DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA A.A. 2019-2020 CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE

DANIELE ANDREUCCI, EMILIO CIRILLO
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo [MMM] si riferiscono al testo *Meccanica Razionale, Modelli Matematicici per l'Ingegneria*, D. Andreucci, edizioni La Dotta. Quelli al testo [C] si riferiscono al testo *Appunti delle Lezioni di Meccanica Razionale per l'Ingegneria*, E.M.N. Cirillo, edizioni Compomat.
La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m, nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

1. Lunedì 23/09/2019
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Presentazione del corso.
Il moto di un punto come funzione vettoriale. Significato della continuità del moto.
Grafico (linea di universo) e orbita (traiettoria) di un moto.

Esempio 1.1. Grafico e orbita del moto rettilineo uniforme e del moto circolare uniforme. □

Esempio di un moto di classe C^2 ma con orbita con uno spigolo:

$$\boldsymbol{X}(t) = t^3 \boldsymbol{e}_1 + |t|^3 \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Confronto con il caso del grafico di una funzione scalare.
Definizione di retta tangente per la traiettoria di un moto.

Teorema 1.2. *Se un moto ammette retta tangente, allora è derivabile e la sua derivata è il vettore tangente, e viceversa se un moto è derivabile e la derivata è diversa da zero, allora ammette retta tangente..*

Velocità e accelerazione. Passaggio dall'accelerazione al moto, condizioni iniziali.

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.1, 1.2.

2. Mercoledì 25/09/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Prodotto scalare di vettori di $\boldsymbol{R}^N$ e sue proprietà.
Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz; angolo tra due vettori. Vettori ortogonali.
Forma trigonometrica delle componenti dei versori in $\boldsymbol{R}^2$ e in $\boldsymbol{R}^3$.
Prodotto vettoriale di vettori di $\boldsymbol{R}^3$ e sue proprietà.
Formula $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$.
Derivate dei prodotti tra vettori; linearità dell'integrale di vettori rispetto ai prodotti vettoriale e scalare (con un vettore costante).
Basi ortonormali. Matrici di cambiamento di base $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$. Si ha $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = {\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}^{\mathrm{t}}$.

Teorema 2.1. *Se $\boldsymbol{a}$ ha componenti $\boldsymbol{\lambda}$ in $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{\mu}$ in $\mathcal{N}$, allora $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}\boldsymbol{\lambda}$.*

Definizione di matrice ortogonale.

Teorema 2.2. *Le matrici di cambiamento di base sono ortogonali: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = (\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}})^{-1}$. Quindi il loro determinante ha valore assoluto pari a* 1.

Definizione di base ortonormale positiva.

Per casa 2.3. Dati

$$\boldsymbol{u}_1 = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta) , \quad \boldsymbol{u}_2 = (\alpha, \beta, 0) ,$$

con φ, $\theta \in \boldsymbol{R}$ assegnati, scegliere α, β e trovare $\boldsymbol{u}_3$ in modo che $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ sia una base ortonormale. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.4, 9.1.

3. Giovedì 26/09/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Teorema 3.1. *Composizione delle matrici del cambiamento di base:* $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{MP}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{MN}}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{NP}}$.

Prodotto triplo in $\boldsymbol{R}^3$.

Teorema 3.2. *Se* $(\boldsymbol{u}_h)$ *è una base ortonormale positiva di* $\boldsymbol{R}^3$*, allora*

$$\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \,, \quad \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{u}_2 \,, \quad \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Corollario 3.3. *Se* $(\boldsymbol{u}_h)$ *è una base ortonormale positiva,*

$$\boldsymbol{a} = \sum_{h=1}^{3} \alpha_h \boldsymbol{u}_h \,, \qquad \boldsymbol{b} = \sum_{h=1}^{3} \beta_h \boldsymbol{u}_h \,,$$

allora

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} .$$

Definizione di sistema di riferimento in $\boldsymbol{R}^3$. Cambiamento di coordinate.
Definizione di sistema di riferimento mobile in $\boldsymbol{R}^3$.

Esempio 3.4. Moto $\boldsymbol{X}(t) = (L + ct)\boldsymbol{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ con origine mobile nell'origine del sistema fisso e base ruotante intorno all'asse $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

□

Per casa 3.5. 1) Calcolare le derivate $\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h/\,\mathrm{d}t$ nel caso dell'Esempio precedente.
2) Nel caso del sistema mobile con $\mathcal{M}$ data dalla terna canonica, trovare tutti i moti che hanno coordinate mobili costanti.
3) Siano, nel caso di un sistema mobile generico, $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ due moti con coordinate mobili costanti. Dimostrare che $|\boldsymbol{X}_1(t) - \boldsymbol{X}_2(t)|$ si mantiene costante. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 9.1, 10.1, 10.2.

4. Venerdì 27/09/2019
(Cirillo) (Aula 5: 08-10)

Presentazione del corso.
Sollecitazione, sistema di vettori applicati, retta di applicazione, somma e momento totale, formula fondamentale per il campo momento e relative proprietà, trinomio invariante, asse della sollecitazione, campo costante, campo circolare e campo elicoidale.

Esempio 4.1. Esempi di sollecitazione a trinomio invariante nullo: sollecitazione costituita da una sola forza, coppia e sollecitazione piana. □

Sollecitazioni equivalenti e proprietà.

Esempio 4.2. Esempio delle sollecitazioni costituite da sistemi di vettori paralleli. □

Paragrafi di riferimento sul testo: C: 1.4, 17.2.

