \mu\sin\alpha \le 0\,,
$$

il secondo sistema è soddisfatto per ogni

$$
c > g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.
$$

Se invece

$$
\cos\alpha - \mu\sin\alpha > 0\,,
$$

il secondo sistema è soddisfatto per ogni

$$
g\frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \ge c > g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}
$$

(si vede subito che nelle ipotesi fatte questo intervallo non è vuoto).
R.

$$
\begin{aligned}
&c \le g\frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\,, &&\textit{se } \cos\alpha > \mu\sin\alpha,\\
&\textit{nessuna limitazione per } c, &&\textit{se } \cos\alpha \le \mu\sin\alpha.
\end{aligned}
$$

6. [26/3/2007 (ex)I] Un sistema rigido è costituito da tre punti materiali, P_1, P_2 e P_3, ciascuno di massa m, posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato L.
Il sistema è vincolato con vincolo liscio a ruotare intorno al lato P_1P_2, mantenuto fisso in posizione verticale.
Il sistema ha all'istante iniziale velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_0$.
Descrivere il moto del sistema e ricavare risultante e momento risultante delle reazioni vincolari.
Soluzione
Scegliamo il sistema solidale principale $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, *ove* O *è il punto medio di* P_1P_2, *e*

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{L}\overrightarrow{P_1P_2}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{2}{\sqrt{3}L}\overrightarrow{OP_3}\,.$$

Il momento della forza peso è

$$\overrightarrow{OG} \wedge (-3mg\boldsymbol{u}_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}mgL\boldsymbol{u}_3\,.$$

In $\mathcal{S}$ *le equazioni di Eulero si scrivono perciò come*

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 + \boldsymbol{M}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{u}_1\,,\\
I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \boldsymbol{M}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{u}_2\,,\\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + \boldsymbol{M}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{u}_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}mgL\,.
\end{aligned}$$

Inoltre si sa che $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{u}_1$ *perché il moto è una rotazione, e che* $\boldsymbol{M}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0$ *perché il vincolo è liscio.*
Perciò la prima equazione di Eulero dà

$$\dot{\omega}_1 = 0\,,$$

ossia $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0$. *Il moto è quindi una rotazione costante.*
Le altre equazioni di Eulero implicano allora

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{vin}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}mgL\boldsymbol{u}_3\,,$$

e infine, per la prima equazione cardinale,

$$3m\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} - 3mg\boldsymbol{u}_1\,.$$

R.

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0\,, \quad t > 0\,; \qquad \boldsymbol{M}_{\mathrm{vin}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}mgL\boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}m\omega^2L\boldsymbol{u}_2 + 3mg\boldsymbol{u}_1\,.$$

7. [12/6/2009 (ex)I] Una sfera omogenea di raggio R e massa M ha il centro C mobile con legge assegnata

$$\overrightarrow{OC} = L\cos\alpha t\boldsymbol{e}_1 + L\sin\alpha t\boldsymbol{e}_2\,.$$

Nel punto che occupa la posizione

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + R\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|} = (R+L)\cos\alpha t\boldsymbol{e}_1 + (R+L)\sin\alpha t\boldsymbol{e}_2$$

è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Qui α, λ, L, M, $R > 0$ sono costanti.
All'istante iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{10}\boldsymbol{e}_1 \,,$$

con $\omega_{10} > 0$.

1. Determinare la velocità angolare della sfera nel sistema fisso in funzione di α, λ, L, M, R, ω_{10} e t.

2. Dimostrare che il punto P solidale con la sfera tale che $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}$ all'istante $t = 0$ *non* si mantiene a quota $\xi_3 = 0$ durante il moto (qui (ξ_i) indica le coordinate nel sistema di riferimento fisso).

Soluzione
I metodo (uso della terna fissa)
1) Scriveremo le equazioni di Eulero rispetto al polo C, e alla terna fissa $(\boldsymbol{e}_i)$. Si noti che C è il centro di massa della sfera; inoltre la terna fissa è principale in ogni istante, con momenti d'inerzia costanti nel tempo, e tutti uguali al momento diametrale I_{11}, per le proprietà di simmetria della sfera.
Il momento delle forze esterne è dato da

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = \overrightarrow{CA} \wedge \boldsymbol{F}_A = R(\cos\alpha t\boldsymbol{e}_1 + \sin\alpha t\boldsymbol{e}_2) \wedge \lambda\boldsymbol{e}_1 = -R\lambda\sin\alpha t\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Dunque le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= 0 \,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= 0 \,, \\ I_{11}\dot{\omega}_3 &= -R\lambda\sin\alpha t \,. \end{aligned}$$

Dunque per ogni $t > 0$

$$\omega_1(t) = \omega_{10} \,, \quad \omega_2(t) = 0 \,, \quad \omega_3(t) = -\frac{R\lambda}{I_{11}\alpha}(1-\cos\alpha t) \,.$$

Qui I_{11} è il momento diametrale della sfera S, che si calcola essere

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_S \frac{M}{\mathrm{vol}(S)}(z_2^2 + z_3^2)\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2\,\mathrm{d}z_3 = \frac{2}{3}\frac{M}{\mathrm{vol}(S)}\int_S (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2\,\mathrm{d}z_3 \\ &= \frac{M}{2\pi R^3}\int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} r^4 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{5}MR^2 \,. \end{aligned}$$

2) La derivata del vettore $\overrightarrow{CP}$*, che è solidale con la sfera, è data da*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{CP} = \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{CP} &= (\omega_{10}\boldsymbol{e}_1 + \omega_3(t)\boldsymbol{e}_3) \wedge (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= -\omega_3(t)x_2\boldsymbol{e}_1 + (\omega_3(t)x_1 - \omega_{10}x_3)\boldsymbol{e}_2 + \omega_{10}x_2\boldsymbol{e}_3 \,.\end{aligned}$$

Qui le x_i *sono le componenti nella terna fissa del vettore* $\overrightarrow{CP}$*.*
Dunque

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_3(t)x_2 \,, & x_1(0) &= R \,, & (1)\\ \dot{x}_2 &= \omega_3(t)x_1 - \omega_{10}x_3 \,, & x_2(0) &= 0 \,, & (2)\\ \dot{x}_3 &= \omega_{10}x_2 \,, & x_3(0) &= 0 \,. & (3)\end{aligned}$$

Dobbiamo dimostrare che la soluzione di questo problema di Cauchy non *ha terza componente* x_3 *identicamente nulla. Se così fosse, per la* (3) *si avrebbe anche* $x_2 \equiv 0$*, e quindi dalla* (1) *anche* $x_1 \equiv R$*; la* (2) *condurrebbe infine all'assurdo*

$$0 = \dot{x}_2(t) = \omega_3(t)x_1(t) - \omega_{10}x_3(t) = \omega_3(t)R \neq 0 \,, \qquad \text{per qualche } t > 0.$$

II metodo (uso della terna mobile)
A) Scegliamo come sistema mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$*, ove*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos\alpha t\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\alpha t\,\boldsymbol{e}_2 \,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\alpha t\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\alpha t\,\boldsymbol{e}_2 \,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.\end{aligned}$$

Denotiamo con x_i *le coordinate in* $\mathcal{S}$*, e con* y_i *le coordinate riferite a* C*, ossia*

$$x_1 = y_1 + L \,, \qquad x_2 = y_2 \,, \qquad x_3 = y_3 \,.$$

In $\mathcal{S}$ *agiscono le forze* $\boldsymbol{F}_A$*, e quelle di trascinamento* $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$*, e di Coriolis* $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$*. Denotiamo con* $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}$ *la velocità angolare della sfera in* $\mathcal{S}$*. Le distribuzioni delle forze fittizie sono dunque*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} &= -\frac{M}{\mathrm{vol}(S)}(\alpha\boldsymbol{e}_3) \wedge [(\alpha\boldsymbol{e}_3) \wedge \overrightarrow{OP}] = \frac{M}{\mathrm{vol}(S)}\alpha^2 \left[\overrightarrow{OP}\right]_\perp \,,\\ \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} &= -2\frac{M}{\mathrm{vol}(S)}(\alpha\boldsymbol{e}_3) \wedge \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = -2\frac{M}{\mathrm{vol}(S)}(\alpha\boldsymbol{e}_3) \wedge [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}} \wedge \overrightarrow{CP}] \,,\end{aligned}$$

dove il simbolo $[\boldsymbol{x}]_\perp$ *indica la componente perpendicolare a* $\boldsymbol{e}_3$*.*
Con i calcoli si ottengono i rispettivi momenti (relativi a C*): per* $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ *si ha:*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}} &= \frac{M}{\mathrm{vol}(S)}\alpha^2 \int_S \overrightarrow{CP} \wedge \left[\overrightarrow{OP}\right]_\perp = \frac{M}{\mathrm{vol}(S)}\alpha^2 \int_S (y_3\boldsymbol{u}_3 - L\boldsymbol{u}_1) \wedge [(L+y_1)\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2]\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{M}{\mathrm{vol}(S)}\alpha^2 \int_S [Ly_3\boldsymbol{u}_2 + y_1y_3\boldsymbol{u}_2 - y_2y_3\boldsymbol{u}_1 - Ly_2\boldsymbol{u}_3]\,\mathrm{d}y = 0 \,,\end{aligned}$$

per motivi di simmetria: gli integrali dei monomi y_iy_j*,* $i \neq j$*, e* y_i*, si annullano.*

Poi si ha per $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{C}} = -2\frac{M}{\mathrm{vol}(S)}\alpha \int_S \overrightarrow{CP} \wedge [\boldsymbol{e}_3 \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}} \wedge \overrightarrow{CP})]\,\mathrm{d}y$$
$$= -2\frac{M}{\mathrm{vol}(S)}\alpha \int_S [\omega_{\mathcal{S}1}\boldsymbol{u}_2 - \omega_{\mathcal{S}2}\boldsymbol{u}_1]y_3^2\,\mathrm{d}y = I_{11}\alpha[\omega_{\mathcal{S}2}\boldsymbol{u}_1 - \omega_{\mathcal{S}1}\boldsymbol{u}_2]\,,$$

ove si sono usati di nuovo i motivi di simmetria, e I_{11} *ha lo stesso significato che sopra.*
Infine

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{F}_A} = \overrightarrow{CA} \wedge (\lambda \boldsymbol{e}_1) = -\lambda R \sin \alpha t \boldsymbol{u}_3\,.$$

B) Si ricordi che, in $\mathcal{S}$*, prendendo* C *come origine del sistema di riferimento solidale con la sfera, di cui* C *è anche il centro di massa,*

$$\boldsymbol{J}_C^{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\sigma}_C^{\mathcal{S}} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}\,.$$

Dunque per la seconda equazione cardinale, denotando $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$*, e con* $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{S}}$ *la derivata relativa a* $\mathcal{M}$ *di* $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}$*, si ha*

$$\boldsymbol{M}_C^{\mathrm{ext}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_C^{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \boldsymbol{\sigma}_C^{\mathcal{S}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}} \wedge \boldsymbol{\sigma}_C \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}\,.$$

Perciò le equazioni di Eulero in $\mathcal{S}$ *sono*

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_{\mathcal{S}1} &= I_{11}\alpha\omega_{\mathcal{S}2}\,, \\ I_{11}\dot{\omega}_{\mathcal{S}2} &= -I_{11}\alpha\omega_{\mathcal{S}1}\,, \\ I_{11}\dot{\omega}_{\mathcal{S}3} &= -\lambda R \sin \alpha t\,. \end{aligned}$$

Quindi, ricordando

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}(0) = \omega_{10}\boldsymbol{u}_1(0) - \alpha \boldsymbol{u}_3(0)\,,$$

si ottiene la soluzione

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}(t) = \omega_{10}\cos\alpha t \boldsymbol{u}_1 - \omega_{10}\sin\alpha t \boldsymbol{u}_2 - \left[\frac{R\lambda}{I_{11}\alpha}(1-\cos\alpha t) + \alpha\right]\boldsymbol{u}_3\,.$$

Infatti i due vettori $\boldsymbol{\omega}$ *e* $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}$ *sono collegati dalla formula di composizione delle velocità angolari*

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}} + \alpha \boldsymbol{e}_3\,,$$

ove il termine $\alpha\boldsymbol{e}_3$ *rappresenta la velocità angolare di* $\mathcal{M}$ *rispetto alla terna fissa.*
R.

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_{10}\boldsymbol{e}_1 - \frac{R\lambda}{I_{11}\alpha}(1-\cos\alpha t)\boldsymbol{e}_3\,, \qquad I_{11} = \frac{2}{5}MR^2\,.$$

8. [12/6/2009 (ex)II] Una sfera omogenea di raggio R e massa M ha il centro C mobile con legge assegnata

$$\overrightarrow{OC} = L\sin\alpha t \boldsymbol{e}_1 + L\cos\alpha t \boldsymbol{e}_2\,.$$

Nel punto che occupa la posizione

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + R\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|} = (R+L)\sin\alpha t\boldsymbol{e}_1 + (R+L)\cos\alpha t\boldsymbol{e}_2$$

è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda\boldsymbol{e}_2 .$$

Qui α, λ, L, M, $R > 0$ sono costanti.
All'istante iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{20}\boldsymbol{e}_2 ,$$

con $\omega_{20} > 0$.

1. Determinare la velocità angolare della sfera nel sistema fisso in funzione di α, λ, L, M, R, ω_{20} e t.

2. Dimostrare che il punto P solidale con la sfera tale che $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}$ all'istante $t = 0$ *non* si mantiene a quota $\xi_3 = 0$ durante il moto (qui (ξ_i) indica le coordinate nel sistema di riferimento fisso).

R.

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_{20}\boldsymbol{e}_2 - \frac{R\lambda}{I_{11}\alpha}(1-\cos\alpha t)\boldsymbol{e}_3 , \qquad I_{11} = \frac{2}{5}MR^2 .$$

9. [15/7/2009 (ex)I] Un disco rigido di raggio L, massa M e centro C è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$.
All'istante iniziale $t = 0$ valgono:

$$\overrightarrow{OC} = 0 , \qquad \boldsymbol{v}_C(0) = 0 , \qquad \boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0\boldsymbol{e}_3 .$$

Qui O denota l'origine del sistema di riferimento fisso, $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del disco, e $\omega_0 > 0$ è una costante.
Si determinino $\overrightarrow{OC}(t)$ e $\boldsymbol{\omega}(t)$ per ogni $t > 0$.
SOLUZIONE
Per la prima equazione cardinale

$$M\boldsymbol{a}_C \cdot \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{e}_i = 0 , \qquad i = 1 , 2 .$$

Quindi C si muove di moto rettilineo uniforme. Dato che all'istante iniziale è fermo, si ha

$$\overrightarrow{OC}(t) = 0 , \qquad \text{per ogni } t > 0.$$

Quindi il moto è una precessione. Per la seconda equazione cardinale, indicando $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_C$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{J}_C = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\sigma\omega} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = 0 .$$

Quindi

$$\boldsymbol{\sigma\omega} = \boldsymbol{\sigma\omega}(0) = I_{33}\omega_0\boldsymbol{e}_3 = I_{33}\omega_0\boldsymbol{u}_3 , \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$ fa parte di una terna $(\boldsymbol{u}_i)$ solidale con il disco. Possiamo scomporre $\boldsymbol{\sigma}$ rispetto a $(\boldsymbol{u}_i)$, in modo che la (1) e la non singolarità di $\boldsymbol{\sigma}$ implicano

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_0 \boldsymbol{u}_3 = \omega_0 \boldsymbol{e}_3 \,.$$

R.

$$\overrightarrow{OC}(t) = 0 \,, \qquad \boldsymbol{\omega}(t) = \omega_0 \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \textit{per ogni } t > 0.$$

10. [15/7/2009 (ex)II] Una lamina rigida quadrata di lato L, massa M e centro C è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$.
All'istante iniziale $t = 0$ valgono:

$$\overrightarrow{OC} = 0 \,, \qquad \boldsymbol{v}_C(0) = 0 \,, \qquad \boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0 \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui O denota l'origine del sistema di riferimento fisso, $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare della lamina, e $\omega_0 > 0$ è una costante.
Si determinino $\overrightarrow{OC}(t)$ e $\boldsymbol{\omega}(t)$ per ogni $t > 0$.
R.

$$\overrightarrow{OC}(t) = 0 \,, \qquad \boldsymbol{\omega}(t) = \omega_0 \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \textit{per ogni } t > 0.$$

520. Statica per sistemi vincolati: vincoli fissi

1. [4/7/2005 (ex)I] Due aste rigide omogenee AB e BC, ciascuna di lunghezza $2L$ e massa m, sono così vincolate nel sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3):

- entrambe giacciono nel piano $x_3 = 0$;
- hanno in comune l'estremo B;
- $A = O$, ossia $x_{1A} = x_{2A} = x_{3A} = 0$;
- $x_{2C} = d$, ove $2L < d < 4L$ (cioè C appartiene alla retta $x_2 = d$).

Si considerino solo configurazioni con $0 < x_{1B} < x_{1C}$.
Ciascun punto delle due aste è soggetto a una densità di forza data da

$$-\frac{\mu}{2L}\boldsymbol{e}_1 \,, \quad \text{per l'asta } AB; \qquad \frac{\mu}{2L}\boldsymbol{e}_1 \,, \quad \text{per l'asta } BC,$$

con $\mu \in \boldsymbol{R}$ costante.
Trovare le configurazioni di equilibrio.
(Si usi $y = x_{2B}$ come coordinata lagrangiana.)
Soluzione

1) Le forze sono conservative. Dunque le configurazioni di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale.
2) Calcoliamo il potenziale U. Parametrizziamo la sbarra AB:

$$P(s) = \Big(s\frac{x_{1B}}{2L}, s\frac{x_{2B}}{2L}, 0\Big), \qquad 0 < s < 2L.$$

Quindi il contributo di AB sarà

$$U_{AB} = \int_0^{2L} \Big(-\frac{\mu}{2L}s\frac{x_{1B}}{2L}\Big)\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\mu x_{1B}.$$

Parametrizziamo la sbarra BC:

$$P(s) = \Big(x_{1B} + s\frac{x_{1C}-x_{1B}}{2L}, x_{2B} + s\frac{x_{2C}-x_{2B}}{2L}, 0\Big), \qquad 0 < s < 2L.$$

Quindi il contributo di BC sarà

$$U_{BC} = \int_0^{2L} \Big(\frac{\mu}{2L}\Big[x_{1B} + s\frac{x_{1C}-x_{1B}}{2L}\Big]\Big)\,\mathrm{d}s = \mu\Big(x_{1B} + \frac{1}{2}(x_{1C}-x_{1B})\Big).$$

Sommando si ottiene il potenziale completo

$$U(x_{2B}) = \frac{\mu}{2}\Big(x_{1B} + (x_{1C}-x_{1B})\Big) = \frac{\mu}{2}x_{1C}.$$

Ora dobbiamo esprimere la variabile x_{1C} in funzione dell'unica coordinata lagrangiana x_{2B}. Per il vincolo

$$(x_{1B}-x_{1C})^2 + (x_{2B}-x_{2C})^2 = 4L^2,$$

si ha (essendo $x_{1C}-x_{1B} > 0$ per ipotesi)

$$x_{1C}-x_{1B} = \sqrt{4L^2-(d-x_{2B})^2}.$$

Inoltre

$$x_{1B}^2 + x_{2B}^2 = 4L^2,$$

da cui (essendo $x_{1B} > 0$ per ipotesi)

$$x_{1B} = \sqrt{4L^2-x_{2B}^2}.$$

Pertanto

$$U(x_{2B}) = \frac{\mu}{2}\Big(\sqrt{4L^2-x_{2B}^2} + \sqrt{4L^2-(d-x_{2B})^2}\Big).$$

3) Infine, derivando in x_{2B}:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x_{2B}} &= \frac{\mu}{2}\Big(\frac{-x_{2B}}{\sqrt{4L^2-x_{2B}^2}} + \frac{(d-x_{2B})}{\sqrt{4L^2-(d-x_{2B})^2}}\Big) \\ &= \frac{\mu}{2}\frac{-x_{2B}\sqrt{4L^2-(d-x_{2B})^2} + (d-x_{2B})\sqrt{4L^2-x_{2B}^2}}{\sqrt{4L^2-x_{2B}^2}\sqrt{4L^2-(d-x_{2B})^2}}.\end{aligned}$$

Dunque i punti critici di U risolvono l'equazione

$$x_{2B}^2(4L^2-(d-x_{2B})^2) = (d-x_{2B})^2(4L^2-x_{2B}^2),$$

che ha come unica soluzione nel campo ammissibile di variazione di x_{2B}, cioè $0 < x_{2B} < 2L < d < 4L$,

$$x_{2B} = \frac{d}{2}\,.$$

2. [4/7/2005 (ex)II] Due aste rigide omogenee AB e BC, ciascuna di lunghezza $2L$ e massa m, sono così vincolate nel sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3):

- entrambe giacciono nel piano $x_3 = 0$;
- hanno in comune l'estremo B;
- $A = O$, ossia $x_{1A} = x_{2A} = x_{3A} = 0$;
- $x_{1C} = d$, ove $2L < d < 4L$ (cioè C appartiene alla retta $x_1 = d$).

Si considerino solo configurazioni con $0 > x_{2B} > x_{2C}$.
Ciascun punto delle due aste è soggetto a una densità di forza data da

$$\frac{\lambda}{2L}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \text{per l'asta } AB; \qquad -\frac{\lambda}{2L}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \text{per l'asta } BC,$$

con $\lambda \in \boldsymbol{R}$ costante.
Trovare le configurazioni di equilibrio.
(Si usi $x = x_{1B}$ come coordinata lagrangiana.)
R.

$$x = d/2$$

3. [7/4/2006 (ex)I] Un punto materiale P di massa $m > 0$ è vincolato alla superficie ottenuta ruotando intorno all'asse z la curva

$$z = a(x^2 - bx)\,, \qquad x > 0\,,$$

ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k(x, y, 0) - \lambda(0, 0, 1)\,,$$

con a, b, k, $\lambda > 0$ costanti.
Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.
Soluzione
Usiamo come coordinate lagrangiane le coordinate cilindriche $r > 0$ e $\varphi \in (0, 2\pi)$. Allora P è dato nella terna fissa da

$$P = \big(r\cos\varphi, r\sin\varphi, a(r^2 - br)\big)\,.$$

Il potenziale dunque è

$$U(r, \varphi) = -\frac{k}{2}(x^2 + y^2) - \lambda z = -\frac{k}{2}r^2 - \lambda a(r^2 - br)\,.$$

Per trovare i punti di equilibrio imponiamo $\nabla U = 0$, ossia

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -kr - \lambda a(2r - b) = 0\,,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 = 0\,.$$

Le soluzioni di questo sistema sono date da

$$r = \frac{\lambda ab}{k + 2\lambda a}\,, \qquad 0 < \varphi < 2\pi\,.$$

Dato che i punti stazionari trovati non sono isolati e costituiscono una circonferenza, l'equilibrio non è stabile in nessuno di essi.
R.

$$x^2 + y^2 = \frac{(\lambda ab)^2}{(k + 2\lambda a)^2}\,, \qquad \textit{equilibrio non stabile.}$$

4. [13/12/2007 (ex)I] Un disco D di centro C, raggio $R > 0$ e massa $m > 0$, è vincolato

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- a mantenere un punto A del suo bordo, solidale con il disco, fisso nell'origine O del sistema fisso.

Il disco è soggetto alle forze:

- Una coppia di forze applicate nei punti opposti al centro H e K del suo bordo tali che

  $$\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{CA}\,, \qquad \overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{CA}\,;$$

  la coppia è data da

  $$\boldsymbol{F}_H = \lambda\overrightarrow{AC}\,, \qquad \boldsymbol{F}_K = -\lambda\overrightarrow{AC}\,,$$

  con λ costante positiva.
- Una forza applicata nel punto B

  $$\boldsymbol{F}_B = \mu\boldsymbol{e}_1\,,$$

  con $\mu > 0$ costante, e B punto opposto al centro di A.

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio del disco.
SOLUZIONE
Il moto è una precessione intorno all'origine O (coincidente con il punto solidale A). Inoltre, visto che il disco deve restare nel piano $x_3 = 0$, si deve avere

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3\,,$$

ove φ *sia scelto come l'angolo tra* $\boldsymbol{e}_1$ *e* $\overrightarrow{AC}$.
Scegliamo come sistema di riferimento solidale con D $\mathcal{S}=(A,\boldsymbol{u}_i)$, *con*

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{R}\overrightarrow{AC}\,,\qquad \boldsymbol{u}_2=\frac{1}{R}\overrightarrow{CH}\,,\qquad \boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{e}_3\,.$$

Il momento delle forze esterne rispetto al polo A *è:*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^{\rm ext}=\overrightarrow{AH}\wedge\boldsymbol{F}_H+\overrightarrow{AK}\wedge\boldsymbol{F}_K+\overrightarrow{AB}\wedge\boldsymbol{F}_B&=2\overrightarrow{CH}\wedge\boldsymbol{F}_H+2R\boldsymbol{u}_1\wedge\mu\boldsymbol{e}_1\\&=-2\lambda R^2\boldsymbol{e}_3-2\mu R\sin\varphi\boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero dunque sono

$$\begin{aligned}I_{11}\dot\omega_1&=(I_{22}-I_{33})\omega_2\omega_3\,,\\I_{22}\dot\omega_2&=(I_{33}-I_{11})\omega_1\omega_3\,,\\I_{33}\dot\omega_3&=(I_{11}-I_{22})\omega_1\omega_2-2\lambda R^2-2\mu R\sin\varphi\,.\end{aligned}$$

Le prime due sono identità in cui entrambi i membri si annullano. L'ultima dà all'equilibrio,

$$0=I_{33}\ddot\varphi=-2\lambda R^2-2\mu R\sin\varphi\,,$$

ossia

$$\sin\varphi=-\frac{\lambda}{\mu}R\,.$$

R.

$$\textit{Se}\quad \lambda R\le\mu\,,\qquad \textit{la posizione di equilibrio è:}\quad \sin\varphi=-\frac{\lambda}{\mu}R\,.$$

5. [13/12/2007 (ex)II] Un disco D di centro C, raggio $R>0$ e massa $m>0$, è vincolato

- a giacere sul piano $x_3=0$;
- a mantenere un punto A del suo bordo, solidale con il disco, fisso nell'origine O del sistema fisso.

Il disco è soggetto alle forze:

- Una coppia di forze applicate nei punti opposti al centro H e K del suo bordo tali che

  $$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{CA}\,,\qquad \overrightarrow{CK}\perp\overrightarrow{CA}\,;$$

  la coppia è data da

  $$\boldsymbol{F}_H=\lambda\overrightarrow{AC}\,,\qquad \boldsymbol{F}_K=-\lambda\overrightarrow{AC}\,,$$

  con λ costante positiva.

- Una forza applicata nel punto B

$$\boldsymbol{F}_B = -\mu \boldsymbol{e}_1 ,$$

con $\mu > 0$ costante, e B punto opposto al centro di A.

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio del disco.
R.

$$\textit{Se} \quad \lambda R \leq \mu , \qquad \textit{la posizione di equilibrio è:} \quad \sin\varphi = \frac{\lambda}{\mu} R .$$

6. [20/11/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = -\alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2} , \qquad x_1^2 + x_2^2 > 0 .$$

Il punto è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 ,$$

e alla forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{AP} ,$$

ove A è individuato da

$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_1 .$$

Trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
Soluzione
Scegliamo x_1 e x_2 come coordinate lagrangiane.
Allora i potenziali delle forze sono:

$$\begin{aligned} U_{\text{peso}} &= -mgx_3 = mg\alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2} , \\ U_{\text{el}} &= -\frac{k}{2}\left|\overrightarrow{AP}\right|^2 = -\frac{k}{2}[(x_1 - R)^2 + x_2^2 + \alpha^2(x_1^2 + x_2^2)] . \end{aligned}$$

Quindi, posto $U = U_{\text{peso}} + U_{\text{el}}$, si ha all'equilibrio

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= mg\alpha\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - k(x_1 - R) - k\alpha^2 x_1 = 0 , \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= mg\alpha\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - kx_2 - k\alpha^2 x_2 = 0 . \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima [seconda] di queste equazioni per x_2 [x_1] e sottraendo le due uguaglianze si ha $x_2 = 0$.
La prima equazione dà allora

$$mg\alpha \operatorname{sign}(x_1) - kx_1 + kR - k\alpha^2 x_1 = 0 .$$

Si hanno allora due possibilità:

$$x_1 > 0 , \qquad mg\alpha - kx_1 + kR - k\alpha^2 x_1 = 0 , \tag{1}$$

e

$$x_1 < 0\,, \qquad -mg\alpha - kx_1 + kR - k\alpha^2 x_1 = 0\,. \tag{2}$$

La (1) dà

$$x_1 = \frac{mg\alpha + kR}{k + k\alpha^2} > 0\,.$$

Invece la (2) dà

$$x_1 = \frac{-mg\alpha + kR}{k + k\alpha^2} < 0$$

purché

$$mg\alpha > kR\,.$$

Per studiare la stabilità dell'equilibrio calcoliamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} &= mg\alpha\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - mg\alpha\frac{x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}} - k - k\alpha^2\,,\\
\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} &= -mg\alpha\frac{x_1 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\\
\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} &= mg\alpha\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - mg\alpha\frac{x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}} - k - k\alpha^2\,.
\end{aligned}$$

Quindi nella soluzione con $x_1 > 0$ si ha

$$D^2U(x_1,0) = \begin{pmatrix} -k - k\alpha^2 & 0 \\ 0 & \frac{mg\alpha}{x_1} - k - k\alpha^2 \end{pmatrix}\,,$$

che risulta subito definita negativa per la definizione della soluzione $(x_1, 0)$.
Nella eventuale soluzione con $x_1 < 0$ si ha

$$D^2U(x_1,0) = \begin{pmatrix} -k - k\alpha^2 & 0 \\ 0 & \frac{mg\alpha}{|x_1|} - k - k\alpha^2 \end{pmatrix}\,,$$

che risulta subito indefinita per la definizione della soluzione $(x_1, 0)$.
R.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{mg\alpha + kR}{k + k\alpha^2}\,, \quad x_2 = 0\,; \qquad \textit{stabile;}\\
x_1 &= \frac{-mg\alpha + kR}{k + k\alpha^2}\,, \quad x_2 = 0\,, \quad \textit{solo se } mg\alpha > kR\textit{;} \qquad \textit{instabile.}
\end{aligned}$$

7. [7/9/2010 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato all'arco di parabola

$$x_2 = ax_1^2\,, \qquad x_3 = 0\,, \qquad x_1 > 0\,.$$

Sul punto agiscono la forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_2$$

e la forza

$$\boldsymbol{F} = b\boldsymbol{T}\,,$$

ove $\boldsymbol{T}$ è il versore tangente alla parabola (tale che $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_1 > 0$). Qui a, $b > 0$ sono costanti.
Trovare le eventuali posizioni di equilibrio.
SOLUZIONE
Si ha

$$\boldsymbol{T} = \frac{(1, 2ax_1, 0)}{\sqrt{1 + 4a^2 x_1^2}} .$$

All'equilibrio deve essere

$$(-mg\boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{T} + b\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T} = 0 ,$$

ossia

$$b = mg \frac{2ax_1}{\sqrt{1 + 4a^2 x_1^2}} .$$

R. *Caso $b \geq mg$: nessuna soluzione.*
Caso $b < mg$: si ha la soluzione

$$x_1 = \frac{b}{2a} \frac{1}{\sqrt{m^2 g^2 - b^2}} .$$

530. Statica per sistemi vincolati: vincoli mobili

1. [4/7/2005 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato a un piano liscio $\pi(t)$, ruotante intorno a un suo asse fisso r con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$. Se denotiamo con x la distanza di P da r, P è soggetto a forze conservative di potenziale

$$U(x) = a(x - d)^2 - bx^2 ,$$

ove a, b, $d > 0$ sono costanti assegnate.
Per quali valori di $|\boldsymbol{\omega}|$ la posizione $x = d$ è di equilibrio relativo al piano ruotante?
SOLUZIONE
Scegliamo un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ solidale con il piano ruotante, con l'origine O coincidente con un punto fisso sull'asse di rotazione, e l'asse x_1 diretto lungo r. Sia poi x_2 giacente sul piano ruotante, cosicché la retta $x = d$ coincida con $x_2 = d$. In $\mathcal{S}$ va tenuto conto anche delle forze fittizie $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$ e $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$. Tuttavia $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$ non fa lavoro e nel caso presente

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -m\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}} = -m\boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}] = m|\boldsymbol{\omega}|^2 x_2 \boldsymbol{u}_2 .$$

Dunque il potenziale complessivo in $\mathcal{S}$ è

$$U_{\mathcal{S}}(x_2) = U(x_2) + \frac{1}{2} m|\boldsymbol{\omega}|^2 x_2^2 ,$$

almeno finché $x_2 > 0$. *Imponiamo che* $x_2 = d$ *sia una posizione di equilibrio, cioè che*

$$\frac{\mathrm{d}U_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}x_2} = 2a(x_2 - d) - 2bx_2 + m|\boldsymbol{\omega}|^2 x_2 = 0$$

quando $x_2 = d > 0$. *È ovvio che questo accade se e solo se*

$$|\boldsymbol{\omega}|^2 = 2\frac{b}{m}\,.$$

2. [4/7/2005 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato a un piano liscio $\pi(t)$, ruotante intorno a un suo asse fisso r con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$. Se denotiamo con x la distanza di P da r, P è soggetto a forze conservative di potenziale

$$U(x) = -a(x-d)^2 - 2bx^2\,,$$

ove a, b, $d > 0$ sono costanti assegnate.
Per quali valori di $|\boldsymbol{\omega}|$ la posizione $x = d$ è di equilibrio relativo al piano ruotante?
R.

$$|\boldsymbol{\omega}|^2 = 4b/m$$

3. [12/9/2005 (ex)I] Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza $2L$ e massa m ha il centro coincidente con l'origine del sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3). È inoltre vincolata a giacere su un piano mobile $\pi(t)$ che passa per l'asse x_3 e ruota con velocità $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_3$, con $\omega > 0$ costante.
Il punto A [rispettivamente il punto B] è richiamato dal punto fisso $P_1 = (0, 0, R)$ [rispettivamente dal punto fisso $P_2 = (0, 0, -R)$], con forza elastica di costante $k > 0$. Qui $R > 0$ è costante.
Si trovino le posizioni di equilibrio relativo a $\pi(t)$.
Soluzione
In un sistema $(O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ *solidale con* $\pi(t)$ *le forze che agiscono su* AB *e che compiono lavoro sono quelle elastiche e quella fittizia di trascinamento. La densità di quest'ultima è*

$$\frac{m}{2L}\omega^2 \xi_1 \boldsymbol{u}_1\,,$$

ove $\boldsymbol{u}_1$ *è un versore solidale a* $\pi(t)$ *e ortogonale a* x_3, *e* ξ_1 *è la relativa ascissa. Dunque il potenziale della forza di trascinamento si calcola come*

$$U_{\mathrm{T}} = \int_{-L}^{L} \frac{m}{4L}\omega^2 \xi_1(s)^2 \,\mathrm{d}s = \int_{-L}^{L} \frac{m}{4L}\omega^2 s^2 \cos^2\theta \,\mathrm{d}s = \frac{m}{6}L^2\omega^2\cos^2\theta\,,$$

se θ *è l'angolo compreso tra* $\overrightarrow{BA}$ *e* $\boldsymbol{u}_1$. *Il potenziale delle due forze elastiche è*

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}\left|\overrightarrow{AP_1}\right|^2 - \frac{k}{2}\left|\overrightarrow{BP_2}\right|^2 = k(2RL\sin\theta - R^2 - L^2)\,.$$

Dunque il potenziale totale è

$$U(\theta) = \frac{m}{6} L^2 \omega^2 \cos^2 \theta + 2kRL \sin \theta + \text{costante} .$$

I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici di U, ossia ai punti ove

$$0 = U'(\theta) = L \cos \theta \Big[2kR - \frac{m}{3} L \omega^2 \sin \theta \Big] .$$

Perciò i punti di equilibrio sono

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} , \qquad \theta_2 = \frac{3}{2} \pi ,$$

e, se

$$\frac{6kR}{m\omega^2 L} < 1 ,$$

anche θ corrispondente a

$$\sin \theta = \frac{6kR}{m\omega^2 L} ,$$

ossia

$$\theta_3 = \arcsin \frac{6kR}{m\omega^2 L} , \qquad \theta_4 = \pi - \arcsin \frac{6kR}{m\omega^2 L} .$$

R.

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} , \qquad \theta_2 = \frac{3}{2} \pi ;$$

$$\textit{se} \quad \frac{6kR}{m\omega^2 L} < 1 , \qquad \theta_3 = \arcsin \frac{6kR}{m\omega^2 L} , \qquad \theta_4 = \pi - \arcsin \frac{6kR}{m\omega^2 L} .$$

4. [12/9/2005 (ex)II] Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza $2L$ e massa m ha il centro coincidente con l'origine del sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3). È inoltre vincolata a giacere su un piano mobile $\pi(t)$ che passa per l'asse x_1 e ruota con velocità $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_1$, con $\omega > 0$ costante.
Il punto A [rispettivamente il punto B] è richiamato dal punto fisso $P_1 = (R, 0, 0)$ [rispettivamente dal punto fisso $P_2 = (-R, 0, 0)$], con forza elastica di costante $k > 0$. Qui $R > 0$ è costante.
Si trovino le posizioni di equilibrio relativo a $\pi(t)$.
R.

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} , \quad \theta_2 = \frac{3}{2} \pi ;$$

$$\textit{se} \quad \frac{6kR}{m\omega^2 L} < 1 , \qquad \theta_3 = \arcsin \frac{6kR}{m\omega^2 L} , \qquad \theta_4 = \pi - \arcsin \frac{6kR}{m\omega^2 L} .$$

5. [15/7/2009 (ex)I] Una circonferenza γ di raggio R e centro C non omogenea ha densità ρ data da

$$\rho(P) = \rho_0 \Big(1 + \alpha \frac{\operatorname{dist}(P, P_0 P_1)^2}{R^2} \Big) ,$$

ove P_0 e P_1 sono punti fissati su γ, solidali con essa e diametralmente opposti, ossia P_0P_1 è un diametro solidale con γ. Qui α e ρ_0 sono costanti positive. Inoltre γ è vincolata:

- ad avere il centro C coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso;
- a giacere sul piano ruotante Π di equazione

$$x_1 \sin \omega t - x_2 \cos \omega t = 0 \,,$$

  ove $\omega > 0$ è costante, e (x_i) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso.

Su γ agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_{P_0} = -k\overrightarrow{AP_0} \,,$$

applicata in P_0, ove A è il punto

$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Trovare tutte le posizioni di equilibrio di γ rispetto al sistema $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos \omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \sin \omega t\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin \omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \cos \omega t\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Soluzione

La normale a Π coincide con $\boldsymbol{u}_2$. In $\mathcal{S}$ su γ agiscono la forza elastica $\boldsymbol{F}_{P_0}$ e quella di trascinamento $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$, oltre a quella di Coriolis che però è nulla all'equilibrio e perciò può venire qui ignorata.

Scriveremo dunque il potenziale in $\mathcal{S}$, visto che $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ risulterà conservativa. Scegliamo come coordinata lagrangiana l'angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ formato da $\overrightarrow{CP_0}$ con $\boldsymbol{u}_1$: dunque la circonferenza è parametrizzata da

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi; \theta) = R\cos(\varphi + \theta)\boldsymbol{u}_1 + R\sin(\varphi + \theta)\boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove θ indica l'angolo formato da $\overrightarrow{CP}$ con $\overrightarrow{CP_0}$: si noti che θ (al contrario di φ) riveste il ruolo di coordinata solidale con γ.

In particolare

$$\overrightarrow{AP_0} = R\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + R(\sin\varphi - 1)\boldsymbol{u}_3 \,,$$

per cui

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}\left|AP_0\right|^2 = -kR^2(1 - \sin\varphi) \,.$$

Per calcolare la forza di trascinamento osserviamo che

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}(\varphi; \theta) = \rho\omega^2 y_1 \,\mathrm{d}\mu \,,$$

ove (y_i) *indica le coordinate in* $\mathcal{S}$. *Dunque*

$$\mathrm{d}U_{\mathrm{T}} = \rho\frac{\omega^2}{2}y_1^2\,\mathrm{d}\mu = \rho(\theta)\frac{\omega^2}{2}R^3\cos^2(\varphi+\theta)\,\mathrm{d}\theta = \rho_0\frac{\omega^2}{2}R^3(1+\alpha\sin^2\theta)\cos^2(\varphi+\theta)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
U_{\mathrm{T}}(\varphi) &= \rho(\theta)\frac{\omega^2}{2}R^3\Big\{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(\varphi+\theta)\,\mathrm{d}\theta + \alpha\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta\cos^2(\varphi+\theta)\,\mathrm{d}\theta\Big\}\\
&= \rho(\theta)\frac{\omega^2}{2}R^3\Big\{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos(2\varphi+2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta + \alpha\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,\frac{1+\cos(2\varphi+2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta\Big\}\\
&= \rho(\theta)\frac{\omega^2}{2}R^3\Big\{\pi + \alpha\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2\theta\cos(2\varphi+2\theta)\,\mathrm{d}\theta\Big\}\\
&= \rho(\theta)\frac{\omega^2}{2}R^3\Big\{\pi + \alpha\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{8}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(2\varphi+4\theta)+\cos 2\varphi]\,\mathrm{d}\theta\Big\}\\
&= \rho(\theta)\frac{\omega^2}{2}R^3\Big\{\pi + \alpha\frac{\pi}{2} - \alpha\frac{\pi}{4}\cos 2\varphi\Big\}\,.
\end{aligned}$$

Infine si può dunque porre

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = kR^2\sin\varphi - \frac{\omega^2}{8}\alpha R^3\rho_0\pi\cos 2\varphi\,.$$

Le posizioni di equilibrio corrispondono alle soluzioni della

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = kR^2\cos\varphi + \frac{\omega^2}{4}\alpha R^3\rho_0\pi\sin 2\varphi = 0\,,$$

ossia alle soluzioni di

$$\Big(k + \frac{\omega^2}{4}\alpha R^3\rho_0\pi\sin\varphi\Big)\cos\varphi = 0\,.$$

Queste sono

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}\,,\qquad \varphi = \frac{\pi}{2}\,,\qquad \varphi = \varphi_0\,,\qquad \varphi = -\pi-\varphi_0\,,$$

ove

$$\varphi_0 = -\arcsin\frac{4k}{\omega^2\alpha R\rho_0\pi}\,,$$

nel caso che le due ultime soluzioni siano ammissibili, cioè se

$$4k < \omega^2\alpha R\rho_0\pi\,.$$

R.

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}\,,\qquad \varphi = \frac{\pi}{2}\,.$$

Se

$$4k < \omega^2\alpha R\rho_0\pi\,,$$

allora posto

$$\varphi_0 = -\arcsin\frac{4k}{\omega^2\alpha R\rho_0\pi}\,,$$

si hanno anche le soluzioni

$$\varphi = \varphi_0 \,, \qquad \varphi = -\pi - \varphi_0 \,.$$

6. [15/7/2009 (ex)II] Una circonferenza γ di raggio R e centro C non omogenea ha densità ρ data da

$$\rho(P) = \rho_0 \Big(1 - \alpha \frac{\operatorname{dist}(P, P_0P_1)^2}{R^2} \Big) \,,$$

ove P_0 e P_1 sono punti fissati su γ, solidali con essa e diametralmente opposti, ossia P_0P_1 è un diametro solidale con γ. Qui $0 < \alpha < 1$ e $\rho_0 > 0$ sono costanti.
Inoltre γ è vincolata:

- ad avere il centro C coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso;
- a giacere sul piano ruotante Π di equazione

  $$x_1 \sin \omega t - x_2 \cos \omega t = 0 \,,$$

  ove $\omega > 0$ è costante, e (x_i) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso.

Su γ agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_{P_0} = -k \overrightarrow{AP_0} \,,$$

applicata in P_0, ove A è il punto

$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Trovare tutte le posizioni di equilibrio di γ rispetto al sistema $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos \omega t \, \boldsymbol{e}_1 + \sin \omega t \, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin \omega t \, \boldsymbol{e}_1 + \cos \omega t \, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

R.

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \,, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \,.$$

Se

$$4k < \omega^2 \alpha R \rho_0 \pi \,,$$

allora posto

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{4k}{\omega^2 \alpha R \rho_0 \pi} \,,$$

si hanno anche le soluzioni

$$\varphi = \varphi_0 \,, \qquad \varphi = \pi - \varphi_0 \,.$$

560. Dinamica per sistemi vincolati: vincoli fissi

1. [18/7/2005 (ex)I] Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza $2L$ e massa m è soggetta ai seguenti vincoli:

- il suo centro di massa appartiene all'elica cilindrica γ

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha\zeta\,, \\ y = R\sin\alpha\zeta\,, \qquad\qquad -\infty < \zeta < \infty\,; \\ z = \zeta\,, \end{cases}$$

  qui $\alpha > 0$ è costante;

- l'asta è parallela alla tangente a γ.

I vincoli sono lisci.
Sull'asta agisce la forza peso, diretta secondo il verso negativo dell'asse z.
Il centro di massa dell'asta all'istante iniziale è a quota $z = h > 0$, con velocità nulla.
Determinare la velocità del centro di massa quando esso raggiunge la quota $z = 0$.
Soluzione
Le forze che compiono lavoro (cioè il peso) sono conservative, con potenziale

$$U = -mgz_C\,,$$

ove indichiamo con C il centro di massa dell'asta. Per trovare l'energia cinetica dell'asta parametrizziamola così: indicando con P il generico punto dell'asta,

$$P(s) = C + s\boldsymbol{T}\,, \qquad -L \le s \le L\,,$$

ove $\boldsymbol{T}$ indica il versore tangente all'elica nel punto occupato da C. Dato che

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{1+R^2\alpha^2}}(-R\alpha\sin\alpha\zeta, R\alpha\cos\alpha\zeta, 1)\,,$$

si ha, ponendo

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1+R^2\alpha^2}}$$

che

$$P(s) = \Big(R\cos\alpha z_C - R\alpha\beta s\sin\alpha z_C, R\sin\alpha z_C + R\alpha\beta s\cos\alpha z_C, z_C + \beta s\Big)\,.$$

Quindi la velocità di $P(s)$ è

$$\boldsymbol{v}(s) = \Big(-R\alpha\dot z_C\sin\alpha z_C - R\alpha^2\beta s\dot z_C\cos\alpha z_C, R\alpha\dot z_C\cos\alpha z_C - R\alpha^2\beta s\dot z_C\sin\alpha z_C, \dot z_C\Big),$$

e

$$|\boldsymbol{v}(s)|^2 = (R\alpha\dot z_C)^2 + (R\alpha^2\beta s\dot z_C)^2 + \dot z_C^2\,,$$

per cui l'energia cinetica dell'asta sarà

$$
\begin{aligned}
T &= \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}\frac{m}{2L} |\boldsymbol{v}(s)|^2 \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2} m (R^2\alpha^2 + 1)\dot{z}_C^2 + \frac{1}{2}(R\alpha^2\beta\dot{z}_C)^2 \int_{-L}^{L} \frac{m}{2L} s^2 \, \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2} m (R^2\alpha^2 + 1)\dot{z}_C^2 + \frac{1}{2}(R\alpha^2\beta\dot{z}_C)^2 I = \frac{1}{2} m \Big(R^2\alpha^2 + 1 + \frac{1}{3} L^2 R^2 \alpha^4 \beta^2 \Big) \dot{z}_C^2 \,,
\end{aligned}
$$

ove I è il momento centrale d'inerzia dell'asta rispetto a un asse a essa ortogonale. Per la conservazione dell'energia si ottiene dunque a ogni istante

$$
T - U = \frac{1}{2} m \Big(R^2\alpha^2 + 1 + \frac{1}{3} L^2 R^2 \alpha^4 \beta^2 \Big) \dot{z}_C^2 + mgz_C = mgh \,,
$$

e quindi nell'istante in cui $z_C = 0$,

$$
\boldsymbol{v}_C = (0, \alpha R \dot{z}_C, \dot{z}_C) \,, \quad \dot{z}_C = -\sqrt{\frac{2gh}{R^2\alpha^2 + 1 + \frac{1}{3}\alpha^4\beta^2 R^2 L^2}} \,.
$$

2. [18/7/2005 (ex)II] Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza $2L$ e massa m è soggetta ai seguenti vincoli:

- il suo centro di massa appartiene all'elica cilindrica γ

$$
\begin{cases} x = R\cos\alpha\zeta \,, \\ y = R\sin\alpha\zeta \,, \\ z = \zeta \,, \end{cases} \qquad -\infty < \zeta < \infty \,;
$$

  qui $\alpha > 0$ è costante;

- l'asta è parallela alla tangente a γ.

I vincoli sono lisci.
Sull'asta agisce la forza peso, diretta secondo il verso negativo dell'asse z.
Il centro di massa dell'asta all'istante iniziale è a quota $z = 0$, con velocità corrispondente a $\dot{z}(0) = v_0 > 0$.
Determinare la quota massima raggiunta dal centro di massa nel moto successivo.
R.

$$
z_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \{ R^2\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^4\beta^2 R^2 L^2 + 1 \} \,, \qquad \beta^2 = (1 + \alpha^2 R^2)^{-1} \,.
$$

3. [12/9/2005 (ex)I] Un triangolo ABC è formato da tre aste omogenee di lunghezza $2L$, ciascuna di massa m. È vincolato a ruotare intorno a un asse fisso per A, rimanendo sempre ortogonale ad esso; il vertice A è fisso.
Determinare in funzione di m, L e di un'opportuna coordinata lagrangiana l'energia cinetica del triangolo.

SOLUZIONE
Scegliamo come sistema di riferimento solidale con il triangolo $(A, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, *ove* $\boldsymbol{u}_1$ *è un versore (fisso) giacente sull'asse di rotazione, e* $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ *sono scelti sul piano del triangolo (e solidali con esso).*
Sia φ *l'angolo formato dal lato* AC *con una retta fissa nel piano fisso su cui giace* ABC, *passante per* A. *Allora la velocità angolare del triangolo è*

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 .$$

Vale

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I_{11}\dot{\varphi}^2 .$$

Resta da calcolare I_{11}. *Il contributo di ciascuna delle due aste* AB *e* AC *è*

$$\int_0^{2L} \frac{m}{2L}s^2 \,\mathrm{d}s = \frac{4}{3}mL^2 .$$

Il contributo I_{BC} *di* BC *si può calcolare mediante il teorema di Huygens: se* G *è il centro di massa di* BC,

$$I_{BC} = I_{BC}^G + m \,\mathrm{dist}(A, G)^2 ,$$

ove indichiamo

$$I_{BC}^G = \int_{-L}^{L} \frac{m}{2L}s^2 \,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}mL^2 .$$

Dunque

$$I_{11} = 2\frac{4}{3}mL^2 + \frac{1}{3}mL^2 + m(\sqrt{3}L)^2 = 6mL^2 ,$$

cosicché

$$T = 3mL^2\dot{\varphi}^2 .$$

R.

$$T = 3mL^2\dot{\varphi}^2 .$$

4. [12/9/2005 (ex)II] Un triangolo ABC è formato da tre aste omogenee di lunghezza $4L$, ciascuna di massa m. È vincolato a ruotare intorno a un asse fisso per A, rimanendo sempre ortogonale ad esso; il vertice A è fisso.
Determinare in funzione di m, L e di un'opportuna coordinata lagrangiana l'energia cinetica del triangolo.
R.

$$T = 12mL^2\dot{\varphi}^2 .$$

5. [19/7/2006 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza

$$\begin{cases} x_1 = R\cos\varphi , \\ x_2 = R\sin\varphi , \qquad -\pi \leq \varphi \leq \pi . \\ x_3 = 0 , \end{cases}$$

Su di esso agiscono la forza peso, nella direzione negativa dell'asse x_2, e la reazione vincolare $\boldsymbol{f}_{\text{vin}}$, la cui componente tangente si oppone al moto ed è tale che

$$|\boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| = \mu \, |\boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N}| \,.$$

Scrivere l'equazione del moto di P nella forma di un'equazione differenziale scalare per la coordinata lagrangiana.

Soluzione

Osserviamo anzitutto che un'ascissa curvilinea s è data da $s = R\varphi$, e che

$$\boldsymbol{T} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\,, \qquad \boldsymbol{N} = -(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,.$$

Inoltre le equazioni di moto $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ danno, proiettate lungo $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{N}$,

$$m\ddot{s} = -mg\cos\varphi + \boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}\,,$$
$$m\dot{s}^2 k = mg\sin\varphi + \boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N}\,.$$

Sostituendo la seconda di queste nella prima,

$$m\ddot{s} = -mg\cos\varphi - \mu m \left| \frac{\dot{s}^2}{R} - g\sin\varphi \right| \,.$$

Usando la relazione $s = R\varphi$ si ha infine l'equazione cercata.

R.

$$R\ddot{\varphi} = -g\cos\varphi - \mu \left| R\dot{\varphi}^2 - g\sin\varphi \right| \,.$$

6. [19/7/2006 (ex)I] Un sistema vincolato è costituito da un disco rigido di raggio $R > 0$ e massa $M > 0$, e da un punto materiale P di massa $m > 0$ vincolato a muoversi sulla circonferenza bordo del disco.

Inoltre il disco è vincolato a ruotare intorno a un asse fisso passante per un suo diametro, mantenendo il centro fisso su tale asse.

Determinare l'energia cinetica del sistema in funzione di opportune coordinate lagrangiane.

Soluzione

1) Siano A e B gli estremi del diametro che giace sull'asse di rotazione. Scegliamo un sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$, con O coincidente con il centro del disco, e

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R}\,.$$

Scegliamo anche un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ solidale con il disco, in modo che

$$\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3\,, \qquad \textit{per ogni } t;$$
$$\boldsymbol{u}_1 \quad \textit{sia ortogonale al disco.}$$

Il moto del disco può allora essere descritto mediante la coordinata lagrangiana θ, ove θ è l'angolo formato da $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{u}_1$. Perciò la velocità angolare del disco sarà

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\theta}(t)\boldsymbol{e}_3\,.$$

Visto che il moto si riduce a una rotazione,

$$T_{\mathrm{disco}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}I\dot\theta(t)^2\,,$$

ove I è il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse per $\boldsymbol{e}_3$.
2) Il moto del punto P può essere descritto con una coordinata lagrangiana ψ data dall'angolo formato da $\overrightarrow{OP}$ con $\boldsymbol{u}_2$, ossia

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\psi\boldsymbol{u}_2 + R\sin\psi\boldsymbol{u}_3\,.$$

D'altra parte

$$\boldsymbol{u}_2(t) = -\sin\theta(t)\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta(t)\boldsymbol{e}_2\,,$$

perciò nel sistema di riferimento fisso

$$\overrightarrow{OP} = R\{-\cos\psi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\psi\cos\theta\boldsymbol{e}_2 + \sin\psi\boldsymbol{e}_3\}\,.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_P = R\{&(\dot\psi\sin\psi\sin\theta - \dot\theta\cos\psi\cos\theta)\boldsymbol{e}_1\\ &+(-\dot\psi\sin\psi\cos\theta - \dot\theta\cos\psi\sin\theta)\boldsymbol{e}_2\\ &+\dot\psi\cos\psi\boldsymbol{e}_3\}\,,\end{aligned}$$

per cui

$$T_P = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_P|^2 = \frac{1}{2}mR^2(\dot\psi^2 + \dot\theta^2\cos^2\psi)\,.$$

3) In alternativa, per trovare $\boldsymbol{v}_P$ si può ricorrere alle formule della cinematica relativa, che, essendo, $\boldsymbol{v}_O = 0$, danno

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_P &= [\boldsymbol{v}_P]_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}\wedge\overrightarrow{OP}\\ &= R\dot\psi(-\sin\psi\boldsymbol{u}_2 + \cos\psi\boldsymbol{u}_3)\\ &\quad + \dot\theta\boldsymbol{u}_3\wedge(R\cos\psi\boldsymbol{u}_2 + R\sin\psi\boldsymbol{u}_3)\\ &= -R\dot\theta\cos\psi\boldsymbol{u}_1 - R\dot\psi\sin\psi\boldsymbol{u}_2 + R\dot\psi\cos\psi\boldsymbol{u}_3\,,\end{aligned}$$

che permette di ritrovare subito la T_P.
R.

$$T = \frac{1}{2}I\dot\theta(t)^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot\psi^2 + \dot\theta^2\cos^2\psi)\,.$$

7. [19/7/2006 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza

$$\begin{cases} x_1 = R\cos\varphi\,, \\ x_2 = 0\,, & \qquad -\pi\le\varphi\le\pi\,. \\ x_3 = R\sin\varphi\,, \end{cases}$$

Su di esso agiscono la forza peso, nella direzione negativa dell'asse x_1, e la reazione vincolare $\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}$, la cui componente tangente si oppone al moto ed è tale che

$$|\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{T}| = \lambda\,|\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{N}|\,.$$

Scrivere l'equazione del moto di P nella forma di un'equazione differenziale scalare per la coordinata lagrangiana.
R.

$$R\ddot{\varphi} = g\sin\varphi - \lambda\left|R\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi\right| .$$

8. [19/7/2006 (ex)II] Un sistema vincolato è costituito da un disco rigido di raggio $R > 0$ e massa $M > 0$, e da un punto materiale P di massa $m > 0$ vincolato a muoversi sulla circonferenza concentrica al disco (e giacente su di esso), di raggio $R/2$.
Inoltre il disco è vincolato a ruotare intorno a un asse fisso passante per un suo diametro, mantenendo il centro fisso su tale asse.
Determinare l'energia cinetica del sistema in funzione di opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}(t)^2 + \frac{1}{2}m\frac{R^2}{4}(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2\cos^2\psi) .$$

9. [22/9/2006 (ex)I] Si trovi in termini delle opportune coordinate lagrangiane l'energia cinetica di un'asta rigida AB, omogenea, di lunghezza $2L$, massa m, e sottoposta ai vincoli:

- A appartiene a una circonferenza fissa di raggio $R > 0$ e centro O;
- l'asta si mantiene sempre ortogonale nel suo moto al raggio $\overrightarrow{OA}$.

Soluzione

L'asta ha due gradi di libertà; sceglieremo dunque due coordinate lagrangiane. Se supponiamo che la circonferenza cui appartiene A giaccia nel piano $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\rangle$, si potrà scrivere

$$\overrightarrow{OA} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 ,$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$ prima coordinata lagrangiana. Poi, visto che l'asta deve mantenersi ortogonale a $\overrightarrow{OA}$, essa giace sempre nel piano individuato dalla tangente $\boldsymbol{\tau}$ e dalla binormale $\boldsymbol{e}_3$ della circonferenza; possiamo scegliere come seconda coordinata lagrangiana l'angolo $\theta \in (-\pi, \pi)$ formato da $\overrightarrow{AB}$ con $\boldsymbol{\tau}$.
Dunque, AB è parametrizzata da

$$\overrightarrow{AP(s)} = s\cos\theta\boldsymbol{\tau} + s\sin\theta\boldsymbol{e}_3 = -s\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + s\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + s\sin\theta\boldsymbol{e}_3 ,$$

con $0 \le s \le 2L$.
Quindi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP(s)} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP(s)}\\ &= (R\cos\varphi - s\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (R\sin\varphi + s\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2 + s\sin\theta\boldsymbol{e}_3 ,\end{aligned}$$

per cui

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(s) = & (-R\dot{\varphi}\sin\varphi + s\dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi - s\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1 \\
& + (R\dot{\varphi}\cos\varphi - s\dot{\theta}\sin\theta\cos\varphi - s\dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2 \\
& + s\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}
$$

e

$$
|\boldsymbol{v}(s)|^2 = R^2\dot{\varphi}^2 + s^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta) - 2Rs\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta \,.
$$

Si ha infine

$$
T = \frac{1}{2}\int_0^{2L} \frac{m}{2L} |\boldsymbol{v}(s)|^2 \, \mathrm{d}s = \frac{m}{2}\Big[R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{4}{3}L^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta) - 2LR\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\Big] \,.
$$

R.

$$
T = \frac{m}{2}\Big[R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{4}{3}L^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta) - 2LR\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\Big] \,.
$$

10. [22/9/2006 (ex)I] Scrivere la funzione lagrangiana del sistema formato da due punti materiali P_1 e P_2 di massa m vincolati a una circonferenza fissa di raggio R, che si attraggono a vicenda con una forza elastica di costante $k > 0$.

Soluzione

Usiamo come coordinate lagrangiane le due anomalie polari φ_i dei P_i nel sistema $(O, \boldsymbol{e}_i)$, che ha origine O nel centro della circonferenza, in modo che

$$
\overrightarrow{OP_i} = R\cos\varphi_i\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi_i\boldsymbol{e}_2 \,,
$$

e

$$
|\boldsymbol{v}_{P_i}|^2 = R^2\dot{\varphi}_i^2 \,.
$$

Il potenziale della forza elastica è

$$
U = -\frac{k}{2}\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2 = -kR^2\big[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\big] \,.
$$

R.

$$
\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - kR^2\big[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\big] \,.
$$

11. [17/9/2007 (ex)I] Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati

$$
\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2L > 0 \,, \qquad \left|\overrightarrow{AD}\right| = H > 0 \,,
$$

è vincolata a ruotare intorno al lato $\overrightarrow{AD}$ che giace sull'asse fisso x_3. I punti A e D sono fissi.

Sulla lamina agisce il campo di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha\Big(r - \frac{3}{2}L\cos\varphi\Big)\boldsymbol{e}_3 \wedge \overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}S\,,$$

ove P indica il generico punto sulla lamina, $\alpha > 0$ è costante, O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e $\mathrm{d}S$ è la misura di superficie sulla lamina. Inoltre r e φ sono le usuali coordinate cilindriche tali che

$$\overrightarrow{OP} = r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad r \ge 0\,, \varphi \in [-\pi, \pi)\,.$$

Determinare le posizioni di equilibrio della lamina.

SOLUZIONE

Possiamo assumere che $A = O$.

Dobbiamo trovare le posizioni ove si annulla la componente lungo $\boldsymbol{e}_3$ del momento delle forze applicate.

Questo momento si calcola come

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} &= \iint_{ABCD} \overrightarrow{OP} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{F} \\ &= \int_0^H \mathrm{d}x_3 \int_0^{2L} \overrightarrow{OP}(\varphi; r, x_3) \wedge \Big[\alpha\Big(r - \frac{3}{2}L\cos\varphi\Big)\boldsymbol{e}_3 \wedge \overrightarrow{OP}(\varphi; r, x_3)\Big]\,\mathrm{d}r\,,\end{aligned}$$

ove φ è la coordinata lagrangiana, e r, x_3 i due parametri che descrivono la superficie.

Con i calcoli si ottiene

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = \alpha \int_0^H \mathrm{d}x_3 \int_0^{2L} \Big(r - \frac{3}{2}L\cos\varphi\Big)[-rx_3\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 - rx_3\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + r^2\boldsymbol{e}_3]\,\mathrm{d}r\,,$$

cosicché l'equazione cercata è

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{e}_3 = \alpha \int_0^H \mathrm{d}x_3 \int_0^{2L} \Big(r - \frac{3}{2}L\cos\varphi\Big)r^2\,\mathrm{d}r = 4\alpha HL^4(1 - \cos\varphi) = 0\,,$$

che è verificata solo per $\varphi = 0$.

R.

$$\varphi = 0\,.$$

12. [17/9/2007 (ex)II] Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati

$$\Big|\overrightarrow{AB}\Big| = 2L > 0\,, \qquad \Big|\overrightarrow{AD}\Big| = H > 0\,,$$

è vincolata a ruotare intorno al lato $\overrightarrow{AD}$ che giace sull'asse fisso x_3. I punti A e D sono fissi.

Sulla lamina agisce il campo di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -\beta\Big(2r - 3L\cos\varphi\Big)\boldsymbol{e}_3 \wedge \overrightarrow{AP}\,\mathrm{d}S\,,$$

ove P indica il generico punto sulla lamina, $\beta > 0$ è costante, e $\mathrm{d}S$ è la misura di superficie sulla lamina. Inoltre r e φ sono le usuali coordinate cilindriche tali che

$$\overrightarrow{OP} = r\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad r \geq 0\,, \varphi \in [-\pi, \pi)\,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso. Determinare le posizioni di equilibrio della lamina.
R.

$$\varphi = 0\,.$$

13. [13/12/2007 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato con attrito alla circonferenza

$$\gamma = \{(R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0) \mid -\pi < \varphi < \pi\}\,.$$

La reazione vincolare ha la forma

$$\boldsymbol{f}_{\text{vin}} = \boldsymbol{f}^{\text{norm}}_{\text{vin}} + \boldsymbol{f}^{\text{tang}}_{\text{vin}}\,, \quad \boldsymbol{f}^{\text{tang}}_{\text{vin}} := \boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{T}\,, \quad |\boldsymbol{f}^{\text{tang}}_{\text{vin}}| = \mu|\boldsymbol{f}^{\text{norm}}_{\text{vin}}|\,,$$

con μ costante positiva.
Su P agiscono

- La forza elastica
$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{AP}\,,$$
con $k > 0$ costante e $A = (R, 0, 0)$.
- La forza peso
$$-mg\boldsymbol{e}_2\,.$$

Determinare l'equazione di moto.
SOLUZIONE
Scomponiamo

$$m\boldsymbol{a} = -k\overrightarrow{AP} - mg\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{f}_{\text{vin}}\,,$$

nella terna intrinseca, supponendo che $\dot{s} > 0$*:*

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= -k\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{T} - mg\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{T} - |\boldsymbol{f}^{\text{tang}}_{\text{vin}}|\,,\\ m\frac{\dot{s}^2}{R} &= -k\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{N} - mg\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{N} + \boldsymbol{f}^{\text{norm}}_{\text{vin}}\cdot\boldsymbol{N}\,,\\ 0 &= \boldsymbol{f}^{\text{norm}}_{\text{vin}}\cdot\boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Calcoliamo, per $s/R = \varphi$*,*

$$\overrightarrow{AP}(s) = \Big(R\cos\frac{s}{R} - R\Big)\boldsymbol{e}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2\,,$$

$$\boldsymbol{T}(s) = -\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + \cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{N}(s) = -\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 - \sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{e}_3\,.$$

Quindi

$$\overrightarrow{AP} \cdot \boldsymbol{T}(s) = R \sin \frac{s}{R} \,,$$
$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{T}(s) = \cos \frac{s}{R} \,,$$

e

$$\overrightarrow{AP} \cdot \boldsymbol{N}(s) = -R + R \cos \frac{s}{R} \,,$$
$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{N}(s) = -\sin \frac{s}{R} \,.$$

Dunque le equazioni sopra danno

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= -kR \sin \frac{s}{R} - mg \cos \frac{s}{R} + |\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tang}}| \,, \\ m\frac{\dot{s}^2}{R} &= k\Big(R - R\cos \frac{s}{R}\Big) + mg \sin \frac{s}{R} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{norm}} \cdot \boldsymbol{N} \,, \\ 0 &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{norm}} \cdot \boldsymbol{B} \,. \end{aligned}$$

Da queste, insieme con la legge di attrito, si ricava

$$|\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tang}}| = \mu \left| m\frac{\dot{s}^2}{R} - k\Big(R - R\cos \frac{s}{R}\Big) - mg \sin \frac{s}{R} \right| \,.$$

R.

$$m\ddot{s} = -kR \sin \frac{s}{R} - mg \cos \frac{s}{R} - \mu \left| m\frac{\dot{s}^2}{R} - k\Big(R - R\cos \frac{s}{R}\Big) - mg \sin \frac{s}{R} \right| \,.$$

14. [13/12/2007 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato con attrito alla circonferenza

$$\gamma = \{(R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0) \mid -\pi < \varphi < \pi\} \,.$$

La reazione vincolare ha la forma

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{norm}} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tang}} \,, \quad \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tang}} := \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{T} \,, \quad |\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tang}}| = \mu |\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{norm}}| \,,$$

con μ costante positiva.
Su P agiscono

- La forza elastica
$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{AP} \,,$$
con $k > 0$ costante e $A = (0, R, 0)$.
- La forza peso
$$-mg\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Determinare l'equazione di moto.
R.

$$m\ddot{s} = kR\cos\frac{s}{R} + mg\sin\frac{s}{R} - \mu\left|m\frac{\dot{s}^2}{R} - k\Bigl(R - R\sin\frac{s}{R}\Bigr) - mg\cos\frac{s}{R}\right| .$$

15. [12/1/2009 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos\lambda s\,, \\ x_2 &= R\sin\lambda s\,, \qquad -\infty < s < \infty\,, \\ x_3 &= h\lambda s\,, \end{aligned}$$

ove R, $h > 0$ sono costanti, e $\lambda = 1/\sqrt{R^2+h^2}$. Si noti che s è la lunghezza d'arco.
Il punto è soggetto alla forza peso

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3 .$$

Il punto parte da fermo a quota $x_3 = 0$.
Trovare la reazione vincolare che agisce su P quando esso raggiunge quota $x_3 = -2\pi h$, in funzione di R, h, λ, m, g, e dei vettori $\boldsymbol{e}_i$.
Soluzione
L'equazione di moto, scomposta nella terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$, dà, visto che il vincolo è liscio,

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{F}\,, \\ mk\dot{s}^2 &= \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{F} + \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}\,, \\ 0 &= \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{F} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}\,. \end{aligned}$$

Dalla parametrizzazione della curva si ha subito

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T}(s) = \lambda(-R\sin\lambda s, R\cos\lambda s, h)\,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos\lambda s, \sin\lambda s, 0)\,, \\ &\boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{T}(s)\wedge\boldsymbol{N}(s) = \lambda(h\sin\lambda s, -h\cos\lambda s, R)\,, \qquad k(s) = \lambda^2 R\,. \end{aligned}$$

Dunque

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{F} = -mgh\lambda\,, \qquad \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{F} = 0\,, \qquad \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{F} = -mgR\lambda\,.$$

Perciò il moto è determinato dal problema

$$m\ddot{s} = -mgh\lambda\,, \qquad s(0) = 0\,, \quad \dot{s}(0) = 0\,,$$

che ha per soluzione

$$s(t) = -\frac{gh\lambda}{2}t^2\,, \quad t\in\boldsymbol{R}\,.$$

Perciò nell'istante $\bar{t}$ in cui

$$-2\pi h = x_3(\bar{t}) = h\lambda s(\bar{t}) = -\frac{gh^2\lambda^2}{2}t^2\,,$$

deve essere

$$\bar{t} = \frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{gh}}\,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}(\bar{t}) = 4\pi mg\lambda^2 Rh\boldsymbol{N}(s(\bar{t})) + mgR\lambda\boldsymbol{B}(s(\bar{t}))\,.$$

R.

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}(\bar{t}) = mgR\lambda^2(-4\pi h, -h, R)\,.$$

16. [12/1/2009 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\sin\lambda s\,, \\ x_2 &= R\cos\lambda s\,, \qquad -\infty < s < \infty\,, \\ x_3 &= h\lambda s\,, \end{aligned}$$

ove R, $h > 0$ sono costanti, e $\lambda = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$. Si noti che s è la lunghezza d'arco.
Il punto è soggetto alla forza peso

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Il punto parte da fermo a quota $x_3 = 2\pi h$.
Trovare la reazione vincolare che agisce su P quando esso raggiunge quota $x_3 = 0$, in funzione di R, h, λ, m, g, e dei vettori $\boldsymbol{e}_i$.
R.

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}(\bar{t}) = mgR\lambda^2(h, -4\pi h, R)\,.$$

17. [12/6/2009 (ex)I] Due punti P_1 e P_2 entrambi di massa m sono vincolati come segue:

$$x_{2P_1} = 0\,, \qquad x_{2P_2} = 0\,;$$
$$x_{3P_1} = \frac{a}{x_{1P_1}}\,, \quad x_{1P_1} > 0\,; \qquad x_{3P_2} = -\frac{a}{x_{1P_2}}\,, \quad x_{1P_2} < 0\,;$$

qui $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, e (x_i) indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\omega t\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

con $\omega > 0$ costante.

Sui punti agiscono il peso, diretto nel verso negativo dell'asse x_3, e le forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = -k\overrightarrow{P_2P_1}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{P_2} = -k\overrightarrow{P_1P_2}\,,$$

ove $k > 0$.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema.
2. Si assuma anche $k > m\omega^2$. Allora moti in cui la distanza di uno dei due punti da O divenga illimitata sono impossibili, in uno dei due casi $a > 0$ o $a < 0$. Trovare in quale.

Soluzione

1) Si scelgono come coordinate lagrangiane

$$\xi_1 = x_{1P_1} \in (0,\infty)\,, \qquad \xi_2 = x_{1P_2} \in (-\infty, 0)\,.$$

Perciò

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\xi_1) = \xi_1 \boldsymbol{u}_1 + \frac{a}{\xi_1}\boldsymbol{u}_3\,, \qquad \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(\xi_2) = \xi_2 \boldsymbol{u}_1 - \frac{a}{\xi_2}\boldsymbol{u}_3\,.$$

Nel sistema mobile $\mathcal{S}$ sui punti agiscono anche le forze fittizie. Comunque la forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle, perché i punti giacciono su un piano che ruota intorno a un asse appartenente al piano medesimo.
Dunque possiamo scrivere la funzione lagrangiana, visto che le altre forze sono tutte conservative; i potenziali sono

$$\begin{aligned}
U_{\mathrm{el}}^{\mathrm{L}} &= -\frac{k}{2}\,|\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} - \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}|^2 = -\frac{k}{2}\Big[(\xi_1-\xi_2)^2 + \Big(\frac{a}{\xi_1} + \frac{a}{\xi_2}\Big)^2\Big]\,,\\
U_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}} &= \frac{m\omega^2}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)\,,\\
U_{\mathrm{peso}}^{\mathrm{L}} &= -mg\Big(\frac{a}{\xi_1} - \frac{a}{\xi_2}\Big)\,.
\end{aligned}$$

L'energia cinetica si ricava subito dalle velocità

$$\boldsymbol{v}_1 = \dot\xi_1\boldsymbol{u}_1 - \dot\xi_1\frac{a}{\xi_1^2}\boldsymbol{u}_3\,, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \dot\xi_2\boldsymbol{u}_1 + \dot\xi_2\frac{a}{\xi_2^2}\boldsymbol{u}_3\,,$$

ed è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}\Big[\dot\xi_1^2\Big(1 + \frac{a^2}{\xi_1^4}\Big) + \dot\xi_2^2\Big(1 + \frac{a^2}{\xi_2^4}\Big)\Big]\,.$$

2) Per la conservazione dell'energia, durante ciascun moto,

$$T^{\mathrm{L}} - U^{\mathrm{L}} = E\,,$$

e quindi

$$\begin{aligned}
-2U^{\mathrm{L}} = k\Big[(\xi_1-\xi_2)^2 + a^2\Big(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2}\Big)^2\Big]&\\
- m\omega^2(\xi_1^2+\xi_2^2) + 2mga\Big(\frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2}\Big) &\le 2E\,.
\end{aligned}$$

Segue che

$$(k - m\omega^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2) - 2k\xi_1\xi_2 + 2mga\Big(\frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2}\Big) \le 2E\,,$$

e quindi, visto che $|\xi_2| = -\xi_2$,

$$(k - m\omega^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2) + 2mga\Big(\frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2}\Big) \le 2E\,. \tag{1}$$

Il moto diviene illimitato se e solo se almeno una tra le quattro quantità

$$\frac{1}{|\xi_i|}\,, \qquad |\xi_i|\,, \qquad i = 1, 2\,,$$

diviene illimitata.
Se $a > 0$ *e* $k > m\omega^2$, *dalla* (1) *segue che questo non può accadere.*
R.

$$1) \qquad \mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big[\dot\xi_1^2\Big(1 + \frac{a^2}{\xi_1^4}\Big) + \dot\xi_2^2\Big(1 + \frac{a^2}{\xi_2^4}\Big)\Big] - \frac{k}{2}\Big[(\xi_1 - \xi_2)^2 + \Big(\frac{a}{\xi_1} + \frac{a}{\xi_2}\Big)^2\Big] + \frac{m\omega^2}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) - mg\Big(\frac{a}{\xi_1} - \frac{a}{\xi_2}\Big)\,.$$

$$2) \qquad a > 0\,.$$

18. [12/6/2009 (ex)II] Due punti P_1 e P_2 entrambi di massa m sono vincolati come segue:

$$x_{2P_1} = 0\,, \qquad x_{2P_2} = 0\,;$$
$$x_{3P_1} = \frac{a}{x_{1P_1}^2}\,, \quad x_{1P_1} > 0\,; \qquad x_{3P_2} = \frac{a}{x_{1P_2}^2}\,, \quad x_{1P_2} < 0\,;$$

qui $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, e (x_i) indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\omega t\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

con $\omega > 0$ costante.
Sui punti agiscono il peso, diretto nel verso negativo dell'asse x_3, e le forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = -k\overrightarrow{P_2P_1}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{P_2} = -k\overrightarrow{P_1P_2}\,,$$

ove $k > 0$.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema.

2. Si assuma anche $k > m\omega^2$. Allora moti in cui la distanza di uno dei due punti da O divenga illimitata sono impossibili, in uno dei due casi $a > 0$ o $a < 0$. Trovare in quale.

R.

$$1)\qquad \mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big[\dot\xi_1^2\Big(1 + \frac{4a^2}{\xi_1^6}\Big) + \dot\xi_2^2\Big(1 + \frac{4a^2}{\xi_2^6}\Big)\Big] - \frac{k}{2}\Big[(\xi_1 - \xi_2)^2 + \Big(\frac{a}{\xi_1^2} - \frac{a}{\xi_2^2}\Big)^2\Big] + \frac{m\omega^2}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) - mg\Big(\frac{a}{\xi_1^2} + \frac{a}{\xi_2^2}\Big).$$

$$2)\qquad a > 0\,.$$

19. [11/9/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,, \qquad x_2 = x_3\,.$$

Il punto è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Il punto parte da fermo nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1\,.$$

Determinare la reazione vincolare quando P raggiunge la posizione

$$\overrightarrow{OP} = -\frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)\,.$$

Soluzione

Scomponendo l'equazione di moto sulla terna intrinseca si ha

$$\begin{aligned} m\ddot s &= -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{T}\,, \\ m\frac{\dot s^2}{R} &= -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{N} + \boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N}\,, \\ 0 &= -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Ci occorre dunque, oltre alla terna $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$, anche il valore di $\dot s^2$ nella posizione indicata.
Quest'ultimo si determina subito con argomenti energetici: per la conservazione dell'energia, vale

$$\frac{1}{2}m\dot s^2 - U_{\text{peso}} = \frac{1}{2}m\dot s^2 + mgx_3(s) = \text{ costante } = 0\,,$$

ove l'ultima uguaglianza segue dalle condizioni iniziali. Dunque nell'istante desiderato

$$\dot s^2 = 2g\frac{R}{\sqrt{2}}\,.$$

Nella posizione $(0, -R/\sqrt{2}, -R/\sqrt{2})$ *si ha per ovvie considerazioni geometriche*

$$\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} \,, \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} \,.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} &= \frac{m}{R}\sqrt{2}gR + mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} \,, \\ \boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} &= mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} \,. \end{aligned}$$

R.

$$\boldsymbol{f}_{\text{vin}} = \frac{mg}{\sqrt{2}}(3\boldsymbol{N} - \boldsymbol{B}) = mg(\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3) \,.$$

20. [11/9/2009 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \,, \qquad x_2 = x_3 \,.$$

Il punto è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Il punto parte da fermo nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Determinare la reazione vincolare quando P raggiunge la posizione

$$\overrightarrow{OP} = -\frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \,.$$

R.

$$\boldsymbol{f}_{\text{vin}} = \frac{mg}{\sqrt{2}}(3\boldsymbol{N} + \boldsymbol{B}) = mg(2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \,.$$

21. [20/11/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato a muoversi sull'iperbole

$$x_2 = \frac{\alpha}{x_1} \,, \qquad \alpha > 0 \,,$$

sotto l'azione del peso

$$-mg\boldsymbol{e}_2 \,.$$

All'istante iniziale

$$x_1(0) = \beta \in (0, \sqrt{\alpha}) \,, \qquad \dot{x}_1(0) = 0 \,.$$

Calcolare la reazione vincolare all'istante in cui

$$x_1 = x_2 = \sqrt{\alpha}\,.$$

(Si dia come noto che in questo punto la curva ha curvatura $k = 1/\sqrt{2\alpha}$.)
SOLUZIONE
Proiettiamo le equazioni di moto sulla terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$, *ottenendo*

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= -mg\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{T}\,, \\ mk\dot{s}^2 &= -mg\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{N} + \boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N}\,, \\ 0 &= -mg\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Si è usato qui che $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_3$.
All'istante in cui $x_2 = \sqrt{\alpha}$, *per l'integrale dell'energia, si ha*

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mg\sqrt{\alpha} = mg\frac{\alpha}{\beta}\,,$$

ossia

$$m\dot{s}^2 = 2mg\Big(\frac{\alpha}{\beta} - \sqrt{\alpha}\Big)\,.$$

Inoltre

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{x_1^4}}}\Big(1, -\frac{\alpha}{x_1^2}\Big)\,, \qquad \boldsymbol{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{x_1^4}}}\Big(-\frac{\alpha}{x_1^2}, 1\Big)\,.$$

Perciò

$$\boldsymbol{f}_{\text{vin}} = \Big[mk\dot{s}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}mg\Big]\boldsymbol{N}\,.$$

R.

$$\boldsymbol{f}_{\text{vin}} = mg\Big[\Big(\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} - 1\Big) + \frac{1}{2}\Big](\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)\,.$$

22. [9/4/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra

$$x_3 = 0\,, \qquad x_1^2 + x_2^2 = R^2\,,$$

e su di esso agiscono il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_2, e la reazione vincolare $\boldsymbol{f}_{\text{vin}}$, che soddisfa (finché il punto ha velocità non nulla)

$$|\boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| = \mu\,|\boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot (\boldsymbol{N} + \boldsymbol{B})|\,, \qquad \boldsymbol{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{v} \leq 0\,.$$

Scrivere l'equazione differenziale (scalare) di moto del punto, assumendo che la velocità non sia nulla.
SOLUZIONE

Le equazioni di moto, proiettate lungo la terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$, *sono*

$$
\begin{aligned}
m\ddot{s} &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} - mg\cos\frac{s}{R}\,,\\
m\frac{\dot{s}^2}{R} &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N} + mg\sin\frac{s}{R}\,,\\
0 &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B}\,.
\end{aligned}
$$

Dunque, nell'ipotesi che $\dot{s} > 0$,

$$
\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = -\mu\,|\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N}| = -\mu\left|m\frac{\dot{s}^2}{R} - mg\sin\frac{s}{R}\right|\,.
$$

Dunque si ha

$$
\ddot{s} = -\mu\left|m\frac{\dot{s}^2}{R} - mg\sin\frac{s}{R}\right| - g\cos\frac{s}{R}\,.
$$

R.

$$
\ddot{s} = -\mu\left|m\frac{\dot{s}^2}{R} - mg\sin\frac{s}{R}\right| - g\cos\frac{s}{R}\,.
$$

23. [8/7/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra γ che nel sistema di riferimento fisso ha equazioni

$$
x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,.
$$

All'istante iniziale P occupa la posizione

$$
P(0) = (-R, 0, 0)\,,
$$

con velocità

$$
\boldsymbol{v}_0 = (0, v_0, 0)\,.
$$

La reazione vincolare, che si oppone al moto, soddisfa (se P ha velocità non nulla)

$$
|\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| = \mu\,|\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B}|\,.
$$

Qui R, v_0, μ sono costanti positive.
Scrivere le equazioni di moto e dire se il punto si arresti o meno in un tempo finito.

SOLUZIONE

Secondo la scomposizione della accelerazione nella terna intrinseca, si deve avere

$$
\begin{aligned}
m\ddot{s} &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}\,,\\
m\frac{\dot{s}^2}{R} &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N}\,,\\
0 &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B}\,.
\end{aligned}
$$

Si noti che, parametrizzando γ come

$$x_1 = -R \cos \frac{s}{R} , \quad x_2 = R \sin \frac{s}{R} , \quad x_3 = 0 ,$$

si ha

$$s(0) = 0 , \qquad \dot{s}(0) = v_0 .$$

Dunque l'equazione di moto è

$$m\ddot{s} = -\mu m \frac{\dot{s}^2}{R} ,$$

da cui

$$s(t) = \frac{R}{\mu} \ln \Big(1 + \frac{\mu}{R} v_0 t \Big) , \qquad t \geq 0 .$$

R.

$$\ddot{s} = -\mu \frac{\dot{s}^2}{R} ,$$

da cui

$$s(t) = \frac{R}{\mu} \ln \Big(1 + \frac{\mu}{R} v_0 t \Big) , \qquad t \geq 0 .$$

Quindi il moto non si arresta.