5. Lunedì 30/09/2019
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Idea di velocità relativa a un sistema di riferimento mobile.
Definizione di derivata di un vettore relativa a una base mobile.
Definizione di velocità relativa $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ e di accelerazione relativa $\boldsymbol{a}_{\mathcal{S}}$.
Regole di derivazione relativa.
Definizione di funzioni vettoriali costanti in una base mobile e di moti costanti (o solidali) in un sistema di riferimento mobile.

Esercizio 5.1. 1) Se $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ sono due moti solidali, allora $|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|$ è costante.
2) Calcolo delle derivate $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t}$ nel caso del sistema ruotante della lezione precedente. □

Teorema 5.2. *Data una terna mobile* $(\boldsymbol{u}_h)$ *esiste una sola funzione* $\boldsymbol{\omega}$ *tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_h \,,$$

per $h = 1, 2, 3$.

$\boldsymbol{\omega}$ si definisce velocità angolare di $(\boldsymbol{u}_h)$.
Approccio matriciale a $\boldsymbol{\omega}$: se $\boldsymbol{X}$ è solidale e $\boldsymbol{X}_O = 0$,

$$\dot{\boldsymbol{X}} = -\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{t}}\dot{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\boldsymbol{X} \,,$$

se $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}(t)\mathcal{P}}$, $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$.

Teorema 5.3. *Se* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *è ortogonale, allora* $-\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{t}}\dot{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ *è antisimmetrica.*

Teorema 5.4. *Se* $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ *è antisimmetrica e* 3×3, *esiste un vettore* $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^3$ *tale che* $\boldsymbol{\mathcal{C}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{x}$ *per ogni* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$.

Identificazione di $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{\omega}$.

Esercizio 5.5. Trovare tutti i moto solidali con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$. □

Teorema 5.6. *Per un moto* $\boldsymbol{X}$ *vale*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O) + \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \,.$$

Per casa 5.7. Trovare una base ortonormale che completi

$$\boldsymbol{u}_1 = -\frac{\cos(\alpha t)}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 - \frac{\sin(\alpha t)}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_3 \,,$$

e calcolarne la velocità angolare. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.3, 10.4, 10.5.

6. Mercoledì 02/10/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Teorema 6.1. *Per ogni* $\boldsymbol{a} \in C^1(\boldsymbol{R})$ *vale*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a} \,.$$

Teorema 6.2 (Moto relativo)**.** *Per un moto* $\boldsymbol{X}$ *vale*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O) + \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \,.$$

Teorema 6.3 (Coriolis)**.** *Per un moto* $\boldsymbol{X}$ *vale*

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O)] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O) + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{a}_{\mathcal{S}} \,.$$

Velocità di trascinamento. Accelerazione di trascinamento e di Coriolis.

Teorema 6.4. *Sia* $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{u}$ *con* $\boldsymbol{u}$ *versore. Allora*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} , \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} .$$

Velocità angolare della terna

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Ricostruzione della terna con $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$ e $\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha(t)\boldsymbol{u}_3(t)$.
Ricostruzione della terna con $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$ e $\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha(t)\boldsymbol{e}_3$.

Per casa 6.5. Determinare le velocità angolari delle rotazioni intorno agli assi $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$. □

Esercizio 6.6. 18, 23/340. □

Per casa 6.7. 4, 5, 26, 31/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.4, 10.5, 10.6.

7. Giovedì 03/10/2019

(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Definizione di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ di una terna $\mathcal{M}$ relativa a un'altra $\mathcal{N}$: per ogn $\boldsymbol{a} \in C^1(\boldsymbol{R})$ si ha

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{a}\,.$$

Teorema 7.1. (s.d.) *Se $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N}$ sono due terne mobili, esiste unica $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ tale che*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{u}_h\,, \qquad h = 1\,,2\,,3\,..$$

Le componenti di $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ si trovano in modo simile a quelle di $\boldsymbol{\omega}$.

Teorema 7.2. *Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ sono tre terne ortonormali positive:*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}\,.$$

Moti polari, e di rotazione, di un sistema di riferimento mobile. Moti di precessione regolare. Moti di traslazione.

Esercizio 7.3. 7, 9/340. □

Per casa 7.4. 8, 13, 15, 25/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.6, 10.7.

8. Venerdì 04/10/2019

(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

Trasformazioni di coordinate cartesiane e equazione della trasformazione di coordinate.
Rotazione attorno a un asse coordinato: definizione e deduzione delle equazioni della trasformazione di coordinate, Esempio 2.1.
Non abelianità del prodotto tra rotazioni, Esempio 2.2.
Angoli di Cardano e costruzione della matrice del cambiamento di base.

Paragrafi di riferimento sul testo: C: 2.1, 2.2.

9. Lunedì 07/10/2019
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Definizione di punto materiale. Legge del moto. Problema di Cauchy o ai valori iniziali.
Soluzioni massimali.
Funzioni localmente lipschitziane.

Teorema 9.1. (s.d.) *La soluzione massimale del problema di Cauchy per l'equazione $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}, t)$ esiste ed è unica se $\boldsymbol{F}$ è continua in un aperto $A \subset \boldsymbol{R}^7$ e localmente lipschitziana rispetto a $\boldsymbol{X}$, $\dot{\boldsymbol{X}}$.*
Il suo intervallo di definizione (σ, Σ) è aperto e per $t \to \Sigma-$ si deve avere che $(\boldsymbol{X}(t), \dot{\boldsymbol{X}}(t), t)$ diventa illimitata oppure la sua distanza da ∂A tende a 0.