580. Dinamica per sistemi vincolati: vincoli mobili

1. [7/7/2006 (ex)I] Un'ellisse scabra E di semiassi $a > b > 0$ può esercitare una reazione vincolare $\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}$ con

$$|\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| \leq \mu \, |\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N}| ,$$

ove μ è una costante positiva, e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca di E. L'ellisse giace su un piano ortogonale all'asse fisso x_3, e ruota con velocità angolare costante

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_3 , \qquad \omega > 0 ,$$

mantenendo il suo centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Trovare tutte le possibili posizioni di equilibrio relative all'ellisse di un punto materiale P di massa $m > 0$ vincolato ad essa.

Soluzione

In un sistema di riferimento mobile solidale con l'ellisse, di origine O, su P agisce la forza di trascinamento

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = m\omega^2 \overrightarrow{OP} .$$

La proiezione di $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ lungo la tangente è

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{T} = m\omega^2 \overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{T} .$$

Per avere l'equilibrio occorre e basta

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} = 0 \,,$$

cioè

$$|\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{T}| \le \mu \, |\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{N}| \;.$$

Parametrizziamo E come

$$\xi_1 = a\cos\theta \,, \quad \xi_2 = b\sin\theta \,, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \,.$$

Un semplice calcolo dà allora:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \frac{(-a\sin\theta, b\cos\theta, 0)}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}} \,, \\ \boldsymbol{N} &= \frac{(-b\cos\theta, -a\sin\theta, 0)}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}} \,. \end{aligned}$$

Perciò la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio si scrive come

$$\begin{aligned} m\omega^2 \, &|(a\cos\theta, b\sin\theta) \cdot (-a\sin\theta, b\cos\theta)| \\ &\qquad \le \mu m\omega^2 \, |(a\cos\theta, b\sin\theta) \cdot (-b\cos\theta, -a\sin\theta)| \;. \end{aligned}$$

R. *Se E è parametrizzata da*

$$\xi_1 = a\cos\theta \,, \quad \xi_2 = b\sin\theta \,, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \,,$$

i punti di equilibrio corrispondono ai valori di θ per i quali

$$\mu ab \ge |a^2 - b^2| \, |\sin\theta \, \cos\theta| \,.$$

2. [7/7/2006 (ex)II] Un'ellisse scabra E di semiassi $0 < a < b$ può esercitare una reazione vincolare $\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}$ con

$$|\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| \le \lambda \, |\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N}| \;,$$

ove λ è una costante positiva, e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca di E. L'ellisse giace su un piano ortogonale all'asse fisso x_1, e ruota con velocità angolare costante

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \omega > 0 \,,$$

mantenendo il suo centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Trovare tutte le possibili posizioni di equilibrio relative all'ellisse di un punto materiale P di massa $m > 0$ vincolato ad essa.
R. *Se E è parametrizzata da*

$$\xi_2 = a\cos\theta \,, \quad \xi_3 = b\sin\theta \,, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \,,$$

i punti di equilibrio corrispondono ai valori di θ per i quali

$$\lambda ab \geq |a^2 - b^2| \, |\sin\theta \, \cos\theta| \, .$$

3. [22/9/2006 (ex)I] Un'asta rigida di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere su un piano ruotante, con velocità angolare di modulo costante $\omega > 0$, intorno all'asse fisso verticale x_3.
Un estremo A dell'asta è fisso su tale asse, mentre l'altro B è richiamato da una forza elastica di costante $k > 0$ e centro un punto C solidale con il piano ruotante.
Se denotiamo con $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2)$ un sistema di riferimento solidale con tale piano, in modo che $O \equiv A$, $\boldsymbol{u}_3 \equiv \boldsymbol{e}_3$, e $\boldsymbol{u}_1$ sia sempre ortogonale al piano, si ha che

$$\overrightarrow{OC} = R\boldsymbol{u}_2 + R\boldsymbol{u}_3 \, .$$

Sia inoltre $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{u}_3$ l'accelerazione di gravità.
Scrivere le equazioni di moto dell'asta, e trovare una condizione su m, L, R, ω, k che permetta di avere una configurazione di equilibrio relativo per l'asta quando questa è orizzontale.
SOLUZIONE
Si tratta di un sistema a vincoli olonomi mobili, a un grado di libertà. Scegliamo come coordinata lagrangiana l'angolo φ formato da $\overrightarrow{AB}$ con $\boldsymbol{u}_2$, e scriviamo le equazioni del moto nel sistema di riferimento $\mathcal{S}$ solidale con il piano ruotante.
L'energia cinetica dell'asta risulta allora

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}_{AB} \cdot \boldsymbol{\omega}_{AB} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \, ,$$

ove $\boldsymbol{\omega}_{AB} = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1$ denota la velocità angolare dell'asta in $\mathcal{S}$, e I il suo momento di inerzia rispetto a $\boldsymbol{u}_1$.
Il potenziale è

$$U = U_{\text{peso}} + U_{\text{T}} + U_{\text{elastico}} \, ,$$

ove

$$U_{\text{peso}} = -mgL\sin\varphi \, .$$

Inoltre

$$U_{\text{T}} = \int_0^{2L} \frac{m}{2L} \frac{1}{2} \omega^2 s^2 \cos^2\varphi \, \mathrm{d}s = \frac{2}{3} m\omega^2 L^2 \cos^2\varphi \, ,$$

e

$$\begin{aligned} U_{\text{elastico}} = -\frac{k}{2}\Big\{ &(2L\sin\varphi - R)^2 + (2L\cos\varphi - R)^2 \Big\} \\ &= -k\big\{2L^2 + R^2 - 2RL(\sin\varphi + \cos\varphi)\big\} \, . \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 - mgL\sin\varphi + \frac{2}{3} m\omega^2 L^2 \cos^2\varphi - k\big\{2L^2 + R^2 - 2RL(\sin\varphi + \cos\varphi)\big\} \, .$$

L'equazione di Lagrange è

$$I\ddot{\varphi} + mgL\cos\varphi + \frac{4}{3}m\omega^2 L^2 \sin\varphi\cos\varphi - 2kRL(\cos\varphi - \sin\varphi) = 0\,.$$

Le posizioni di equilibrio corispondono a

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0\,,$$

ossia a

$$mgL\cos\varphi + \frac{4}{3}m\omega^2 L^2 \sin\varphi\cos\varphi - 2kRL(\cos\varphi - \sin\varphi) = 0\,,$$

che dà una soluzione $\varphi = 0$ se e solo se $mgL = 2RLk$.
R.

$$mg = 2Rk\,.$$

620. Equazioni di Lagrange per vincoli fissi

1. [12/9/2005 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie liscia

$$z = f\big(\sqrt{x^2 + y^2}\,\big)\,, \qquad f \in C^3([0,\infty))\,.$$

Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse z.
Dimostrare che un moto circolare (che non sia la quiete) su $x^2 + y^2 = \bar{r}^2 > 0$ è possibile se e solo se $f'(\bar{r}) > 0$.
SOLUZIONE
Scegliamo come coordinate lagrangiane r, θ, con $r > 0$ e $\theta \in (0, 2\pi)$. La velocità di P è

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{u} + r\dot{\theta}\boldsymbol{\tau} + f'(r)\dot{r}\boldsymbol{e}_3\,,$$

per cui l'energia cinetica risulta

$$T = \frac{1}{2}m\big[\dot{r}^2(1 + f'(r)^2) + r^2\dot{\theta}^2\big]\,.$$

Il potenziale della forza peso è

$$U = -mgz = -mgf(r)\,,$$

per cui la lagrangiana vale

$$\mathcal{L}(r,\theta) = T + U = \frac{1}{2}m\big[\dot{r}^2(1 + f'(r)^2) + r^2\dot{\theta}^2\big] - mgf(r)\,.$$

Le equazioni di moto sono quindi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m\dot{r}(1 + f'(r)^2)\big] - \big[m\dot{r}^2 f'(r)f''(r) + mr\dot{\theta}^2 - mgf'(r)\big] = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[mr^2\dot{\theta}\big] = 0\,.$$

Una soluzione $(r(t), \theta(t))$ *con* $r(t) \equiv \bar{r}$ *(e quindi* $\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t$ *con* θ_0, $\dot{\theta}_0$ *costanti), è possibile se e solo se*

$$\bar{r}\dot{\theta}_0^2 = g f'(\bar{r})\,.$$

2. [12/9/2005 (ex)I] Una circonferenza γ di raggio R, centro C e massa m è vincolata a muoversi su un piano verticale fisso π. Inoltre il punto medio Q del raggio $\overrightarrow{CA}$ ove A è un punto di γ (solidale con essa) è fisso su π. Si noti che Q è solidale con la circonferenza, la quale perciò ruota intorno all'asse ortogonale a π in Q.
Un punto materiale P di massa M è vincolato a muoversi su γ.
Si scriva la lagrangiana del sistema, scegliendo come coordinate lagrangiane: l'angolo θ formato da $\overrightarrow{CA}$ con la verticale ascendente; l'angolo φ formato da $\overrightarrow{CP}$ con la verticale ascendente.
SOLUZIONE
Si ha, scegliendo l'origine del sistema fisso in Q, *e prendendo l'asse* x_1 *come verticale ascendente e* $\pi = \{x_3 = 0\}$, *che*

$$C = \frac{R}{2}(-\cos\theta, -\sin\theta, 0)\,,$$
$$P = \frac{R}{2}(-\cos\theta, -\sin\theta, 0) + R(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,.$$

Allora

$$T_{\mathrm{crf}} = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2\,, \qquad U_{\mathrm{crf}} = -mgx_{1C} = mg\frac{R}{2}\cos\theta$$

(qui I *è il momento d'inerzia di* γ *rispetto all'asse di rotazione* x_3*). Inoltre*

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{R}{2}\dot{\theta}(\sin\theta, -\cos\theta, 0) + R\dot{\varphi}(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\,,$$

cosicché

$$T_P = \frac{1}{2}MR^2\big[\frac{\dot{\theta}^2}{4} + \dot{\varphi}^2 - \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi)\big]\,.$$

Infine

$$U_P = -Mgx_{1P} = MgR(\frac{1}{2}\cos\theta - \cos\varphi)\,.$$

R.

$$\mathcal{L}(\varphi, \theta) = \frac{1}{2}\Big[\Big(I + \frac{MR^2}{4}\Big)\dot{\theta}^2 + MR^2\dot{\varphi}^2 - MR^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi)\Big] + mg\frac{R}{2}\cos\theta + MgR(\frac{1}{2}\cos\theta - \cos\varphi)\,.$$

3. [12/9/2005 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie liscia di equazione

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\,, \qquad x_1^2 + x_2^2 > 0\,,$$

e soggetto a una forza

$$\boldsymbol{F} = -\frac{k}{x_3^\alpha}\boldsymbol{e}_3 \,,$$

con $1 > \alpha > 0$, $k > 0$ costanti.
Dimostrare che non sono possibili moti nei quali x_3 diviene illimitata.
SOLUZIONE
Scegliamo come coordinate lagrangiane le coordinate polari $r > 0$ e $\theta \in (0, 2\pi)$. Allora, in coordinate lagrangiane,

$$P = \Big(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{1}{r}\Big) \,,$$
$$\boldsymbol{v}_P = \dot r\boldsymbol{u} + r\dot\theta\boldsymbol{\tau} - \frac{\dot r}{r^2}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Quindi

$$T = \frac{1}{2}m\Big(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + \frac{\dot r^2}{r^4}\Big) \,,$$

mentre il potenziale di $\boldsymbol{F}$ è

$$U = \frac{k}{\alpha-1}x_3^{1-\alpha} = \frac{k}{\alpha-1}r^{\alpha-1} \,.$$

La conservazione dell'energia dunque equivale a

$$T - U = \frac{1}{2}m\Big(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + \frac{\dot r^2}{r^4}\Big) + \frac{k}{1-\alpha}r^{\alpha-1} = E \,,$$

ove E è una costante determinata dalle condizioni iniziali. Si noti che $E > 0$ nelle ipotesi fatte sopra. Inoltre, poiché $T \geq 0$,

$$\frac{k}{1-\alpha}r^{\alpha-1} \leq E \,,$$

ossia

$$r \geq \Big(\frac{E(1-\alpha)}{k}\Big)^{\frac{1}{\alpha-1}} > 0 \,,$$

il che significa

$$x_3 \leq \Big(\frac{E(1-\alpha)}{k}\Big)^{\frac{1}{1-\alpha}} < \infty \,.$$

4. [12/9/2005 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie liscia

$$z = f\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big) \,, \qquad f \in C^3([0,\infty)) \,.$$

Il peso è diretto nel verso positivo dell'asse z.
Dimostrare che un moto circolare (che non sia la quiete) su $x^2 + y^2 = \bar r^2 > 0$ è possibile se e solo se $f'(\bar r) < 0$.

5. [12/9/2005 (ex)II] Una circonferenza γ di raggio $2L$, centro C e massa M è vincolata a muoversi su un piano verticale fisso π. Inoltre il punto medio Q

del raggio $\overrightarrow{CA}$ ove A è un punto di γ (solidale con essa) è fisso su π. Si noti che Q è solidale con la circonferenza, la quale perciò ruota intorno all'asse ortogonale a π in Q.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su γ.
Si scriva la lagrangiana del sistema, scegliendo come coordinate lagrangiane: l'angolo θ formato da $\overrightarrow{CA}$ con la verticale ascendente; l'angolo φ formato da $\overrightarrow{CP}$ con la verticale ascendente.
R.

$$\mathcal{L}(\varphi,\theta) = \frac{1}{2}\Big[\Big(I + mL^2\Big)\dot\theta^2 + 4mL^2\dot\varphi^2 - 4mL^2\dot\theta\dot\varphi\cos(\theta-\varphi)\Big] \\ + MgL\cos\theta + mgL(\cos\theta - 2\cos\varphi)\,.$$

6. [12/9/2005 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie liscia di equazione

$$x_3 = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\,, \qquad x_1^2 + x_2^2 > 0\,,$$

e soggetto a una forza

$$\boldsymbol{F} = -\frac{k}{x_3^\alpha}\boldsymbol{e}_3\,,$$

con $1 > \alpha > 0$, $k > 0$ costanti.
Dimostrare che non sono possibili moti nei quali x_3 diviene illimitata.

7. [15/12/2005 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie liscia

$$z = x + y^2\,,$$

ed è soggetto alla forza peso diretta nel verso negativo dell'asse z. All'istante iniziale il punto è fermo nella posizione $(1, 0, 1)$.
Trovare il moto del punto.
SOLUZIONE
Usiamo come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane (x, y). Quindi, se O denota l'origine del sistema di riferimento,

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, x + y^2)\,,$$

e

$$\boldsymbol{v}_P = (\dot x, \dot y, \dot x + 2y\dot y)\,.$$

Pertanto

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2}m\Big[2\dot x^2 + (1 + 4y^2)\dot y^2 + 4y\dot x\dot y\Big] - mg(x + y^2)\,,$$

e le equazioni di Lagrange sono

$$2\ddot{x} + 2y\ddot{y} + 2\dot{y}^2 + g = 0\,,$$
$$(1+4y^2)\ddot{y} + 8y\dot{y}^2 + 2y\ddot{x} + 2\dot{x}\dot{y} + 2gy = 0\,,$$

con le condizioni iniziali

$$x(0) = 1\,,\quad y(0) = 0\,;\qquad \dot{x}(0) = 0\,,\quad \dot{y}(0) = 0\,.$$

Non occorre risolvere il sistema in generale. Basta osservare che esiste la soluzione

$$\bigl(x(t), y(t)\bigr) = \Bigl(1 - \frac{g}{4}t^2, 0\Bigr)\,.$$

R.
$$\bigl(x(t), y(t), z(t)\bigr) = \Bigl(1 - \frac{g}{4}t^2, 0, 1 - \frac{g}{4}t^2\Bigr)\,.$$

8. [15/12/2005 (ex)I] Calcolare la lagrangiana di un punto materiale di massa m che si muove sulla superficie

$$z = xy\,,$$

soggetto alla forza peso diretta nel verso negativo dell'asse z, e a una forza costante

$$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{e}_1\,,\qquad k > 0\,.$$

Soluzione
Usiamo come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane (x, y). Quindi, se O denota l'origine del sistema di riferimento,

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, xy)\,,$$

e

$$\boldsymbol{v}_P = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{x}y + x\dot{y})\,.$$

Pertanto

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\Bigl[(1+y^2)\dot{x}^2 + (1+x^2)\dot{y}^2 + 2xy\dot{x}\dot{y}\Bigr] - mgxy + kx\,,$$

R.
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\Bigl[(1+y^2)\dot{x}^2 + (1+x^2)\dot{y}^2 + 2xy\dot{x}\dot{y}\Bigr] - mgxy + kx\,,$$

9. [7/4/2006 (ex)I] Si scrivano le equazioni di Lagrange del sistema formato da due punti materiali P_1, P_2, entrambi di massa $m > 0$, e vincolati alla parabola liscia

$$y = ax^2\,,\qquad z = 0\,,$$

con $a > 0$. Su P_1, P_2 agiscono le forze

$$\text{su } P_1: \qquad \boldsymbol{F}_1 = k\overrightarrow{P_1P_2} - \lambda \boldsymbol{e}_1\,,$$
$$\text{su } P_2: \qquad \boldsymbol{F}_2 = k\overrightarrow{P_2P_1} - \mu \boldsymbol{e}_2\,,$$

ove k, λ, $\mu > 0$ sono costanti.
Soluzione
Usiamo come coordinate lagrangiane le ascisse dei due punti P_j, in modo che

$$P_j = (x_j, ax_j^2, 0)\,, \qquad j = 1\,,2\,.$$

Con questa scelta, il potenziale delle forze è

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2) = -\frac{k}{2}\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2 - \lambda x_1 - \mu y_2 \\ = -\frac{k}{2}\{(x_1 - x_2)^2 + (ax_1^2 - ax_2^2)^2\} - \lambda x_1 - \mu a x_2^2\,. \end{aligned}$$

Inoltre l'energia cinetica è data da

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m\{\dot{x}_1^2 + (2ax_1\dot{x}_1)^2\} + \frac{1}{2}m\{\dot{x}_2^2 + (2ax_2\dot{x}_2)^2\} \\ = \frac{1}{2}m\{\dot{x}_1^2(1 + 4a^2x_1^2) + \dot{x}_2^2(1 + 4a^2x_2^2)\}\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m\{\dot{x}_1^2(1 + 4a^2x_1^2) + \dot{x}_2^2(1 + 4a^2x_2^2)\} \\ - \frac{k}{2}\{(x_1 - x_2)^2 + (ax_1^2 - ax_2^2)^2\} - \lambda x_1 - \mu a x_2^2\,. \end{aligned}$$

R.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(1 + 4a^2x_1^2) + 8ma^2x_1\dot{x}_1^2 + k\{(x_1 - x_2) + 2(ax_1^2 - ax_2^2)ax_1\} + \lambda = 0\,, \\ m\ddot{x}_2(1 + 4a^2x_2^2) + 8ma^2x_2\dot{x}_2^2 + k\{(x_2 - x_1) + 2(ax_2^2 - ax_1^2)ax_2\} + 2a\mu x_2 = 0\,. \end{aligned}$$

10. [26/3/2007 (ex)I] Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza R e massa M è vincolata ad avere l'estremo A sull'asse fisso x_3, e B sull'elica circolare

$$x_1 = R\cos u\,, \quad x_2 = R\sin u\,, \quad x_3 = hu\,, \qquad -\infty < u < \infty\,.$$

Qui $h > 0$ è costante, e (O, x_i) denota il sistema di riferimento fisso.
Oltre al peso, diretto nel verso negativo dell'asse x_3, l'asta è soggetta alla forza elastica applicata in A

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OA}\,,$$

con k costante positiva.
Scrivere le equazioni di moto dell'asta.
[*Sugg.* L'asta ha un solo grado di libertà.]
SOLUZIONE
Troviamo la lagrangiana. Sia $y \in \boldsymbol{R}$ *la coordinata tale che*

$$\overrightarrow{OB} = (R\cos y, R\sin y, hy)\,.$$

Si noti che

$$R^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = R^2\cos^2 y + R^2\sin^2 y + (hy - x_{3A})^2 = R^2 + (hy - x_{3A})^2\,,$$

che implica

$$x_{3A}(t) = hy(t)\,, \qquad \text{per ogni } t$$

(ossia l'asta si mantiene orizzontale).
Dunque l'asta è parametrizzata da

$$\overrightarrow{OP}(s) = (s\cos y, s\sin y, hy)\,, \qquad 0 \le s \le R\,.$$

Quindi

$$T(y,\dot y) = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{M}{R}\left|\boldsymbol{v}_P(t;s)\right|^2\,\mathrm{d}s = \frac{M}{2R}\int_0^R (s^2\dot y^2 + h^2\dot y^2)\,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{M}{2}\Big(\frac{R^2}{3} + h^2\Big)\dot y^2\,.$$

Inoltre il potenziale delle forze applicate è

$$U(y) = -Mghy - \frac{1}{2}kh^2y^2\,.$$

Perciò

$$\mathcal{L}(y,\dot y) = \frac{M}{2}\Big(\frac{R^2}{3} + h^2\Big)\dot y^2 - Mghy - \frac{1}{2}kh^2y^2\,,$$

e l'equazione di Lagrange è

$$M\Big(\frac{R^2}{3} + h^2\Big)\ddot y + Mgh + kh^2y = 0\,.$$

R.

$$M\Big(\frac{R^2}{3} + h^2\Big)\ddot y + Mgh + kh^2y = 0\,.$$

11. [19/7/2007 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie data, in coordinate cilindriche, da

$$z = rf(\varphi)\,, \qquad r > 0\,,$$

ove $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e φ sono appunto le usuali coordinate polari nel piano (x,y). La $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è un'assegnata funzione positiva, periodica con periodo 2π.

Sul punto agisce la forza peso, nel verso negativo dell'asse z.
Si dimostri che se $f'(\varphi_0)=0$, con $\varphi_0\in(-\pi,\pi)$ dato, allora è possibile un moto di P in cui $\varphi(t)=\varphi_0$ per ogni t.

Soluzione

Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$(r,\varphi)\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi)\,.$$

Allora

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(r,\varphi)=r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1+r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2+rf(\varphi)\boldsymbol{e}_3\,,$$

e

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}=(\dot r\cos\varphi-\dot\varphi r\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1+(\dot r\sin\varphi+\dot\varphi r\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2+(\dot rf(\varphi)+rf'(\varphi)\dot\varphi)\boldsymbol{e}_3\,.$$

Dunque

$$T^{\mathrm{L}}=\frac{1}{2}m\big[\dot r^2\big(1+f(\varphi)^2\big)+r^2\dot\varphi^2\big(1+f'(\varphi)^2\big)+2r\dot r\dot\varphi f(\varphi)f'(\varphi)\big]\,.$$

Inoltre il potenziale della forza peso è

$$U^{\mathrm{L}}=-mgz(r,\varphi)=-mgrf(\varphi)\,.$$

Dunque la lagrangiana è

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\big[\dot r^2\big(1+f(\varphi)^2\big)+r^2\dot\varphi^2\big(1+f'(\varphi)^2\big)+2r\dot r\dot\varphi f(\varphi)f'(\varphi)\big]-mgrf(\varphi)\,.$$

Le equazioni di Lagrange sono quindi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[m\dot r\big(1+f(\varphi)^2\big)+mr\dot\varphi f(\varphi)f'(\varphi)\Big]-mr\dot\varphi^2\big(1+f'(\varphi)^2\big)-m\dot r\dot\varphi f(\varphi)f'(\varphi)+mgf(\varphi)=0\,,\tag{1}$$

e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[mr^2\dot\varphi\big(1+f'(\varphi)^2\big)+mr\dot rf(\varphi)f'(\varphi)\Big]-m\dot r^2f(\varphi)f'(\varphi)-mr^2\dot\varphi^2f'(\varphi)f''(\varphi)\\-mr\dot r\dot\varphi[f'(\varphi)^2+f(\varphi)f''(\varphi)]+mgrf'(\varphi)=0\,,\tag{2}$$

Se $\varphi(t)=\varphi_0$ e quindi $\dot\varphi(t)=0$ per ogni t, si ha dalla (2)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[r\dot r]mf(\varphi_0)f'(\varphi_0)-m\dot r^2f(\varphi_0)f'(\varphi_0)+mgrf'(\varphi_0)=0\,,$$

da cui

$$mrf'(\varphi_0)\big[\ddot rf(\varphi_0)+g\big]=0\,.$$

Questa è soddisfatta se

$$f'(\varphi_0)=0\,.$$

L'alternativa

$$\ddot r=-\frac{g}{f(\varphi_0)}\,,\tag{3}$$

non è realizzabile, perché la (1)*, nelle stesse ipotesi, dà:*

$$\ddot{r} = -\frac{gf(\varphi_0)}{1 + f(\varphi_0)^2},$$

che è incompatibile con la (3)*.*

12. [19/7/2007 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie data, in coordinate cilindriche, da

$$z = rf(\varphi), \qquad r > 0,$$

ove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e φ sono appunto le usuali coordinate polari nel piano (x, y). La $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è un'assegnata funzione positiva, periodica con periodo 2π.
Sul punto agisce una forza di potenziale

$$U = kx,$$

con $k > 0$ costante.
Si dimostri che se $f'(0) = 0$, allora è possibile un moto di P in cui $\varphi(t) = 0$ per ogni t.

13. [13/12/2007 (ex)I] Un'asta rigida di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata

- a giacere nel piano verticale fisso $x_3 = 0$;
- ad avere il centro C sull'asse x_2.

Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_2$. Inoltre sull'asta agiscono due forze elastiche applicate nei due estremi A_1 e A_2:

$$\boldsymbol{F}_{A_1} = -k_1\overrightarrow{OA_1}, \qquad \boldsymbol{F}_{A_2} = -k_2\overrightarrow{OA_2},$$

ove si assume $k_1 > k_2 > 0$.
Scrivere le equazioni di Lagrange dell'asta, e determinarne le posizioni di equilibrio.
SOLUZIONE
Scegliamo come coordinate lagrangiane la coordinata $y = x_2 \in \boldsymbol{R}$ *di* C*, e l'angolo* $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *formato da* $\overrightarrow{A_1A_2}$ *con* $\boldsymbol{e}_1$*. La parametrizzazione di* A_1A_2 *sarà data da*

$$\overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}(s) = y\boldsymbol{e}_2 + s(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2),$$

per $-L \leq s \leq L$*.*
Poiché le forze applicate sono conservative, possiamo scrivere la funzione lagrangiana del sistema.
L'energia cinetica dell'asta si può ottenere per integrazione: si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OP}(s) = -s\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + (s\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{y})\boldsymbol{e}_2.$$

Dunque

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \frac{m}{2L} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OP}(s) \right|^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\frac{m}{2L}\dot\varphi^2 \int_{-L}^{L} s^2 \,\mathrm{d}s + \frac{m}{2}\dot y^2 = \frac{1}{2} I \dot\varphi^2 + \frac{m}{2}\dot y^2 \,,$$

ove

$$I = \frac{mL^2}{3}$$

è il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo asse.
Il potenziale delle forze è dato da

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{L}} &= -mgy - \frac{1}{2}k_1 \left|\overrightarrow{OA_1}\right|^2 - \frac{1}{2}k_2 \left|\overrightarrow{OA_2}\right|^2 \\ &= -mgy - \frac{1}{2}(k_1+k_2)y^2 + (k_1-k_2)Ly\sin\varphi - \frac{1}{2}(k_1+k_2)L^2 \,. \end{aligned}$$

Perciò

$$\mathcal{L}(y,\varphi,\dot y,\dot\varphi) = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 + \frac{m}{2}\dot y^2 - mgy - \frac{1}{2}(k_1+k_2)y^2 + (k_1-k_2)Ly\sin\varphi \,.$$

Le posizioni di equilibrio corrispondono a punti stazionari di U^{L}, ossia alle soluzioni di

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= -(k_1-k_2)Ly\cos\varphi = 0 \,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial y} &= -mg - (k_1+k_2)y + (k_1-k_2)L\sin\varphi = 0 \,. \end{aligned}$$

La prima equazione dà

$$a)\ y = 0, \qquad \text{oppure} \qquad b)\quad \varphi \in \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Nel caso a), la seconda equazione implica

$$\sin\varphi = \frac{mg}{L(k_1-k_2)} \,,$$

che è ammissibile solo se

$$mg \le L(k_1-k_2) \,,$$

e in questo caso determina due valori per φ (coincidenti se in essa vale l'uguaglianza).
Nel caso b), il valore di y è determinato dalla seconda equazione, in corrispondenza di ciascuno dei valori di φ.
R. *Equazioni di Lagrange:*

$$\begin{aligned} I\ddot\varphi - (k_1-k_2)Ly\cos\varphi &= 0 \,, \\ m\ddot y + mg + (k_1+k_2)y - (k_1-k_2)L\sin\varphi &= 0 \,. \end{aligned}$$

Posizioni di equilibrio:

$$
\begin{aligned}
&\textit{a) se} && mg \le L(k_1 - k_2)\,,\\
&\textit{a1)} && y = 0\,, \quad \varphi = \arcsin \frac{mg}{L(k_1 - k_2)}\,,\\
&\textit{a2)} && y = 0\,, \quad \varphi = \pi - \arcsin \frac{mg}{L(k_1 - k_2)}\,;\\
&\textit{b1)} && y = -\frac{mg}{k_1 + k_2} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} L\,, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}\,,\\
&\textit{b2)} && y = -\frac{mg}{k_1 + k_2} - \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} L\,, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

14. [13/12/2007 (ex)II] Un'asta rigida di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata

- a giacere nel piano verticale fisso $x_3 = 0$;
- ad avere il centro C sull'asse x_2.

Il peso è diretto come $\boldsymbol{e}_2$. Inoltre sull'asta agiscono due forze elastiche applicate nei due estremi A_1 e A_2:

$$
\boldsymbol{F}_{A_1} = -k_1 \overrightarrow{OA_1}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{A_2} = -k_2 \overrightarrow{OA_2}\,,
$$

ove si assume $k_2 > k_1 > 0$.
Scrivere le equazioni di Lagrange dell'asta, e determinarne le posizioni di equilibrio.
R. *Equazioni di Lagrange:*

$$
\begin{aligned}
I\ddot{\varphi} - (k_1 - k_2) L y \cos\varphi = 0\,,\\
m\ddot{y} - mg + (k_1 + k_2) y - (k_1 - k_2) L \sin\varphi = 0\,.
\end{aligned}
$$

Posizioni di equilibrio:

$$
\begin{aligned}
&\textit{a) se} && mg \le L(k_2 - k_1)\,,\\
&\textit{a1)} && y = 0\,, \quad \varphi = \arcsin \frac{mg}{L(k_2 - k_1)}\,,\\
&\textit{a2)} && y = 0\,, \quad \varphi = \pi - \arcsin \frac{mg}{L(k_2 - k_1)}\,;\\
&\textit{b1)} && y = \frac{mg}{k_1 + k_2} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} L\,, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}\,,\\
&\textit{b2)} && y = \frac{mg}{k_1 + k_2} - \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} L\,, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

15. [1/4/2008 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla sfera di raggio $R > 0$

$$
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,
$$

ed è soggetto

- alla forza peso, diretta come $-\boldsymbol{e}_3$;
- alla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{NP}$, ove $N = (0, 0, R)$. Qui $k > 0$ è costante.

Determinare

1. le equazioni di moto;
2. per quali quote x_3 sono possibili moti circolari a quota x_3 costante.

Soluzione

Usiamo le coordinate lagrangiane

$$-\pi < \varphi < \pi \,, \qquad 0 < \theta < \pi \,,$$

tali che

$$\begin{aligned} x_{1P} &= R\cos\varphi\sin\theta \,, \\ x_{2P} &= R\sin\varphi\sin\theta \,, \\ x_{3P} &= R\cos\theta \,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= R(-\sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\theta, 0) \,, \\ \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= R(\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, -\sin\theta) \,, \end{aligned}$$

e

$$\overrightarrow{NP} = R(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta - 1) \,.$$

Le componenti lagrangiane delle forze sono

$$F^{\mathrm{L}}_{\varphi} = -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} - k\overrightarrow{NP} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = 0 \,,$$

e

$$F^{\mathrm{L}}_{\theta} = -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} - k\overrightarrow{NP} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} = (mg - kR)R\sin\theta \,.$$

Inoltre l'energia cinetica è secondo la rappresentazione lagrangiana

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m\left|\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi}\right|^2 \dot\varphi^2 + m\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\theta}\dot\varphi\dot\theta + \frac{1}{2}m\left|\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\theta}\right|^2 \dot\theta^2 \\ = \frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 \,. \end{aligned}$$

Quindi le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(mR^2\sin^2\theta\dot\varphi\Big) &= 0 \,, \\ mR^2\ddot\theta - \frac{1}{2}mR^2\sin 2\theta\dot\varphi^2 &= (mg - kR)R\sin\theta \,. \end{aligned}$$

Se il punto si muove di moto circolare a quota costante, allora θ è costante, e dalla prima equazione segue che

$$\ddot{\varphi} = 0\,, \quad \text{cioè } \dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_0 \text{ costante,}$$

e quindi dalla seconda equazione

$$\cos\theta = \frac{kR - mg}{mR\dot{\varphi}_0^2}\,.$$

Perciò se $kR > mg$ sono ammissibili tutti i valori $\theta \in (0, \pi/2)$, se $kR < mg$ sono ammissibili tutti i valori $\theta \in (-\pi/2, 0)$, se $kR = mg$, è ammissibile solo il valore $\theta = 0$.

R. *Le equazioni di moto sono:*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(mR^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\Big) &= 0\,,\\
mR^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}mR^2\sin 2\theta\dot{\varphi}^2 &= (mg - kR)R\sin\theta\,.
\end{aligned}$$

I moti circolari sono possibili alle quote:

$$\begin{aligned}
&0 < x_3 < R\,, && kR > mg\,,\\
&x_3 = 0\,, && kR = mg\,,\\
&-R < x_3 < 0\,, && kR < mg\,.
\end{aligned}$$

16. [1/4/2008 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato all'elica circolare

$$\begin{aligned}
x_1 &= R\cos\varphi\,,\\
x_2 &= R\sin\varphi\,,\\
x_3 &= a\varphi\,,
\end{aligned}$$

ove a e R sono costanti positive.

Il punto è soggetto alla forza peso, ortogonale all'asse dell'elica,

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_2\,.$$

Scrivere l'equazione di moto del punto.

Soluzione

Scegliamo come coordinata lagrangiana φ. La velocità è

$$\boldsymbol{v} = \dot{\varphi}(-R\sin\varphi, R\cos\varphi, a)\,,$$

per cui l'energia cinetica è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2(R^2 + a^2)\,.$$

Perciò la funzione lagrangiana è

$$\mathcal{L} = T^{\mathrm{L}} - U^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 (R^2 + a^2) - mgR \sin \varphi \,.$$

R.

$$(R^2 + a^2)\ddot{\varphi} + gR \cos \varphi = 0 \,. \tag{1}$$

17. [1/7/2008 (ex)I] Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è sottoposta ai seguenti vincoli:

- giace sul piano $x_3 = 0$;
- il centro C appartiene alla curva

$$x_2 = -b \cos a x_1 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

L'asta è sottoposta alle seguenti forze:

- la forza peso, diretta nel verso negativo dell'asse x_2;
- le due forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_A = -k \overrightarrow{A_1 A} \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k \overrightarrow{B_1 B} \,,$$

  ove A_1 [rispettivamente B_1] è la proiezione di A [rispettivamente di B] sull'asse x_1.

Qui a, b, k sono costanti positive.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange;
2. dare una condizione sui dati iniziali perché l'asta nel suo moto compia una rotazione completa.

Soluzione

1) Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1C} \,, \qquad x \in \boldsymbol{R} \,,$$

e l'angolo φ *tale che*

$$\overrightarrow{AB} = 2L(\cos \varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin \varphi \boldsymbol{e}_2) \,, \qquad -\pi < \varphi < \pi \,.$$

Le due forze $\boldsymbol{F}_A$ e $\boldsymbol{F}_B$ *sono date da*

$$\boldsymbol{F}_A = -k x_{2A} \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k x_{2B} \,,$$

che hanno potenziale

$$-\frac{k}{2}(x_{2A}^2 + x_{2B}^2) \,.$$

Quindi il potenziale lagrangiano risulterà uguale a

$$
\begin{aligned}
U^{\mathrm{L}}(x,\varphi) = mgb\cos ax - \frac{k}{2}(-b\cos ax - L\sin\varphi)^2 - \frac{k}{2}(-b\cos ax + L\sin\varphi)^2 \\
= mgb\cos ax - k(b^2\cos^2 ax + L^2\sin^2\varphi)\,.
\end{aligned}
$$

L'energia cinetica dell'asta, secondo il teorema di König, è data da

$$
T^{\mathrm{L}}(x,\varphi) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + a^2b^2\sin^2 ax) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2\,,
$$

ove I è il momento d'inerzia dell'asta intorno all'asse centrale ad essa ortogonale. Quindi le equazioni di Lagrange sono

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m\dot{x}(1 + a^2b^2\sin^2 ax)\big] - \frac{1}{2}ma^3b^2\dot{x}^2\sin 2ax \\
&\quad - kab^2\sin 2ax + mgab\sin ax = 0\,,
\end{aligned}
$$

e

$$
I\ddot{\varphi} + kL^2\sin 2\varphi = 0\,.
$$

2) La condizione richiesta per esempio può essere ottenuta imponendo che la derivata $\dot{\varphi}$ si mantenga uniformemente distaccata da 0, ossia che

$$
|\dot{\varphi}(t)| \geq c > 0\,, \qquad \textit{per ogni } t.
$$

Moltiplicando la seconda equazione di Lagrange per $\dot{\varphi}$ e integrando, si ha

$$
\frac{1}{2}I\dot{\varphi}(t)^2 = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}(0)^2 + \frac{1}{2}kL^2(\cos 2\varphi(t) - \cos 2\varphi(0)) \geq \frac{1}{2}I\dot{\varphi}(0)^2 - kL^2\,.
$$

Dunque saremo nelle condizioni richieste se per esempio

$$
\dot{\varphi}(0)^2 > \frac{2kL^2}{I}\,.
$$

R. *Le equazioni di Lagrange sono:*

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x}(1 + a^2b^2\sin^2 ax) + m\dot{x}^2a^3b^2\sin 2ax - \frac{1}{2}ma^3b^2\dot{x}^2\sin 2ax \\
&\quad - kab^2\sin 2ax + mgab\sin ax = 0\,, \\
&\qquad I\ddot{\varphi} + kL^2\sin 2\varphi = 0\,.
\end{aligned}
$$

La condizione per esempio è:

$$
\dot{\varphi}(0)^2 > \frac{2kL^2}{I}\,.
$$

18. [1/7/2008 (ex)II] Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è sottoposta ai seguenti vincoli:

- giace sul piano $x_3 = 0$;

- il centro C appartiene alla curva

$$x_2 = a\cos bx_1 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

L'asta è sottoposta alle seguenti forze:

- la forza peso, diretta nel verso positivo dell'asse x_2;
- le due forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{A_1A} \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k\overrightarrow{B_1B} \,,$$

  ove A_1 [rispettivamente B_1] è la proiezione di A [rispettivamente di B] sull'asse x_1.

Qui a, b, k sono costanti positive.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange;
2. dare una condizione sui dati iniziali perché l'asta nel suo moto compia una rotazione completa.

R. *Le equazioni di Lagrange sono:*

$$\begin{gathered} m\ddot{x}(1 + a^2b^2\sin^2 bx) + m\dot{x}^2a^2b^3\sin 2bx - \frac{1}{2}ma^2b^3\dot{x}^2\sin 2bx \\ - ka^2b\sin 2bx + mgab\sin bx = 0 \,, \\ I\ddot{\varphi} + kL^2\sin 2\varphi = 0 \,. \end{gathered}$$

La condizione per esempio è:

$$\dot{\varphi}(0)^2 > \frac{2kL^2}{I} \,.$$

19. [12/9/2008 (ex)I] Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza L è vincolata ad avere l'estremo A nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
All'estremo B è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = -kx_1\boldsymbol{e}_3 \,,$$

con $k > 0$ costante.
Le condizioni iniziali sono tali che al tempo $t = 0$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{L}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 - \frac{L}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{v}_B = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 + \frac{v_0}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange e ricavare un integrale primo del moto.
Soluzione

A) Scegliamo le due coordinate lagrangiane

$$\varphi \in (-\pi, \pi)\,, \qquad \theta \in (0, \pi)\,,$$

tali che AB *sia parametrizzata da*

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta; \lambda(s)) = s\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + s\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + s\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,,$$

con $0 \le s \le L$.
La velocità $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}$ *quindi è*

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = \dot\varphi\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} + \dot\theta\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\theta}\,,$$

con

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= -s\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + s\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2\,,\\ \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= s\cos\varphi\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + s\sin\varphi\cos\theta\boldsymbol{e}_2 - s\sin\theta\boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

Dunque l'energia cinetica è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{m}{L}s^2(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2)\,\mathrm{d}s = \frac{mL^2}{6}(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2)\,.$$

Le componenti lagrangiane delle forze sono

$$\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = 0\,, \qquad \boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} = kL^2\cos\varphi\sin^2\theta\,.$$

Dunque si hanno le equazioni di Lagrange

$$\begin{aligned}\frac{mL^2}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot\varphi\sin^2\theta) &= 0\,,\\ \frac{mL^2}{3}\ddot\theta - \frac{mL^2}{6}\dot\varphi^2\sin 2\theta &= kL^2\cos\varphi\sin^2\theta\,.\end{aligned}$$

B) All'istante iniziale si ha

$$\varphi(0) = -\frac{\pi}{4}\,, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \dot\varphi = \frac{v_0}{L}\,, \quad \dot\theta(0) = 0\,.$$

Dalla prima delle equazioni di Lagrange si ottiene dunque

$$\dot\varphi(t)\sin^2\theta(t) = \dot\varphi(0)\sin^2\theta(0) = \frac{v_0}{L}\,, \qquad t > 0\,.$$

R. *Equazioni di Lagrange:*

$$\begin{aligned}\frac{mL^2}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot\varphi\sin^2\theta) &= 0\,,\\ \frac{mL^2}{3}\ddot\theta - \frac{mL^2}{6}\dot\varphi^2\sin 2\theta &= kL^2\cos\varphi\sin^2\theta\,.\end{aligned}$$

Integrale primo:

$$\dot\varphi\sin^2\theta = \frac{v_0}{L}\,.$$

20. [12/9/2008 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos\varphi\,, \\ x_2 &= \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\varphi\,, \qquad -\pi \le \varphi \le \pi\,. \\ x_3 &= \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\varphi\,, \end{aligned}$$

ove $R > 0$ è costante.
Il punto è soggetto alla forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{CP}\,,$$

ove $k > 0$ è costante, e

$$\overrightarrow{OC} = R\boldsymbol{e}_3\,,$$

con O origine del sistema di riferimento fisso.
Il punto è anche soggetto alla forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.

Soluzione
A) Usiamo il formalismo lagrangiano; scegliamo la coordinata φ come coordinata lagrangiana in

$$-\pi < \varphi < \pi\,.$$

In questo modo si ha

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = R\dot\varphi\Big(-\sin\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi\Big)\,,$$

e anche

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -\frac{k}{2}\left|\overrightarrow{CP}\right|^2 - mgx_3 = -kR^2\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\Big) - \frac{1}{\sqrt{2}}mgR\sin\varphi\,.$$

Perciò

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2 - kR^2\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\Big) - \frac{1}{\sqrt{2}}mgR\sin\varphi\,.$$

L'equazione di moto dunque sarà

$$\ddot\varphi = \frac{k}{m}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi - \frac{g}{R\sqrt{2}}\cos\varphi\,.$$

B) Il potenziale si può scrivere come

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = \mathit{costante} + \frac{R}{\sqrt{2}}(kR - mg)\sin\varphi\,.$$

Quindi ha un massimo isolato in $\varphi = \pi/2$ e un minimo isolato in $\varphi = -\pi/2$ se

$$kR > mg\,,$$

e viceversa se vale la disuguaglianza opposta.
Se

$$kR = mg\,,$$

tutte le posizioni sono di equilibrio (instabile).
R.

$$\ddot{\varphi} = \frac{k}{m}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi - \frac{g}{R\sqrt{2}}\cos\varphi\,.$$

$$\begin{array}{llllll} \varphi = \dfrac{\pi}{2} & \textit{stabile,} & \varphi = -\dfrac{\pi}{2} & \textit{instabile,} & \textit{se } kR > mg; \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} & \textit{instabile,} & \varphi = -\dfrac{\pi}{2} & \textit{stabile,} & \textit{se } kR < mg; \end{array}$$

tutte le posizioni sono di equilibrio instabile se $kR = mg$.

21. [12/9/2008 (ex)II] Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata ad avere il centro C nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
All'estremo B è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = -kx_2\boldsymbol{e}_3\,,$$

con $k > 0$ costante.
Le condizioni iniziali sono tali che al tempo $t = 0$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{L}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 - \frac{L}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{v}_B = 0\,.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange e ricavare un integrale primo del moto.
R. *Equazioni di Lagrange:*

$$\frac{2mL^2}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\sin^2\theta) = 0\,,$$
$$\frac{2mL^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{mL^2}{3}\dot{\varphi}^2\sin 2\theta = kL^2\sin\varphi\sin^2\theta\,.$$

Integrale primo:

$$\dot{\varphi} = 0\,.$$

22. [12/9/2008 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$x_1 = R\cos\varphi\,,$$
$$x_2 = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\varphi\,, \qquad -\pi \le \varphi \le \pi\,.$$
$$x_3 = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\varphi\,,$$

ove $R > 0$ è costante.
Il punto è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{CP},$$

ove $k > 0$ è costante, e

$$\overrightarrow{OC} = -R\boldsymbol{e}_3,$$

con O origine del sistema di riferimento fisso.
Il punto è anche soggetto alla forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.

R.

$$\ddot{\varphi} = \frac{k}{m}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi - \frac{g}{R\sqrt{2}}\cos\varphi.$$

$$\begin{array}{llll} \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \textit{stabile}, & \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \textit{instabile}, & \textit{se } kR > mg; \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \textit{instabile}, & \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \textit{stabile}, & \textit{se } kR < mg; \end{array}$$

tutte le posizioni sono di equilibrio instabile se $kR = mg$.

23. [12/6/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla curva

$$x_3 = 0, \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}_P = -k\overrightarrow{AP},$$

ove

$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_3.$$

Qui a, b, R, k sono costanti positive, con $a > b$.
Si determinino l'equazione di moto del punto, e le posizioni di equilibrio.
SOLUZIONE
A) Usiamo come coordinata lagrangiana l'angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che la posizione del punto sia data da

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi) = a\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + b\sin\varphi\boldsymbol{e}_2.$$

L'energia cinetica dunque è

$$T^{\mathrm{L}}(\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi).$$

Il potenziale della forza elastica è

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -\frac{k}{2}(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + R^2),$$

per cui la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) - \frac{k}{2} (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + R^2) .$$

L'equazione di Lagrange sarà perciò

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \big[m \dot{\varphi} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \big] - \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 (a^2 - b^2) \sin 2\varphi - \frac{k}{2} (a^2 - b^2) \sin 2\varphi = 0 .$$

B) All'equilibrio, cioè per $\varphi \equiv \varphi_0$, si deve avere

$$-\frac{k}{2} (a^2 - b^2) \sin 2\varphi = 0 ,$$

cioè una tra le

$$\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2} , \qquad \varphi_0 = 0 , \qquad \varphi_0 = \pi .$$

La soluzione $\varphi_0 = \pi$ in effetti è fuori dell'aperto di variazione Q della coordinata lagrangiana, ma la si trova scegliendo invece $Q = (0, 2\pi)$: i calcoli restano invariati.
R.

$$m \ddot{\varphi} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) + \frac{1}{2} (m \dot{\varphi}^2 - k)(a^2 - b^2) \sin 2\varphi = 0 ,$$
$$\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2} , \qquad \varphi_0 = 0 , \qquad \varphi_0 = \pi .$$

24. [12/6/2009 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla curva

$$x_3 = 0 , \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 ,$$

ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}_P = k \overrightarrow{AP} ,$$

ove

$$\overrightarrow{OA} = -R \boldsymbol{e}_3 ,$$

e al peso

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{peso}} = -mg \boldsymbol{e}_3 .$$

Qui a, b, R, k sono costanti positive, con $a > b$.
Si determinino l'equazione di moto del punto, e le posizioni di equilibrio.
R.

$$m \ddot{\varphi} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) + \frac{1}{2} (m \dot{\varphi}^2 + k)(a^2 - b^2) \sin 2\varphi = 0 ,$$
$$\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2} , \qquad \varphi_0 = 0 , \qquad \varphi_0 = \pi .$$

25. [15/7/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato al cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 .$$

Sul punto P agisce il peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Le condizioni iniziali del moto sono

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_2 \,.$$

1. Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
2. Dare una condizione su v_0 perché risulti $\overrightarrow{OP}(t)$ ortogonale a $\boldsymbol{e}_1$ prima che $x_{3P}(t) = -R$.

Soluzione

1) Il punto ha due gradi di libertà. Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$z = x_{3P} \in \boldsymbol{R} \,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi) \,,$$

tali che

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Allora

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 = \frac{1}{2}m(R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) \,,$$

e

$$U^{\mathrm{L}} = -mgx_3(z, \varphi) = -mgz \,.$$

Dunque

$$\mathcal{L}(z, \varphi) = \frac{1}{2}m(R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - mgz \,,$$

e le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} mR^2\ddot\varphi &= 0 \,, \\ m\ddot z + mg &= 0 \,. \end{aligned}$$

2) La soluzione corrispondente ai dati iniziali assegnati, ossia a

$$\varphi(0) = 0 \,, \qquad \dot\varphi(0) = \frac{v_0}{R} \,, \qquad z(0) = 0 \,, \qquad \dot z(0) = 0 \,,$$

è

$$\varphi(t) = \frac{v_0}{R}t \,, \qquad z(t) = -\frac{g}{2}t^2 \,.$$

Dunque vogliamo che il primo $\bar t$ tale che

$$|\varphi(\bar t)| = \frac{|v_0|}{R}\bar t = \frac{\pi}{2} \,,$$

soddisfi

$$z(\bar t) = -\frac{g}{2}\bar t^2 \geq -R \,.$$

Questo significa

$$\frac{g}{2}\Big(\frac{\pi R}{2|v_0|}\Big)^2 \leq R \,.$$

R.

$$1) \qquad mR^2\ddot\varphi = 0\,, \quad m\ddot z + mg = 0\,.$$
$$2) \qquad v_0^2 \geq \frac{g}{8}\pi^2 R\,.$$

26. [15/7/2009 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato al cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,.$$

Sul punto P agisce il peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Le condizioni iniziali del moto sono

$$\overrightarrow{OP}(0) = -R\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = -v_0\boldsymbol{e}_2\,.$$

1. Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
2. Dare una condizione su v_0 perché $\overrightarrow{OP}(t)$ ritorni ortogonale a $\boldsymbol{e}_2$ (per un tempo positivo t) con $x_{3P}(t) > -R$.

R.

$$1) \qquad mR^2\ddot\varphi = 0\,, \quad m\ddot z + mg = 0\,.$$
$$2) \qquad v_0^2 \geq \frac{g}{2}\pi^2 R\,.$$

27. [25/1/2010 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2 = \beta\cos(\alpha x_1)\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Qui α, $\beta > 0$ sono costanti.

L'asta è soggetta alla forza peso diretta secondo il verso negativo dell'asse x_2.
Scrivere la lagrangiana dell'asta.
Soluzione
Usiamo come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1A} \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \varphi \in (-\pi,\pi)\,,$$

tali che

$$\overrightarrow{AB} = 2L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + 2L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

Perciò il punto generico P dell'asta è dato da

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = x\boldsymbol{e}_1 + \beta\cos(\alpha x_1)\boldsymbol{e}_2 + s\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + s\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,$$

$0 \leq s \leq 2L$, e la sua velocità è data da

$$\boldsymbol{v} = (\dot{x} - s\dot{\varphi}\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (-\alpha\beta\dot{x}\sin(\alpha x) + s\dot{\varphi}\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{L}} &= \frac{1}{2}\frac{m}{2L}\int_0^{2L}(\dot{x}^2 - 2s\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + s^2\dot{\varphi}^2 + \alpha^2\beta^2\dot{x}^2\sin^2(\alpha x) - 2\alpha\beta\dot{x}\dot{\varphi}s\sin(\alpha x)\cos\varphi)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{m}{2}(1 + \alpha^2\beta^2\sin^2(\alpha x))\dot{x}^2 - mL(\sin\varphi + \alpha\beta\sin(\alpha x)\cos\varphi)\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{2mL^2}{3}\dot{\varphi}^2\,. \end{aligned}$$

Il potenziale della forza peso è

$$U^{\mathrm{L}} = -mgx_{2C} = -mg(\beta\cos(\alpha x) + L\sin\varphi)\,.$$

R.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{m}{2}(1 + \alpha^2\beta^2\sin^2(\alpha x))\dot{x}^2 - mL(\sin\varphi + \alpha\beta\sin(\alpha x)\cos\varphi)\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{2mL^2}{3}\dot{\varphi}^2 \\ - mg(\beta\cos(\alpha x) + L\sin\varphi)\,. \end{aligned}$$

28. [25/1/2010 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- ad avere il centro C sulla curva

$$x_2 = \beta\cos(\alpha x_1)\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Qui α, $\beta > 0$ sono costanti.

L'asta è soggetta alla forza peso diretta secondo il verso negativo dell'asse x_2.
Scrivere la lagrangiana dell'asta.
R.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(1 + \alpha^2\beta^2\sin^2(\alpha x))\dot{x}^2 + \frac{mL^2}{6}\dot{\varphi}^2 - mg\beta\cos(\alpha x)\,.$$

29. [22/2/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha\sin(\beta x_1) + \gamma x_2^2\,,$$

ove α, β, γ sono costanti positive.

Il punto è soggetto alla forza peso diretta nel verso negativo dell'asse x_3.
Il punto parte con velocità iniziale nulla nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = 0\,.$$

Qui $(O, \boldsymbol{e}_i)$ denota il sistema fisso, con coordinate (x_i).
Scrivere le equazioni di moto del punto, e dedurne che il moto è piano.
Soluzione
Usiamo come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane $x = x_1$, $y = x_2 \in \boldsymbol{R}$. Allora

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{e}_1 + \dot{y}\boldsymbol{e}_2 + [\alpha\beta\dot{x}\cos(\beta x) + 2\gamma y\dot{y}]\boldsymbol{e}_3\,,$$

e

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -mg[\alpha\sin(\beta x) + \gamma y^2]\,.$$

Quindi la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\big\{[1 + \alpha^2\beta^2\cos^2(\beta x)]\dot{x}^2 + (1 + 4\gamma^2 y^2)\dot{y}^2\big\} - mg[\alpha\sin(\beta x) + \gamma y^2]\,.$$

Le equazioni di moto dunque sono

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{m[1 + \alpha^2\beta^2\cos^2(\beta x)]\dot{x}\big\} + mg\alpha\beta\cos(\beta x) - \frac{1}{2}m\alpha^2\beta^2\sin(2\beta x)\dot{x}^2 = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{m(1 + 4\gamma^2 y^2)\dot{y}\big\} + 2mg\gamma y - 4m\gamma^2 y\dot{y}^2 = 0\,.$$

Si vede che $y = 0$ è soluzione, quindi il moto avviene sul piano $x_2 = 0$.
R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{m[1 + \alpha^2\beta^2\cos^2(\beta x)]\dot{x}\big\} + mg\alpha\beta\cos(\beta x) - \frac{1}{2}m\alpha^2\beta^2\sin(2\beta x)\dot{x}^2 = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{m(1 + 4\gamma^2 y^2)\dot{y}\big\} + 2mg\gamma y - 4m\gamma^2 y\dot{y}^2 = 0\,.$$

30. [22/2/2010 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha\sin(\beta x_1) + \gamma x_2^2\,,$$

ove α, β, γ sono costanti positive.
Il punto è soggetto alla forza peso diretta nel verso negativo dell'asse x_3.
Il punto parte con velocità iniziale nulla nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = -\frac{\pi}{2\beta}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{e}_2 + \Big(\frac{1}{\gamma} - \alpha\Big)\boldsymbol{e}_3\,.$$

Qui $(O, \boldsymbol{e}_i)$ denota il sistema fisso, con coordinate (x_i).
Scrivere le equazioni di moto del punto, e dedurne che il moto è piano.
R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{m[1 + \alpha^2\beta^2\cos^2(\beta x)]\dot{x}\big\} + mg\alpha\beta\cos(\beta x) - \frac{1}{2}m\alpha^2\beta^2\sin(2\beta x)\dot{x}^2 = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{m(1 + 4\gamma^2 y^2)\dot{y}\big\} + 2mg\gamma y - 4m\gamma^2 y\dot{y}^2 = 0\,.$$

31. [9/4/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 .$$

Il punto è soggetto alla forza peso diretta nel verso negativo dell'asse x_3 e alla forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha x_1 \boldsymbol{e}_2 .$$

Qui α, $R > 0$ sono costanti, e (O, x_i) denota il sistema di riferimento fisso. Scrivere le equazioni di Lagrange per il moto.

Soluzione

Si noti che $\boldsymbol{F}$ non è conservativa, dunque non si può usare la funzione lagrangiana. Scegliamo le coordinate lagrangiane $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in (0, \pi)$ in modo che

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos\varphi \sin\theta , \\ x_2 &= R \sin\varphi \sin\theta , \\ x_3 &= R \cos\theta . \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_P = R[(&-\dot\varphi \sin\varphi \sin\theta + \dot\theta \cos\varphi \cos\theta)\boldsymbol{e}_1 \\ &+ (\dot\varphi \cos\varphi \sin\theta + \dot\theta \sin\varphi \cos\theta)\boldsymbol{e}_2 - \dot\theta \sin\theta \boldsymbol{e}_3] . \end{aligned}$$

Quindi

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2} m R^2 (\dot\varphi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) .$$

Le componenti lagrangiane delle forze sono date, secondo la loro definizione, da:

$$\begin{aligned} F_\varphi^{\text{L}} = (-mg\boldsymbol{e}_3 + \alpha x_1 \boldsymbol{e}_2) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial \varphi} &= -mg \cdot 0 + \alpha x_1 R \cos\varphi \sin\theta \\ &= \alpha x_1 R \cos\varphi \sin\theta , \end{aligned}$$

e da:

$$F_\theta^{\text{L}} = (-mg\boldsymbol{e}_3 + \alpha x_1 \boldsymbol{e}_2) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial \theta} = mgR \sin\theta + \alpha x_1 R \sin\varphi \cos\theta .$$

R.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2 \dot\varphi \sin^2\theta] &= \alpha x_1 R \cos\varphi \sin\theta , \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2 \dot\theta] - \frac{1}{2} m R^2 \dot\varphi^2 \sin 2\theta &= mgR \sin\theta + \alpha x_1 R \sin\varphi \cos\theta . \end{aligned}$$

630. Equazioni di Lagrange per vincoli mobili

1. [4/7/2005 (ex)I] Due punti materiali P_1 e P_2 di uguale massa m sono vincolati a una circonferenza γ di centro l'origine O del sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3), e di raggio R. La circonferenza ruota intorno all'asse verticale x_2 (che è un suo diametro) con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_2$. I vincoli sono lisci.
I punti si attraggono con forze elastiche di costante $k > 0$, ossia

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = k\overrightarrow{P_1 P_2}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{P_2} = k\overrightarrow{P_2 P_1}\,.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.
Soluzione
Le forze che fanno lavoro sono conservative. Scriviamo la lagrangiana del sistema. Indicando nel sistema fisso

$$P_1 = (y_1, y_2, y_3)\,, \qquad P_2 = (z_1, z_2, z_3)\,,$$

si ha per il potenziale delle forze elastiche

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{3}(y_i - z_i)^2\,;$$

infatti

$$\boldsymbol{F}_{P_j} = \nabla_{P_j} U_{\mathrm{el}}\,, \qquad j = 1\,, 2\,.$$

Il potenziale delle forze peso (assumendo che il verso positivo dell'asse x_2 sia rivolto verso l'alto) è

$$U_{\mathrm{peso}} = -mgy_2 - mgz_2\,.$$

Per scrivere l'energia cinetica di ciascuno dei due punti nel sistema fisso, usiamo la formula della cinematica relativa:

$$\boldsymbol{v}_{P_1} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_1}\,,$$

ove con $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ indichiamo la velocità di P_1 relativa al sistema di riferimento solidale con il moto della circonferenza. È chiaro che $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ e $\boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_1}$ sono ortogonali, poiché sia $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ che $\overrightarrow{OP_1}$ e $\boldsymbol{\omega}$ appartengono al piano della circonferenza. Dunque

$$|\boldsymbol{v}_{P_1}|^2 = |\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}|^2 + \left|\boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_1}\right|^2\,.$$

Visto che il moto di P_1 nel sistema mobile è circolare con raggio R, si ha

$$|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}|^2 = R^2\dot{\theta}^2\,,$$

se θ è la coordinata angolare di P_1 nel piano della circonferenza. In particolare, scegliamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ in modo che gli assi ξ_2 e x_2 coincidano, e che l'asse ξ_1 contenga il diametro della circonferenza ortogonale a x_2. Quindi scegliamo θ in modo che

$$[P_1]_{\mathcal{S}} = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)\,.$$

Allora

$$\left|\boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_1}\right|^2 = \omega^2[\mathrm{dist}(P_1, \text{asse } \xi_2)]^2 = \omega^2 R^2 \cos^2\theta\,.$$

Per P_2 si procede in modo del tutto analogo, chiamando φ la sua coordinata angolare. Si ha infine

$$\mathcal{L}(\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi) = \frac{1}{2}mR^2\big(\dot\theta^2 + \omega^2\cos^2\theta + \dot\varphi^2 + \omega^2\cos^2\varphi\big) \\ - kR^2\big(1-\cos(\theta-\varphi)\big) - mgR(\sin\theta + \sin\varphi)\,,$$

da cui le equazioni di Lagrange

$$mR^2\ddot\theta + kR^2\sin(\theta-\varphi) + mgR\cos\theta + m\omega^2R^2\sin\theta\cos\theta = 0\,,$$
$$mR^2\ddot\varphi - kR^2\sin(\theta-\varphi) + mgR\cos\varphi + m\omega^2R^2\sin\varphi\cos\varphi = 0\,.$$

2. [4/7/2005 (ex)II] Due punti materiali P_1 e P_2 di uguale massa m sono vincolati a una circonferenza γ di centro l'origine O del sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3), e di raggio R. La circonferenza ruota intorno all'asse verticale x_2 (che è un suo diametro) con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_2$. I vincoli sono lisci.
I punti si respingono con forze elastiche di costante $k > 0$, ossia

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = k\overrightarrow{P_2P_1}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{P_2} = k\overrightarrow{P_1P_2}\,.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.
Soluzione
Se θ [φ] è la coordinata angolare di P_1 [P_2], si ha

$$mR^2\ddot\theta - kR^2\sin(\theta-\varphi) + mgR\cos\theta + m\omega^2R^2\sin\theta\cos\theta = 0\,,$$
$$mR^2\ddot\varphi + kR^2\sin(\theta-\varphi) + mgR\cos\varphi + m\omega^2R^2\sin\varphi\cos\varphi = 0\,.$$

3. [18/7/2005 (ex)I] Si consideri un piano mobile $\pi(t)$ sovrapposto al piano fisso $x_3 = 0$, ruotante intorno all'asse x_3 con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = -\omega\boldsymbol{e}_3$, ove $\omega > 0$. Una curva γ solidale con $\pi(t)$ ha equazione (in coordinate polari su $\pi(t)$)

$$r = a\theta\,, \qquad 0 < \theta < \infty\,,$$

ove $a > 0$ è costante.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a γ. Il vincolo è liscio. Si dimostri che se le condizioni iniziali del moto corrispondono a

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \dot\theta(0) = \omega\,,$$

il moto di P nel sistema di riferimento fisso è rettilineo.
(Si deve assumere che θ cresca nel verso antiorario rispetto al verso positivo dell'asse x_3.)

Soluzione

A) Consideriamo un sistema di riferimento solidale con π, $\mathcal{S} = (O, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, ove $\pi(t)$ coincide in ogni istante con il piano $\xi_3 = 0$, e O con l'intersezione dell'asse ξ_3 con $\pi(t)$.
Dato che nel sistema fisso vale

$$P(t) = (r\cos(-\omega t + \theta), r\sin(-\omega t + \theta), 0)\,, \tag{1}$$

(se all'istante iniziale gli assi x_i e ξ_i si assumono coincidenti, $i = 1, 2$), il moto di P è rettilineo nel sistema fisso se

$$-\omega t + \theta = \text{ costante}\,, \quad \textit{ossia} \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \omega t\,.$$

L'equazione di moto di P nel sistema $\mathcal{S}$ è

$$m\boldsymbol{a}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}\,,$$

ove $\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}$ è la reazione vincolare. Le forze $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$ e $\boldsymbol{f}_{\mathrm{vin}}$ hanno componenti lagrangiane nulle. La forza $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ è nel nostro caso è data da

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}] = m\omega^2 \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\,\boldsymbol{u} = m\omega^2 r\boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è il versore radiale su $\xi_3 = 0$. Dunque $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ ammette un potenziale

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2\theta^2\,.$$

L'energia cinetica di P è espressa da

$$T = \frac{1}{2}m\left|\dot{r}\boldsymbol{u} + r\dot{\theta}\boldsymbol{\tau}\right|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}ma^2(1+\theta^2)\dot{\theta}^2\,,$$

se $\boldsymbol{\tau}$ è il versore trasversale a $\boldsymbol{u}$. Usiamo la coordinata lagrangiana θ. Allora la lagrangiana del sistema vale

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ma^2(1+\theta^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2\theta^2\,.$$

L'equazione di Lagrange è pertanto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(ma^2(1+\theta^2)\dot{\theta}\big) - ma^2\theta\dot{\theta}^2 - m\omega^2 a^2\theta = 0\,,$$

ossia

$$ma^2(1+\theta^2)\ddot{\theta} + 2ma^2\theta\dot{\theta}^2 - ma^2\theta\dot{\theta}^2 - m\omega^2 a^2\theta = ma^2(1+\theta^2)\ddot{\theta} + ma^2\theta\dot{\theta}^2 - m\omega^2 a^2\theta = 0\,.$$

Si verifica subito che

$$\dot{\theta}(t) = \omega\,, \qquad t \geq 0\,,$$

è soluzione (e quindi l'unica), corrispondente al dato iniziale

$$\dot{\theta}(0) = \omega\,.$$

Quindi la soluzione dell'equazione di Lagrange è

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega t = \frac{\pi}{2} + \omega t\,,$$

confermando che il moto di P nel sistema fisso è rettilineo.
B) In alternativa alla risoluzione sopra, risolviamo il problema calcolando la lagrangiana nel sistema fisso.
In questo sistema non ci sono forze applicate al punto.
La velocità (vedi la (1)) è

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} = \big(& a\dot\theta\cos(-\omega t+\theta) - (-\omega+\dot\theta)a\theta\sin(-\omega t+\theta),\\ & a\dot\theta\sin(-\omega t+\theta) + (-\omega+\dot\theta)a\theta\cos(-\omega t+\theta),\\ & 0\big)\,.\end{aligned}$$

Dunque la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m[a^2\dot\theta^2 + (-\omega+\dot\theta)^2a^2\theta^2]\,.$$

L'equazione di Lagrange è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[a^2\dot\theta + (-\omega+\dot\theta)a^2\theta^2\Big] - (-\omega+\dot\theta)^2a^2\theta = 0\,,$$

da cui ancora

$$a^2(1+\theta^2)\ddot\theta + a^2\theta\dot\theta^2 - \omega^2a^2\theta = 0\,,$$

e si conclude come sopra.

4. [18/7/2005 (ex)II] Si consideri un piano mobile $\pi(t)$ sovrapposto al piano fisso $x_1 = 0$, ruotante intorno all'asse x_1 con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = -\omega\boldsymbol{e}_1$, ove $\omega > 0$. Una curva γ solidale con $\pi(t)$ ha equazione (in coordinate polari su $\pi(t)$)

$$r = b\theta\,, \qquad 0 < \theta < \infty\,,$$

ove $b > 0$ è costante.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a γ. Il vincolo è liscio. Si dimostri che se le condizioni iniziali del moto corrispondono a

$$\theta(0) = \pi\,, \qquad \dot\theta(0) = \omega\,,$$

il moto di P nel sistema di riferimento fisso è rettilineo.
(Si deve assumere che θ cresca nel verso antiorario rispetto al verso positivo dell'asse x_1.)

5. [15/12/2005 (ex)I] Un'asta omogenea di lunghezza $2L$ e massa m ha un estremo vincolato a una circonferenza γ di raggio R e centro O, che a sua volta ruota con velocità costante $\boldsymbol{\omega}$ intorno al suo diametro verticale AB. I punti A e B sono fissi nel sistema di riferimento fisso. L'asta appartiene al piano della circonferenza. I vincoli sono lisci.
Scrivere il sistema di equazioni che determina le posizioni di equilibrio dell'asta nel sistema di riferimento solidale con il piano della circonferenza, e

origine in O, e riconoscere che in nessuna posizione di equilibrio l'asta si mantiene orizzontale.

SOLUZIONE

L'asta ha due gradi di libertà.

Sia $(O, \boldsymbol{u}_i)$ *il sistema di riferimento solidale con il piano della circonferenza, che prendiamo come* $\{x_1 = 0\}$. *Inoltre sia* $\boldsymbol{u}_3$ *la verticale ascendente.*

Indichiamo con P_1 *l'estremo dell'asta vincolato a* γ, *e con* P_2 *l'altro estremo.*

Scegliamo come prima coordinata lagrangiana l'angolo φ *formato da* $\overrightarrow{OP_1}$ *con* $\boldsymbol{u}_2$.

Come seconda coordinata scegliamo l'angolo θ *formato da* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *con* $\boldsymbol{u}_2$. *Dunque l'asta è parametrizzata da*

$$\overrightarrow{OP(s)} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P(s)} = R(0, \cos\varphi, \sin\varphi) + s(0, \cos\theta, \sin\theta)\,,$$

per $0 \le s \le 2L$.

Nel sistema $(O, \boldsymbol{u}_i)$ *sull'asta agiscono il peso e la forza di trascinamento di densità*

$$\frac{m}{2L}\omega^2 x_2\,.$$

Quindi il potenziale di quest'ultima sarà dato da

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{T}} = \int_0^{2L} \frac{m}{2L}\omega^2 \frac{x_2^2}{2}\,\mathrm{d}s &= \frac{m}{4L}\omega^2 \int_0^{2L} (R\cos\varphi + s\cos\theta)^2\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{m}{4L}\omega^2 \Big(2LR^2\cos^2\varphi + 4L^2R\cos\varphi\cos\theta + \frac{8}{3}L^3\cos^2\theta\Big)\,. \end{aligned}$$

Il potenziale della forza peso sarà invece, se G *è il centro di massa dell'asta,*

$$U_{\mathrm{peso}} = -mgx_{3G} = -mg(R\sin\varphi + L\sin\theta)\,.$$

Il potenziale complessivo si ottiene sommando i due, ed è

$$U(\varphi, \theta) = \frac{m}{2}\omega^2\Big(R^2\cos^2\varphi + 2LR\cos\varphi\cos\theta + \frac{4}{3}L^2\cos^2\theta\Big) - mg(R\sin\varphi + L\sin\theta)\,.$$

Le equazioni che determinano le posizioni di equilibrio sono date da $\nabla U = 0$, *ossia da*

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial\varphi} &= \frac{m}{2}\omega^2(-2R^2\cos\varphi\sin\varphi - 2LR\sin\varphi\cos\theta) - mgR\cos\varphi = 0\,, \\ \frac{\partial U}{\partial\theta} &= \frac{m}{2}\omega^2\Big(-2LR\cos\varphi\sin\theta - \frac{8}{3}L^2\cos\theta\sin\theta\Big) - mgL\cos\theta = 0\,. \end{aligned}$$

La posizione orizzontale di $\overrightarrow{P_1P_2}$ *corrisponde a* $\theta = 0$, *valore che però è escluso dalla seconda equazione.*

R.

$$\begin{gathered} \omega^2(R\cos\varphi\sin\varphi + L\sin\varphi\cos\theta) + g\cos\varphi = 0\,, \\ \omega^2\Big(R\cos\varphi\sin\theta + \frac{4}{3}L\cos\theta\sin\theta\Big) + g\cos\theta = 0\,. \end{gathered}$$

6. [7/7/2006 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato a una retta $R(t)$ di equazione

$$\begin{aligned} x_3 &= 0\,, \\ x_1 \sin\alpha(t) - x_2 \cos\alpha(t) &= 0\,, \end{aligned}$$

ove $\alpha : [0,\infty) \to [0,\infty)$ è una funzione C^1 con $\dot\alpha > 0$. Il peso è diretto secondo il verso negativo dell'asse x_2.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.
2. Determinare il moto del punto nel caso in cui $\alpha(t) = \omega t$, e siano assegnate le condizioni iniziali

$$P(0) = (s_0, 0, 0)\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = s_0\omega(0,1,0)\,.$$

Soluzione

1) Scegliamo come coordinata lagrangiana l'ascissa r del punto sulla retta $R(t)$. Si ha quindi

$$P = (r\cos\alpha(t), r\sin\alpha(t), 0)\,,$$

cosicché l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\alpha^2)\,.$$

Il potenziale della forza peso è poi dato da

$$U = -mgx_2 = -mgr\sin\alpha(t)\,.$$

Dunque

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\alpha^2) - mgr\sin\alpha(t)\,.$$

Perciò l'equazione di Lagrange è

$$\ddot r - r\dot\alpha(t)^2 + g\sin\alpha(t) = 0\,.$$

2) Nel caso in cui $\alpha(t) = \omega t$, questa si riduce a

$$\ddot r - \omega^2 r = -g\sin\omega t\,,$$

che ha integrale generale

$$r(t) = k_1 e^{\omega t} + k_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\,.$$

Le costanti k_i si determinano imponendo le condizioni iniziali, che in coordinate lagrangiane si leggono come

$$r(0) = s_0\,, \qquad \dot r(0) = 0\,.$$

R. *1) Equazioni di Lagrange:*

$$\ddot{r} - r\dot{\alpha}(t)^2 + g\sin\alpha(t) = 0\,,$$

ove r è l'ascissa su $R(t)$.
2) Moto:

$$r(t) = \frac{1}{2}\Big[\Big(s_0 - \frac{g}{2\omega^2}\Big)e^{\omega t} + \Big(s_0 + \frac{g}{2\omega^2}\Big)e^{-\omega t}\Big] + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\,.$$

7. [7/7/2006 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato a una retta $R(t)$ di equazione

$$\begin{aligned} x_3 &= 0\,,\\ -x_1\cos\alpha(t) + x_2\sin\alpha(t) &= 0\,, \end{aligned}$$

ove $\alpha : [0,\infty) \to [0,\infty)$ è una funzione C^1 con $\dot{\alpha} > 0$. Il peso è diretto secondo il verso negativo dell'asse x_1.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.
2. Determinare il moto del punto nel caso in cui $\alpha(t) = \omega t$, e siano assegnate le condizioni iniziali

$$P(0) = (0, s_0, 0)\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = s_0\omega(1,0,0)\,.$$

R. *1) Equazioni di Lagrange:*

$$\ddot{r} - r\dot{\alpha}(t)^2 + g\sin\alpha(t) = 0\,,$$

ove r è l'ascissa su $R(t)$.
2) Moto:

$$r(t) = \frac{1}{2}\Big[\Big(s_0 - \frac{g}{2\omega^2}\Big)e^{\omega t} + \Big(s_0 + \frac{g}{2\omega^2}\Big)e^{-\omega t}\Big] + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\,.$$

8. [19/7/2006 (ex)I] Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a muoversi sul piano ruotante $\Pi(t)$ di equazione

$$-x_1\sin(\omega t) + x_2\cos(\omega t) = 0\,,$$

ove $\omega > 0$ è costante.
Sia $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con $\Pi(t)$, ove $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{u}_1(t)$ è perpendicolare a $\Pi(t)$ per ogni t; inoltre sia $\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{e}_1$. Qui O denota l'origine del sistema di riferimento fisso. Siano (ξ_i) le coordinate associate a $\mathcal{S}$.
Il centro C dell'asta è vincolato alla retta solidale con $\Pi(t)$

$$\xi_3 = \xi_2\,, \qquad \xi_1 = 0\,.$$

Sull'asta agisce la forza peso diretta nel verso negativo dell'asse x_3.

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Determinare le eventuali posizioni di equilibrio relative a $\Pi(t)$.

Soluzione

1) Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$\begin{aligned} x &= \xi_{2C}\,, \\ \varphi &= \text{angolo tra } \overrightarrow{AB} \text{ e } \boldsymbol{u}_2 . \end{aligned}$$

L'asta AB verrà allora parametrizzata, nel sistema $\mathcal{S}$, da

$$(0, x + s\cos\varphi, x + s\sin\varphi)\,, \qquad -L < s < L\,.$$

Su AB, sempre nel sistema $\mathcal{S}$, agiscono il peso, di potenziale

$$U_{\text{peso}}(x,\varphi) = -mg\xi_{3C} = -mgx\,,$$

e la forza di trascinamento, di densità

$$\frac{m}{2L}\omega^2\xi_2\boldsymbol{u}_2\,.$$

Dunque

$$U_{\text{T}}(x,\varphi) = \int_{-L}^{L}\frac{m}{4L}\omega^2(x+s\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}s = \frac{m}{4L}\omega^2\Big(2Lx^2 + \frac{2}{3}L^3\cos^2\varphi\Big)\,.$$

Infine in $\mathcal{S}$, per il teorema di König,

$$T = \frac{1}{2}m\left|[\boldsymbol{v}_C]_{\mathcal{S}}\right|^2 + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 = m\dot x^2 + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2\,,$$

se I è il momento d'inerzia di AB relativo all'asse ortogonale a AB in C.
Quindi

$$\mathcal{L} = m\dot x^2 + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 - mgx + \frac{m}{2}\omega^2\Big(x^2 + \frac{1}{3}L^2\cos^2\varphi\Big)\,.$$

Le equazioni di Lagrange pertanto sono

$$\begin{aligned} 2m\ddot x + mg - m\omega^2 x &= 0\,, \\ I\ddot\varphi + \frac{m}{3}\omega^2L^2\sin\varphi\cos\varphi &= 0\,. \end{aligned}$$

2) Cerchiamo i punti stazionari di $U = U_{\text{peso}} + U_{\text{T}}$. Dato che

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -mg + m\omega^2 x\,, \\ \frac{\partial U}{\partial\varphi} &= -\frac{m}{3}\omega^2L^2\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{m}{6}\omega^2L^2\sin 2\varphi\,, \end{aligned}$$

si hanno i quattro punti stazionari

$$(g\omega^{-2}, 0)\,, \quad (g\omega^{-2}, \pi/2)\,, \quad (g\omega^{-2}, \pi)\,, \quad (g\omega^{-2}, 3\pi/2)\,.$$

Dunque

- $(g\omega^{-2}, 0)$ *e* $(g\omega^{-2}, \pi)$*: si ha*

$$D^2U = \begin{pmatrix} m\omega^2 & 0 \\ 0 & -m\omega^2 L^2/3 \end{pmatrix},$$

che è indefinita. Quindi si ha equilibrio instabile.

- $(g\omega^{-2}, \pi/2)$ *e* $(g\omega^{-2}, 3\pi/2)$*: si ha*

$$D^2U = \begin{pmatrix} m\omega^2 & 0 \\ 0 & m\omega^2 L^2/3 \end{pmatrix},$$

che è definita positiva. Quindi si ha equilibrio instabile.

R. *Equazioni di Lagrange:*

$$2m\ddot{x} + mg - m\omega^2 x = 0\,,$$
$$I\ddot{\varphi} + \frac{m}{3}\omega^2 L^2 \sin\varphi \cos\varphi = 0\,.$$

Equilibrio:

$$(g\omega^{-2}, 0)\,, \quad (g\omega^{-2}, \pi)\,, \quad \textit{(equilibrio instabile)}$$
$$(g\omega^{-2}, \pi/2)\,, \quad (g\omega^{-2}, 3\pi/2) \quad \textit{(equilibrio instabile)}\,.$$

9. [19/7/2006 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza di raggio variabile $r(t)$ data da

$$x_1^2 + x_2^2 = r(t)^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Qui dunque $r \in C^1(\boldsymbol{R})$ è un'assegnata funzione con $r(t) > 0$ per ogni t.
Il punto è soggetto alla forza peso, diretta nel verso negativo dell'asse x_1.
Scrivere le equazioni di Lagrange.

Soluzione

Scegliamo come coordinata lagrangiana l'anomalia polare φ nel piano $x_3 = 0$. Allora le coordinate di P nel sistema fisso sono

$$(r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, 0)\,,$$

e quindi

$$\boldsymbol{v}_P = \dot{r}(t)(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) + r(t)\dot{\varphi}(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\,.$$

La lagrangiana dunque è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}(t)^2 + r(t)^2\dot{\varphi}^2) - mgr(t)\cos\varphi\,,$$

e l'equazione di Lagrange risulta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr(t)^2\dot{\varphi}) - mgr(t)\sin\varphi = 0\,,$$

cioè

$$r(t)\ddot{\varphi} + 2\dot{r}(t)\dot{\varphi} - g\sin\varphi = 0\,.$$

R. *Equazione di Lagrange:*

$$r(t)\ddot{\varphi} + 2\dot{r}(t)\dot{\varphi} - g\sin\varphi = 0\,.$$

10. [19/7/2006 (ex)II] Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a muoversi sul piano ruotante $\Pi(t)$ di equazione

$$-x_1\sin(\omega t) + x_2\cos(\omega t) = 0\,,$$

ove $\omega > 0$ è costante.
Sia $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con $\Pi(t)$, ove $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{u}_1(t)$ è perpendicolare a $\Pi(t)$ per ogni t; inoltre sia $\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{e}_1$. Qui O denota l'origine del sistema di riferimento fisso. Siano (ξ_i) le coordinate associate a $\mathcal{S}$.
Il centro C dell'asta è vincolato alla retta solidale con $\Pi(t)$

$$\xi_3 = -\xi_2\,, \qquad \xi_1 = 0\,.$$

Sull'asta agisce la forza peso diretta nel verso positivo dell'asse x_3.

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Determinare le eventuali posizioni di equilibrio relative a $\Pi(t)$.

R. *Equazioni di Lagrange:*

$$2m\ddot{x} - mg - m\omega^2 x = 0\,,$$
$$I\ddot{\varphi} + \frac{m}{3}\omega^2 L^2 \sin\varphi\cos\varphi = 0\,.$$

Equilibrio:

$$(g\omega^{-2}, 0)\,, \quad (g\omega^{-2}, \pi)\,, \quad \textit{(equilibrio stabile)}$$
$$(g\omega^{-2}, \pi/2)\,, \quad (g\omega^{-2}, 3\pi/2) \quad \textit{(equilibrio instabile)}\,.$$

11. [19/7/2006 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza di raggio variabile $r(t)$ data da

$$x_1^2 + x_2^2 = r(t)^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Qui dunque $r \in C^1(\boldsymbol{R})$ è un'assegnata funzione con $r(t) > 0$ per ogni t.
Il punto è soggetto alla forza peso, diretta nel verso positivo dell'asse x_2.