Esempio 9.2. Risoluzione completa del problema

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{X}} &= -k\boldsymbol{X}\,, \\ \boldsymbol{X}(0) &= R\boldsymbol{e}_1\,, \\ \dot{\boldsymbol{X}}(0) &= c\boldsymbol{e}_2\,, \end{aligned}$$

con k, R, $c > 0$. La traiettoria è un'ellisse (percorsa infinite volte). □

Esercizio 9.3. Punto materiale che si muove sotto l'effetto dell'attrazione gravitazionale: caso del moto rettilineo. Il moto è definito su un intervallo limitato a destra. □

Per casa 9.4. 1, 2, 3/100.
Dare una condizione perché il moto

$$\boldsymbol{X}(t) = L\cos(\omega_1 t)\boldsymbol{e}_1 + L\cos(\omega_2 t)\boldsymbol{e}_2$$

sia periodico. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.3.

10. Mercoledì 09/10/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Energia cinetica T.

Teorema 10.1 (del lavoro o dell'energia cinetica)**.** *Se* $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}$, *allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \, \mathrm{d}t \, .$$

Definizione di lavoro di una forza.

Per casa 10.2. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{B} \times \dot{\boldsymbol{X}} \, , \\ \boldsymbol{X}(0) &= R\boldsymbol{e}_1 \, , \\ \dot{\boldsymbol{X}}(0) &= c\boldsymbol{e}_2 \, . \end{aligned}$$

Qui $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_3$, $B > 0$, $R > 0$, $c > 0$. Integrale dell'energia cinetica. □

Riduzione dell'ordine di un sistema differenziale, aumentando il numero delle variabili.

Esempio 10.3. Trovare tutte le soluzioni e le orbite di

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \, , \\ \dot{X}_2 &= -X_1 . \, . \end{aligned}$$

□

Per casa 10.4. Discutere il significato geometrico del parametro φ nella parametrizzazione dell'ellisse

$$x_1 = a \cos\varphi \, , \qquad x_2 = b \sin\varphi \, , \qquad \varphi \in [0, 2\pi] \, .$$

□

Dipendenza continua dai valori iniziali.

Esempio 10.5. Il caso scalare $\dot{x} = x$; il caso del moto con $\boldsymbol{F} = 0$. □

Stima di Gronwall per sistemi di ordine 1. Necessità di assumere intervalli limitati.

Per casa 10.6. Dimostrare la dipendenza continua per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \gamma\boldsymbol{X}$, m, $\gamma > 0$. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.5, 1.6, 1.8.

11. Giovedì 10/10/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Sistemi autonomi. Traslazione nel tempo delle soluzioni.
Punti di equilibrio; rapporto con le soluzioni costanti.

Esempio 11.1. Punti di equilbrio e idea di stabilità per $\dot{y} = y(y-1)$. □

Definizione di punto di equilibrio stabile.

Esempio 11.2. 1) Punti di equilibrio e (non) stabilità per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = 0$.
2) Punti di equilibrio e stabilità per la resistenza viscosa $m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\mu\dot{\boldsymbol{X}}$, $\mu > 0$. □

Per casa 11.3. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio per la resistenza idraulica (generalizzata)

$$m\ddot{X} = -\mu(\dot{X})^{1+q} ,$$

μ, $q > 0$. □

Esempio 11.4. Integrale generale del sistema lineare a coefficienti costanti del primo ordine

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{X} ,$$

nell'ipotesi che $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ abbia una base di autovettori reali con autovalori reali.
Studio della stabilità dell'origine (è stabile se e solo se tutti gli autovalori sono non positivi). □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.7.

12. Venerdì 11/10/2019
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

Angoli di Eulero e costruzione della matrice del cambiamento di base.
Esercizi sul calcolo della velocità angolare:
moto rotatorio (esempio 3.1),
moto con due cerniere perpendicolari (esempio 3.2),
generico moto sferico descritto con gli angoli di Eulero (esempio 3.11),
generico moto sferico descritto con gli angoli di Cardano (esempio 3.10).

Paragrafi di riferimento sul testo: C: 2.2, 3.2, 3.4.

13. Lunedìì 14/10/2019
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Calcolo del lavoro per la forza elastica e gravitazionale.
Definizioni di forza posizionale e conservativa. Potenziale.

Teorema 13.1. (Conservazione dell'energia) *Sia $\boldsymbol{F}$ conservativa con potenziale U. Allora la funzione*

$$\mathcal{E}(t) := \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

rimane costante durante il moto $\boldsymbol{X}$.

Teorema 13.2. *Sia $\boldsymbol{F}$ conservativa con potenziale U, e valga $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_0$, ove $\boldsymbol{F}_0$ fa lavoro nullo su ogni intervallo di tempo. Allora la funzione*

$$\mathcal{E}(t) := \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

rimane costante durante il moto $\boldsymbol{X}$.

Definizione di integrale primo di un sistema del II ordine; energia come integrale primo.

Esempio 13.3. 1) Il caso unidimensionale (conservativo) $\boldsymbol{F} = f(x_1)\boldsymbol{e}_1$.
2) Il caso non cnoservativo $\boldsymbol{F} = x_1\boldsymbol{e}_2$. □

Forze chiuse e conservative; se una forza è conservativa, allora è chiusa, ma non viceversa.

Esercizio 13.4. 1, 7/120. □

Per casa 13.5. 3, 8, 9/120;
ottenere stime sul moto dalla conservazione dell'energia per la forza gravitazionale. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.1, 2.2, 2.3, 2.4.

14. Mercoledì 16/10/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Forze conservative; criterio necessario e sufficiente della circuitazione nulla.
Criterio sufficiente di chiusura e dominio semplicemente connesso.

Esempio 14.1. La forza

$$-\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\boldsymbol{e}_1+\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\boldsymbol{e}_2\,,\qquad (x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2\setminus\{(0,0)\}\,,$$

e la sua primitiva locale φ (l'anomalia polare). □

Il caso conservativo unidimensionale. Passaggio da $m\ddot{x}=F(x)$ a

$$\dot{x}=p\,,\qquad \dot{p}=m^{-1}F(x)\,.$$

Orbite. Piano delle fasi (x,p). Conservazione dell'energia. La funzione

$$W(x,p)=\frac{m}{2}p^2-U(x)\,.$$

Le orbite giacciono su curve di livello $W=E$; hanno forma cartesiana

$$p=\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E+U(x))}\,,\quad x\in J(E):=\{x\mid E+U(x)\geq 0\}\,.$$

Teorema 14.2. *Se due orbite si intersecano allora coincidono.*

Teorema 14.3. *Se un'orbita si autointerseca, allora corrisponde a una soluzione periodica.*

Esempio 14.4. Diagramma di fase di $m\ddot{x}=-kx$, $k>0$. □

Verso di percorrenze sulle orbite; punti di equilibrio corrispondono a orbite degeneri.

Per casa 14.5. Tracciare il diagramma di fase di $m\ddot{x}=-k\sin x$, $k>0$. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.4, 2.5.

15. Giovedì 16/10/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Esempio 15.1. Diagramma di fase per $m\ddot{x} = -k \sin x$, $k > 0$. □

Linee di livello di $W(x, p) = mp^2/2 \pm kx^2/2$; punto di minimo e punto sella.
Relazione dei punti critici di W con i punti critici di $U(x)$. W non può avere minimi locali.

Teorema 15.2. *Sia $F \in C^1(A)$, A intervallo aperto. Sia $x_0 \in A$ e X soluzione massimale definita su (σ, Σ) tale che*

$$\lim_{t \to \Sigma-} X(t) = x_0 \,, \qquad \lim_{t \to \Sigma-} \dot{X}(t) = 0 \,.$$

Allora $\Sigma = +\infty$ e $F(x_0) = 0$.

Esercizio 15.3. Diagramma di fase per $U(x) = (x^2 - 4)^2/16$. □

Studio della pendenza delle orbite all'intersezione con l'asse $p = 0$, nel caso di punto di inversione e di punto di equilibrio instabile.

Per casa 15.4. 8/150. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.5, 2.6.

16. Venerdì 18/10/2019
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

Sistema rigido, riferimento solidale, rappresentazione cartesiana, velocità angolare, lavoro di una sollecitazione agente su un sistema rigido, velocità del punto solidale.
Atto di moto, formula fondamentale, trinomio invariante, proprietà.
Classificazione: atto traslatorio e rotatorio. Campo circolare e elicoidale. Esempi.

Paragrafi di riferimento sul testo: C: 14.1, 14.2, 14.3, 14.4.

17. Lunedì 21/10/2019
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Teorema 17.1. (Dirichlet) *Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X)$.*

Teorema 17.2. *Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X) - r(X, \dot{X})\dot{X}$, ove $r \geq 0$.*

Teorema 17.3. (s.d.) *(Dimensione $N > 1$). Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \nabla U(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})$, ove $\boldsymbol{h} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \leq 0$.*

Velocità e accelerazione in coordinate polari; velocità e accelerazione radiali e trasversali.
Velocità areolare.

Esempio 17.4. Se l'accelerazione trasversale è nulla, la velocità areolare è costante. □

Esercizio 17.5. 48/660. □

Per casa 17.6. 37, 45, 50/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.6, 2.8.

18. Mercoledì 23/10/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Forze a direzione radiale. Moti centrali.

Teorema 18.1. *In un moto centrale il vettore* $\boldsymbol{X}(t) \times \dot{\boldsymbol{X}}(t)$ *è costante.*

Teorema 18.2. *Sia* $\boldsymbol{X}$ *un moto centrale.*
1) Se $\boldsymbol{X}(t_0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(t_0) \neq 0$*, allora il moto avviene nel piano per* $\boldsymbol{X}(t_0)$ *perpendicolare al vettore* $\boldsymbol{X}(t_0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(t_0)$*.*
2) Se $\boldsymbol{X}(t_0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(t_0) = 0$*, allora il moto avviene sulla semiretta che parte dall'origine e include* $\boldsymbol{X}(t_0)$*.*

Equazioni del moto centrale scomposte nella base dei versori radiale e trasversale; l'accelerazione trasversale è nulla, quindi la velocità areolare è costante.
La formula di Binet (s.d.).

Teorema 18.3. *Una forza a direzione radiale è conservativa se e solo se è nella forma*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = F(|\boldsymbol{x}|)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,,$$

e allora il suo potenziale è (per $d > 0$ *arbitrario)*

$$U(\boldsymbol{x}) = \int_d^{|\boldsymbol{x}|} F(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Esercizio 18.4. 1/220 □

Per casa 18.5. 3, 5/220. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.8.

19. Giovedì 24/10/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Il teorema di Rolle non vale per le funzioni vettoriali.

Lemma 19.1. *Se $\boldsymbol{X} \in C([a, b])$, $a < b$, allora*

$$\left| \int_a^b \boldsymbol{X}(t) \, \mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |\boldsymbol{X}(t)| \, \mathrm{d}t \,.$$

Formula di Taylor per funzioni $\boldsymbol{X} \in C^2(I)$.
Lunghezza L di una curva come estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte nella curva: risulta poi

$$L = \int_a^b |\dot{\boldsymbol{X}}(t)| \, \mathrm{d}t$$

(la $\leq$ è ovvia dal Lemma sopra).
Definizione di ascissa curvilinea; riparametrizzazione di una curva regolare mediante l'ascissa curvilinea.
Traiettoria e legge oraria identificano il moto.
Versore tangente, normale principale, curvatura.
Terna intrinseca.
Scomposizione di velocità e accelerazione nella terna intrinseca.