Scrivere le equazioni di Lagrange.
R. *Equazione di Lagrange:*

$$r(t)\ddot{\varphi} + 2\dot{r}(t)\dot{\varphi} - g\cos\varphi = 0\,.$$

12. [13/12/2006 (ex)I] Sia $(O, \boldsymbol{e}_i)$ il sistema di riferimento fisso, e sia

$$\overrightarrow{OP} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_3\boldsymbol{e}_3\,,$$

ove P è un punto di massa m. P è vincolato a una circonferenza di raggio R e centro A, giacente sul piano $x_2 = 0$.
A sua volta, A è vincolato ad appartenere all'asse x_3, ma è mobile su tale asse, con moto

$$\overrightarrow{OA} = -ct^2\boldsymbol{e}_3\,,$$

con c costante positiva.
Su P agisce la forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange di P.
Soluzione
Scegliamo come coordinata lagrangiana l'angolo φ tra $\overrightarrow{AP}$ e $\boldsymbol{e}_1$. Indichiamo anche

$$z(t) = -ct^2\,.$$

Dunque

$$\overrightarrow{OP} = (R\cos\varphi, 0, z(t) + R\sin\varphi)\,.$$

Dato che le forze sono conservative con potenziale

$$U = -mgx_3\,,$$

si può scrivere

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 - mgx_3\,.$$

Ma

$$\boldsymbol{v} = (-R\dot{\varphi}\sin\varphi, 0, \dot{z}(t) + R\dot{\varphi}\cos\varphi)\,,$$

e pertanto

$$|\boldsymbol{v}|^2 = \dot{z}(t)^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{z}(t)\dot{\varphi}\cos\varphi\,.$$

Perciò

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{z}(t)^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{z}(t)\dot{\varphi}\cos\varphi) - mgz(t) - mgR\sin\varphi\,.$$

Il sistema ha un grado di libertà, quindi le equazioni di Lagrange si riducono alla

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(R^2\dot{\varphi} + R\dot{z}(t)\cos\varphi) + mR\dot{z}(t)\dot{\varphi}\sin\varphi + mgR\cos\varphi = 0\,.$$

R.

$$R\ddot{\varphi} + (g - 2c)\cos\varphi = 0\,.$$

13. [26/3/2007 (ex)I] Due punti materiali P_1 e P_2 entrambi di massa m sono vincolati a una circonferenza liscia di raggio R e centro O, che ruota intorno a un suo diametro fisso AB con velocità angolare costante $\omega > 0$.
Sui punti P_1 e P_2 agiscono le forze:

$$\text{su } P_1 : \qquad \boldsymbol{F}_1 = k \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2 \overrightarrow{P_1P_2}\,;$$
$$\text{su } P_2 : \qquad \boldsymbol{F}_2 = k \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2 \overrightarrow{P_2P_1}\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Scrivere le equazioni che danno le posizioni di equilibrio relativo al piano della circonferenza.
SOLUZIONE
Introduciamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, x_i)$, con l'asse x_3 ortogonale al piano della circonferenza, e l'asse x_2 coincidente con la direzione di $\overrightarrow{AB}$.
Scegliamo come coordinate lagrangiane i due angoli φ_1 e φ_2 tali che nel sistema $\mathcal{S}$ si abbia

$$\overrightarrow{OP_i} = (R\cos\varphi_i, R\sin\varphi_i, 0)\,.$$

Il potenziale in $\mathcal{S}$, che comprende quindi il contributo delle forze fittizie, è

$$\begin{aligned}
U_{\mathcal{S}} &= -\frac{k}{4}\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^4 + \frac{m\omega^2}{2}x_{1P_1}^2 + \frac{m\omega^2}{2}x_{1P_2}^2 \\
&= -\frac{k}{4}\left[(x_{1P_1} - x_{1P_2})^2 + (x_{2P_1} - x_{2P_2})^2\right]^2 + \frac{m\omega^2}{2}x_{1P_1}^2 + \frac{m\omega^2}{2}x_{1P_2}^2 \\
&= -kR^4[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]^2 + \frac{m\omega^2R^2}{2}(\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2)\,.
\end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio relativo si trovano in corrispondenza dei punti critici di $U_{\mathcal{S}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{\mathcal{S}}}{\partial\varphi_1} &= -2kR^4[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + m\omega^2R^2\cos\varphi_1\sin\varphi_1\,, \\
\frac{\partial U_{\mathcal{S}}}{\partial\varphi_2} &= -2kR^4[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + m\omega^2R^2\cos\varphi_2\sin\varphi_2\,.
\end{aligned}$$

Quindi sommando le due equazioni

$$\frac{\partial U_{\mathcal{S}}}{\partial\varphi_1}(\varphi_1, \varphi_2) = 0\,, \qquad \frac{\partial U_{\mathcal{S}}}{\partial\varphi_2}(\varphi_1, \varphi_2) = 0\,,$$

si ha

$$\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + \cos\varphi_2\sin\varphi_2 = 0\,,$$

ossia

$$\sin(2\varphi_1) = \sin(-2\varphi_2)\,.$$

Perciò

$$2\varphi_1 - 2\varphi_2 = n\pi\,, \qquad n \in \boldsymbol{Z}\,.$$

14. [4/7/2007 (ex)I] Un punto P è vincolato alla retta mobile r data da

$$r(t) = \{s\boldsymbol{u}(t) \mid s \in \boldsymbol{R}\}\,,$$

ove

$$\boldsymbol{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big(\boldsymbol{u}_1(t) + \boldsymbol{u}_2(t) + \boldsymbol{u}_3(t)\big)\,,$$

e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2(t) &= -\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

con $\omega > 0$ costante.
Su P agiscono il peso, nel verso negativo dell'asse x_3, e la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{AP}\,,$$

con k costante positiva, ove A è il punto di $r(t)$ corrispondente a $s = L > 0$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
- Determinare le eventuali posizioni di equilibrio di P rispetto a r.

SOLUZIONE
Usiamo s come coordinata lagrangiana, cosicché

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \dot{s}\boldsymbol{u}(t) + s\dot{\boldsymbol{u}}(t)\\
&= \dot{s}\boldsymbol{u}(t) + s\boldsymbol{\omega}(t) \wedge \boldsymbol{u}(t)\\
&= \dot{s}\boldsymbol{u}(t) + s\omega\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{u}(t)\\
&= \dot{s}\boldsymbol{u}(t) + s\omega\frac{1}{\sqrt{3}}\big[(\cos(\omega t) - \sin(\omega t))\boldsymbol{e}_2 - (\sin(\omega t) + \cos(\omega t))\boldsymbol{e}_1\big]\,.
\end{aligned}$$

Dunque (si noti che per costruzione le due componenti vettoriali di $\boldsymbol{v}$ sono tra di loro ortogonali)

$$|\boldsymbol{v}|^2 = \dot{s}^2 + s^2\omega^2\frac{1}{3}\big[(\cos(\omega t) - \sin(\omega t))^2 + (\sin(\omega t) + \cos(\omega t))^2\big] = \dot{s}^2 + \frac{2}{3}s^2\omega^2\,.$$

Il potenziale delle forze è dato da

$$U^{\mathrm{L}}(s) = -mgx_3(s) - \frac{k}{2}\left|\overrightarrow{AP}\right|^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}mgs - \frac{k}{2}(s-L)^2\,.$$

Quindi

$$\mathcal{L}(s,\dot{s}) = \frac{1}{2}m\Big(\dot{s}^2 + \frac{2}{3}s^2\omega^2\Big) - \frac{1}{\sqrt{3}}mgs - \frac{k}{2}(s-L)^2 \,.$$

Quindi l'equazione di Lagrange è

$$m\ddot{s} - \frac{2}{3}m\omega^2 s + \frac{1}{\sqrt{3}}mg + k(s-L) = 0\,.$$

Le posizioni di equilibrio relativo a r sono dunque date dalle soluzioni s costante, ossia

$$s(t) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}mg + kL}{-\frac{2}{3}m\omega^2 + k}\,,$$

se

$$-\frac{2}{3}m\omega^2 + k \neq 0\,,$$

e da ogni valore di s se

$$-\frac{2}{3}m\omega^2 + k = 0\,, \qquad -\frac{1}{\sqrt{3}}mg + kL = 0\,.$$

R.

$$m\ddot{s} - \frac{2}{3}m\omega^2 s + \frac{1}{\sqrt{3}}mg + k(s-L) = 0\,,$$
$$s(t) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}mg + kL}{-\frac{2}{3}m\omega^2 + k}\,, \quad \frac{2}{3}m\omega^2 \neq k\,.$$

15. [4/7/2007 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$, e ad avere l'estremo A mobile secondo la legge

$$\overrightarrow{OA}(t) = R\cos\alpha(t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin\alpha(t)\boldsymbol{e}_2\,,$$

ove $\alpha \in C^2(\boldsymbol{R})$ è una funzione assegnata, con $\alpha(0) = 0$.
L'asta è anche sottoposta alla forza peso, che agisce nel verso negativo dell'asse x_2.

- Scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema.
- Trovare, nella forma di un'equazione differenziale, la condizione che deve soddisfare α affinché siano possibili moti in cui $\overrightarrow{AB}$ si mantiene parallelo a $\overrightarrow{OA}$.

Soluzione
A) Parametrizziamo $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}(\varphi,t,s) &= \overrightarrow{OA}(t) + \overrightarrow{AP}(\varphi,s)\\ &= (R\cos\alpha(t) + s\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (R\sin\alpha(t) + s\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2\,,\end{aligned}$$

con $0 \le s \le 2L$*. Si è qui introdotta la coordinata lagrangiana* $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *data dall'angolo formato da* $\overrightarrow{AB}$ *con* $\boldsymbol{e}_1$*.*
Quindi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OP}(s,t) = (-R\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t) - s\dot{\varphi}\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (R\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t) + s\dot{\varphi}\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2\,,$$

e

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OP}(s,t)\right|^2 = R^2\dot{\alpha}^2 + s^2\dot{\varphi}^2 + 2Rs\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)\,.$$

Quindi l'energia cinetica è

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{L}}(\varphi,\dot{\varphi},t) &= \frac{1}{2}\int_0^{2L}\frac{m}{2L}\{R^2\dot{\alpha}^2 + s^2\dot{\varphi}^2 + 2Rs\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)\}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}m\{R^2\dot{\alpha}^2 + \frac{4}{3}L^2\dot{\varphi}^2 + 2LR\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)\}\,, \end{aligned}$$

e la lagrangiana è

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T^{\mathrm{L}} + U^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m\{R^2\dot{\alpha}^2 + \frac{4}{3}L^2\dot{\varphi}^2 + 2LR\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)\} \\ - mg(R\sin\alpha(t) + L\sin\varphi)\,. \end{aligned}$$

Quindi l'equazione di Lagrange è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\Big[\frac{4}{3}L^2\dot{\varphi} + LR\dot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha)\Big] - \Big[-mLR\dot{\alpha}\dot{\varphi}\sin(\varphi-\alpha) - mgL\cos\varphi\Big] = 0\,,$$

ossia

$$\frac{4}{3}L^2\ddot{\varphi} + LR\ddot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha) + LR\dot{\alpha}^2\sin(\varphi-\alpha) + gL\cos\varphi = 0\,.$$

B) I due vettori $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{AB}$ *sono paralleli al tempo* t *se e solo se* $\varphi(t) = \alpha(t)$*. Dunque la condizione su* α *è*

$$\Big(\frac{4}{3}L^2 + LR\Big)\ddot{\alpha} + gL\cos\alpha = 0\,.$$

R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\Big[\frac{4}{3}L^2\dot{\varphi} + LR\dot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha)\Big] - \Big[-mLR\dot{\alpha}\dot{\varphi}\sin(\varphi-\alpha) - mgL\cos\varphi\Big] = 0\,.$$

$$\Big(\frac{4}{3}L^2 + LR\Big)\ddot{\alpha} + gL\cos\alpha = 0\,.$$

16. [4/7/2007 (ex)I] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare rispetto a quello fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$ data da $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_3$, con $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t.
Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva solidale con $\mathcal{S}$

$$\gamma\,:\begin{cases} x_3 = a\,\mathrm{arctg}\,bx_2\,,\\ x_1 = 0\,,\end{cases}$$

con a, b costanti positive (qui le x_i indicano le coordinate in $\mathcal{S}$).
Su P agisce la forza peso nel verso negativo di x_3.
Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
SOLUZIONE
Scegliamo come coordinata lagrangiana la coordinata cartesiana $x = x_2$ di P.
Nel sistema $\mathcal{S}$ su P agiscono la forza fittizia di Coriolis e quella di trascinamento.
Sia

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(x,t) = x\boldsymbol{u}_2(t) + a \operatorname{arctg} bx\boldsymbol{u}_3(t)\,,$$

cosicché

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \dot{x}\Big\{\boldsymbol{u}_2(t) + \frac{ab}{1+b^2x^2}\boldsymbol{u}_3(t)\Big\} = \dot{x}\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x}\,.$$

Ne segue che la componente lagrangiana della forza di Coriolis è nulla:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} = 0\,.$$

Perciò la forza di Coriolis non appare nella equazione di Lagrange. La forza di trascinamento è

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -m\boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}] = m\omega^2 x\boldsymbol{u}_2(t)\,,$$

da cui

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} = m\omega^2 x\,.$$

Infine su P agisce la forza peso, la cui componente lagrangiana è:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{peso}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} = -mg\boldsymbol{u}_3(t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} = -\frac{mgab}{1+b^2x^2}\,.$$

L'energia cinetica di P (in $\mathcal{S}$) è

$$T^{\mathrm{L}}(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}|^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\Big(1 + \frac{a^2b^2}{(1+b^2x^2)^2}\Big)\,.$$

Perciò l'equazione di Lagrange è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[m\dot{x}\Big(1 + \frac{a^2b^2}{(1+b^2x^2)^2}\Big)\Big] + m\dot{x}^2\frac{2a^2b^4x}{(1+b^2x^2)^3} = m\omega^2 x - \frac{mgab}{1+b^2x^2}\,.$$

R.

$$\ddot{x}\Big(1 + \frac{a^2b^2}{(1+b^2x^2)^2}\Big) + \frac{2a^2b^4x\dot{x}^2}{(1+b^2x^2)^3} = \omega^2 x - \frac{mgab}{1+b^2x^2}\,.$$

17. [4/7/2007 (ex)II] Un punto P è vincolato alla retta mobile r data da

$$r(t) = \{s\boldsymbol{u}(t) \mid s \in \boldsymbol{R}\}\,,$$

ove

$$\boldsymbol{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big(\boldsymbol{u}_1(t) + \boldsymbol{u}_2(t) + \boldsymbol{u}_3(t)\big)\,,$$

e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2(t) &= -\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

con $\omega > 0$ costante.
Su P agiscono il peso, nel verso negativo dell'asse x_3, e la forza

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{AP}\,,$$

con k costante positiva, ove A è il punto di $r(t)$ corrispondente a $s = -L$, $L > 0$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
- Determinare le eventuali posizioni di equilibrio di P rispetto a r.

R.

$$m\ddot{s} - \frac{2}{3}m\omega^2 s + \frac{1}{\sqrt{3}}mg - k(s+L) = 0\,,$$

$$s(t) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}mg + kL}{-\frac{2}{3}m\omega^2 - k}\,.$$

18. [4/7/2007 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$, e ad avere l'estremo A mobile secondo la legge

$$\overrightarrow{OA}(t) = R\cos\alpha(t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin\alpha(t)\boldsymbol{e}_2\,,$$

ove $\alpha \in C^2(\boldsymbol{R})$ è una funzione assegnata, con $\alpha(0) = 0$.
L'asta è anche sottoposta alla forza peso, che agisce nel verso negativo dell'asse x_1.

- Scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema.
- Trovare, nella forma di un'equazione differenziale, la condizione che deve soddisfare α affinché siano possibili moti in cui l'angolo tra $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OA}$ sia sempre uguale a $\pi/2$.

R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\Big[\frac{4}{3}L^2\dot{\varphi} + LR\dot{\alpha}\cos(\varphi - \alpha)\Big] - \Big[-mLR\dot{\alpha}\dot{\varphi}\sin(\varphi - \alpha) + mgL\sin\varphi\Big] = 0\,.$$

$$\frac{4}{3}L^2\ddot{\alpha} - LR\dot{\alpha}^2 + gL\cos\alpha = 0\,.$$

19. [4/7/2007 (ex)II] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare rispetto a quello fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$ data da $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_3$, con $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t.
Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva solidale con $\mathcal{S}$

$$\gamma : \begin{cases} x_2 = a \operatorname{arctg} b x_3 \,, \\ x_1 = 0 \,, \end{cases}$$

con a, b costanti positive (qui le x_i indicano le coordinate in $\mathcal{S}$).
Su P agisce la forza peso nel verso negativo di x_3.
Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
R.

$$\ddot{x}\Big(1 + \frac{a^2 b^2}{(1 + b^2 x^2)^2}\Big) + \frac{2a^2 b^4 x \dot{x}^2}{(1 + b^2 x^2)^3} = -g + \frac{\omega^2 a^2 b}{1 + b^2 x^2} \operatorname{arctg} bx \,.$$

20. [19/7/2007 (ex)I] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega \boldsymbol{u}_3$, con $\omega > 0$ costante, rispetto al sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$. Si prenda $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t.
Al piano ruotante $x_1 = 0$ (qui le x_i denotano le coordinate in $\mathcal{S}$) è vincolata un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m.
L'asta è sottoposta alla forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda \overrightarrow{AB} \wedge \boldsymbol{u}_1$$

(quindi ortogonale all'asta medesima), applicata all'estremo B, con λ costante positiva.
Scrivere le equazioni di Lagrange dell'asta.
SOLUZIONE
Se G è il centro di AB, introduciamo le coordinate lagrangiane

$$y = x_{2G} \,, \qquad z = x_{3G} \,, \qquad \varphi \text{ angolo tra } \overrightarrow{AB} \text{ e } \boldsymbol{u}_2 .$$

Allora l'asta è parametrizzata da

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(y, z, \varphi, t; s) = (y + s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_2(t) + (z + s\sin\varphi)\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad -L \le s \le L \,.$$

L'energia cinetica in $\mathcal{S}$ si ottiene per esempio dal Teorema di König, nella forma

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} m(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \,,$$

se I denota il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse ortogonale in G all'asta medesima.
In $\mathcal{S}$ agiscono sull'asta le forza fittizie, oltre alla $\boldsymbol{F}$.
Si verifica subito che la forza di Coriolis $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$ ha componenti lagrangiane nulle, perché (per ogni punto di AB) $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ è parallela a $\boldsymbol{u}_1$, e quindi ortogonale a $\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}$.

Invece, dato che per la forza di trascinamento si ha

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = \frac{m}{2L}\omega^2(y + s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_2\,,$$

si ha

$$F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}y} = \int_{AB} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial y} = \int_{-L}^{L} \frac{m}{2L}\omega^2(y + s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 \,\mathrm{d}s = m\omega^2 y\,.$$

Si ha subito $F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}z} = 0$, *e infine*

$$F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}\varphi} = \int_{AB} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = \int_{-L}^{L} \frac{m}{2L}\omega^2(y+s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_2\cdot(-s\sin\varphi)\boldsymbol{u}_2 \,\mathrm{d}s = -\frac{m\omega^2 L^2}{6}\sin 2\varphi\,.$$

La $\boldsymbol{F}$ *si può scrivere come*

$$\boldsymbol{F} = \lambda[2L\cos\varphi\boldsymbol{u}_2 + 2L\sin\varphi\boldsymbol{u}_3] \wedge \boldsymbol{u}_1 = 2\lambda L\sin\varphi\boldsymbol{u}_2 - 2\lambda L\cos\varphi\boldsymbol{u}_3\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
F^{\mathrm{L}}_{y} &= \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial y}(x,y,\varphi,t;L) = 2\lambda L\sin\varphi\,,\\
F^{\mathrm{L}}_{z} &= \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial z}(x,y,\varphi,t;L) = -2\lambda L\cos\varphi\,,\\
F^{\mathrm{L}}_{\varphi} &= \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi}(x,y,\varphi,t;L) = -2\lambda L^2\,.
\end{aligned}$$

R.

$$\begin{aligned}
m\ddot{y} &= m\omega^2 y + 2\lambda L\sin\varphi\,,\\
m\ddot{z} &= -2\lambda L\cos\varphi\,,\\
I\ddot{\varphi} &= -\frac{m\omega^2 L^2}{6}\sin 2\varphi - 2\lambda L^2\,.
\end{aligned}$$

21. [19/7/2007 (ex)II] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega\boldsymbol{u}_3$, con $\omega > 0$ costante, rispetto al sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$. Si prenda $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t.
Al piano ruotante $x_1 = 0$ (qui le x_i denotano le coordinate in $\mathcal{S}$) è vincolata un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m.
L'asta è sottoposta alla forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda(t)\overrightarrow{AB} \wedge \boldsymbol{u}_1$$

(quindi ortogonale all'asta medesima), applicata all'estremo A, con $\lambda \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ funzione assegnata del tempo.
Scrivere le equazioni di Lagrange dell'asta.

R.

$$
\begin{aligned}
m\ddot{y} &= m\omega^2 y + 2\lambda L \sin\varphi \,, \\
m\ddot{z} &= -2\lambda L \cos\varphi \,, \\
I\ddot{\varphi} &= -\frac{m\omega^2 L^2}{6} \sin 2\varphi + 2\lambda L^2 \,.
\end{aligned}
$$

22. [17/9/2007 (ex)I] Un piano mobile $\Pi(t)$ ha equazione nel sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$

$$
x_1 \cos\omega t + x_2 \sin\omega t + x_3 = 0 \,.
$$

Si tratta dunque di un piano passante per l'origine e con normale

$$
\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\omega t, \sin\omega t, 1) \,.
$$

Un punto materiale P di massa m è vincolato a $\Pi(t)$ e sottoposto alla forza peso, diretta nel verso negativo dell'asse x_3.
Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.
Soluzione
Scriviamo le equazioni di Lagrange nel sistema di riferimento mobile solidale con $\Pi(t)$ $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, *con*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\omega t, -\sin\omega t, 1) \,, \\
\boldsymbol{u}_2(t) &= (\sin\omega t, -\cos\omega t, 0) \,, \\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \nu(t) \,.
\end{aligned}
$$

Quindi $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ *è una base di* $\Pi(t)$.
Applicando l'espressione delle componenti della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ *di* $\mathcal{S}$ *in funzione delle derivate dei versori* $\boldsymbol{u}_i$ *si ottiene subito*

$$
\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{\omega}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3) = \omega \boldsymbol{e}_3 \,.
$$

Quindi il moto di $\mathcal{S}$ *è una rotazione costante.*
Scegliamo come coordinate lagrangiane x, $y \in \boldsymbol{R}$ *tali che*

$$
\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2 \,.
$$

Nel sistema di riferimento mobile agiscono su P *oltre alla forza peso le forze fittizie di trascinamento* $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ *e di Coriolis* $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$. *Si ha*

$$
\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -m\boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}] = m\omega^2 \Big\{ \frac{x}{2}\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2 - \frac{x}{2}\boldsymbol{u}_3 \Big\} \,,
$$

cosicché le corrispondenti componenti lagrangiane delle forze sono

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} &= \boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{u}_1 = m\omega^2 \frac{x}{2} \,, \\
\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial y} &= \boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{u}_2 = m\omega^2 y \,.
\end{aligned}
$$

Inoltre

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = -m\omega\sqrt{2}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3) \wedge (\dot{x}\boldsymbol{u}_1 + \dot{y}\boldsymbol{u}_2)$$
$$= m\omega\sqrt{2}(\dot{y}\boldsymbol{u}_1 - \dot{x}\boldsymbol{u}_2 - \dot{y}\boldsymbol{u}_3)\,,$$

cosicché le corrispondenti componenti lagrangiane delle forze sono

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} \cdot \boldsymbol{u}_1 = m\omega\sqrt{2}\dot{y}\,,$$
$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial y} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} \cdot \boldsymbol{u}_2 = -m\omega\sqrt{2}\dot{x}\,.$$

Infine, per quanto riguarda la forza peso,

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{peso}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} = -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = -\frac{mg}{\sqrt{2}}\,,$$
$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{peso}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial y} = -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0\,.$$

L'energia cinetica è

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\,.$$

R.

$$m\ddot{x} = m\omega^2\frac{x}{2} + m\omega\sqrt{2}\dot{y} - \frac{mg}{\sqrt{2}}\,,$$
$$m\ddot{y} = m\omega^2 y - m\omega\sqrt{2}\dot{x}\,.$$

23. [17/9/2007 (ex)II] Un piano mobile $\Pi(t)$ ha equazione nel sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$

$$x_1\cos\omega t + x_2 + x_3\sin\omega t = 0\,.$$

Si tratta dunque di un piano passante per l'origine e con normale

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\omega t, 1, \sin\omega t)\,.$$

Un punto materiale P di massa m è vincolato a $\Pi(t)$ e sottoposto alla forza peso, diretta nel verso positivo dell'asse x_2.
Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.
R.

$$m\ddot{x} = m\omega^2\frac{x}{2} + m\omega\sqrt{2}\dot{y} + \frac{mg}{\sqrt{2}}\,,$$
$$m\ddot{y} = m\omega^2 y - m\omega\sqrt{2}\dot{x}\,.$$

24. [1/7/2008 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato a giacere sulla superficie mobile
$$x_3 = a\sin\big(b(x_1 - ct)\big)\,,$$
ove a, b, c sono costanti positive.
P è soggetto alla forza peso
$$-mg\boldsymbol{e}_3\,,$$
e alla forza elastica
$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP}\,,$$
ove $k > 0$ è costante, e O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Scrivere le equazioni di Lagrange del moto, e riconoscere che non si possono avere moti uniformi (cioè con accelerazione nulla nel sistema di riferimento fisso).
Soluzione
A) Scegliamo come coordinate lagrangiane
$$x = x_1\,,\qquad y = x_2\,,\qquad x\,,y \in \boldsymbol{R}\,.$$
Allora
$$\overrightarrow{OP} = \Big(x, y, a\sin\big(b(x-ct)\big)\Big)\,,$$
per cui
$$\boldsymbol{v} = \Big(\dot{x}, \dot{y}, ab(\dot{x}-c)\cos\big(b(x-ct)\big)\Big)\,,$$
e l'energia cinetica è
$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m\Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2b^2(\dot{x}-c)^2\cos^2\big(b(x-ct)\big)\Big)\,.$$
Inoltre il potenziale è dato da
$$U = -mgx_3 - \frac{k}{2}\left|\overrightarrow{OP}\right|^2\,,$$
e quindi in coordinate lagrangiane
$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -mga\sin\big(b(x-ct)\big) - \frac{k}{2}\Big(x^2 + y^2 + a^2\sin^2\big(b(x-ct)\big)\Big)\,.$$
L'equazione di Lagrange corrispondente alla coordinata x quindi si ottiene come
$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[m\dot{x} + ma^2b^2(\dot{x}-c)\cos^2\big(b(x-ct)\big)\Big]\\ &\quad + \frac{m}{2}a^2b^3(\dot{x}-c)^2\sin\big(2b(x-ct)\big)\\ &\quad + mgab\cos\big(b(x-ct)\big) + \frac{k}{2}\Big(2x + a^2b\sin\big(2b(x-ct)\big)\Big) = 0\,.\end{aligned}$$
Invece quella corrispondente alla coordinata y è
$$m\ddot{y} + ky = 0\,.$$

B) Se un moto $(x(t), y(t))$ fosse uniforme, l'accelerazione corrispondente dovrebbe essere nulla, ma si ha subito

$$\boldsymbol{a} = \Big(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{x}\cos\big(b(x-ct)\big) - b(\dot{x}-c)^2 \sin\big(b(x-ct)\big)\Big)\,.$$

Dunque si dovrebbe avere in particolare

$$\ddot{x} = 0\,, \qquad (\dot{x}-c)^2 \sin\big(b(x-ct)\big) = 0\,.$$

Se ci fosse un istante $\bar{t}$ in cui $\dot{x}(\bar{t}) \neq c$, allora per continuità ci sarebbe un intervallo aperto contenente $\bar{t}$ in cui $\dot{x} \neq c$. Ne segue che in quell'intervallo

$$\sin\big(b(x-ct)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - ct = \textit{costante} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = c\,,$$

in contraddizione con $\dot{x}(\bar{t}) \neq c$. Dunque

$$\dot{x}(t) = c\,, \qquad \textit{per ogni } t,$$

e quindi

$$x(t) = x_0 + ct\,, \qquad \textit{per ogni } t.$$

Dalla prima equazione di Lagrange seguirebbe quindi che

$$mgab\cos(bx_0) + \frac{k}{2}\Big(2x_0 + 2ct + a^2 b\sin(2bx_0)\Big) = 0\,, \qquad \textit{per ogni } t,$$

che è impossibile.
R.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &+ ma^2b^2\ddot{x}\cos^2\big(b(x-ct)\big) - ma^2b^3(\dot{x}-c)^2\sin\big(2b(x-ct)\big) \\ &+ \frac{m}{2}a^2b^3(\dot{x}-c)^2\sin\big(2b(x-ct)\big) \\ &+ mgab\cos\big(b(x-ct)\big) + \frac{k}{2}\Big(2x + a^2b\sin\big(2b(x-ct)\big)\Big) = 0\,, \\ & m\ddot{y} + ky = 0\,. \end{aligned}$$

25. [1/7/2008 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato a giacere sulla superficie mobile

$$x_3 = a\cos\big(b(x_2 - ct)\big)\,,$$

ove a, b, c sono costanti positive.
P è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,,$$

e alla forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP}\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Scrivere le equazioni di Lagrange del moto, e riconoscere che non si possono avere moti uniformi (cioè con accelerazione nulla nel sistema di riferimento fisso).

R.

$$
\begin{gathered}
m\ddot{y} + ma^2b^2\ddot{y}\sin^2\big(b(y-ct)\big) + ma^2b^3(\dot{y}-c)^2\sin\big(2b(y-ct)\big) \\
-\frac{m}{2}a^2b^3(\dot{y}-c)^2\sin\big(2b(y-ct)\big) \\
-mgab\sin\big(b(y-ct)\big) + \frac{k}{2}\Big(2y - a^2b\sin\big(2b(y-ct)\big)\Big) = 0\,, \\
m\ddot{x} + kx = 0\,.
\end{gathered}
$$

26. [18/7/2008 (ex)I] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}
$$

e

$$
\overrightarrow{\Omega O} = R\boldsymbol{u}_1(t)\,.
$$

Qui ω, R sono costanti positive, e $(\Omega, \boldsymbol{e}_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Le coordinate in $\mathcal{S}$ si denotano con (x_i).
Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e massa m è vincolata ad avere il lato AD sull'asse (mobile) x_3, con A e D fissi rispetto a $\mathcal{S}$.
Al vertice B è applicata la forza

$$
\boldsymbol{F}_B = k\boldsymbol{\nu}\,,
$$

ove $\boldsymbol{\nu}$ è il versore normale alla lamina, e $k > 0$ è costante.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange della lamina.
2. Trovare per quali valori dei parametri si possono avere posizioni di equilibrio relativo.

Soluzione

Scegliamo come coordinata lagrangiana φ l'angolo formato dal piano della lamina con il piano $x_2 = 0$ cosicché in $\mathcal{S}$ l'energia cinetica della lamina è

$$
T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2\,,
$$

ove I è il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse per AD.
Più in generale, la parametrizzazione della lamina è data da

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s_1\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + s_1\sin\varphi\boldsymbol{u}_2 + s_2\boldsymbol{u}_3 \\
= s_1\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + s_1\sin\varphi\boldsymbol{u}_2 + (a+s_2)\boldsymbol{u}_3\,,
\end{aligned}
$$

ove $a = x_{3A}$*, con* $0 \le s_1,\ s_2 \le L$*, assumendo senza perdita di generalità che* $x_{3A} < x_{3D}$*. Quindi*

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = -s_1\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + s_1\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{u}_2\,,$$

e la normale è

$$\boldsymbol{\nu} = -\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{u}_2\,.$$

In $\mathcal{S}$ *sulla lamina agiscono le forze fittizie* $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$ *e* $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$*. Calcoliamo le componenti lagrangiane integrando sulla lamina le distribuzioni*

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} = -2\frac{m}{L^2}\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = 2\frac{m}{L^2}s_1\omega\dot{\varphi}(\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{u}_2)\,,$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -\frac{m}{L^2}\boldsymbol{a}_O - \frac{m}{L^2}\boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\overrightarrow{OP})& \\ = \frac{m}{L^2}R\omega^2\boldsymbol{u}_1 + \frac{m}{L^2}\omega^2(s_1\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + s_1\sin\varphi\boldsymbol{u}_2)\,.&\end{aligned}$$

Infine

$$\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = -s_1\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + s_1\cos\varphi\boldsymbol{u}_2\,.$$

Dunque

$$F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{C}\varphi} = \iint_{ABCD}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = 0\,.$$

Si noti comunque che si poteva evitare di calcolare l'integrale precedente, richiamandosi al risultato generale che asserisce che la componente lagrangiana della forza di Coriolis è nulla in sistemi con un grado di libertà.
Poi si ha

$$\begin{aligned}F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}\varphi} &= \iint_{ABCD}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} \\ &= \int_0^L\int_0^L\Big\{\frac{m\omega^2}{L^2}(R + s_1\cos\varphi)(-s_1\sin\varphi) + \frac{m\omega^2}{L^2}s_1^2\sin\varphi\cos\varphi\Big\}\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2 \\ &= \frac{m\omega^2}{L}\int_0^L\Big\{-Rs_1\sin\varphi\Big\}\,\mathrm{d}s_1 = -\frac{m\omega^2}{2}RL\sin\varphi\,.\end{aligned}$$

Infine

$$F^{\mathrm{L}}_{B\varphi} = \iint_{ABCD}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_B\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = \iint_{ABCD}k\boldsymbol{\nu}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi}\delta_B = k\boldsymbol{\nu}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi}(\varphi;L,0) = kL\,.$$

Quindi l'equazione di Lagrange è

$$I\ddot{\varphi} = -\frac{m\omega^2}{2}RL\sin\varphi + kL\,.$$

Si può avere equilibrio se il membro di destra nell'equazione di Lagrange può annullarsi, ovvero se

$$m\omega^2R \ge 2k\,.$$

R. *Equazione di Lagrange:*

$$I\ddot{\varphi} = -\frac{m\omega^2}{2} RL \sin\varphi + kL .$$

Le posizioni di equilibrio esistono se

$$m\omega^2 R \geq 2k .$$

27. [18/7/2008 (ex)II] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 ,
\end{aligned}$$

e

$$\overrightarrow{\Omega O} = R\boldsymbol{u}_1(t) .$$

Qui ω, R sono costanti positive, e $(\Omega, \boldsymbol{e}_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Le coordinate in $\mathcal{S}$ si denotano con (x_i).
Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e massa m è vincolata ad avere il lato AD sull'asse (mobile) x_3, con A e D fissi rispetto a $\mathcal{S}$.
Al centro G della lamina è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_G = k\boldsymbol{u}_2 ,$$

ove $k > 0$ è costante.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange della lamina.
2. Dimostrare che per tutti i valori dei parametri si hanno posizioni di equilibrio relativo.

R. *Equazione di Lagrange:*

$$I\ddot{\varphi} = -\frac{m\omega^2}{2} RL \sin\varphi + \frac{kL}{2} \cos\varphi .$$

Le posizioni di equilibrio sono date da

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k}{m\omega^2 R} .$$

28. [12/9/2008 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla sfera mobile

$$(x_1 - R\cos\omega t)^2 + (x_2 - R\sin\omega t)^2 + x_3^2 = R^2 ,$$

ove $R > 0$ e $\omega > 0$ sono costanti.
Su P agisce la forza peso

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3 .$$

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Dimostrare che esiste per P una unica posizione di equilibrio relativo al sistema di riferimento mobile $(C, \boldsymbol{u}_i)$, ove C è il centro della sfera, e

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{OC}}{R}\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

SOLUZIONE
A) Introduciamo il sistema di riferimento solidale con la sfera $(C, \boldsymbol{u}_i)$, ove C è il centro della sfera, cosicché (se O denota l'origine del sistema di riferimento fisso)

$$\overrightarrow{OC} = R\cos\omega t\boldsymbol{e}_1 + R\sin\omega t\boldsymbol{e}_2\,.$$

Inoltre fissiamo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \frac{\overrightarrow{OC}}{R} = \cos\omega t\boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\omega t\boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Scegliamo infine le coordinate lagrangiane

$$\varphi \in (-\pi, \pi)\,, \qquad \theta \in (0, \pi)\,,$$

in modo che

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CP} &= R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{u}_3\\
&= R\sin\theta(\cos\varphi\cos\omega t - \sin\varphi\sin\omega t)\boldsymbol{e}_1\\
&\quad + R\sin\theta(\cos\varphi\sin\omega t + \sin\varphi\cos\omega t)\boldsymbol{e}_2\\
&\quad + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3\\
&= R\sin\theta\cos(\varphi + \omega t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\sin(\varphi + \omega t)\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = R(&\cos\omega t + \sin\theta\cos(\varphi + \omega t))\boldsymbol{e}_1\\
&+ R(\sin\omega t + \sin\theta\sin(\varphi + \omega t))\boldsymbol{e}_2\\
&+ R\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e, nel sistema di riferimento fisso,

$$|\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}|^2 = R^2[\dot\theta^2 + (\dot\varphi^2 + \omega)^2\sin^2\varphi + \omega^2 + 2\omega\dot\theta\cos\theta\sin\varphi + 2\omega(\dot\varphi + \omega)\sin\theta\cos\varphi]\,.$$

Il potenziale è

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta, t) = -mgx_3(\varphi, \theta, t) = -mgR\cos\theta\,.$$

Dunque la lagrangiana è:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\varphi, \theta, \dot\varphi, \dot\theta) =\\
&\quad\frac{1}{2}mR^2[\dot\theta^2 + (\dot\varphi^2 + \omega)^2\sin^2\varphi + \omega^2 + 2\omega\dot\theta\cos\theta\sin\varphi + 2\omega(\dot\varphi + \omega)\sin\theta\cos\varphi]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - mgR\cos\theta\,.
\end{aligned}$$

Le equazioni di Lagrange sono

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[2(\dot\varphi+\omega)\sin^2\theta+2\omega\sin\theta\cos\varphi\Big] \\
&\quad-\Big[2\omega\dot\theta\cos\theta\cos\varphi-2\omega(\dot\varphi+\omega)\sin\theta\sin\varphi\Big]=0\,, \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\dot\theta+\omega\cos\theta\sin\varphi\Big]-\Big[(\dot\varphi+\omega)^2\sin\theta\cos\theta \\
&\quad-\omega\dot\theta\sin\theta\sin\varphi+\omega(\dot\varphi+\omega)\cos\theta\cos\varphi+\frac{g}{R}\sin\theta\Big]=0\,.
\end{aligned}
$$

B) Intanto notiamo che, dato che il sistema di riferimento mobile è solidale con la sfera, le eventuali posizioni di equlibrio relativo corrispondono a moti per cui φ e θ si mantengono costanti.
Sostituendo $\varphi=\varphi_0$, $\theta=\theta_0$ nelle equazioni di Lagrange, si ottiene

$$\sin\theta_0\cos\varphi_0=0\,, \tag{1}$$

$$\omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0+\omega^2\cos\theta_0\cos\varphi_0+\frac{g}{R}\sin\theta_0=0\,. \tag{2}$$

Per (1), poiché $\sin\theta_0>0$ per $\theta_0\in(0,\pi)$, deve essere

$$\sin\varphi_0=0\,,\qquad \textit{cioè}\qquad \varphi_0=0\,.$$

Dunque da (2) si ha

$$\omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0+\omega^2\cos\theta_0+\frac{g}{R}\sin\theta_0=0\,.$$

R.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[2(\dot\varphi+\omega)\sin^2\theta+2\omega\sin\theta\cos\varphi\Big] \\
&\quad-\Big[2\omega\dot\theta\cos\theta\cos\varphi-2\omega(\dot\varphi+\omega)\sin\theta\sin\varphi\Big]=0\,, \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\dot\theta+\omega\cos\theta\sin\varphi\Big]-\Big[(\dot\varphi+\omega)^2\sin\theta\cos\theta \\
&\quad-\omega\dot\theta\sin\theta\sin\varphi+\omega(\dot\varphi+\omega)\cos\theta\cos\varphi+\frac{g}{R}\sin\theta\Big]=0\,.
\end{aligned}
$$

L'unica posizione di equilibrio relativo è data da $(\varphi,\theta)=(0,\theta_0)$ ove θ_0 risolve

$$\omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0+\omega^2\cos\theta_0+\frac{g}{R}\sin\theta_0=0\,,\qquad 0<\theta_0<\pi\,.$$

29. [12/9/2008 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla sfera mobile

$$(x_1-L\cos\omega t)^2+x_2^2+(x_3-L\sin\omega t)^2=L^2\,,$$

ove $L>0$ e $\omega>0$ sono costanti.
Su P agisce la forza peso

$$\boldsymbol{F}=-mg\boldsymbol{e}_2\,.$$

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Dimostrare che esiste per P una unica posizione di equilibrio relativo al sistema di riferimento mobile $(C, \boldsymbol{u}_i)$, ove C è il centro della sfera, e

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{OC}}{L} , \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3 .$$

R.

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[2(\dot\varphi+\omega)\sin^2\theta + 2\omega\sin\theta\cos\varphi\Big] \\ &\quad - \Big[2\omega\dot\theta\cos\theta\cos\varphi - 2\omega(\dot\varphi+\omega)\sin\theta\sin\varphi\Big] = 0 , \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\dot\theta + \omega\cos\theta\sin\varphi\Big] - \Big[(\dot\varphi+\omega)^2\sin\theta\cos\theta \\ &\quad - \omega\dot\theta\sin\theta\sin\varphi + \omega(\dot\varphi+\omega)\cos\theta\cos\varphi + \frac{g}{L}\sin\theta\Big] = 0 . \end{aligned}$$

L'unica posizione di equilibrio relativo è data da $(\varphi, \theta) = (0, \theta_0)$ *ove* θ_0 *risolve*

$$\omega^2 \sin\theta_0\cos\theta_0 + \omega^2\cos\theta_0 + \frac{g}{L}\sin\theta_0 = 0 , \qquad 0 < \theta_0 < \pi .$$

30. [12/1/2009 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$x_3 = \alpha\sin(\beta x_1) , \qquad x_1 \in \boldsymbol{R} ,$$

sul piano ruotante

$$\xi_1\sin\omega t - \xi_2\cos\omega t = 0 .$$

Qui α, β, ω sono costanti positive, $(O, \boldsymbol{e}_i)$ è il sistema di riferimento fisso, con coordinate ξ_i, e $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ è il sistema di riferimento mobile solidale con il piano ruotante, con coordinate x_i. $\mathcal{S}$ è scelto in modo che $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t, e che $\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{u}_2(0) = \boldsymbol{e}_2$, per $t = 0$.
Sul punto agisce il peso, diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.
- Supponendo che il punto parta da fermo nell'origine O, dimostrare che si ha $x_1(t) < 0$ almeno per un intervallo opportuno $(0, \bar t)$.