Esercizio 19.2. Calcolo di tutte le quantità precedenti per un moto circolare. □

Per casa 19.3. Calcolare la terna intrinseca e la curvatura per

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 \,, \quad s \in \boldsymbol{R} \,.$$

Scegliere $\alpha > 0$ come funzione di R, $h > 0$ in modo che s sia l'ascissa curvilinea. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.1, 3.2, 3.3.

20. Venerdì 25/10/2019
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

Moto rigido di contatto, moto assoluto e relativo del punto di contatto, velocità di strisciamento.
Esempi di calcolo della velocità di strisciamento e relativa condizione di assenza di strisciamento: disco su guida rettilinea (esempio 14.8), disco su guida circolare (esempi 14.9 e problema 14.1), sfera appoggiata su un piano (esempio 14.10), cono su piano (esempio 14.12).

Paragrafi di riferimento sul testo: C: 14.5.

21. Lunedì 28/10/2019
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Prodotto scalare in componenti di basi ortonormali. Componente parallela e ortogonale di un vettore rispetto a un altro.
Moto vincolato a una curva. Necessità di introdurre ipotesi costitutive sulle reazioni vincolari.
Legge di attrito dinamico di Coulomb-Morin.
Sistema del moto per un vincolo scabro.

Teorema 21.1. *Il problema ai valori iniziali per il sistema del moto per un punto vincolato a una curva scabra, se le forze sono continue e localmente lipschitziane in* $(s, \dot{s})$*, ammette unica soluzione.*

Esercizio 21.2. 7/560; 21/620. □

Per casa 21.3. 3, 14, 21, 22/560. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.4, 3.5, 3.6.

22. Mercoledì 30/10/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Il vincolo di curva liscia. La componente tangente dell'equazione del moto è indipendente dalle 2 normali, che servono a determinare la reazione vincolare. (È in pratica il caso con attrito con coefficiente di attrito nullo.)

Esercizio 22.1. 25/560. □

Teorema 22.2. *Una curva con curvatura positiva è piana se e solo se* $\boldsymbol{B}(s)$ *è costante.*

Esempio 22.3. Vincoli mobili: punto materiale vincolato a circonferenza che trasla:

$$\boldsymbol{\psi}(s,t) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2 + \frac{ct^2}{2}\boldsymbol{e}_1\,,$$

soggetto al peso $-mg\boldsymbol{e}_2$.
Determinazione delle posizioni di equilibrio relativo. □

Il cerchio osculatore a una curva come migliore circonferenza approssimante.

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.7, 3.8.

23. Giovedì 31/10/2019
(*Andreucci*) (Aula 15: 10–12)

Superfici come superfici di livello e come superfici parametrizzate. Superfici regolari, normale alla superficie e vettori tangenti coordinati. Piano tangente; la velocità di un moto vincolato alla superficie appartiene al piano tangente.

Esempio 23.1. Parametrizzazioni della sfera e dell'iperboloide a una falda. □

L'accelerazione in coordinate locali.
Equazioni di moto per il vincolo liscio dato da uan superficie.

Teorema 23.2. *Sia* $\boldsymbol{r} \in C^3(D)$ *e* $\boldsymbol{F}^{\mathrm{L}}$ *funzione continua di* $\boldsymbol{q}$*,* $\dot{\boldsymbol{q}}$*,* t *e localmente lipschitziana in* $\boldsymbol{q}$*,* $\dot{\boldsymbol{q}}$*. Allora il problema del moto vincolato alla superficie con vincolo liscio ha una unica soluzione massimale.*

Esercizio 23.3. 7/620. □

Per casa 23.4. 5, 9, 11/120.
1, 3, 12/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 4.1, 4.2.

24. Lunedì 04/11/2019
(*Andreucci*) (Aula 15: 17-19)

Vincolo per superficie scabra. Anche per la superficie scabra vale il teorema di esistenza e unicità, usando la componente normale della reazione per ricavare quella tangente, se $\boldsymbol{v} \neq 0$.

Esempio 24.1. Caso della sfera; legge di decadimento del modulo della velocità per il moto di un punto non soggetto a forze direttamente applicate. □

Attrito statico; forze ammissibili per la quiete, coni di attrito per la superficie e la curva.

Esercizio 24.2. 1/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 4.4., 4.5.

25. Mercoledì 06/11/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Dinamica relativa. Forze apparenti, di trascinamento e di Coriolis.

Esercizio 25.1. Moto con resistenza idraulica in sistema mobile che trasla a velocità uniforme.
Equilibrio relativo a ellisse scabra ruotante. □

Per casa 25.2. 3, 5, 8, 9/580. □

Sistemi di punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, ..., $(\boldsymbol{X}_n, m_n)$. Vettore globale delle coordinate $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$. Il sistema del moto si può mettere nella forma

$$m\ddot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F} \,,$$

ove m è la matrice diagonale $\operatorname{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, \dots, m_n)$ e $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F}_1, \dots, \boldsymbol{F}_n) \in \boldsymbol{R}^{3n}$. Questo sistema è risolubile per i teoremi noti.
Centro di massa, quantità di moto, momento della quantità di moto, forza risultante, momento delle forze.
Equazioni cardinali (o globali) per un sistema di punti materiali. Le equazioni cardinali non determinano in genere il moto del sistema (se non è rigido).
Forze conservative per sistemi di punti materiali. Definizione di potenziale.