Soluzione
Scegliamo come coordinata lagrangiana

$$x = x_1 \in \boldsymbol{R} .$$

Nel sistema di riferimento mobile sul punto agiscono, oltre al peso, le forze apparenti $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ *e* $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$*. Tuttavia si sa che la componente lagrangiana di* $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$ *è nulla, perché* P *è vincolato a una curva. Inoltre*

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -m\boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\overrightarrow{OP}) = m\omega^2 x_1\boldsymbol{u}_1 ,$$

dato che la velocità angolare di $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ *è*

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{u}_3 .$$

Perciò si ha che il sistema di forze è conservativo, con potenziale

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} m\omega^2 x_1^2 - mgx_3 .$$

Dunque il potenziale lagrangiano sarà

$$U^{\mathrm{L}}(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - mg\alpha \sin(\beta x) .$$

La lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 (1 + \alpha^2\beta^2 \cos^2(\beta x)) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - mg\alpha \sin(\beta x) .$$

L'equazione di Lagrange dunque è

$$m\ddot{x}(1 + \alpha^2\beta^2 \cos^2(\beta x)) = -\frac{1}{2} m\dot{x}^2 \alpha^2\beta^3 \sin(2\beta x) + m[\omega^2 x - \alpha\beta g \cos(\beta x)] .$$

Dall'equazione di Lagrange, insieme con i dati iniziali

$$x(0) = 0 \, , \dot{x}(0) = 0 \, ,$$

si ricava

$$\ddot{x}(0) = -\frac{\alpha\beta}{1 + \alpha^2\beta^2} g < 0 .$$

Dunque deve essere $\dot{x}(t) < 0$ *in un intervallo opportuno, e di conseguenza anche* $x(t) < 0$.
R.

$$m\ddot{x}(1 + \alpha^2\beta^2 \cos^2(\beta x)) = -\frac{1}{2} m\dot{x}^2 \alpha^2\beta^3 \sin(2\beta x) + m[\omega^2 x - \alpha\beta g \cos(\beta x)] .$$

31. [12/1/2009 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere l'estremo A sull'asse fisso x_1, e a giacere sul piano verticale $x_3 = 0$. Inoltre l'estremo A è soggetto al vincolo

$$x_{1A} = \frac{\alpha}{2} t^2 ,$$

con $\alpha > 0$ costante.
Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_2.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Supponendo $\alpha = g$, tracciare il diagramma di fase del moto.

SOLUZIONE

Introduciamo la coordinata lagrangiana φ*, data dall'angolo formato da* $\overrightarrow{AB}$ *e da* $\boldsymbol{e}_1$*: l'asta risulta quindi parametrizzata da*

$$\overrightarrow{AP}(s) = s\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + s\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,, \qquad 0 \le s \le 2L\,,$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$*.*
Nel sistema di riferimento mobile $(A, \boldsymbol{e}_i)$ *l'asta risulta soggetta al peso e alla forza di trascinamento*

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -\frac{m}{2L}\boldsymbol{a}_A\,\mathrm{d}s = -\frac{m}{2L}\alpha\boldsymbol{e}_1\,\mathrm{d}s\,.$$

Dunque possiamo scrivere la distribuzione di potenziale

$$\mathrm{d}U = -mgx_{2C}\delta_C - \frac{m}{2L}\alpha x_1\,\mathrm{d}s\,,$$

ove C *è il centro dell'asta. Perciò*

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -mgL\sin\varphi - \int_0^{2L}\frac{m}{2L}\alpha s\cos\varphi\,\mathrm{d}s = -mgL\sin\varphi - m\alpha L\cos\varphi\,.$$

La lagrangiana perciò è

$$\mathcal{L}(\varphi,\dot\varphi) = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 - mgL\sin\varphi - m\alpha L\cos\varphi\,,$$

ove I *è il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse ad essa ortogonale passante per* A*.*
Dunque l'equazione di moto è

$$I\ddot\varphi + mgL\cos\varphi - m\alpha L\sin\varphi = 0\,.$$

Per tracciare il diagramma nel piano delle fasi, nell'ipotesi $\alpha = g$ *conviene riscrivere il potenziale così:*

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -mgL(\sin\varphi+\cos\varphi) &= -\sqrt{2}mgL(\cos\frac{\pi}{4}\sin\varphi + \sin\frac{\pi}{4}\cos\varphi) \\ &= -\sqrt{2}mgL\sin\Big(\varphi+\frac{\pi}{4}\Big)\,. \end{aligned}$$

Le orbite nel piano delle fasi dunque si ottengono da

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\Big[E + U^{\mathrm{L}}(\varphi)\Big]} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\Big[E - \sqrt{2}mgL\sin\Big(\varphi+\frac{\pi}{4}\Big)\Big]}\,,$$

e il diagramma coincide pertanto con quello usuale del pendolo traslato di $-\pi/4$*.*
R.

$$I\ddot\varphi + mgL\cos\varphi - m\alpha L\sin\varphi = 0\,.$$

Il diagramma coincide con quello del pendolo traslato di $-\pi/4$*.*

32. [12/1/2009 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$x_3 = -\alpha\sin x_1\,, \qquad x_1 \in \boldsymbol{R}\,,$$

sul piano ruotante

$$\xi_1 \sin \omega t - \xi_2 \cos \omega t = 0 \,.$$

Qui α, ω sono costanti positive, $(O, \boldsymbol{e}_i)$ è il sistema di riferimento fisso, con coordinate ξ_i, e $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ è il sistema di riferimento mobile solidale con il piano ruotante, con coordinate x_i. $\mathcal{S}$ è scelto in modo che $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t, e che $\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{u}_2(0) = \boldsymbol{e}_2$, per $t = 0$.
Sul punto agisce il peso, diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.
- Supponendo che il punto parta da fermo nell'origine O, dimostrare che si ha $x_1(t) > 0$ almeno per un intervallo opportuno $(0, \bar{t})$.

R.

$$m\ddot{x}(1 + \alpha^2\beta^2 \cos^2(\beta x)) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2\alpha^2\beta^3 \sin(2\beta x) + m[\omega^2 x + \alpha\beta g \cos(\beta x)] \,.$$

33. [12/1/2009 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza L e massa m è vincolata ad avere l'estremo A sull'asse fisso x_1, e a giacere sul piano verticale $x_2 = 0$. Inoltre l'estremo A è soggetto al vincolo

$$x_{1A} = -\frac{\alpha}{2} t^2 \,,$$

con $\alpha > 0$ costante.
Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_3.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Supponendo $\alpha = g$, tracciare il diagramma di fase del moto.

R.

$$I\ddot{\varphi} - mgL \cos \varphi - m\alpha L \sin \varphi = 0 \,.$$

Il diagramma coincide con quello del pendolo traslato di $\pi/4$.

34. [12/2/2009 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere l'estremo A sull'ellisse ruotante

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

ove le coordinate x_i sono relative al sistema mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

L'asta è anche vincolata a giacere sul piano dell'ellisse.
Qui L, a, b sono costanti positive, e O è anche l'origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Si calcolino le componenti lagrangiane delle forze agenti sull'asta nel sistema $\mathcal{S}$.
SOLUZIONE
Parametrizzata l'ellisse come

$$x_1 = a\cos\varphi\,, \qquad x_2 = b\sin\varphi\,,$$

scegliamo come coordinate lagrangiane $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *corrispondente alla posizione di* A *(*φ *non è in genere uguale all'angolo tra* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\boldsymbol{u}_1$*), e l'angolo* $\theta \in (-\pi, \pi)$ *tra* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\boldsymbol{u}_1$.
Quindi l'asta è parametrizzata da

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta; s) = \overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}(s) = \\ (a\cos\varphi + s\cos\theta)\boldsymbol{u}_1 + (b\sin\varphi + s\sin\theta)\boldsymbol{u}_2\,,$$

e si ha

$$\boldsymbol{v}_P = (-a\dot\varphi\sin\varphi - s\dot\theta\sin\theta)\boldsymbol{u}_1 + (b\dot\varphi\cos\varphi + s\dot\theta\cos\theta)\boldsymbol{u}_2\,.$$

Sull'asta agiscono in $\mathcal{S}$ *anche le forze fittizie*

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -\frac{m}{2L}\boldsymbol{\omega} \wedge \big(\boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}\big)\,\mathrm{d}s = -\frac{m}{2L}\omega^2 \boldsymbol{u}_3 \wedge \big(\boldsymbol{u}_3 \wedge \overrightarrow{OP}\big)\,\mathrm{d}s = \frac{m}{2L}\omega^2\overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}s\,,$$

e

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} = -2\frac{m}{2L}\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_P = \frac{m}{L}\omega\big[(b\dot\varphi\cos\varphi + s\dot\theta\cos\theta)\boldsymbol{u}_1 + (a\dot\varphi\sin\varphi + s\dot\theta\sin\theta)\boldsymbol{u}_2\big]\,.$$

Dunque

$$F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}\varphi} = \int_0^{2L} \frac{m}{2L}\omega^2 \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta; s) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta; s)}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}s$$
$$F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}\theta} = \int_0^{2L} \frac{m}{2L}\omega^2 \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta; s) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta; s)}{\partial\theta}\,\mathrm{d}s\,,$$

e in modo analogo si calcolano $F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{C}\varphi}$ *e* $F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{C}\theta}$.
R.

$$\begin{aligned} F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}\varphi} &= m\omega^2\big[(b^2 - a^2)\cos\varphi\sin\varphi - 2aL\cos\theta\sin\varphi + 2bL\sin\theta\cos\varphi\big]\,, \\ F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}\theta} &= mL\omega^2[-a\cos\varphi\sin\theta + b\cos\theta\sin\varphi]\,, \\ F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{C}\varphi} &= 2mL\omega\dot\theta[-a\cos\theta\sin\varphi + b\cos\varphi\sin\theta]\,, \\ F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{C}\theta} &= 2mL\omega\dot\varphi[a\cos\theta\sin\varphi - b\cos\varphi\sin\theta]\,. \end{aligned}$$

35. [12/2/2009 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere il centro C sull'ellisse ruotante

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

ove le coordinate x_i sono relative al sistema mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, con

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

L'asta è anche vincolata a giacere sul piano dell'ellisse.
Qui L, a, b sono costanti positive, e O è anche l'origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Si calcolino le componenti lagrangiane delle forze agenti sull'asta nel sistema $\mathcal{S}$.
R.

$$\begin{aligned}
F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}\varphi} &= m\omega^2(b^2 - a^2)\cos\varphi \sin\varphi\,, \\
F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}\theta} &= 0\,, \\
F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{C}\varphi} &= 0\,, \\
F^{\mathrm{L}}_{\mathrm{C}\theta} &= 0\,.
\end{aligned}$$

36. [11/9/2009 (ex)I] Un punto P di massa M è vincolato alla superficie mobile liscia data, nel sistema di riferimento fisso (O, x_i), da

$$S(t) = \big\{(r\cos(\varphi+\omega t), r\sin(\varphi+\omega t), \alpha r^2 \sin(2\varphi+\omega t)) \mid r > 0\,, \varphi \in (-\pi, \pi)\big\}\,.$$

Qui $\omega > 0$ e $\alpha > 0$ sono costanti.
Sul punto agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_3.

- Scrivere la lagrangiana del punto.
- Scrivere i dati iniziali per le coordinate lagrangiane corrispondenti a:
  - velocità iniziale diretta lungo $\boldsymbol{e}_3$;
  - $x_1(0) = \rho_0 > 0$, $x_2(0) = 0$.

Soluzione
A) Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$\rho \in (0, \infty)\,, \qquad \theta \in (-\pi, \pi)\,,$$

tali che

$$\overrightarrow{OP} = \rho\cos(\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_1 + \rho\sin(\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_2 + \alpha\rho^2 \sin(2\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_3\,.$$

La velocità di P è dunque

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \dot\rho[\cos(\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_2 + 2\alpha\rho\sin(2\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_3] \\
&\quad + (\dot\theta + \omega)\rho[-\sin(\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_2] + \alpha(2\dot\theta + \omega)\rho^2\cos(2\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_3\,, \quad (1)
\end{aligned}$$

da cui

$$|\boldsymbol{v}|^2 = \dot\rho^2 + (\dot\theta+\omega)^2\rho^2 + 4\rho^2\dot\rho^2\alpha^2\sin^2(2\theta+\omega t) \\ + (2\dot\theta+\omega)^2\rho^4\alpha^2\cos^2(2\theta+\omega t) + 2(2\dot\theta+\omega)\alpha^2\rho^3\dot\rho\sin(4\theta+2\omega t)\,.$$

Inoltre il potenziale della forza peso è

$$U(x_1,x_2,x_3) = -mgx_3\,,$$

e dunque in coordinate lagrangiane

$$U^{\mathrm{L}}(\rho,\theta,t) = -mg\alpha\rho^2\sin(2\theta+\omega t)\,.$$

B) Dalla (1) *segue che per*

$$\rho(0)=\rho_0\,,\quad \theta(0)=0\,,\qquad \dot\rho(0)=0\,,\quad \dot\theta(0)=-\omega\,,$$

si ha in effetti

$$\boldsymbol{v}(0) = -\alpha\omega\rho_0^2\boldsymbol{e}_3\,.$$

R.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big\{\dot\rho^2 + (\dot\theta+\omega)^2\rho^2 + 4\rho^2\dot\rho^2\alpha^2\sin^2(2\theta+\omega t) \\ + (2\dot\theta+\omega)^2\rho^4\alpha^2\cos^2(2\theta+\omega t) + 2(2\dot\theta+\omega)\alpha^2\rho^3\dot\rho\sin(4\theta+2\omega t)\Big\}\cdot \\ - mg\alpha\rho^2\sin(2\theta+\omega t)$$

Dati iniziali:

$$\rho(0)=\rho_0\,,\quad \theta(0)=0\,,\qquad \dot\rho(0)=0\,,\quad \dot\theta(0)=-\omega\,.$$

37. [11/9/2009 (ex)II] Un punto P di massa M è vincolato alla superficie mobile liscia data, nel sistema di riferimento fisso (O,x_i), da

$$S(t) = \big\{(r\sin(\varphi+\omega t), r\cos(\varphi+\omega t), \alpha r^2\sin(2\varphi+\omega t)) \mid r>0\,,\varphi\in(-\pi,\pi)\big\}\,.$$

Qui $\omega>0$ e $\alpha>0$ sono costanti.
Sul punto agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_3.

- Scrivere la lagrangiana del punto.
- Scrivere i dati iniziali per le coordinate lagrangiane corrispondenti a:
  - velocità iniziale diretta lungo $\boldsymbol{e}_3$;
  - $x_1(0)=0$, $x_2(0)=\rho_0>0$.

R.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big\{ & \dot\rho^2 + (\dot\theta+\omega)^2\rho^2 + 4\rho^2\dot\rho^2\alpha^2\sin^2(2\theta+\omega t) \\
& + (2\dot\theta+\omega)^2\rho^4\alpha^2\cos^2(2\theta+\omega t) + 2(2\dot\theta+\omega)\alpha^2\rho^3\dot\rho\sin(4\theta+2\omega t)\Big\} \cdot \\
& - mg\alpha\rho^2\sin(2\theta+\omega t)
\end{aligned}
$$

Dati iniziali:

$$
\rho(0)=\rho_0\,, \quad \theta(0)=0\,, \qquad \dot\rho(0)=0\,, \quad \dot\theta(0)=-\omega\,.
$$

38. [20/11/2009 (ex)I] Un'asta di massa M e lunghezza $2R$ è vincolata a giacere sul piano $x_3=0$, e ad avere l'estremo A mobile con legge assegnata

$$
\overrightarrow{OA} = L\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1\,,
$$

ove $(O,\boldsymbol{e}_i)$ è il sistema fisso e $L>0$, $\alpha>0$ sono costanti.
Sull'asta agiscono il peso, diretto nel verso negativo dell'asse x_2, e la forza elastica

$$
\boldsymbol{F}_B = -k\overrightarrow{OB}\,,
$$

ove $k>0$ è costante.
Scrivere le equazioni di Lagrange dell'asta.
Soluzione
L'asta ha un solo grado di libertà. Scegliamo come coordinata lagrangiana l'angolo $\varphi\in(-\pi,\pi)$ tale che

$$
\overrightarrow{AB} = 2R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + 2R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.
$$

L'energia cinetica dell'asta è, per il teorema di König,

$$
T = \frac{1}{2}M\left|\boldsymbol{v}_G\right|^2 + T_{\mathcal{S}}\,,
$$

ove $\mathcal{S}=(G,\boldsymbol{e}_i)$ e G è il centro di massa dell'asta. Si ha

$$
\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = (L\cos\alpha t + R\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,
$$

da cui

$$
\boldsymbol{v}_G = (-L\alpha\sin\alpha t - R\dot\varphi\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 + R\dot\varphi\cos\varphi\boldsymbol{e}_2\,.
$$

Dunque

$$
\left|\boldsymbol{v}_G\right|^2 = R^2\dot\varphi^2 + L^2\alpha^2\sin^2\alpha t + 2RL\alpha\sin\alpha t\sin\varphi\,.
$$

Poi, visto che il moto in $\mathcal{S}$ è una rotazione,

$$
T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2\,,
$$

ove I è il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un'asse ortogonale in G.

Le forze sono conservative. Il potenziale della forza peso è

$$U_p = -Mgx_{2G} = -MgR\sin\varphi\,,$$

e quello della forza elastica è

$$U_e = -\frac{k}{2}\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = -\frac{k}{2}\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right|^2 = \\ -\frac{k}{2}(L^2\cos^2\alpha t + 4LR\cos\alpha t\cos\varphi + 4R^2)\,.$$

Dunque

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2}M(R^2\dot\varphi^2 + L^2\alpha^2\sin^2\alpha t + 2RL\alpha\sin\alpha t\sin\varphi) \\ + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 - MgR\sin\varphi - \frac{k}{2}(L^2\cos^2\alpha t + 4LR\cos\alpha t\cos\varphi + 4R^2)\,.$$

L'equazione di Lagrange è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[MR^2\dot\varphi + MLR\alpha\sin\alpha t\sin\varphi + I\dot\varphi\Big] \\ - MLR\alpha\dot\varphi\sin\alpha t\cos\varphi + MgR\cos\varphi - 2kLR\cos\alpha t\sin\varphi = 0\,.$$

R.

$$(MR^2 + I)\ddot\varphi + MLR\alpha^2\cos\alpha t\sin\varphi + MgR\cos\varphi - 2kLR\cos\alpha t\sin\varphi = 0\,.$$

39. [25/1/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato al piano ruotante

$$\mathit{\Pi}(t): \qquad -x_1\sin\omega t + x_2\cos\omega t = 0\,,$$

ed è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_2\,.$$

All'istante iniziale si ha

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \omega R\boldsymbol{e}_2 + \beta\boldsymbol{e}_3\,.$$

Trovare una condizione sulle costanti positive ω, m, R, α, β che garantisca che $x_{2P} > 0$ per $0 < t < \pi/\omega$.

Soluzione

Scegliamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_1)$, solidale con il piano $\mathit{\Pi}(t)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\omega t\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Denotiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$. Dunque $\Pi(t)$ ha equazione in $\mathcal{S}$ data da $y_2 = 0$. Inoltre la velocità angolare di $(\boldsymbol{u}_i)$ è

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{u}_3 = \omega \boldsymbol{e}_3 .$$

Scegliamo $(y_1, y_3) \in \boldsymbol{R}^2$ come coordinate lagrangiane di P.
Su P agiscono in $\mathcal{S}$, oltre alla forza peso, le forze fittizie. Tuttavia la forza di Coriolis ha come è noto componenti lagrangiane nulle, in questo caso particolare. Inoltre

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = m\omega^2 \left[\overrightarrow{OP}\right]_{\perp} = m\omega^2 y_1 \boldsymbol{u}_1 ,$$

ed è perciò conservativa di potenziale

$$U_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2} m\omega^2 y_1^2 .$$

La forza peso è

$$\boldsymbol{F}_p = -mg\boldsymbol{e}_2 = -mg(\sin\omega t \boldsymbol{u}_1 + \cos\omega t \boldsymbol{u}_2) ,$$

ed ha perciò potenziale

$$U_p = -mg(y_1 \sin\omega t + y_2 \cos\omega t) .$$

Dunque la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 y_1^2 - mgy_1 \sin\omega t .$$

Le equazioni di Lagrange sono

$$m\ddot{y}_1 - (m\omega^2 y_1 - mg\sin\omega t) = 0 ,$$
$$m\ddot{y}_3 = 0 .$$

Per la geometria del problema, nell'intervallo di tempo $(0, \pi/\omega)$ si ha $x_{2P} > 0$ se e solo se $y_1 > 0$. Il problema ai valori iniziali per y_1 è

$$\ddot{y}_1 - \omega^2 y_1 = -g\sin\omega t , \qquad y_1(0) = R , \qquad \dot{y}_1 = \alpha ,$$

che ha soluzione

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\Big(R - \frac{\alpha}{\omega} + \frac{g}{2\omega^2}\Big)e^{-\omega t} + \frac{1}{2}\Big(R + \frac{\alpha}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2}\Big)e^{\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t .$$

Dato che

$$\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t > 0 , \qquad 0 < t < \frac{\pi}{\omega} ,$$

basterà avere ad esempio

$$R > \frac{|\alpha|}{\omega} + \frac{g}{2\omega^2} .$$

R.

$$R > \frac{|\alpha|}{\omega} + \frac{g}{2\omega^2} .$$

40. [25/1/2010 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato al piano ruotante

$$\Pi(t): \qquad -x_1 \sin \omega t + x_2 \cos \omega t = 0\,,$$

ed è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_1\,.$$

All'istante iniziale si ha

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \omega R\boldsymbol{e}_2 + \beta\boldsymbol{e}_3\,.$$

Trovare una condizione sulle costanti positive ω, m, R, α, β che garantisca che $x_{2P} > 0$ per $0 < t < \pi/\omega$.
R.

$$R > \frac{|\alpha|}{\omega} + \frac{3g}{2\omega^2}\,.$$

41. [8/7/2010 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato a un piano mobile $\Pi(t)$ che ruota intorno a un suo asse r orizzontale con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$. Supponiamo che r coincida con l'asse fisso x_1 e che $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_1$. Sul punto agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{P'P}\,,$$

ove P' è la proiezione ortogonale di P su r. Qui k e ω sono costanti positive.

1. Scrivere le equazioni di moto.
2. Determinare le condizioni iniziali per cui il moto è periodico, sapendo che all'istante iniziale Π è orizzontale.

Soluzione

Consideriamo un sistema di riferimento $(O, \boldsymbol{u}_i)$ solidale con Π, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 \perp \Pi\,.$$

Denotiamo

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2\,,$$

e scegliamo $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ come coordinate lagrangiane.
La forza peso dà luogo a un potenziale

$$U^{\mathrm{L}}_{\text{peso}} = -mgx_{3P} = -mgy\sin(\omega t)\,.$$

La forza elastica, che si esprime come,

$$\boldsymbol{F} = -ky\boldsymbol{u}_2\,,$$

ha potenziale

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{el}} = -\frac{1}{2}ky^2\,.$$

La forza di trascinamento

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -m\boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\overrightarrow{OP}) = m\omega^2 y\boldsymbol{u}_2$$

ha potenziale

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2\,.$$

Infine, come è noto, in questo caso la forza di Coriolis non contribuisce all'equazione di moto.
Dunque la Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - mgy\sin(\omega t) - \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2\,.$$

1) Le equazioni di moto sono dunque

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0\,,\\ m\ddot{y} + mg\sin(\omega t) - (m\omega^2 - k)y &= 0\,. \end{aligned}$$

2) Poniamo

$$x(0)=x_0\,,\quad y(0)=y_0\,,\quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0\,,\quad \dot{y}(0)=\dot{y}_0\,.$$

Si ha

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t\,,$$

per cui una soluzione periodica è possibile solo se intanto

$$\dot{x}_0 = 0\,.$$

Riscriviamo la seconda equazione di moto come

$$\ddot{y} - \alpha y = -g\sin(\omega t)\,,\qquad \alpha := \omega^2 - km^{-1}\,.$$

Distinguiamo i tre casi:
i) $\alpha > 0$. Si ottiene che l'integrale generale della e.d.o. è dato da

$$y(t) = k_1 e^{\beta t} + k_2 e^{-\beta t} + \frac{g}{\omega^2+\alpha}\sin(\omega t)\,,\qquad \beta := \sqrt{\alpha}\,.$$

Per avere una soluzione periodica occorre e basta che $k_1 = k_2 = 0$, ossia

$$y_0 = 0\,,\qquad \dot{y}_0 = \frac{g\omega}{\omega^2+\alpha}\,.$$

ii) $\alpha = 0$. Si ottiene che l'integrale generale della e.d.o. è dato da

$$y(t) = k_1 + k_2 t + \frac{g}{\omega^2}\sin(\omega t)\,.$$

Di nuovo occorre e basta che $k_2 = 0$, ossia

$$\dot{y}_0 = \frac{g}{\omega}\,.$$

iii) $\alpha < 0$. *a)* $\omega^2 \neq \mu^2$. *Si ottiene che l'integrale generale della e.d.o. è dato da*

$$y(t) = k_1 \cos(\mu t) + k_2 \sin(\mu t) + \frac{g}{\omega^2 + \alpha} \sin(\omega t) , \qquad \mu := \sqrt{-\alpha} .$$

Se μ/ω *è un numero razionale, tutte le soluzioni sono periodiche. Se* μ/ω *non è un numero razionale, occorre e basta che* $k_1 = k_2 = 0$, *ossia*

$$y_0 = 0 , \qquad \dot{y}_0 = \frac{g\omega}{\omega^2 + \alpha} .$$

b) $\omega^2 = \mu^2$. *In questo caso, quando cioè* $2\omega^2 = k/m$, *l'integrale generale della e.d.o. è dato da*

$$y(t) = k_1 \cos(\mu t) + k_2 \sin(\mu t) + \frac{g}{2\omega} t \cos(\omega t) , \qquad \mu := \sqrt{-\alpha} ,$$

e le soluzioni non sono mai periodiche.
R. *Equazioni di moto:*

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 , \\ m\ddot{y} + mg \sin(\omega t) - (m\omega^2 - k)y &= 0 . \end{aligned}$$

Condizioni per la periodicità delle soluzioni:

$2\omega^2 = km^{-1}$,	*mai periodiche;*
$\omega^{-1}\sqrt{km^{-1} - \omega^2} \in \boldsymbol{Q}$,	*sempre periodiche;*
$\omega^2 = km^{-1}$,	$\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = g\omega^{-1}$;
altrimenti	$\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = g\omega(2\omega^2 - km^{-1})^{-1}$.

42. [7/9/2010 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato a una circonferenza γ di raggio R, che è vincolata a sua volta a ruotare intorno al suo diametro verticale AB. I punti A e B sono sia fissi che solidali con γ.
La velocità di rotazione di γ è assegnata come

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t) \frac{\overrightarrow{AB}}{2R} ,$$

con $\omega \in C^1(\boldsymbol{R})$.
Scrivere l'equazione di moto del punto.
Soluzione
Scegliamo come coordinata lagrangiana

$$\varphi \in (-\pi, \pi) ,$$

in modo che

$$\overrightarrow{OP} = R \cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + R \sin\varphi \boldsymbol{u}_3 ,$$

se $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_i))$ *è un sistema di riferimento solidale con la circonferenza, con*

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2R} ,$$

e O coincidente con il centro di γ.
Su P, nel sistema $\mathcal{S}$, agiscono il peso

$$-mg\boldsymbol{u}_3\,,$$

e la forza di trascinamento

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -m[\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overrightarrow{OP} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})] = m[\omega^2 R \cos\varphi \boldsymbol{u}_1 - \dot{\omega} R \cos\varphi \boldsymbol{u}_2]\,.$$

Dato che la forza di Coriolis, come è noto, ha in questo caso componente lagrangiana nulla, si ha dunque

$$\begin{aligned} F_\varphi^{\mathrm{L}} = \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} \cdot [-mg\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}] &= R[-\sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{u}_2] \cdot [-mg\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}] \\ &= -mgR\cos\varphi - m\omega^2 R^2 \sin\varphi\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

Dato che in $\mathcal{S}$

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}|^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2\,,$$

si ha l'equazione di Lagrange

$$mR^2\ddot{\varphi} = -mgR\cos\varphi - m\omega^2 R^2 \sin\varphi\cos\varphi\,.$$

R.

$$\ddot{\varphi} = -gR^{-1}\cos\varphi - \omega^2 \sin\varphi\cos\varphi\,.$$

660. Equazioni di Lagrange: equilibrio

1. [15/12/2005 (ex)I] Un punto materiale di massa m, soggetto a vincoli lisci e fissi, si muove con lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \big(L^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\psi}^2\big) + k\cos(\varphi+\psi) - h\sin\varphi\,.$$

Qui $\varphi \in (0,\pi)$ e $\psi \in (0,\pi)$ sono le coordinate lagrangiane e L, R, k e h sono costanti positive.
Studiare le posizioni di equilibrio del punto e la loro stabilità.
Soluzione
Il potenziale è

$$U(\varphi,\psi) = k\cos(\varphi+\psi) - h\sin\varphi\,.$$

Le posizioni di equilibrio sono date da

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= -k\sin(\varphi+\psi) - h\cos\varphi = 0\,, \\ \frac{\partial U}{\partial \psi} &= -k\sin(\varphi+\psi) = 0\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\cos\varphi = 0\,,$$

per cui $\varphi = \pi/2$, *e*

$$\varphi + \psi = n\pi\,, \qquad n \in \boldsymbol{Z}\,.$$

Dato però che deve essere

$$0 < \varphi + \psi < 2\pi\,,$$

deve essere $n = 1$, *e*

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \psi = \frac{\pi}{2}\,,$$

risulta l'unica posizione di equilibrio.
Per studiarne la stabilità, calcoliamo l'Hessiana

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} &= -k\cos(\varphi+\psi) + h\sin\varphi\,,\\
\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi\partial\psi} &= -k\cos(\varphi+\psi)\,,\\
\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2} &= -k\cos(\varphi+\psi)\,.
\end{aligned}$$

Per cui

$$D^2 U\Big(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} k+h & k \\ k & k \end{pmatrix}\,,$$

che è definita positiva. Pertanto la posizione di equilibrio corrisponde a un punto di minimo per il potenziale, ed è quindi instabile.
R. *L'unica posizione di equilibrio è* $(\varphi,\psi) = (\pi/2,\pi/2)$, *che è instabile.*

2. [7/7/2006 (ex)I] Consideriamo un sistema a vincoli olonomi lisci e fissi, la cui lagrangiana sia

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\alpha\dot\theta^2 + \beta\dot\psi^2) - k(e^{\psi-\theta} - \cos\psi + \frac{\theta}{2})\,,$$

ove α, β, k sono costanti positive, e

$$-\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\,, \qquad -\pi < \psi < \pi\,.$$

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
Soluzione
Il potenziale è

$$U(\theta,\psi) = -k(e^{\psi-\theta} - \cos\psi + \frac{\theta}{2})\,,$$

da cui

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial\theta} &= ke^{\psi-\theta} - \frac{k}{2}\,,\\
\frac{\partial U}{\partial\psi} &= -ke^{\psi-\theta} - k\sin\psi\,.
\end{aligned}$$

Uguagliando a zero entrambe le derivate, si ottiene

$$\psi - \theta = -\ln 2, ,$$
$$\sin\psi = -\frac{1}{2}.$$

Tenuto conto degli intervalli di variazione di θ e ψ si trovano le due soluzioni

$$\theta = -\frac{\pi}{6} + \ln 2, \qquad \psi = -\frac{\pi}{6},$$

e

$$\theta = -\frac{5\pi}{6} + \ln 2, \qquad \psi = -\frac{5\pi}{6}.$$

Per studiare la stabilità di queste due posizioni di equilibrio calcoliamo l'Hessiana D^2U del potenziale:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = -ke^{\psi-\theta},$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial\psi} = ke^{\psi-\theta},$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2} = -ke^{\psi-\theta} - k\cos\psi.$$

Dunque:

$$D^2U\Big(-\frac{5\pi}{6} + \ln 2, -\frac{5\pi}{6}\Big) = k\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$\det D^2U\Big(-\frac{5\pi}{6} + \ln 2, -\frac{5\pi}{6}\Big) = -k^2\frac{\sqrt{3}}{4} < 0,$$

l'Hessiana non è definita in

$$\Big(-\frac{5\pi}{6} + \ln 2, -\frac{5\pi}{6}\Big),$$

e quindi questo punto non è di equilibrio stabile.
Inoltre:

$$D^2U\Big(-\frac{\pi}{6} + \ln 2, -\frac{\pi}{6}\Big) = k\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$\det D^2U\Big(-\frac{\pi}{6} + \ln 2, -\frac{\pi}{6}\Big) = k^2\frac{\sqrt{3}}{4} > 0,$$

l'Hessiana è definita in

$$\Big(-\frac{\pi}{6} + \ln 2, -\frac{\pi}{6}\Big),$$

e in particolare è definita negativa, poiché gli elementi della diagonale principale sono negativi. Quindi il punto è di equilibrio stabile.
R.

$$(\theta, \psi) = \Big(-\frac{5\pi}{6} + \ln 2, -\frac{5\pi}{6}\Big), \qquad \textit{equilibrio instabile;}$$
$$(\theta, \psi) = \Big(-\frac{\pi}{6} + \ln 2, -\frac{\pi}{6}\Big), \qquad \textit{equilibrio stabile.}$$

3. [7/7/2006 (ex)II] Consideriamo un sistema a vincoli olonomi lisci e fissi, la cui lagrangiana sia

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\alpha\dot{\theta}^2 + \beta\dot{\varphi}^2) - k(e^{\varphi-\theta} - \cos\varphi + \frac{\theta}{2}) \, ,$$

ove α, β, k sono costanti positive, e

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2} \, , \qquad 0 < \varphi < 2\pi \, .$$

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
R.

$$(\theta, \psi) = \Big(\frac{7\pi}{6} + \ln 2, \frac{7\pi}{6}\Big) \, , \qquad \textit{equilibrio instabile;}$$
$$(\theta, \psi) = \Big(\frac{11\pi}{6} + \ln 2, \frac{11\pi}{6}\Big) \, , \qquad \textit{equilibrio stabile.}$$

4. [19/7/2006 (ex)I] Consideriamo un sistema a vincoli olonomi lisci e fissi, la cui lagrangiana sia

$$\mathcal{L} = (1 + \theta^2)\dot{\theta}^2 + 3\dot{\varphi}^2 - 4k\big(\cos(\theta - \varphi) + \varphi^3 - \varphi^2\big) \, ,$$

ove k è una costante positiva, e

$$-1 < \theta < 1 \, , \qquad -1 < \varphi < 1 \, .$$

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
Soluzione
Il potenziale è

$$U(\theta, \varphi) = -4k\big(\cos(\theta - \varphi) + \varphi^3 - \varphi^2\big) \, ,$$

da cui

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 4k \sin(\theta - \varphi) \, ,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = -4k\big(\sin(\theta - \varphi) + 3\varphi^2 - 2\varphi\big) \, .$$

Uguagliando a zero entrambe le derivate, si ottiene

$$\sin(\theta - \varphi) = 0 \, ,$$
$$\sin(\theta - \varphi) + 3\varphi^2 - 2\varphi = 0 \, .$$

Tenuto conto degli intervalli di variazione di θ e φ si trovano le due soluzioni

$$\theta = 0 \, , \qquad \varphi = 0 \, ,$$

e

$$\theta = \frac{2}{3}\,, \qquad \psi = \frac{2}{3}\,.$$

Per studiare la stabilità di queste due posizioni di equilibrio calcoliamo l'Hessiana D^2U del potenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} &= 4k\cos(\theta-\varphi)\,, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} &= -4k\cos(\theta-\varphi)\,, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} &= 4k\big(\cos(\theta-\varphi) - 6\varphi + 2\big)\,. \end{aligned}$$

Dunque:

$$D^2U(0,0) = 4k\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\,,$$

che ha determinante positivo e termini diagonali positivi. Perciò $D^2U(0,0)$ è definita positiva, e $(0,0)$ risulta instabile.
Infine

$$D^2U\Big(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\Big) = 4k\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\,,$$

ha determinante negativo, quindi è indefinita e $(2/3,2/3)$ è instabile.
R.

$$\begin{aligned} (\theta,\varphi) &= (0,0)\,, && \textit{equilibrio instabile;} \\ (\theta,\varphi) &= \Big(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\Big)\,, && \textit{equilibrio instabile.} \end{aligned}$$

5. [19/7/2006 (ex)II] Consideriamo un sistema a vincoli olonomi lisci e fissi, la cui lagrangiana sia

$$\mathcal{L} = (3+\varphi^2)\dot\theta^2 + (4+\theta^2)\dot\varphi^2 - k\big(\cos(\varphi-\theta) - 2\theta^2 + 2\theta^3\big)\,,$$

ove k è una costante positiva, e

$$-1 < \theta < 1\,, \qquad -1 < \varphi < 1\,.$$

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
R.

$$\begin{aligned} (\theta,\varphi) &= (0,0)\,, && \textit{equilibrio instabile;} \\ (\theta,\varphi) &= \Big(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\Big)\,, && \textit{equilibrio instabile.} \end{aligned}$$

6. [13/12/2006 (ex)I] Un'asta AB di massa m e lunghezza R è vincolata in modo che A abbia coordinate

$$\big(L\cos(\omega t), L\sin(\omega t), 0\big)\,,$$

nel sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Sull'asta agisce il peso, diretto nel verso negativo dell'asse x_3.
Si scrivano le equazioni che determinano le posizioni di equilibrio di AB relative al sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ove $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t, e che ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_3$; in particolare

$$\overrightarrow{OA} = L\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

SOLUZIONE

In $\mathcal{S}$, su AB agiscono la forza peso e le forze di trascinamento e di Coriolis. Tuttavia quest'ultima si annulla all'equilibrio. Quindi l'equilibrio può essere studiato mediante il potenziale

$$U = U_{\text{peso}} + U_{\text{T}}\,.$$

Sia C il punto medio dell'asta; allora, se indichiamo

$$\overrightarrow{OC} = x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2 + z\boldsymbol{u}_3\,,$$

vale

$$U_{\text{peso}} = -mgz\,.$$

La distribuzione di forza di trascinamento è data da

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\text{T}} = -\frac{m}{R}[\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})]\,\mathrm{d}s = -\frac{m}{R}\omega^2(x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2)\,\mathrm{d}s\,.$$

Qui le x_i indicano le coordinate in $\mathcal{S}$. Dunque, per calcolare U_{T} dobbiamo integrare su AB la distribuzione di potenziale

$$\frac{m}{R}\frac{\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2)\,\mathrm{d}s\,.$$

Conviene introdurre una parametrizzazione di AB in termini delle coordinate lagrangiane φ, θ, che possono essere pensate come le coordinate sferiche di B nella sfera di centro A e raggio R:

$$\overrightarrow{AP(s)} = s(\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + \cos\theta\boldsymbol{u}_3)\,, \qquad 0 \le s \le R\,.$$

ove l'intervallo di variazione di φ sarà di lunghezza 2π, e quello di θ sarà $(0, \pi)$. Quindi

$$\begin{aligned} x_1(s)^2 + x_2(s)^2 &= (L + s\cos\varphi\sin\theta)^2 + (s\sin\varphi\sin\theta)^2 \\ &= L^2 + s^2\sin^2\theta + 2Ls\cos\varphi\sin\theta\,, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} U_{\text{T}} &= \int_0^R \frac{m}{R}\frac{\omega^2}{2}[L^2 + s^2\sin^2\theta + 2Ls\cos\varphi\sin\theta]\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{m}{2R}\omega^2[L^2R + \frac{R^3}{3}\sin^2\theta + LR^2\cos\varphi\sin\theta]\,. \end{aligned}$$

Infine

$$U = -mg\frac{R}{2}\cos\theta + m\omega^2\frac{R^2}{6}\sin^2\theta + m\omega^2\frac{LR}{2}\cos\varphi\sin\theta + m\omega^2\frac{L^2}{2}\,,$$

e le equazioni cercate si trovano nella forma $U_\varphi = 0$, $U_\theta = 0$.
R.

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -m\omega^2 \frac{LR}{2} \sin\varphi \sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mg\frac{R}{2}\sin\theta + m\omega^2 \frac{R^2}{3}\sin\theta\cos\theta + m\omega^2\frac{LR}{2}\cos\varphi\cos\theta = 0\,.$$

7. [19/7/2007 (ex)I] Un sistema vincolato ha lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} mR^2(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2) - \alpha\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big)^4 + \beta\cos(\varphi - \theta)\,,$$

ove le coordinate lagrangiane sono

$$(\varphi, \theta) \in (0, \pi) \times (0, \pi)\,,$$

e α, β, m e R sono costanti positive.
Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema, studiandone la stabilità.
SOLUZIONE
Il potenziale è

$$U^{\mathrm{L}} = -\alpha\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big)^4 + \beta\cos(\varphi - \theta)\,.$$

Dunque

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = -\beta\sin(\varphi - \theta)\,, \tag{1}$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} = -4\alpha\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big)^3 + \beta\sin(\varphi - \theta)\,. \tag{2}$$

Segue che all'equilibrio

$$\sin(\varphi - \theta) = 0\,,$$

ossia, visto l'insieme di variazione delle (φ, θ),

$$\varphi = \theta\,, \qquad o \qquad \varphi = \pi - \theta\,.$$

Per la (2) *si ha dunque equilibrio se e solo se*

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}\,.$$

Inoltre

$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi^2} = -\beta\cos(\varphi - \theta)\,,$$
$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi\partial\theta} = \beta\cos(\varphi - \theta)\,,$$
$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta^2} = -12\alpha\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big)^2 - \beta\cos(\varphi - \theta)\,.$$

Quindi nel punto di equilibrio la matrice hessiana del potenziale è

$$D^2 U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ \beta & -\beta \end{pmatrix},$$

che ha determinante nullo.
Tuttavia si verifica subito che

$$U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big) = \beta \geq -\alpha\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big)^4 + \beta\cos(\varphi-\theta) = U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta),$$

e vale l'uguaglianza solo se

$$\varphi = \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Perciò $(\pi/2,\pi/2)$ *è un punto di massimo isolato per* U^{L} *e quindi è un punto di equilibrio stabile.*
R.

$$(\varphi,\theta) = \Big(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big), \qquad \textit{stabile.}$$

8. [19/7/2007 (ex)II] Un sistema vincolato ha lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} mR^2(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 + \dot\varphi\dot\theta) - \gamma\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big)^6 + \delta\cos(\theta-\varphi),$$

ove le coordinate lagrangiane sono

$$(\varphi,\theta) \in (0,\pi)\times(0,\pi),$$

e γ, δ, m e R sono costanti positive.
Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema, studiandone la stabilità.
R.

$$\Big(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big), \qquad \textit{stabile}.$$

9. [17/9/2007 (ex)I] Due aste rigide AB e CD ciascuna di lunghezza $2L$ e massa m sono sottoposte ai vincoli

- A coincide con l'origine O del sistema fisso;
- gli estremi B e C coincidono;
- le due aste giacciono sul piano $x_3 = 0$.

Sulle due aste agiscono la forza peso (diretta nel verso negativo dell'asse x_2), e una coppia di azione e reazione di forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_D = -k\overrightarrow{PD}, \qquad \boldsymbol{F}_P = -k\overrightarrow{DP},$$

ove $k > 0$ è costante, e P è il punto medio di AB ($\boldsymbol{F}_D$ [rispettivamente, $\boldsymbol{F}_P$] è applicata in D [rispettivamente, in P]).