Teorema 25.3. *L'energia meccanica*

$$T(t) - U(\boldsymbol{z}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} |\dot{\boldsymbol{X}}_i(t)|^2 - U(\boldsymbol{z}(t)) \,,$$

si conserva lungo il moto di un sistema di punti materiali soggetti a forze conservative di potenziale U.

Esempio 25.4. Punto vincolato a piano ruotante intorno a un suo asse con velocità angolare costante. Calcolo della forza di Coriolis. □

Per casa 25.5. Calcolo della forza di trascinamento nel caso del piano ruotante. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.1, 5.2, 12.1.

26. Giovedì 07/11/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Conservazione dell'energia, anche in presenza di ulteriori forze che fanno lavoro complessivo nullo.
Esempi di vincoli per un singolo moto: superficie, curva come intersezione di due superficie.
Calcolo empirico dei gradi di libertà.
Superfici come superfici di livello di funzioni. Due superfici hanno intersezione regolare se non sono tangenti, ossia i due gradienti delle funzioni sono non paralleli; relazione con la caratteristica (o rango) della matrice iacobiana.
Cono: non è regolare nel vertice (ove il gradiente della funzione che ha il cono come superficie di livello si annulla).
Altri vincoli per due punti.
Vincolo di parallelismo per due moti (4 gradi di libertà); una delle componenti del prodotto vettoriale (che devono essere tutte nulle) risulta combinazione lineare delle altre, in certe configurazioni (ma non in altre).

Esercizio 26.1. 8/580, 9/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.2, 5.3, 5.4.

27. Venerdì 08/11/2019
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

Moto rigido piano: proprietà dell'atto di moto, centro di istantanea rotazione, base e rulletta.
Esempio dell'ellissografo (esempio 14.13).

Paragrafi di riferimento sul testo: C: 14.6.

28. Lunedì 11/11/2019
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Teorema del Dini (s.d.).
Coordinate dipendenti e indipendenti.
Definizione di vincoli olonomi regolari. Vincoli fissi e mobili. Gradi di libertà.

Esempio 28.1. 1) Vincolo per un singolo moto:

$$z_3 - a z_1 z_2 = 0\,, \qquad z_3 - bt = 0\,.$$

2) Vincolo per due moti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1 \boldsymbol{e}_1 + z_2 \boldsymbol{e}_2 + z_5 \boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_1 = z_3 \boldsymbol{e}_1 + z_4 \boldsymbol{e}_2 + z_6 \boldsymbol{e}_3\,,$$

dato da

$$z_1^2 + z_2^2 = R^2\,, \qquad (z_1 - z_3)^2 + z_2^2 = L^2\,,$$
$$z_4 = 0\,, \qquad z_5 = 0\,, \qquad z_6 = 0\,.$$

La configurazione $\boldsymbol{z} = (0, R, 0, 0, 0, 0)$ non è regolare ma è possibile se $R = L$. □

Esercizio 28.2. 9/580. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.5, 5.6.

29. Mercoledì 13/11/2019 *(Andreucci)* (Aula 15: 10-12)

La parametrizzazione data dalle coordinate indipendenti del teorema del Dini è cartesiana, quindi regolare.
Definizione di parametrizzazione lagrangiana $\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t)$. Le coordinate indipendenti sono lagrangiane.

Per casa 29.1. Determinare in quali ipotesi le parametrizzazioni di superfici e curve di $\boldsymbol{R}^3$ sono lagrangiane. Fare lo stesso per le coordinate polari nel piano. □

Definizione di spazio tangente. I vettori della base tangente sono le derivate parziali $\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}} / \partial q_h$.
Moto lagrangiano, rappresentazione lagrangiana del moto e della velocità.

Teorema 29.2. *Si ha*

$$\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}} = \sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial t} .$$

Il termine $\frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial t}$ *è nullo se i vincoli sono fissi.*

Esempio 29.3. Parametrizzazione lagrangiana di due moti allineati con l'origine, di cui il primo appartiene alla sfera con centro l'origine e raggio $R(t) > 0$. Calcolo delle velocità in forma lagrangiana. □

Definizione di $V^{\perp}$.

Teorema 29.4. (s.d.) *Se* $V \subset \boldsymbol{R}^N$ *è un sottospazio, allora* $V^{\perp}$ *è un sottospazio di* $\boldsymbol{R}^N$*, vale* $\dim V + \dim V^{\perp} = N$ *e* $(V^{\perp})^{\perp} = V$*,* $V \cap V^{\perp} = \{0\}$*.*

Corollario 29.5. (s.d.) *Per ogni* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^N$ *esistono unici* $[\boldsymbol{x}]_{\parallel} \in V$*,* $[\boldsymbol{x}]_{\perp} \in V^{\perp}$ *tali che* $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}]_{\parallel} + [\boldsymbol{x}]_{\perp}$*.*

Esempio 29.6. Calcolo di $V^{\perp}$ per
$V = \langle (1,0,1,0,0,0,0), (1,1,1,1,0,0,0) \rangle \subset \boldsymbol{R}^7$. □

Per casa 29.7. Calcolo di $V^{\perp}$ per $V = \langle (0,4,\pi) \rangle \subset \boldsymbol{R}^3$. □

Esercizio 29.8. 15/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.7, 6.1, 6.2.

30. Giovedì 14/11/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Atti di moto.
Vale per ogni $j \in \{1\,, \dots\,, \ell\}$, $k \in \{1\,, \dots\,, m\}$

$$\nabla_{\boldsymbol{z}}\, f_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\text{L}}}{\partial q_j} = 0\,.$$

Definizione di spazio normale come sottospazio di $\boldsymbol{R}^{n_c}$ generato dai $\nabla_z\, f_k$.