Trovare le equazioni che danno le posizioni di equilibrio, e ricavarne che in tali posizioni il centro di massa del sistema appartiene all'asse x_2.
SOLUZIONE
Dato che tutte le forze sono conservative, troviamo le posizioni di equilibrio come punti critici del potenziale.
Scegliamo come coordinate lagrangiane gli angoli φ, e rispettivamente θ, formati da $\overrightarrow{AB}$, e rispettivamente da $\overrightarrow{CD}$, con $\boldsymbol{e}_1$, con

$$\varphi\,,\theta \in (0, 2\pi)\,.$$

Allora, se M è il punto medio di $\overrightarrow{CD}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= L(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,,\\
\overrightarrow{OD} &= 2L(\cos\varphi + \cos\theta, \sin\varphi + \sin\theta, 0)\,,\\
\overrightarrow{OM} &= L(2\cos\varphi + \cos\theta, 2\sin\varphi + \sin\theta, 0)\,.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\overrightarrow{PD} = L(\cos\varphi + 2\cos\theta, \sin\varphi + 2\sin\theta, 0)\,,$$

e

$$\begin{aligned}
U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) &= -mgL\sin\varphi - mgL(2\sin\varphi + \sin\theta)\\
&\qquad - \frac{1}{2}kL^2\left[(\cos\varphi + 2\cos\theta)^2 + (\sin\varphi + 2\sin\theta)^2\right]\\
&= -mgL(3\sin\varphi + \sin\theta) - \frac{1}{2}kL^2[5 + 4\cos(\varphi - \theta)]\,.
\end{aligned}$$

Quindi le equazioni cercate sono

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= -3mgL\cos\varphi + 2kL^2\sin(\varphi - \theta) = 0\,,\\
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= -mgL\cos\theta - 2kL^2\sin(\varphi - \theta) = 0\,.
\end{aligned}$$

Sommando le due equazioni si ha

$$3\cos\varphi + \cos\theta = 0\,,$$

e infatti il centro di massa del sistema è

$$\frac{1}{2}\big(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}\big) = \frac{L}{2}(3\cos\varphi + \cos\theta, 3\sin\varphi + \sin\theta, 0)\,.$$

R.

$$\begin{aligned}
-3mgL\cos\varphi + 2kL^2\sin(\varphi - \theta) &= 0\,,\\
-mgL\cos\theta - 2kL^2\sin(\varphi - \theta) &= 0\,.
\end{aligned}$$

10. [17/9/2007 (ex)I] Un sistema vincolato da vincoli olonomi è soggetto a forze di potenziale

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = (\theta - \pi)^2 \cos\varphi + \sin^2\varphi\,,$$

con $\theta \in (0, 2\pi)$, $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$ opportune coordinate lagrangiane.
Determinare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
Soluzione
Si tratta di impostare il sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} &= 2(\theta - \pi)\cos\varphi = 0\,,\\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= -(\theta - \pi)^2 \sin\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi = 0\,,\end{aligned}$$

che ha, nel dominio prescritto per (θ, φ) *l'unica soluzione*

$$(\theta, \varphi) = (\pi, \pi)\,.$$

La matrice hessiana è data da

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta^2} &= 2\cos\varphi\,,\\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta \partial \varphi} &= -2(\theta - \pi)\sin\varphi\,,\\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi^2} &= -(\theta - \pi)^2\cos\varphi + 2\cos 2\varphi\,,\end{aligned}$$

e quindi in (π, π) *si ha*

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(\pi, \pi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Perciò (π, π) *è un punto sella, e pertanto corrisponde a un equilibrio instabile.*
R.

$$(\theta, \varphi) = (\pi, \pi)\,, \qquad \textit{instabile.}$$

11. [17/9/2007 (ex)II] Due aste rigide AB e CD ciascuna di lunghezza $2L$ e massa m sono sottoposte ai vincoli

- A soddisfa
$$\overrightarrow{OA} = L\boldsymbol{e}_3\,,$$
ove O è l'origine del sistema fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$;
- gli estremi B e C coincidono;
- le due aste giacciono sul piano $x_2 = 0$.

Sulle due aste agiscono la forza peso (diretta nel verso negativo dell'asse x_3), e una coppia di azione e reazione di forze

$$\boldsymbol{F}_D = k\overrightarrow{PD}\,, \qquad \boldsymbol{F}_P = k\overrightarrow{DP}\,,$$

ove $k > 0$ è costante, e P è il punto medio di AB ($\boldsymbol{F}_D$ [rispettivamente, $\boldsymbol{F}_P$] è applicata in D [rispettivamente, in P]).
Trovare le equazioni che danno le posizioni di equilibrio, e ricavarne che in tali posizioni il centro di massa del sistema appartiene all'asse x_3.
R.

$$\begin{aligned} -3mgL\cos\varphi - 2kL^2\sin(\varphi-\theta) &= 0\,, \\ -mgL\cos\theta + 2kL^2\sin(\varphi-\theta) &= 0\,. \end{aligned}$$

12. [17/9/2007 (ex)II] Un sistema vincolato da vincoli olonomi è soggetto a forze di potenziale

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = 2 - (\theta-\pi)^2\cos\varphi - \sin^2\varphi\,,$$

con $\theta \in (0, 2\pi)$, $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$ opportune coordinate lagrangiane.
Determinare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
R.

$$(\theta,\varphi) = (\pi,\pi)\,, \qquad \textit{instabile.}$$

13. [1/4/2008 (ex)I] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \alpha\dot\varphi^2 + \beta\dot\theta^2 - \lambda e^{(\varphi-\theta)^2} - \mu\cos(\varphi^2)\,,$$

nelle coordinate lagrangiane

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi\,, \theta < \frac{2}{3}\pi\,,$$

con α, β, λ, μ costanti positive, tali che

$$2\mu\pi > \lambda(\pi-1)\,.$$

Determinare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.
Soluzione
Il potenziale è

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = -\lambda e^{(\theta-\varphi)^2} - \mu\cos\varphi^2\,,$$

e quindi le posizioni di equilibrio sono individuate come soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= 2\lambda(\theta-\varphi)e^{(\theta-\varphi)^2} + 2\mu\varphi\sin\varphi^2 = 0\,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= -2\lambda(\theta-\varphi)e^{(\theta-\varphi)^2} = 0\,. \end{aligned}$$

La seconda equazione implica

$$\theta = \varphi \, ,$$

e quindi la prima dà

$$\varphi \sin \varphi^2 = 0 \, .$$

Nel campo di variabilità ammesso per le coordinate φ e θ le soluzioni sono quindi

$$(0,0) \, , \qquad (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) \, .$$

La matrice hessiana di U^{L} è data da

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi^2} &= -2\lambda e^{(\theta-\varphi)^2} - 4\lambda(\theta-\varphi)^2 e^{(\theta-\varphi)^2} + 2\mu \sin\varphi^2 + 4\mu\varphi^2 \cos\varphi^2 \, , \\
\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi \partial \theta} &= 2\lambda\theta e^{(\theta-\varphi)^2} + 4\lambda(\theta-\varphi)^2 e^{(\theta-\varphi)^2} \, , \\
\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta^2} &= -2\lambda e^{(\theta-\varphi)^2} - 4\lambda(\theta-\varphi)^2 e^{(\theta-\varphi)^2} \, .
\end{aligned}$$

Dunque nei punti di equilibrio si ha

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(0,0) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix} \, ,$$

e

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = \begin{pmatrix} -2\lambda - 4\mu\pi & 2\lambda\sqrt{\pi} \\ 2\lambda\sqrt{\pi} & -2\lambda \end{pmatrix} \, .$$

Quindi $D^2 U^{\mathrm{L}}(0,0)$ è definita negativa, e perciò $(0,0)$ è una posizione di equilibrio stabile.
Si ha poi

$$\det D^2 U^{\mathrm{L}}(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = -4\lambda^2(\pi - 1) + 8\lambda\mu\pi > 0 \, ,$$

per le ipotesi fatte; quindi anche $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ è un punto di massimo isolato, e perciò di equilibrio stabile.
R.

$$\begin{aligned}
(\varphi, \theta) &= (0,0) \, , & &\textit{stabile,} \\
(\varphi, \theta) &= (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) \, , & &\textit{stabile.}
\end{aligned}$$

14. [1/7/2008 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso (O, x_i) e inoltre ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2 = a x_1^2 \, ,$$

con $a > 0$ costante.
All'estremo B è applicata la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{QB} \, ,$$

ove $Q = (0, R, 0)$, e $k > 0$ è costante. Inoltre agisce la forza peso diretta nel verso negativo dell'asse x_2.
Scrivere il sistema che fornisce le posizioni di equilibrio.
SOLUZIONE
Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1A}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

e l'angolo φ *tale che*

$$\overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2)\,, \qquad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Allora

$$U^{\mathrm{L}}_{\text{peso}} = -mg(L\sin\varphi + ax^2)\,,$$

e

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{L}}_{\text{el}} &= -\frac{k}{2}\left|\overrightarrow{QB}\right|^2 = -\frac{k}{2}\Big[(x + 2L\cos\varphi)^2 + (R - ax^2 - 2L\sin\varphi)^2\Big] \\ &= -\frac{k}{2}\Big[R^2 + 4L^2 + (1 - 2Ra)x^2 + a^2x^4 + 4Lx\cos\varphi + 4aLx^2\sin\varphi - 4RL\sin\varphi\Big]\,. \end{aligned}$$

Infine le posizioni desiderate si ottengono come punti critici del potenziale

$$U^{\mathrm{L}}(x, \varphi) = U^{\mathrm{L}}_{\text{peso}}(x, \varphi) + U^{\mathrm{L}}_{\text{el}}(x, \varphi)\,.$$

R.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} &= -2amgx - k(1 - 2Ra)x - 2ka^2x^3 - 2kL\cos\varphi - 4kaLx\sin\varphi = 0\,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= -mgL\cos\varphi + 2kLx\sin\varphi - 2akLx^2\cos\varphi + 2kRL\cos\varphi = 0\,. \end{aligned}$$

15. [1/7/2008 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso (O, x_i) e inoltre ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2 = -ax_1^2\,,$$

con $a > 0$ costante.
All'estremo B è applicata la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{QB}\,,$$

ove $Q = (0, -R, 0)$, e $k > 0$ è costante. Inoltre agisce la forza peso diretta nel verso positivo dell'asse x_2.
Scrivere il sistema che fornisce le posizioni di equilibrio.

R. *Se* $\overrightarrow{AB} = 2L(cos\varphi \boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi \boldsymbol{e}_2)$, *si ha*

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} = -2amgx - k(1-2Ra)x - 2ka^2x^3 - 2kL\cos\varphi - 4kaLx\sin\varphi = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = -mgL\cos\varphi + 2kLx\sin\varphi - 2akLx^2\cos\varphi + 2kRL\cos\varphi = 0\,.$$

16. [12/1/2009 (ex)I] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot\varphi^2 + \alpha\beta\dot\varphi\dot\theta + \beta^2\dot\theta^2\Big] - \gamma e^{\theta^2}\cos^2\varphi\,,$$

con α, β, $\gamma > 0$ costanti e $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in (-\infty, \infty)$ coordinate lagrangiane. Determinare i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
Soluzione
Il potenziale è

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = -\gamma e^{\theta^2}\cos^2\varphi\,.$$

I punti di equilibrio sono quindi le soluzioni del sistema

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = \gamma e^{\theta^2}\sin 2\varphi = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} = -2\gamma\theta e^{\theta^2}\cos^2\varphi = 0\,.$$

Le soluzioni sono quindi

$$\Big(-\frac{\pi}{2},\theta\Big)\,,\quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,,\qquad (0,0)\,,\qquad \Big(\frac{\pi}{2},\theta\Big)\,,\quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,.$$

La matrice hessiana è

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = 2\gamma\begin{pmatrix} e^{\theta^2}\cos 2\varphi & \theta e^{\theta^2}\sin 2\varphi \\ \theta e^{\theta^2}\sin 2\varphi & (1+2\theta^2)e^{\theta^2}\cos^2\varphi \end{pmatrix}\,.$$

Dunque

$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(-\frac{\pi}{2},\theta\Big) = 2\gamma e^{\theta^2}\,\mathrm{diag}(-1,0)\,,\quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,,\qquad D^2U^{\mathrm{L}}(0,0) = 2\gamma\,\mathrm{diag}(1,-1)\,,$$
$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{\pi}{2},\theta\Big) = 2\gamma e^{\theta^2}\,\mathrm{diag}(1,0)\,,\quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,.$$

Nessuno dei punti è di equilibrio stabile: in $(0,0)$ *l'hessiana è indefinita; poi*

$$U^{\mathrm{L}}\Big(\pm\frac{\pi}{2},\theta\Big) = 0\,,\quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,,$$

per cui i punti $(\pm\pi/2,\theta)$ *non sono di massimo isolato.*
R.

$$\Big(-\frac{\pi}{2},\theta\Big)\,,\quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,,\qquad (0,0)\,,\qquad \Big(\frac{\pi}{2},\theta\Big)\,,\quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,.$$

Non ci sono punti di equilibrio stabile.

17. [12/1/2009 (ex)II] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot\varphi^2 + \alpha\beta\dot\varphi\dot\theta + \beta^2\dot\theta^2\Big] - \gamma e^{-\theta^2}\cos^2\varphi\,,$$

con α, β, $\gamma > 0$ costanti e $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in (-\infty, \infty)$ coordinate lagrangiane. Determinare i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
R.

$$\Big(-\frac{\pi}{2}, \theta\Big)\,, \quad \forall\theta \in \boldsymbol{R}\,, \qquad (0,0)\,, \qquad \Big(\frac{\pi}{2}, \theta\Big)\,, \quad \forall\theta \in \boldsymbol{R}\,.$$

Non ci sono punti di equilibrio stabile.

18. [11/9/2009 (ex)I] Un corpo rigido è formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R, e da un punto P di massa m solidale al disco, fissato al bordo del disco.
Il rigido è vincolato a ruotare intorno all'asse x_1 del sistema di riferimento fisso (O, x_i). Tale asse si mantiene perpendicolare al disco nel suo centro C, che è a sua volta fissato nell'origine O.
La forza peso è diretta nel verso negativo dell'asse x_3. Sul rigido agisce anche la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_P = -k\overrightarrow{AP}\,,$$

applicata in P, ove A è tale che

$$\overrightarrow{OA} = L\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui k, L, R sono costanti positive.

- Scrivere le equazioni di moto del rigido.
- Trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

Soluzione
A) Visto che il rigido è vincolato a ruotare intorno a un asse fisso, ha un solo grado di libertà. Introduciamo come coordinata lagrangiana l'angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_3\,.$$

L'energia cinetica del rigido è data da

$$T^{\mathrm{L}} = T^{\mathrm{L}}_{\mathrm{disco}} + T^{\mathrm{L}}_{\mathrm{punto}} = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2\,.$$

Entrambe le forze applicate sono conservative; il potenziale della forza elastica è

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}\left|\overrightarrow{AP}\right|^2 = -\frac{k}{2}[(L - R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi] \\ = \frac{k}{2}[L^2 + R^2 - 2LR\cos\varphi]\,.$$

Prendendo poi come livello zero per il potenziale gravitazionale $x_3 = 0$, si ha

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{peso}} = U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{peso;disco}} + U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{peso};P} = U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{peso};P} = -mgR\sin\varphi\,.$$

Dunque la lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + kLR \cos\varphi - mgR \sin\varphi \,,$$

e l'equazione di Lagrange è

$$(I + mR^2)\ddot{\varphi} = -kLR \sin\varphi - mgR \cos\varphi \,.$$

B) Le posizioni di equilibrio corrispondono a

$$\frac{\mathrm{d}U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}\varphi} = -kLR \sin\varphi - mgR \cos\varphi = 0 \,,$$

ossia a

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{mg}{kL} \,,$$

che ha come soluzioni

$$\varphi_0 = -\operatorname{arctg}\frac{mg}{kL} \in \Big(-\frac{\pi}{2}, 0\Big) \,, \qquad \varphi_1 = \varphi_0 + \pi \in \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big) \,.$$

Per studiare la stabilità calcoliamo

$$\frac{\mathrm{d}^2 U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}\varphi^2} = -kLR \cos\varphi + mgR \sin\varphi \,.$$

Dunque

$$\frac{\mathrm{d}^2 U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}\varphi^2}(\varphi_0) < 0 \,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}\varphi^2}(\varphi_1) > 0 \,,$$

e quindi φ_0 è un punto di massimo isolato, e perciò è stabile; invece φ_1 è un punto di minimo isolato, e perciò è instabile.

R.

$$(I + mR^2)\ddot{\varphi} = -kLR \sin\varphi - mgR \cos\varphi \,.$$

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = -\operatorname{arctg}\frac{mg}{kL} \in \Big(-\frac{\pi}{2}, 0\Big) \,, && \textit{stabile;} \\ &\varphi_1 = \varphi_0 + \pi \in \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big) \,, && \textit{instabile.} \end{aligned}$$

19. [11/9/2009 (ex)II] Un corpo rigido è formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R, e da un punto P di massa m solidale al disco, fissato al bordo del disco.
Il rigido è vincolato a ruotare intorno all'asse x_1 del sistema di riferimento fisso (O, x_i). Tale asse si mantiene perpendicolare al disco nel suo centro C, che è a sua volta fissato nell'origine O.
La forza peso è diretta nel verso negativo dell'asse x_3. Sul rigido agisce anche la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{AQ} \,,$$

ove Q è il punto solidale con il rigido tale che

$$\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{CQ}\,,$$

e A è tale che

$$\overrightarrow{OA} = L\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui k, L, R sono costanti positive.

- Scrivere le equazioni di moto del rigido.
- Trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

R.

$$(I + mR^2)\ddot{\varphi} = kLR\sin\varphi - mgR\cos\varphi\,.$$

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \operatorname{arctg}\frac{mg}{kL} \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big)\,, && \textit{instabile;}\\
\varphi_1 &= \varphi_0 - \pi \in \Big(-\pi, -\frac{\pi}{2}\Big)\,, && \textit{stabile.}
\end{aligned}$$

20. [25/1/2010 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di raggio R, centro C e massa M è vincolata a giacere sul piano fisso

$$x_3 = 0\,.$$

Su di essa agiscono le forze

$$\boldsymbol{F}_A = -k_1\overrightarrow{OA}\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k_2\overrightarrow{OB}\,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e i punti A e B, solidali con γ, sono tali che

$$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} = \frac{R}{2}\boldsymbol{u}_1\,;$$

qui $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con γ tale che $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$. Infine le costanti k_i soddisfano

$$0 < k_1 < k_2\,.$$

- Si scriva la lagrangiana della circonferenza.
- Si determinino tutte le posizioni di equilibrio della circonferenza.

Soluzione

A) Usiamo come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1C} \in \boldsymbol{R}\,, \qquad y = x_{2C} \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi)\,,$$

tali che

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}
$$

L'energia cinetica, per il teorema di König, è

$$
T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \,.
$$

Il potenziale è

$$
\begin{aligned}
U^{\mathrm{L}} = -\frac{k_1}{2} \left| \overrightarrow{OA} \right|^2 - \frac{k_2}{2} \left| \overrightarrow{OB} \right|^2 \\
&= -\frac{\alpha}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\beta}{2} R (x \cos\varphi + y \sin\varphi) + \text{costante} \,,
\end{aligned}
$$

ove si sono definite le costanti positive

$$
\alpha = k_1 + k_2 \,, \qquad \beta = k_2 - k_1 \,.
$$

B) Per determinare le posizioni di equilibrio dobbiamo risolvere il sistema

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} &= -\alpha x + \frac{\beta}{2} R \cos\varphi = 0 \,,\\
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial y} &= -\alpha y + \frac{\beta}{2} R \sin\varphi = 0 \,,\\
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= \frac{\beta}{2} R (-x \sin\varphi + y \cos\varphi) = 0 \,.
\end{aligned}
$$

Le prime due equazioni danno

$$
x = \frac{\beta R}{2\alpha} \cos\varphi \,, \qquad y = \frac{\beta R}{2\alpha} \sin\varphi \,,
$$

che sostituite nella terza la soddisfano identicamente, per ogni valore di φ. Quindi le posizioni di equilibrio sono tutte e sole quelle con C sulla circonferenza di centro O e raggio $\beta R/(2\alpha)$ (che è minore di $R/2$), e tali che A e B siano allineati con $\overrightarrow{OC}$, con O tra B e C.

R.

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\beta}{2} R (x \cos\varphi + y \sin\varphi) \,.
$$

Qui $\alpha = k_1 + k_2$, $\beta = k_2 - k_1$.
Le posizioni di equilibrio sono tutte e sole quelle con

$$
\overrightarrow{OC} = \frac{\beta R}{2\alpha} \boldsymbol{u}_1 \,.
$$

21. [25/1/2010 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$
z = \alpha \cos\left[\beta \sqrt{x^2 + y^2} \right] , \qquad x^2 + y^2 > 0 \,,
$$

ove $\alpha > 0$, $\beta > 1$ sono costanti. P è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,,$$

e alla forza

$$\boldsymbol{F}_1 = k\boldsymbol{e}_1\,,$$

con $k > 0$ costante.
Determinare tutte le posizioni di equilibrio per P, e studiarne la stabilità.
SOLUZIONE
Usiamo le coordinate cilindriche

$$r \in (0,\infty)\,, \qquad \varphi \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\Big)\,,$$

come coordinate lagrangiane, cosicché

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(r,\varphi) = r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + \alpha\cos(\beta r)\boldsymbol{e}_3\,.$$

Il potenziale è

$$U = -mgx_3 + kx_1\,,$$

e quindi in coordinate lagrangiane

$$U^{\mathrm{L}}(r,\varphi) = -mg\alpha\cos(\beta r) + kr\cos\varphi\,.$$

Dunque i punti di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial r} &= mg\alpha\beta\sin(\beta r) + k\cos\varphi = 0\,,\\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= -kr\sin\varphi = 0\,.\end{aligned}$$

Le soluzioni sono quindi date da

$$\begin{aligned}\sin(\beta r) &= -\frac{k}{mg\alpha\beta}\,, \qquad \varphi = 0\,;\\ \sin(\beta r) &= \frac{k}{mg\alpha\beta}\,, \qquad \varphi = \pi\,.\end{aligned}$$

Dobbiamo quindi assumere, per l'esistenza di punti di equilibrio, che

$$\frac{k}{mg\alpha\beta} \le 1\,,$$

caso in cui tali punti sono dati da

$$\begin{aligned}&(-r_0, 0)\,, \qquad \Big(\frac{\pi}{\beta} + r_0, 0\Big)\,;\\ &(r_0, \pi)\,, \qquad \Big(\frac{\pi}{\beta} - r_0, \pi\Big)\,;\end{aligned}$$

qui si è posto

$$r_0 = \frac{1}{\beta}\arcsin\frac{k}{mg\alpha\beta} \in \Big(0, \frac{\pi}{2\beta}\Big]\,.$$

La matrice hessiana è

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} mg\alpha\beta^2\cos(\beta r) & -k\sin\varphi \\ -k\sin\varphi & -kr\cos\varphi \end{pmatrix} .$$

Dunque si ha nei vari punti di equilibrio:

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(-r_0,0) = \begin{pmatrix} mg\alpha\beta^2\cos(\beta r_0) & 0 \\ 0 & -kr_0 \end{pmatrix} ,$$

matrice indefinita, equilibrio instabile.

$$D^2 U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{\pi}{\beta}+r_0,0\Big) = \begin{pmatrix} -mg\alpha\beta^2\cos(\beta r_0) & 0 \\ 0 & -kr_0 \end{pmatrix} ,$$

matrice definita negativa, equilibrio stabile.

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(r_0,\pi) = \begin{pmatrix} mg\alpha\beta^2\cos(\beta r_0) & 0 \\ 0 & kr_0 \end{pmatrix} ,$$

matrice definita positiva, equilibrio instabile.

$$D^2 U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{\pi}{\beta}-r_0,\pi\Big) = \begin{pmatrix} -mg\alpha\beta^2\cos(\beta r_0) & 0 \\ 0 & kr_0 \end{pmatrix} ,$$

matrice indefinita, equilibrio instabile.
R. *I punti di equilibrio esistono se*

$$\frac{k}{mg\alpha\beta} \le 1 ;$$

in questa ipotesi, posto

$$r_0 = \frac{1}{\beta}\arcsin\frac{k}{mg\alpha\beta} \in \Big(0,\frac{\pi}{2\beta}\Big] ,$$

i punti di equilibrio sono

$$(-r_0,0) , \qquad \Big(\frac{\pi}{\beta}+r_0,0\Big) ;$$
$$(r_0,\pi) , \qquad \Big(\frac{\pi}{\beta}-r_0,\pi\Big) ;$$

solo il punto $(r_0+\pi/\beta,0)$ *è stabile.*

22. [25/1/2010 (ex)II] Una circonferenza materiale γ di raggio R, centro C e massa M è vincolata a giacere sul piano fisso

$$x_3 = 0 .$$

Su di essa agiscono le forze

$$\boldsymbol{F}_A = -k_1\overrightarrow{OA} , \qquad \boldsymbol{F}_B = -k_2\overrightarrow{OB} ,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e i punti A e B, solidali con γ, sono tali che

$$-\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} = \frac{3}{2} R \boldsymbol{u}_1 \,;$$

qui $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con γ tale che $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$. Infine le costanti k_i soddisfano

$$0 < k_1 < k_2 \,.$$

- Si scriva la lagrangiana della circonferenza.
- Si determinino tutte le posizioni di equilibrio della circonferenza.

R.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2) + \frac{3\beta}{2} R(x \cos\varphi + y \sin\varphi) \,.$$

Qui $\alpha = k_1 + k_2$, $\beta = k_2 - k_1$.
Le posizioni di equilibrio sono tutte e sole quelle con

$$\overrightarrow{OC} = -\frac{3\beta R}{2\alpha} \boldsymbol{u}_1 \,.$$

23. [25/1/2010 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = -\alpha \cos\left[\beta \sqrt{x^2 + y^2}\right] , \qquad x^2 + y^2 > 0 \,,$$

ove $\alpha > 0$, $\beta > 1$ sono costanti. P è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 \,,$$

e alla forza

$$\boldsymbol{F}_1 = k\boldsymbol{e}_1 \,,$$

con $k > 0$ costante.
Determinare tutte le posizioni di equilibrio per P, e studiarne la stabilità.
R. *I punti di equilibrio esistono se*

$$\frac{k}{mg\alpha\beta} \leq 1 \,;$$

in questa ipotesi, posto

$$r_0 = \frac{1}{\beta} \arcsin \frac{k}{mg\alpha\beta} \in \left[-\frac{\pi}{2\beta}, 0\right) ,$$

i punti di equilibrio sono

$$(-r_0, 0) \,, \qquad \left(\frac{\pi}{\beta} + r_0, 0\right) ;$$

$$(r_0, \pi) \,, \qquad \left(\frac{\pi}{\beta} - r_0, \pi\right) ;$$

solo il punto (r_0, π) *è stabile.*

24. [9/4/2010 (ex)I] Un sistema olonomo ha potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = \frac{\alpha\varphi^2}{\beta + \theta^2} + \frac{\beta\theta^2}{\alpha + \varphi^2}\,,$$

con $\varphi \in \boldsymbol{R}$, $|\theta| < \sqrt{|\beta|}$. Qui $\alpha > 0$ e $\beta < 0$ sono costanti.
Determinare tutte le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
Soluzione
Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= \frac{2\alpha\varphi}{\beta + \theta^2} - \frac{2\beta\theta^2\varphi}{(\alpha + \varphi^2)^2}\,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} &= -\frac{2\alpha\varphi^2\theta}{(\beta + \theta^2)^2} + \frac{2\beta\theta}{\alpha + \varphi^2}\,. \end{aligned}$$

Uguagliando a zero entrambe le derivate si ottiene, se $\theta = 0$,

$$(\varphi, \theta) = (0, 0)\,.$$

Se invece $\theta \neq 0$,

$$\frac{2\beta}{\alpha + \varphi^2} = \frac{2\alpha\varphi^2}{(\beta + \theta^2)^2}\,,$$

che è impossibile per le ipotesi sul segno di α *e* β, *e sul dominio di* θ.
Dunque l'unica soluzione è $(0, 0)$. *Per la matrice Hessiana si ha*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi^2} &= \frac{2\alpha}{\beta + \theta^2} - \frac{2\beta\theta^2}{(\alpha + \varphi^2)^2} + \frac{8\beta\varphi^2\theta^2}{(\alpha + \varphi^2)^3}\,, \\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi \partial \theta} &= -\frac{4\alpha\varphi\theta}{(\beta + \theta^2)^2} - \frac{4\beta\varphi\theta}{(\alpha + \varphi^2)^2}\,, \\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta^2} &= \frac{2\beta}{\alpha + \varphi^2} - \frac{2\alpha\varphi^2}{(\beta + \theta^2)^2} + \frac{8\alpha\varphi^2\theta^2}{(\beta + \theta^2)^3}\,, \end{aligned}$$

da cui

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(0, 0) = \begin{pmatrix} 2\alpha\beta^{-1} & 0 \\ 0 & 2\alpha^{-1}\beta \end{pmatrix}\,,$$

che è definita negativa. Dunque la posizione di equilibrio è stabile.
R. *L'unica posizione di equilibrio è* $(\varphi, \theta) = (0, 0)$, *che è stabile.*

25. [8/7/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 x_2\,.$$

Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_3$, e su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP}\,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso. Qui α e k sono costanti positive.

Trovare condizioni su k, m, g, α perché il punto O sia di equilibrio stabile.
SOLUZIONE
Il potenziale è

$$U = -\frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \alpha^2 x_1^2 x_2^2) - mg\alpha x_1 x_2 \,.$$

Dunque

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -kx_1 - k\alpha^2 x_1 x_2^2 - mg\alpha x_2 \,,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = -kx_2 - k\alpha^2 x_1^2 x_2 - mg\alpha x_1 \,,$$

e

$$D^2 U(0,0) = \begin{pmatrix} -k & -mg\alpha \\ -mg\alpha & -k \end{pmatrix} .$$

Dunque la matrice hessiana è definita negativa se e solo se

$$\det D^2 U(0,0) = k^2 - m^2 g^2 \alpha^2 > 0 \,.$$

R.

$$k > mg\alpha \,.$$

26. [7/9/2010 (ex)I] Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata ad avere l'estremo A sulla superficie

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \,,$$

e a rimanere ortogonale a tale superficie, in modo che

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = R < \left|\overrightarrow{OB}\right| = R + 2L \,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Sull'asta agiscono il peso, diretto come $-\boldsymbol{e}_3$, e la forza

$$\boldsymbol{F}_B = k\boldsymbol{e}_1 \,,$$

applicata in B. Qui R e k sono costanti positive.

1. Scrivere la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di AB in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

2. Trovare le posizioni di equilibrio dell'asta.

SOLUZIONE
Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right), \qquad \theta \in (0, \pi) \,,$$

in modo che

$$\overrightarrow{OA} = R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3 .$$

Il versore di $\overrightarrow{AB}$ *è dunque*

$$\boldsymbol{u} = \cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + \cos\theta\boldsymbol{e}_3 .$$

Si ha

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{u}\wedge\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{u}\wedge\dot\varphi(-\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2)\\ &\quad + \boldsymbol{u}\wedge\dot\theta(\cos\varphi\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\cos\theta\boldsymbol{e}_2 - \sin\theta\boldsymbol{e}_3)\\ &= \dot\varphi(-\cos\varphi\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + \sin^2\theta\boldsymbol{e}_3) + \dot\theta(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2) .\end{aligned}$$

B) Calcoliamo il potenziale delle forze. Si ha

$$U_{\text{peso}} = -mgx_{3C} = -mg[R\cos\theta + L\cos\theta] ,$$

ove C è il centro dell'asta. Poi si ha

$$U_{\boldsymbol{F}} = kx_{1B} = k[R\cos\varphi\sin\theta + 2L\cos\varphi\sin\theta] .$$

Dunque

$$U = -mg(R+L)\cos\theta + k(R+2L)\cos\varphi\sin\theta .$$

Cerchiamo i punti critici

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial\theta} &= mg(R+L)\sin\theta + k(R+2L)\cos\varphi\cos\theta ,\\ \frac{\partial U}{\partial\varphi} &= -k(R+2L)\sin\varphi\sin\theta .\end{aligned}$$

Dato che $\sin\theta = 0$ è escluso dal dominio di variabilità di θ, si ha dalla seconda equazione

$$\sin\varphi = 0 \qquad \textit{ossia} \qquad \varphi\in\{0,\pi\} .$$

Usando la prima equazione si ottiene allora nei due casi

$$\varphi = 0 , \qquad \operatorname{tg}\theta = -\frac{k(R+2L)}{mg(R+L)} ;$$

$$\varphi = \pi , \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{k(R+2L)}{mg(R+L)} .$$

R.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi(-\cos\varphi\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + \sin^2\theta\boldsymbol{e}_3)&\\ + \dot\theta(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2) .&\end{aligned}$$

Posizioni di equilibrio:

$$\varphi = 0 , \qquad \theta = \pi - \operatorname{arctg}\frac{k(R+2L)}{mg(R+L)} ;$$

$$\varphi = \pi , \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{k(R+2L)}{mg(R+L)} .$$

680. Equazioni di Lagrange: piccole oscillazioni

1. [4/7/2005 (ex)I] Si consideri un sistema con lagrangiana

$$\mathcal{L} = T + U\,, \quad T = \alpha^2\dot\theta^2 + \alpha\beta\dot\theta\dot\varphi + \beta^2\dot\varphi^2\,, \quad U = \lambda\cos(\theta-\varphi) - \mu\theta^2 + \gamma\sin^2\varphi\,,$$

ove α, β, γ, λ, $\mu > 0$ sono costanti, con $\gamma < \lambda\mu/(\lambda+2\mu)$.
Si riconosca che $\theta = 0$, $\varphi = 0$ è una posizione di equilibrio stabile e si scrivano le relative equazioni delle piccole oscillazioni.
Soluzione
1) Calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial\theta} &= -\lambda\sin(\theta-\varphi) - 2\mu\theta\,,\\ \frac{\partial U}{\partial\varphi} &= \lambda\sin(\theta-\varphi) + 2\gamma\sin\varphi\cos\varphi\,,\end{aligned}$$

cosicché

$$\nabla U(0,0) = (0,0)\,,$$

e $\theta = 0$, $\varphi = 0$ è una posizione di equilibrio. Per studiarne la stabilità calcoliamo la matrice hessiana di U:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} &= -\lambda\cos(\theta-\varphi) - 2\mu\,,\\ \frac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial\varphi} &= \lambda\cos(\theta-\varphi)\,,\\ \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} &= -\lambda\cos(\theta-\varphi) + 2\gamma\cos(2\varphi)\,,\end{aligned}$$

da cui

$$D^2U(0,0) = \begin{pmatrix} -\lambda-2\mu & \lambda \\ \lambda & -\lambda+2\gamma\end{pmatrix}.$$

Dato che

$$\det D^2U(0,0) = -(\lambda+2\mu)(-\lambda+2\gamma) - \lambda^2 = -(\lambda+2\mu)\Big[2\gamma - \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\Big] > 0\,,$$

per le ipotesi fatte sui parametri, $D^2U(0,0)$ è definita. Poiché l'elemento

$$(D^2U(0,0))_{11}$$

*è negativo, $D^2U(0,0)$ è definita negativa (*stiamo usando che $D^2U(0,0)$ è 2x2*).* *Quindi $(0,0)$ è un massimo isolato per U, e quindi una posizione di equilibrio stabile.*
2) La lagrangiana ridotta è $\mathcal{L}^* = T^* + U^*$, ove per definizione

$$\begin{aligned}T^*(\dot\theta,\dot\varphi) &= T(0,0,\dot\theta,\dot\varphi) = \alpha^2\dot\theta^2 + \alpha\beta\dot\theta\dot\varphi + \beta^2\dot\varphi^2\,,\\ U^*(\theta,\varphi) &= \frac{1}{2}D^2U(0,0)(\theta,\varphi)^{\mathrm{t}}\cdot(\theta,\varphi)^{\mathrm{t}} = \frac{1}{2}\Big[-(\lambda+2\mu)\theta^2 + 2\lambda\theta\varphi + (-\lambda+2\gamma)\varphi^2\Big]\,.\end{aligned}$$

Le corrispondenti equazioni di Lagrange sono perciò

$$
\begin{aligned}
2\alpha^2\ddot{\theta} + \alpha\beta\ddot{\varphi} + (\lambda + 2\mu)\theta - \lambda\varphi &= 0\,, \\
\alpha\beta\ddot{\theta} + 2\beta^2\ddot{\varphi} - \lambda\theta - (-\lambda + 2\gamma)\varphi &= 0\,.
\end{aligned}
$$

2. [4/7/2005 (ex)II] Si consideri un sistema con lagrangiana

$$
\mathcal{L} = T + U\,, \quad T = \alpha^2\dot{\varphi}^2 + \alpha\beta\dot{\theta}\dot{\varphi} + \beta^2\dot{\theta}^2\,, \quad U = \lambda\cos(\theta - \varphi) - \mu\varphi^2 + \gamma\sin^2\theta\,,
$$

ove α, β, γ, λ, $\mu > 0$ sono costanti, con $\gamma < \lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$.
Si riconosca che $\theta = 0$, $\varphi = 0$ è una posizione di equilibrio stabile e si scrivano le relative equazioni delle piccole oscillazioni.
R.

$$
\begin{aligned}
2\beta^2\ddot{\theta} + \alpha\beta\ddot{\varphi} - (-\lambda + 2\gamma)\theta - \lambda\varphi &= 0\,, \\
\alpha\beta\ddot{\theta} + 2\alpha^2\ddot{\varphi} - \lambda\theta + (\lambda + 2\mu)\varphi &= 0\,.
\end{aligned}
$$

3. [7/4/2006 (ex)I] Si consideri un sistema con lagrangiana

$$
\mathcal{L} = T + U\,, \quad T = \alpha^2\dot{\varphi}^2 + \alpha\beta\dot{\theta}\dot{\varphi} + \beta^2\dot{\theta}^2\,, \quad U = -\lambda(\theta - \varphi)^2 - 2\mu\theta^2 + \gamma e^{\theta^2}\,,
$$

ove α, β, γ, λ, $\mu > 0$ sono costanti, con $\gamma < 2\mu$.
Si riconosca che $\theta = 0$, $\varphi = 0$ è una posizione di equilibrio stabile e si scrivano le relative equazioni delle piccole oscillazioni.
Soluzione
Si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \theta} &= -2\lambda(\theta - \varphi) - 4\mu\theta + 2\gamma\theta e^{\theta^2}\,, \\
\frac{\partial U}{\partial \varphi} &= 2\lambda(\theta - \varphi)\,,
\end{aligned}
$$

per cui $\nabla U(0,0) = 0$ e $(0,0)$ è *una posizione di equilibrio. Consideriamo l'Hessiana*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} &= -2\lambda - 4\mu + 2\gamma e^{\theta^2} + 4\gamma^2\theta^2 e^{\theta^2}\,, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} &= 2\lambda\,, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} &= -2\lambda\,.
\end{aligned}
$$

Si ha allora

$$
D^2U(0,0) = \begin{pmatrix} -2\lambda - 4\mu + 2\gamma & 2\lambda \\ 2\lambda & -2\lambda \end{pmatrix}.
$$

Dunque

$$
\det D^2U(0,0) = 4\lambda(2\mu - \gamma) > 0\,,
$$

per l'ipotesi $2\mu > \gamma$. Per lo stesso motivo, i due termini sulla diagonale principale dell'Hessiana sono negativi, e quindi la matrice è definita negativa: perciò U ha un massimo isolato nella posizione di equilibrio, che risulta così stabile.
Infine si ha

$$T^*(\dot\theta,\dot\varphi) = T(0,0,\dot\theta,\dot\varphi) = \alpha^2\dot\varphi^2 + \alpha\beta\dot\theta\dot\varphi + \beta^2\dot\theta^2\,,$$

e

$$U^*(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}D^2U(0,0)(\theta,\varphi)^{\mathrm{t}}\cdot(\theta,\varphi)^{\mathrm{t}}\,.$$

La lagrangiana ridotta dunque è

$$\mathcal{L}^* = \alpha^2\dot\varphi^2 + \alpha\beta\dot\theta\dot\varphi + \beta^2\dot\theta^2 - (\lambda+2\mu-\gamma)\theta^2 - 2\lambda\theta\varphi - \lambda\varphi^2\,.$$

R.

$$\begin{aligned} 2\beta^2\ddot\theta + \alpha\beta\ddot\varphi + 2(\lambda+2\mu-\gamma)\theta + 2\lambda\varphi &= 0\,,\\ \alpha\beta\ddot\theta + \alpha^2\ddot\varphi + 2\lambda\theta + 2\lambda\varphi &= 0\,. \end{aligned}$$

4. [13/12/2006 (ex)I] Un sistema olonomo ha lagrangiana

$$\mathcal{L}(\varphi,\psi,\dot\varphi,\dot\psi) = \frac{1}{2}\Big(\alpha\dot\varphi^2 + \beta(1+\varphi^2)\dot\varphi\dot\psi + \alpha\dot\psi^2\Big) + a\cos(\varphi+\psi^3) - b\varphi^4 - c\psi^2\,,$$

con φ, $\psi\in(-\pi,\pi)$ e α, β, a, b, c costanti positive, $2\alpha > \beta(1+\pi^2)$.
Si dimostri che $(\varphi,\psi)=(0,0)$ è una posizione di equilibrio stabile e si scriva la relativa lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^* = T^* + U^*$.
Soluzione
Il potenziale è

$$U(\varphi,\psi) = a\cos(\varphi+\psi^3) - b\varphi^4 - c\psi^2\,.$$

Dato che

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial\varphi} &= -a\sin(\varphi+\psi^3) - 4b\varphi^3\,,\\ \frac{\partial U}{\partial\psi} &= -3a\psi^2\sin(\varphi+\psi^3) - 2c\psi\,, \end{aligned}$$

si annullano in $(0,0)$, in effetti questa è una posizione di equilibrio. La matrice hessiana D^2U è data da