Teorema 30.1. *Lo spazio normale è l'ortogonale dello spazio tangente.*

In particolare lo spazio tangente è indipendente dalla parametrizzazione lagrangiana.

Teorema 30.2. *Gli atti di moto costituiscono lo spazio affine*

$$V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} + \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\text{L}}}{\partial t}\,.$$

Spostamenti virtuali e effettivi, e loro significato. Coincidono per i vincoli fissi.

Per casa 30.3. Calcolare spostamenti virtuali e effettivi per un moto vincolato al piano mobile (con $\alpha > 0$)

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0\,.$$

$\square$

Esempio 30.4. Sistema vincolato di due punti, con $n_c = 6$, $m = 1$,

$$f_1(z_1, \dots, z_6) = 2z_1 - z_4 = 0\,.$$

Inoltre le forze sono $\boldsymbol{F}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{F}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{e}_1$.
Equazioni di moto; ipotesi sulle reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$.
Soluzione esplicita quando le condizioni iniziali sono $\boldsymbol{z}(0) = 0$, $\dot{\boldsymbol{z}}(0) = 0$.
La $\mathbf{f}_{\text{vin}} = {\mathbf{f}_{\text{vin}}}^1 + {\mathbf{f}_{\text{vin}}}^2$ fa lavoro complessivo nullo, ma ciascuna ${\mathbf{f}_{\text{vin}}}^i$ fa lavoro non nullo sul moto $\boldsymbol{X}_i$. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.3, 7.1.

31. Venerdì 15/11/2019
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

Moti di precessione: asse di precessione e di figura, velocità di precessione e di rotazione propria, precessione diretta e retrograda.
Esercizio: precessione di un vettore.
Generalità sui sistemi di particelle: centro di massa, quantità di moto totale, energia cinetica totale, momento totale della quantità di moto, teorema dell'energia cinetica e del lavoro, osservatore del centro di massa e relative grandezze cinematiche, teorema di König, somma e momento totale della sollecitazione interna.

Paragrafi di riferimento sul testo: [C: 14.7, capitolo 9].

32. Lunedì 18/11/2019
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

L'ipotesi dei lavori virtuali.

Teorema 32.1. *L'ipotesi dei lavori virtuali determina il moto.*

Energia cinetica T^{L} in forma lagrangiana.

Teorema 32.2. *Vale*

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{p} + b_0 \, .$$

$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *è la matrice simmetrica data da*

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_k} \, ,$$

e $\boldsymbol{b}_1$ *e* b_0 *si annullano se* $\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}/\partial t = 0$.

Teorema 32.3. *La matrice* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *è definita positiva.*

Esercizio 32.4. 24/620; 37/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.2, 7.3, 7.5.

33. Mercoledì 20/11/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Componenti lagrangiane delle forze denotate da Q_h.

Lemma 33.1. *Valgono*

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial p_h}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}, t)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t), t)\Big) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)\,.$$

Notazione

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial}{\partial p_h}\,.$$

Teorema 33.2. (Equazioni di Lagrange) *Le ℓ equazioni*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial \dot{q}_h}\Big] - \frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} = Q_h\,, \quad h = 1\,, \dots\,, \ell\,,$$

sono equivalenti all'ipotesi dei lavori virtuali.

Esercizio 33.3. 64/620. □

Formule di Frenet-Serret.

Teorema 33.4. *La velocità angolare della terna intrinseca di una curva descritta da un moto di legge oraria $s(t)$ vale*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{s}(t)[-\tau(s(t))\boldsymbol{T}(s(t)) + k(s(t))\boldsymbol{B}(s(t))]\,.$$

Esercizio 33.5. 68/630. □

Per casa 33.6. 61, 65/620; 69/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.6, 10.8.

34. Giovedì 21/11/2019
(Cirillo) (Aula 15: 10-12)

Equazioni globali della dinamica e relative proprietà.
Centro di massa di un corpo rigido, proprietà di simmetria e metodi di calcolo. Il problema del corpo forato. Esempio del cono.

Paragrafi di riferimento sul testo: C: capitolo 9; 15.1, 15.2.

35. Venerdì 22/11/2019
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

Momento d'inerzia di un corpo rigido, metodi di calcolo, e teorema degli assi paralleli (Huygens). Il problema del corpo forato. Esempio del cono. Esempio: energia potenziale della sollecitazione centrifuga. Matrice d'inerzia, riferimento principale, proprietà di simmetria, esempio del quadrato (esempio 15.11).

Paragrafi di riferimento sul testo: C: 15.2, 15.3.

36. Lunedì 25/11/2019
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Sistemi di corpi rigidi vincolati. Coordinate locali.
Moti solidali a un corpo rigido del sistema; velocità di moti solidali in forma lagrangiana; energia cinetica del sistema.
Ipotesi dei lavori virtuali.

Teorema 36.1. (s.d.) *Le equazioni date dall'ipotesi dei lavori virtuali determinano il moto.*

Esercizio 36.2. 44/620. □

Per casa 36.3. 20, 47, 51/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 16.1, 16.2, 16.3.

37. Mercoledì 27/11/2019 *(Andreucci)* (Aula 15: 10-12)

Le equazioni di Lagrange per sistemi di corpi rigidi.
Forze conservative e componenti lagrangiane delle forze.

Teorema 37.1. *Se il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, si ha*

$$Q_h = \frac{\partial}{\partial q_h}[U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t))] \,, \qquad h = 1 \,, \dots \,, \ell \,.$$

Se i vincoli sono mobili l'energia in genere non si conserva anche se le forze direttamente applicate sono conservative.
Definizione di potenziale lagrangiano e forze conservative in senso lagrangiano.