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} &= -a\cos(\varphi+\psi^3) - 12b\varphi^2\,,\\ \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi\partial\psi} &= -3a\psi^2\cos(\varphi+\psi^3)\,,\\ \frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2} &= -6a\varphi\sin(\varphi+\psi^3) - 9a\psi^4\cos(\varphi+\psi^3) - 2c\,, \end{aligned}$$

per cui in $(0,0)$

$$D^2U(0,0) = \begin{pmatrix} -a & 0\\ 0 & -2c \end{pmatrix}\,,$$

che è definita negativa.
Perciò

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*(\varphi,\psi,\dot\varphi,\dot\psi) = T^*(\dot\varphi,\dot\psi) + U^*(\varphi,\psi) &= T(0,0,\dot\varphi,\dot\psi) + \frac{1}{2}D^2U(0,0)(\varphi,\psi)^{\mathrm{t}}\cdot(\varphi,\psi)^{\mathrm{t}} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\alpha\dot\varphi^2 + \beta\dot\varphi\dot\psi + \alpha\dot\psi^2\Big) - \frac{a}{2}\varphi^2 - c\psi^2 .\end{aligned}$$

R.

$$\mathcal{L}^*(\varphi,\psi,\dot\varphi,\dot\psi) = \frac{1}{2}\Big(\alpha\dot\varphi^2 + \beta\dot\varphi\dot\psi + \alpha\dot\psi^2\Big) - \frac{a}{2}\varphi^2 - c\psi^2 .$$

5. [26/3/2007 (ex)I] Un sistema olonomo ha lagrangiana

$$\mathcal{L}(\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta) = \frac{1}{2}\Big(\alpha(\varphi^4+1)\dot\varphi^2 + \alpha\dot\varphi\dot\theta + \alpha(\varphi^4+1)\dot\theta^2\Big) + a(1-\varphi^2)^2 + \frac{b}{1+\theta^2} ,$$

con φ, $\theta \in (-\pi,\pi)$ e α, a, b, costanti positive.
Si dimostri che $(\varphi,\theta) = (0,0)$ è una posizione di equilibrio stabile e si scrivano le equazioni di Lagrange relative alla lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^* = T^* + U^*$.
SOLUZIONE
Il potenziale è

$$U(\varphi,\theta) = a(1-\varphi^2)^2 + \frac{b}{1+\theta^2} .$$

Dato che

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial\varphi} &= -4a\varphi(1-\varphi^2) , \\ \frac{\partial U}{\partial\theta} &= -\frac{2b\theta}{(1+\theta^2)^2} ,\end{aligned}$$

si annullano in $(0,0)$*, in effetti questa è una posizione di equilibrio. La matrice hessiana* D^2U *è data da*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} &= -4a(1-\varphi^2) + 12a\varphi^2 , \\ \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi\partial\theta} &= 0 , \\ \frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} &= -\frac{2b}{(1+\theta^2)^2} + \frac{8b\theta^2}{(1+\theta^2)^3} ,\end{aligned}$$

per cui in $(0,0)$

$$D^2U(0,0) = \begin{pmatrix} -4a & 0 \\ 0 & -2b \end{pmatrix} ,$$

che è definita negativa. Quindi $(0,0)$ *è un punto di massimo isolato per* U *ed è pertanto una posizione di equilibrio stabile.*

Perciò

$$\mathcal{L}^*(\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta) = T^*(\dot\varphi,\dot\theta) + U^*(\varphi,\theta) = T(0,0,\dot\varphi,\dot\theta) + \frac{1}{2}D^2U(0,0)(\varphi,\theta)\cdot(\varphi,\theta)$$
$$= \frac{1}{2}\alpha(\dot\varphi^2 + \dot\varphi\dot\theta + \dot\theta^2) - 2a\varphi^2 - b\theta^2\,.$$

R.

$$\alpha\Big(\ddot\varphi + \frac{1}{2}\ddot\theta\Big) + 4a\varphi = 0\,,$$
$$\alpha\Big(\frac{1}{2}\ddot\varphi + \ddot\theta\Big) + 2b\theta = 0\,.$$

6. [4/7/2007 (ex)I] Si scriva la lagrangiana ridotta (intorno all'unica posizione di equilibrio stabile) per un punto P di massa m vincolato all'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

e sottoposto alla forza peso, che agisce nel verso negativo dell'asse z.
[*Sugg.* Si scelgano x, y come coordinate lagrangiane.]
Soluzione
Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$(x,y) \in \Big\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\Big\}\,.$$

Allora il moto del punto è dato da

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(x,y) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 - c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\boldsymbol{e}_3\,.$$

Il potenziale della forza peso è quindi

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -mg(z(x,y)+c) = mgc\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - mgc\,.$$

Vale

$$\nabla U^{\mathrm{L}}(0,0) = 0\,,$$

quindi il punto $(0,0,-c)$ *corrisponde a una posizione di equilibrio.*
I calcoli mostrano che

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0,0) = \begin{pmatrix} -\frac{mgc}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{mgc}{b^2} \end{pmatrix}\,,$$

è definita negativa, e quindi $(0,0,-c)$ *è una posizione di equilibrio stabile in cui si può definire la lagrangiana ridotta.*
In particolare

$$U^*(x,y) = -\frac{1}{2}mgc\Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\Big)\,.$$

Troviamo poi l'energia cinetica. La velocità del punto è data da

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{e}_1 + \dot{y}\boldsymbol{e}_2 + c\Big(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{x\dot{x}}{a^2} + \frac{y\dot{y}}{b^2}\Big)\boldsymbol{e}_3 .$$

Quindi

$$T^{\mathrm{L}}(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}m\Big[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + c^2\Big(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\Big)^{-1}\Big(\frac{x\dot{x}}{a^2} + \frac{y\dot{y}}{b^2}\Big)^2\Big] ,$$

e l'energia cinetica ridotta è

$$T^*(\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) .$$

R.

$$\mathcal{L}^*(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}mgc\Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\Big) .$$

7. [4/7/2007 (ex)II] Si scriva la lagrangiana ridotta (intorno all'unica posizione di equilibrio stabile) per un punto P di massa m vincolato all'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 ,$$

e sottoposto alla forza costante $\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{e}_1$, con $k > 0$.
[*Sugg.* Si scelgano y, z come coordinate lagrangiane.]
R.

$$\mathcal{L}^*(y,z,\dot{y},\dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}ak\Big(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\Big) .$$

8. [13/12/2007 (ex)I] Scrivere le equazioni di moto per le piccole oscillazioni del sistema con lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \alpha\cos(x + xy) + \beta\cos(y + xy) + \gamma\sqrt{1 - y^2} ,$$

intorno al punto $(x,y) = (0,0)$. Qui α, β e γ sono costanti positive.
Soluzione
Il potenziale è

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = \alpha\cos(x + xy) + \beta\cos(y + xy) + \gamma\sqrt{1 - y^2} ,$$

cosicché

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} &= -\alpha(1 + y)\sin(x + xy) - \beta y\sin(y + xy) , \\
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial y} &= -\alpha x\sin(x + xy) - \beta(1 + x)\sin(y + xy) - \frac{\gamma y}{\sqrt{1 - y^2}} .
\end{aligned}$$

Quindi $\nabla U^{\mathrm{L}}(0,0) = 0$.
Inoltre

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial x^2} &= -\alpha(1+y)^2\cos(x+xy) - \beta y^2 \sin(y+xy)\,,\\
\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial x \partial y} &= -\alpha \sin(x+xy) - \alpha x(1+y)\cos(x+xy)\\
&\qquad - \beta\sin(y+xy) - \beta y(1+x)\cos(y+xy)\,,\\
\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial y^2} &= -\alpha x^2\cos(x+xy) - \beta(1+x)^2\cos(y+xy) - \frac{\gamma}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}\,,
\end{aligned}
$$

da cui

$$
D^2U^{\mathrm{L}}(0,0) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\beta-\gamma \end{pmatrix}.
$$

Perciò $(0,0)$ *è un punto di equilibrio stabile e la lagrangiana ridotta è*

$$
\mathcal{L}^*(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{1}{2}[\alpha x^2 + (\beta+\gamma)y^2]\,.
$$

R.

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} + \alpha x &= 0\,,\\
m\ddot{y} + (\beta+\gamma)y &= 0\,.
\end{aligned}
$$

9. [13/12/2007 (ex)II] Scrivere le equazioni di moto per le piccole oscillazioni del sistema con lagrangiana

$$
\mathcal{L}(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \alpha\cos(y+xy) + \beta\cos(x+xy) + \gamma\sqrt{1-y^2} - \delta x^4\,,
$$

intorno al punto $(x,y) = (0,0)$. Qui α, β, γ e δ sono costanti positive.
R.

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} + \beta x &= 0\,,\\
m\ddot{y} + (\alpha+\gamma)y &= 0\,.
\end{aligned}
$$

10. [18/7/2008 (ex)I] Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è soggetta ai vincoli:

- giace sul piano fisso verticale $x_3 = 0$;
- ha l'estremo A sull'asse x_1.

Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_2. Inoltre in B è applicata la forza elastica

$$
\boldsymbol{F}_B = -k\overrightarrow{OB}\,,
$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e $k > 0$ è costante.
Si determinino

1. tutte le posizioni di equilibrio, discutendone la stabilità;
2. la lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$ in almeno una delle posizioni di equilibrio in cui si possono definire le piccole oscillazioni.

SOLUZIONE

A) Fissiamo le due coordinate lagrangiane

$$x = x_{1A} \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi)\,,$$

ove φ *è l'angolo tra* $\overrightarrow{AB}$ *ed* $\boldsymbol{e}_1$. *L'asta allora risulterà parametrizzata da*

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = (x + s\cos\varphi, s\sin\varphi)\,,$$

ove $0 \leq s \leq 2L$.
Il potenziale, della forza peso e di quella elastica insieme, è

$$U = -mgx_{2C} - \frac{k}{2}\left|OB\right|^2\,,$$

ove C *è il centro dell'asta. In coordinate lagrangiane*

$$U^{\mathrm{L}}(x,\varphi) = -mgL\sin\varphi - \frac{k}{2}(x^2 + 4Lx\cos\varphi + 4L^2)\,.$$

Le posizioni di equilibrio sono pertanto le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} &= -kx - 2Lk\cos\varphi = 0\,,\\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= -mgL\cos\varphi + 2Lkx\sin\varphi = 0\,.\end{aligned}$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda si ha

$$-mgL\cos\varphi - 4L^2k\cos\varphi\sin\varphi = 0\,,$$

da cui si ottengono le soluzioni

$$(x,\varphi) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\,, \qquad (x,\varphi) = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right)\,, \tag{1}$$

ove $\cos\varphi = 0$. *Se invece* $\cos\varphi \neq 0$ *deve essere*

$$\sin\varphi = -\frac{mg}{4Lk}\,,$$

che è possibile e dà due soluzioni diverse dalle (1) *se e solo se*

$$mg < 4Lk\,. \tag{2}$$

Queste soluzioni sono dunque

$$(x,\varphi) = (\xi_1, \varphi_1)\,, \qquad (x,\varphi) = (-\xi_1, -\pi - \varphi_1)\,, \tag{3}$$

con

$$\xi_1 = -2L\cos\varphi_1 = -2L\sqrt{1-\frac{m^2g^2}{16L^2k^2}} < 0\,,$$
$$\varphi_1 = -\arcsin\frac{mg}{4Lk}\,.$$

B) Studiamo la stabilità delle posizioni di equilibrio; la matrice hessiana di U^{L} *è*

$$D^2U^{\mathrm{L}}(x,\varphi) = \begin{pmatrix} -k & 2Lk\sin\varphi \\ 2Lk\sin\varphi & mgL\sin\varphi + 2Lkx\cos\varphi \end{pmatrix}\,.$$

Dunque

$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(x,\pm\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} -k & \pm 2Lk \\ \pm 2Lk & \pm mgL \end{pmatrix}\,,$$

che ha determinante

$$\mp mgLk - 4L^2k^2 = Lk(\mp mg - 4Lk)\,.$$

Quindi l'hessiana è senz'altro indefinita in $(0,\pi/2)$*, mentre è definita negativa* $(0,-\pi/2)$ *se e solo se*

$$mg > 4Lk\,.$$

In questo caso $(0,-\pi/2)$ *è di equilibrio stabile.*
Se invece vale la (2)*, si ha in* (ξ_1,φ_1)

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\xi_1,\varphi_1) = \begin{pmatrix} -k & -\frac{mg}{2} \\ -\frac{mg}{2} & -4L^2k \end{pmatrix}\,,$$

che ha determinante

$$4L^2k^2 - \frac{m^2g^2}{4}\,,$$

per la (2)*. Dunque* $D^2U^{\mathrm{L}}(\xi_1,\varphi_1)$ *è definita negativa e* (ξ_1,φ_1) *è di equilibrio stabile.*
La stessa cosa vale in $(-\xi_1,-\pi-\varphi_1)$.
C) Per il teorema di König l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_C|^2 + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2\,,$$

ove I *è il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo asse in* C*. Inoltre*

$$\boldsymbol{v}_C = (\dot x - L\dot\varphi\sin\varphi, L\dot\varphi\cos\varphi, 0)\,,$$

da cui

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m(\dot x^2 - 2L\dot x\dot\varphi\sin\varphi + L^2\dot\varphi^2) + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2\,.$$

In $(0,-\pi/2)$

$$T^* = \frac{1}{2}m\dot x^2 + mL\dot x\dot\varphi + \frac{1}{2}(mL^2+I)\dot\varphi^2\,.$$

In (ξ_1,φ_1) *e in* $(-\xi_1,-\pi-\varphi_1)$

$$T^* = \frac{1}{2}m\dot x^2 + \frac{mg}{4k}\dot x\dot\varphi + \frac{1}{2}(mL^2+I)\dot\varphi^2\,.$$

R. *Posizioni di equilibrio:*

$$(x,\varphi) = \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big), \qquad \textit{sempre instabile;}$$
$$(x,\varphi) = \Big(0, -\frac{\pi}{2}\Big), \qquad \textit{stabile se } mg > 4Lk;$$

se $mg < 4Lk$ si hanno anche le seguenti posizioni di equilibrio, stabili in quest'ipotesi:

$$(x,\varphi) = (\xi_1, \varphi_1), \qquad (x,\varphi) = (-\xi_1, -\pi - \varphi_1),$$
$$\xi_1 = -2L\sqrt{1 - \frac{m^2 g^2}{16L^2k^2}} < 0, \qquad \varphi_1 = -\arcsin\frac{mg}{4Lk}.$$

Lagrangiane ridotte: in $(0, -\pi/2)$ (se è stabile)

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mL\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}(mL^2 + I)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - 2Lkx\Big(\varphi + \frac{\pi}{2}\Big) - \frac{1}{2}mgL\Big(\varphi + \frac{\pi}{2}\Big)^2,$$

mentre in (ξ_1, φ_1) (se esiste e quindi è stabile)

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{m^2 g}{4k}\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}(mL^2 + I)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}k(x - \xi_1)^2 - \frac{1}{2}mg(x - \xi_1)(\varphi - \varphi_1) - 4L^2k(\varphi - \varphi_1)^2.$$

11. [18/7/2008 (ex)I] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \alpha^2(1 + \varphi^2)\dot{\varphi}^2 + \alpha\beta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2(1 + \cos^2\theta)\dot{\theta}^2 + \gamma\cos(\varphi\theta) - \delta\sin^2\varphi - \delta\theta^2,$$

con α, β, γ, $\delta > 0$ costanti e φ, $\theta \in (-\pi, \pi)$ coordinate lagrangiane.
Riconoscere che in $(\varphi, \theta) = (0, 0)$ si possono definire le piccole oscillazioni, e calcolarne le frequenze normali.

Soluzione

Il potenziale è dato da

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = \gamma\cos(\varphi\theta) - \delta\sin^2\varphi - \delta\theta^2.$$

Si ha

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = -\gamma\theta\sin(\varphi\theta) - \delta\sin(2\varphi),$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} = \gamma\varphi\sin(\varphi\theta) - 2\delta\theta,$$

per cui in effetti $(0, 0)$ è un punto critico.
Inoltre

$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi^2} = -\gamma\theta^2\cos(\varphi\theta) - 2\delta\cos(2\varphi),$$
$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi\partial\theta} = -\gamma\sin(\varphi\theta) - \gamma\varphi\theta\cos(\varphi\theta),$$
$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta^2} = -\gamma\varphi^2\cos(\varphi\theta) - 2\delta.$$

Dunque

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0,0) = \begin{pmatrix} -2\delta & 0 \\ 0 & -2\delta \end{pmatrix} ,$$

e quindi l'hessiana è definita negativa. Perciò $(0,0)$ *è un punto di equilibrio stabile e si possono definire le piccole oscillazioni.*
È noto che, definita $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *come la matrice tale che*

$$T^* = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}, \dot{\theta})\boldsymbol{\mathcal{A}}(\dot{\varphi}, \dot{\theta})^{\mathrm{t}} ,$$

ossia posto

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2\alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & 4\beta^2 \end{pmatrix} ,$$

si ha

$$\det\Big(\omega^2\boldsymbol{\mathcal{A}} + D^2U^{\mathrm{L}}(0,0)\Big) = 0 .$$

Cioè

$$7\alpha^2\beta^2\omega^4 - 4\delta(\alpha^2 + 2\beta^2)\omega^2 + 4\delta^2 = 0 .$$

R. *Le frequenze normali sono date da* $\omega_1/(2\pi)$, $\omega_2/(2\pi)$, *ove*

$$\omega_{1,2}^2 = 2\delta\frac{\alpha^2 + 2\beta^2 \pm \sqrt{(\alpha^2 - 2\beta^2)^2 + \alpha^2\beta^2}}{7\alpha^2\beta^2} .$$

12. [18/7/2008 (ex)II] Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è soggetta ai vincoli:

- giace sul piano fisso verticale $x_3 = 0$;
- ha l'estremo A sull'asse x_1.

Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_2. Inoltre nel centro C è applicata la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_C = -k\overrightarrow{OC} ,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e $k > 0$ è costante.
Si determinino

1. tutte le posizioni di equilibrio, discutendone la stabilità;
2. la lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$ in almeno una delle posizioni di equilibrio in cui si possono definire le piccole oscillazioni.

R. *Posizioni di equilibrio:*

$$(x, \varphi) = \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) , \qquad \textit{sempre instabile;}$$
$$(x, \varphi) = \Big(0, -\frac{\pi}{2}\Big) , \qquad \textit{stabile se } mg > Lk;$$

se $mg < Lk$ si hanno anche le seguenti posizioni di equilibrio, stabili in quest'ipotesi:

$$(x,\varphi) = (\xi_1, \varphi_1)\,, \qquad (x,\varphi) = (-\xi_1, -\pi - \varphi_1)\,,$$
$$\xi_1 = -L\sqrt{1 - \frac{m^2g^2}{L^2k^2}} < 0\,, \qquad \varphi_1 = -\arcsin\frac{mg}{Lk}\,.$$

Lagrangiane ridotte: in $(0, -\pi/2)$ (se è stabile)

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mL\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}(mL^2 + I)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - Lkx\Big(\varphi + \frac{\pi}{2}\Big) - \frac{1}{2}mgL\Big(\varphi + \frac{\pi}{2}\Big)^2\,,$$

mentre in (ξ_1, φ_1) (se esiste e quindi è stabile)

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{m^2g}{k}\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}(mL^2+I)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}k(x-\xi_1)^2 - mg(x-\xi_1)(\varphi-\varphi_1) - \frac{1}{2}L^2k(\varphi-\varphi_1)^2\,.$$

13. [18/7/2008 (ex)II] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \alpha^2(1+\theta^2)\dot{\varphi}^2 + \alpha\beta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2(1+\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2 + \gamma\cos(\varphi\theta) - \delta\varphi^2 - \delta\sin^2\theta + \delta\theta^4\,,$$

con α, β, γ, $\delta > 0$ costanti e φ, $\theta \in (-\pi, \pi)$ coordinate lagrangiane.
Riconoscere che in $(\varphi, \theta) = (0, 0)$ si possono definire le piccole oscillazioni, e calcolarne le frequenze normali.
R. *Le frequenze normali sono date da $\omega_1/(2\pi)$, $\omega_2/(2\pi)$, ove*

$$\omega_{1,2}^2 = 2\delta\frac{\alpha^2 + \beta^2 \pm \sqrt{(\alpha^2-\beta^2)^2 + \alpha^2\beta^2}}{3\alpha^2\beta^2}\,.$$

14. [12/9/2008 (ex)I] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha\beta}{1+\lambda^2\varphi^2}\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2\dot{\theta}^2\Big] - \gamma\varphi(\lambda^2\varphi^2 - 1) - \delta(e^{\lambda\theta} + e^{-\lambda\theta})\,,$$

con α, β, γ, δ, $\lambda > 0$ costanti e φ, $\theta \in (-\infty, \infty)$ coordinate lagrangiane.
Determinare i punti di equilibrio del sistema e, ove possibile, scrivere la lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$.
Soluzione
Il potenziale è dato da

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = -\gamma\varphi(\lambda^2\varphi^2 - 1) - \delta(e^{\lambda\theta} + e^{-\lambda\theta})\,.$$

Si ha

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = -3\gamma\lambda^2\varphi^2 + \gamma\,,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} = -\delta\lambda(e^{\lambda\theta} - e^{-\lambda\theta})\,,$$

per cui i punti critici sono

$$\Big(\frac{1}{\lambda\sqrt{3}},0\Big)\,,\qquad \Big(-\frac{1}{\lambda\sqrt{3}},0\Big)\,.$$

La matrice hessiana vale

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta)=\begin{pmatrix}-6\gamma\lambda^2\varphi & 0\\ 0 & -\delta\lambda^2(e^{\lambda\theta}+e^{-\lambda\theta})\end{pmatrix}\,,$$

e quindi si ha

$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{1}{\lambda\sqrt{3}},0\Big)=\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\gamma\lambda & 0\\ 0 & -2\delta\lambda^2\end{pmatrix}\,,\qquad \textit{definita negativa;}$$

$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(-\frac{1}{\lambda\sqrt{3}},0\Big)=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\gamma\lambda & 0\\ 0 & -2\delta\lambda^2\end{pmatrix}\,,\qquad \textit{indefinita.}$$

Ne segue che $(1/\lambda\sqrt{3},0)$ *è l'unica posizione di equilibrio stabile, e che ivi si può definire la lagrangiana ridotta, data da*

$$\mathcal{L}^*(\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta)=T^{\mathrm{L}}\Big(\frac{1}{\lambda\sqrt{3}},0,\dot\varphi,\dot\theta\Big)+\frac{1}{2}\Big(\varphi-\frac{1}{\lambda\sqrt{3}},\theta\Big)^{\mathrm{t}}D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{1}{\lambda\sqrt{3}},0\Big)\Big(\varphi-\frac{1}{\lambda\sqrt{3}},\theta\Big)\,.$$

R.

$$\Big(\frac{1}{\lambda\sqrt{3}},0\Big)\,,\qquad \Big(-\frac{1}{\lambda\sqrt{3}},0\Big)\,.$$

In $(1/\lambda\sqrt{3},0)$

$$\mathcal{L}^*(\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta)=\frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot\varphi^2+\frac{3}{4}\alpha\beta\dot\varphi\dot\theta+\beta^2\dot\theta^2\Big]-\sqrt{3}\gamma\lambda\Big(\varphi-\frac{1}{\lambda\sqrt{3}}\Big)^2-\delta\lambda^2\theta^2\,.$$

15. [12/9/2008 (ex)II] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot\varphi^2+\frac{\alpha\beta}{1+\lambda^2\theta^2}\dot\varphi\dot\theta+\beta^2\dot\theta^2\Big]-\gamma\varphi(\lambda^2\varphi^2-4)-\delta(e^{\frac{\lambda\theta}{2}}+e^{-\frac{\lambda\theta}{2}})\,,$$

con α, β, γ, δ, $\lambda>0$ costanti e φ, $\theta\in(-\infty,\infty)$ coordinate lagrangiane. Determinare i punti di equilibrio del sistema e, ove possibile, scrivere la lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$.
R.

$$\Big(\frac{2}{\lambda\sqrt{3}},0\Big)\,,\qquad \Big(-\frac{2}{\lambda\sqrt{3}},0\Big)\,.$$

In $(2/\lambda\sqrt{3},0)$

$$\mathcal{L}^*(\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta)=\frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot\varphi^2+\alpha\beta\dot\varphi\dot\theta+\beta^2\dot\theta^2\Big]-2\sqrt{3}\gamma\lambda\Big(\varphi-\frac{2}{\lambda\sqrt{3}}\Big)^2-\frac{1}{4}\delta\lambda^2\theta^2\,.$$

16. [12/2/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha x_1^2 \,,$$

ed è soggetto alla forza elastica

$$\boldsymbol{F}_e = -k\overrightarrow{OP} \,,$$

e al peso

$$\boldsymbol{F}_p = -mg\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui α, k sono costanti positive.
Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni nell'unica posizione di equilibrio.

Soluzione

Usiamo come coordinate lagrangiane $x = x_1$, $y = x_2$.
Dunque

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(x,y) &= x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + \alpha x^2 \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(x,y)}{\mathrm{d}t} &= \dot{x}\boldsymbol{e}_1 + \dot{y}\boldsymbol{e}_2 + 2\alpha\dot{x}x\boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

per cui

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m\big[(1+4\alpha^2x^2)\dot{x}^2 + \dot{y}^2\big] \,.$$

Il potenziale è

$$U = -mgx_3 - \frac{k}{2}\left|OP\right|^2 \,,$$

per cui in coordinate lagrangiane

$$U^{\mathrm{L}} = -mg\alpha x^2 - \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + \alpha^2 x^4) \,.$$

Quindi i punti di equilibrio si trovano risolvendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} &= -2mg\alpha x - kx - 2k\alpha^2 x^3 = 0 \,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial y} &= -ky = 0 \,. \end{aligned}$$

L'unica soluzione è

$$(x,y) = (0,0) \,,$$

ove

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0,0) = \operatorname{diag}\big(-2mg\alpha - k, -k\big) \,.$$

Pertanto la posizione di equilibrio è stabile, e sono in essa definite le piccole oscillazioni.
Si sa che le $\omega_i/(2\pi)$ sono le frequenze cercate, se le ω_i risolvono

$$\det\big(\omega^2\boldsymbol{\mathcal{A}} + D^2U^{\mathrm{L}}(0,0)\big) = 0 \,,$$

ove

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \operatorname{diag}(m, m)$$

è la matrice associata alla forma quadratica dell'energia cinetica nella posizione di equilibrio. L'equazione per le ω_i infine è

$$\det \operatorname{diag}\big(\omega^2 m - 2mg\alpha - k, \omega^2 m - k\big) = (\omega^2 m - 2mg\alpha - k)(\omega^2 m - k) = 0\,.$$

R.

$$\omega_1 = \sqrt{2g\alpha + \frac{k}{m}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

17. [12/2/2009 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_2 = \alpha x_1^2\,,$$

ed è soggetto alla forza elastica

$$\boldsymbol{F}_e = -k\overrightarrow{OP}\,,$$

e al peso

$$\boldsymbol{F}_p = -mg\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui α, k sono costanti positive.
Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni nell'unica posizione di equilibrio.
R.

$$\omega_1 = \sqrt{2g\alpha + \frac{k}{m}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

18. [12/6/2009 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2 = \beta \sin \alpha x_1\,, \qquad 0 < x_1 < \frac{2\pi}{\alpha}\,.$$

Qui α, β sono costanti positive. Sull'asta agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_2.
Determinare:

1. La lagrangiana del sistema.
2. I punti di equilibrio, e, ove possibile, scrivere le equazioni di Lagrange ridotte e determinare le frequenze normali.

Soluzione

1) Scegliamo

$$x = x_{1A}\,, \quad x \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi)\,,$$

come coordinate lagrangiane, ove φ *è l'angolo tale che l'asta sia parametrizzata da*

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(x, \varphi; s) = \overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}(s) = (x + s\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (\beta\sin\alpha x + s\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2\,.$$

Così, per $s = L$ *si ottiene il centro di massa* C *dell'asta, e*

$$\boldsymbol{v}_C = (\dot{x} - L\dot{\varphi}\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (\alpha\beta\dot{x}\cos\alpha x + L\dot{\varphi}\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2\,.$$

Dunque per il teorema di König

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{L}} &= \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_C|^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\big\{(\dot{x} - L\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (\alpha\beta\dot{x}\cos\alpha x + L\dot{\varphi}\cos\varphi)^2\big\} + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\big\{\dot{x}^2(1 + \alpha^2\beta^2\cos^2\alpha x) + L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{x}\dot{\varphi}(-\sin\varphi + \alpha\beta\cos\alpha x\cos\varphi)\big\} + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2\,. \end{aligned}$$

Il potenziale è

$$U^{\mathrm{L}} = -mg(L\sin\varphi + \beta\sin\alpha x)\,.$$

2) Per trovare i punti di equilbrio cerchiamo i punti critici del potenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} &= -mg\alpha\beta\cos\alpha x = 0\,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= -mgL\cos\varphi = 0\,. \end{aligned}$$

Le soluzioni sono quindi date da tutte le possibili scelte di

$$x = \frac{\pi}{2\alpha}\,, \frac{3\pi}{2\alpha}\,, \qquad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}\,.$$

Come è noto, le piccole oscillazioni si possono definire nei punti critici dove la matrice hessiana è definita negativa. L'hessiana è data da

$$D^2U^{\mathrm{L}}(x, \varphi) = mg\begin{pmatrix} \alpha^2\beta\sin\alpha x & 0 \\ 0 & L\sin\varphi \end{pmatrix}\,.$$

Dunque la matrice è definita negativa solo nei punti critici ove entrambi gli elementi sulla diagonale principale sono negativi, ossia in $(3\pi/2\alpha, -\pi/2)$, *ove*

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} = D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{3\pi}{2\alpha}, -\frac{\pi}{2}\Big) = mg\begin{pmatrix} -\alpha^2\beta & 0 \\ 0 & -L \end{pmatrix}\,.$$

Qui si ha

$$U^*(x, \varphi) = -\frac{1}{2}mg\alpha^2\beta\Big(x - \frac{3\pi}{2\alpha}\Big)^2 - \frac{1}{2}mgL\Big(\varphi + \frac{\pi}{2}\Big)^2\,,$$

e

$$T^*(x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\big\{m\dot{x}^2 + 2mL\dot{x}\dot{\varphi} + (L^2m + I)\dot{\varphi}^2\big\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{x} & \dot{\varphi}\end{pmatrix}\boldsymbol{\mathcal{A}}\begin{pmatrix}\dot{x} \\ \dot{\varphi}\end{pmatrix}\,.$$

È noto che le frequenze normali si calcolano risolvendo

$$\det(\boldsymbol{\mathcal{A}}\omega^2 + \boldsymbol{\mathcal{U}}) = 0\,,$$

ossia

$$mI\omega^4 - mg\big[mL + \alpha^2\beta(mL^2 + I)\big]\omega^2 + m^2g^2L\alpha^2\beta = 0\,.$$

R.

1) $$\mathcal{L}(x,\varphi,\dot{x},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\big\{\dot{x}^2(1 + \alpha^2\beta^2\cos^2\alpha x) + L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{x}\dot{\varphi}(-\sin\varphi + \alpha\beta\cos\alpha x\cos\varphi)\big\} + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 - mg(L\sin\varphi + \beta\sin\alpha x)\,.$$

2) $\left(\frac{\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2\alpha},-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2\alpha},-\frac{\pi}{2}\right)$;

In $\left(\frac{3\pi}{2\alpha},-\frac{\pi}{2}\right)$ *si ha:*

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\big[mL + \alpha^2\beta(mL^2 + I)\big] \pm \sqrt{\Big\{mg\big[mL + \alpha^2\beta(mL^2 + I)\big]\Big\}^2 - 4m^3g^2L\alpha^2\beta I}}{2mI}}\,.$$

19. [12/6/2009 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2 = \alpha\cos\beta x_1\,, \qquad -\frac{\pi}{2\beta} < x_1 < \frac{3\pi}{2\beta}\,.$$

Qui α, β sono costanti positive. Sull'asta agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_2.
Determinare:

1. La lagrangiana del sistema.
2. I punti di equilibrio, e, ove possibile, scrivere le equazioni di Lagrange ridotte e determinare le frequenze normali.

R.

1) $$\mathcal{L}(x,\varphi,\dot{x},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\big\{\dot{x}^2(1 + \alpha^2\beta^2\sin^2\beta x) + L^2\dot{\varphi}^2 - 2L\dot{x}\dot{\varphi}(\sin\varphi + \alpha\beta\sin\beta x\cos\varphi)\big\} + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 - mg(L\sin\varphi + \alpha\cos\beta x)\,.$$

2) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{\beta},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{\beta},-\frac{\pi}{2}\right)$;

In $\left(\frac{\pi}{\beta},-\frac{\pi}{2}\right)$ *si ha:*

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\big[mL + \alpha\beta^2(mL^2 + I)\big] \pm \sqrt{\Big\{mg\big[mL + \alpha\beta^2(mL^2 + I)\big]\Big\}^2 - 4m^3g^2L\alpha\beta^2 I}}{2mI}}\,.$$

20. [11/9/2009 (ex)I] Un sistema olonomo con due gradi di libertà ha lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big(\alpha^2\dot\varphi^2 + \frac{2\alpha\beta}{2+\alpha^2\varphi^2}\dot\varphi\dot\theta + \beta^2\dot\theta^2\Big) + U(\varphi,\theta)\,,$$

ove il potenziale U è dato da

$$U(\varphi,\theta) = e^{\lambda\varphi^2}(1-\mu\theta^2) + e^{\gamma\theta^3}(1-\delta\varphi^2)\,.$$

Qui α, β, γ, δ, λ, μ, sono costanti positive.
Determinare condizioni su tali costanti perché

$$(\varphi,\theta) = (0,0)$$

sia un punto di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni, e trovare le frequenze normali di queste ultime.
Soluzione
Troviamo i punti di equilibrio come punti critici del potenziale

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial\varphi} &= 2\lambda\varphi e^{\lambda\varphi^2}(1-\mu\theta^2) - 2\delta\varphi e^{\gamma\theta^3}\,,\\ \frac{\partial U}{\partial\theta} &= -2\mu\theta e^{\lambda\varphi^2} + 3\gamma\theta^2 e^{\gamma\theta^3}(1-\delta\varphi^2)\,.\end{aligned}$$

Quindi $\nabla U(0,0)=0$*, e perciò* $(0,0)$ *è in effetti un punto di equilibrio.*
Calcoliamo poi la matrice hessiana

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} &= 2\lambda e^{\lambda\varphi^2}(1-\mu\theta^2) + 4\lambda^2\varphi^2 e^{\lambda\varphi^2}(1-\mu\theta^2) - 2\delta e^{\gamma\theta^3}\,,\\ \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi\partial\theta} &= -4\lambda\mu\varphi\theta e^{\lambda\varphi^2} - 6\gamma\delta\varphi\theta^2 e^{\gamma\theta^3}\,,\\ \frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} &= -2\mu e^{\lambda\varphi^2} + 6\gamma\theta e^{\gamma\theta^3}(1-\delta\varphi^2) + 9\gamma^2\theta^4 e^{\gamma\theta^3}(1-\delta\varphi^2)\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$D^2U(0,0) = \begin{pmatrix} 2(\lambda-\delta) & 0\\ 0 & -2\mu\end{pmatrix}\,.$$

Perciò l'hessiana è definita negativa se e solo se $\delta>\lambda$*.*
Le frequenze normali si trovano risolvendo

$$\det(\omega^2\boldsymbol{\mathcal{A}}+\boldsymbol{\mathcal{U}}) = \begin{vmatrix}\alpha^2\omega^2 - 2(\delta-\lambda) & \frac{\alpha\beta}{2}\omega^2\\ \frac{\alpha\beta}{2}\omega^2 & \beta^2\omega^2 - 2\mu\end{vmatrix} = 0\,.$$

R.

$$\delta>\lambda;\qquad \frac{3\alpha^2\beta^2}{4}\omega^4 - 2\big[\beta^2(\delta-\lambda)+\alpha^2\mu\big]\omega^2 + 4\mu(\delta-\lambda) = 0\,.$$

21. [11/9/2009 (ex)II] Un sistema olonomo con due gradi di libertà ha lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big(\alpha^2\dot\varphi^2 + \frac{2\alpha\beta}{2+\alpha^2\varphi^2}\dot\varphi\dot\theta + \beta^2\dot\theta^2\Big) + U(\varphi,\theta)\,,$$

ove il potenziale U è dato da

$$U(\varphi,\theta) = e^{\lambda\theta^2}(1-\mu\varphi^2) + e^{\gamma\varphi^3}(1-\delta\theta^2)\,.$$

Qui α, β, γ, δ, λ, μ, sono costanti positive.
Determinare condizioni su tali costanti perché

$$(\varphi,\theta) = (0,0)$$

sia un punto di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni, e trovare le frequenze normali di queste ultime.
R.

$$\delta > \lambda; \qquad \frac{3\alpha^2\beta^2}{4}\omega^4 - 2\big[\beta^2\mu + \alpha^2(\delta-\lambda)\big]\omega^2 + 4\mu(\delta-\lambda) = 0\,.$$

22. [22/2/2010 (ex)I] Un'asta AB di massa M e lunghezza $2L$ è vincolata ad avere l'estremo A sulla parabola

$$x_2 = \alpha x_1^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

e a giacere sul piano $x_3 = 0$. Qui α è una costante positiva.
Sull'asta agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_2.
Trovare tutte le posizioni di equilibrio dell'asta, e studiarne la stabilità.
Soluzione
Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1A} \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \varphi \in (-\pi,\pi)\,,$$

tale che

$$\overrightarrow{AB} = 2L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + 2L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

Il potenziale del peso è

$$U^{\mathrm{L}} = -mgx_{2G} = -mg(\alpha x^2 + 2L\sin\varphi)\,.$$

Troviamone i punti critici; dato che

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} = -2mg\alpha x\,,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = -2mgL\cos\varphi\,,$$

i punti critici sono

$$\Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) , \qquad \Big(0, -\frac{\pi}{2}\Big) .$$

È poi facile vedere in modo diretto per la forma di $U^{\mathrm{L}}(x, \varphi)$ *che* $(0, -\pi/2)$ *è un punto di massimo isolato, mentre* $(0, \pi/2)$ *è un punto sella. Quindi solo il primo è di equilibrio stabile.*
R.

$$\Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) , \quad \textit{(instabile);} \qquad \Big(0, -\frac{\pi}{2}\Big) , \quad \textit{(stabile).}$$

23. [22/2/2010 (ex)II] Un'asta AB di massa M e lunghezza $2L$ è vincolata ad avere l'estremo A sulla parabola

$$x_2 = \alpha x_1^4 , \qquad x_3 = 0 ,$$

e a giacere sul piano $x_3 = 0$. Qui α è una costante positiva.
Sull'asta agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_2.
Trovare tutte le posizioni di equilibrio dell'asta, e studiarne la stabilità.
R.

$$\Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) , \quad \textit{(instabile);} \qquad \Big(0, -\frac{\pi}{2}\Big) , \quad \textit{(stabile).}$$

24. [8/7/2010 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a mantenere l'estremo A sulla circonferenza verticale γ di raggio R, e a giacere nel piano ortogonale a γ in A. Si assuma $R > L$.
Scrivere le equazioni delle piccole oscillazioni nei punti di equilibrio ove questo è possibile.
Soluzione
Scegliamo il sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$ *in modo che* O *sia il centro di* γ*, e questa giaccia nel piano* $x_3 = 0$*. Il peso sia diretto come* $-\boldsymbol{e}_2$*.*
Introduciamo coordinate lagrangiane $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *e* $\theta \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ *tali che*

$$\overrightarrow{OA} = R \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 ,$$
$$\overrightarrow{AB} = 2L \cos\theta (\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2) + 2L \sin\theta \boldsymbol{e}_3 .$$

Dunque l'asta risulta parametrizzata da

$$\overrightarrow{OP(s)} = (R + s\cos\theta)(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2) + s \sin\theta \boldsymbol{e}_3 , \qquad 0 \le s \le 2L ,$$

cosicché

$$\boldsymbol{v}(s) = \dot\varphi (R + s\cos\theta)(-\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2) - s\dot\theta \sin\theta (\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2) + s\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{e}_3 .$$

Detto C *il centro dell'asta, il potenziale della forza peso è*

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = -Mg x_{2C} = -Mg[R \sin\varphi + L \cos\theta \sin\varphi] .$$

L'energia cinetica è data da

$$
\begin{aligned}
T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\int_{AB} |\boldsymbol{v}(s)|^2 \rho \,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\frac{M}{2L}\int_0^{2L} [\dot\varphi^2 (R + s\cos\theta)^2 + s^2\dot\theta^2 \sin^2\theta + s^2\dot\theta^2\cos^2\theta]\,\mathrm{d}s \\
&= M\dot\varphi^2\Big(\frac{R^2}{2} + LR\cos\theta + \frac{2}{3}L^2\cos^2\theta\Big) + \frac{2}{3}ML^2\dot\theta^2 \,.
\end{aligned}
$$

Troviamo le posizioni di equilibrio cercate, risolvendo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= -Mg(R + L\cos\theta)\cos\varphi = 0\,, \\
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= MgL\sin\theta\sin\varphi = 0\,.
\end{aligned}
$$

Le soluzioni (φ, θ) *sono date da*

$$
\Big(\frac{\pi}{2}, 0\Big)\,, \qquad \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big)\,, \qquad \Big(-\frac{\pi}{2}, 0\Big)\,, \qquad \Big(-\frac{\pi}{2}, \pi\Big)\,.
$$

La matrice hessiana è

$$
D^2U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} Mg(R + L\cos\theta)\sin\varphi & MgL\sin\theta\cos\varphi \\ MgL\sin\theta\cos\varphi & MgL\cos\theta\sin\varphi \end{pmatrix}\,.
$$

Perciò l'unico punto di equilibrio ove D^2U^{L} *risulta definita negativa è*

$$
\Big(-\frac{\pi}{2}, 0\Big)\,.
$$

Dunque, ponendo $q_1 = \varphi + \pi/2$, $q_2 = \theta$, *si ha*

$$
\begin{aligned}
T^* &= M\Big(\frac{R^2}{2} + LR + \frac{2}{3}L^2\Big)\dot q_1^2 + \frac{2}{3}ML^2\dot q_2^2\,, \\
U^* &= \frac{1}{2}D^2U^{\mathrm{L}}\Big(-\frac{\pi}{2}, 0\Big)\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q} = -\frac{1}{2}Mg(R+L)q_1^2 - MgLq_2^2\,.
\end{aligned}
$$

R.

$$
\begin{aligned}
2M\Big(\frac{R^2}{2} + LR + \frac{2}{3}L^2\Big)\ddot q_1 + Mg(R+L)q_1 &= 0\,, \\
\frac{4}{3}ML^2\ddot q_2 + MgLq_2 &= 0\,.
\end{aligned}
$$