Per casa 37.2. Se $\ell = 1$ e $Q_1 = Q_1(q_1, t)$ allora esiste il potenziale lagrangiano. □

Teorema 37.3. *Se i vincoli sono fissi e il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, l'energia*

$$T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})) \,,$$

si conserva lungo un moto lagrangiano che soddisfa l'ipotesi dei lavori virtuali.

Definizione di lagrangiana.
Equazioni di Lagrange in forma conservativa.

Teorema 37.4. *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})$. Allora se*

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}_0) = 0 \,, \qquad h = 1 \,, \dots \,, \ell \,,$$

la funzione costante $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0$ risolve le equazioni di Lagrange.

Teorema 37.5. *Nelle ipotesi del teorema precedente, se inoltre le forze direttamente applicate sono conservative in senso tradizionale, e $\boldsymbol{q}_0$ è un punto di massimo isolato per U^{L}, allora è di equilibrio stabile.*

Esercizio 37.6. 47/620. □

Per casa 37.7. 46, 47/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.1, 8.2, 8.4, 16.2, 16.3.

38. Giovedì 28/11/2019
(Cirillo) (Aula 15: 10-12)

Matrice d'inerzia, riferimento principale, proprietà di simmetria, esempio del quadrato (esempio 15.12). Grandezze cinematiche e matrice d'inerzia, tensore d'inerzia, proprietà di simmetria dei corpi rigidi,

Paragrafi di riferimento sul testo: C: 15.3, 15.4, 15.5.

39. Venerdì 29/11/2019
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

Ellissoide d'inerzia.
Equazioni cardinali per il corpo rigido libero e loro sufficienza, equazioni cardinali per il corpo rigido vincolato, moto del corpo rigido con asse fisso, caso ideale e equazione pura.

Paragrafi di riferimento sul testo: C: 15.6, 17.1, 17.3, 16.1, 17.4.

40. Mercoledì 04/12/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Piccole oscillazioni in punti di equilibrio, con hessiana del potenziale definita negativa, per sistemi vincolati da vincoli olonomi fissi e soggetti a forze conservative.
Lagrangiana ridotta.
Il caso 1-dimensionale: moto armonico.
Equazioni di Lagrange delle piccole oscillazioni nel caso $\ell > 1$:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\mathcal{U}}\boldsymbol{q} = 0\,.$$

Ricerca delle frequenze delle piccole oscillazioni con la sostituzione $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0 \cos(\omega t + \varphi)$; equazione $\det(\omega^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{U}}) = 0$.
Composizione di moti armonici non è necessariamente periodica; condizione dei periodi commensurabili.
Teorema di diagonalizzazione contemporanea di due forme quadratiche (s.d.).
Teorema di esistenza delle coordinate normali.

Esercizio 40.1. 6/680. □

Per casa 40.2. 10, 11/680. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 9.2, 9.3.

41. Giovedì 05/12/2019
(Cirillo) (Aula 15: 10-12)

Corpo rigido con asse fisso: bilanciamento statico e dinamico.
Corpo rigido con un punto fisso e equazioni di Eulero. Moti alla Poinsot: statica, leggi di conservazione.
Esercizio: moto sferico di un disco vincolato mediante due cerniere con assi mutuamente ortogonali (esempio 16.4).

Paragrafi di riferimento sul testo: C: 17.4, 17.5 e 17.5.1.

42. Venerdì 06/12/2019
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

Esercizio: moto sferico di un disco vincolato mediante due cerniere con assi mutuamente ortogonali (esempio 16.4).
Moti alla Poinsot: teorema di Poinsot, moti particolari, rotazioni permanenti, stabilità delle rotazioni permanenti.

Paragrafi di riferimento sul testo: C: 17.5, 17.5.1, 17.5.2.

43. Mercoledì 11/12/2018
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Commenti su equazioni di Lagrange e equazioni globali; nel caso del singolo corpo rigido quando si possono scrivere entrambe danno gli stessi moti.

Esercizio 43.1. Due circonferenze γ_1, γ_2 sono contenute nel piano $x_3 = 0$; γ_1 ha il centro nell'origine. La circonferenza γ_2 rotola senza strisciare sulla γ_1, mantenendosi esterna a essa. Trovare l'energia cinetica del sistema. □

Per casa 43.2. Stesso esercizio del precedente, con γ_2 interna a γ_1. □

Esercizio 43.3. 57/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 16.4.

44. Giovedì 12/12/2019
(Cirillo) (Aula 15: 10-12)

Moti alla Poinsot: stabilità delle rotazioni permanenti.
Trottola di Lagrange: discussione euristica, integrali primi.

Paragrafi di riferimento sul testo: C: 17.5.2, 17.5.3, 17.5.4.

45. Mercoledì 18/12/2019
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Esercizio 45.1. Esempio del paragrafo 12.3 MMM; 38/620; 37/660. □

Per casa 45.2. 58/620. □

46. Giovedì 19/12/2019
(Cirillo) (Aula 15: 10-12)

Trottola di Lagrange: equazioni pure del moto, analisi del moto, trottola lanciata velocemente.
Corpo rigido appoggiato su un piano liscio: statica e dinamica. Esercizi.

Paragrafi di riferimento sul testo: C: 17.5.5, 17.5.6, 17.5.7 (senza discussione dell'ampiezza della nutazione), 17.6, 17.7.

47. Venerdì 20/12/2019
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

Sfera appoggiata su un piano scabro.
Esercizi sull'uso delle equazioni cardinali.

Paragrafi di riferimento sul testo: C: 17.7.

FINE DEL CORSO