

**DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI
MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
A.A. 2020-2021
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA
AEROSPAZIALE**

DANIELE ANDREUCCI, EMILIO CIRILLO
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo [MMM] si riferiscono al testo *Meccanica Razionale, Modelli Matematici per l'Ingegneria*, D. Andreucci, edizioni La Dotta. Quelli al testo [C] si riferiscono al testo *Appunti delle Lezioni di Meccanica Razionale per l'Ingegneria*, E.M.N. Cirillo, edizioni Compomat. La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m , nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

1. LUNEDÌ 28/09/2019
(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Presentazione del corso.

Prodotto scalare di vettori di $\mathbf{R}^N$ anche in componenti in basi ortonormali.

Matrici di cambiamento di base $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MN}}$. Si ha $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MN}} = \mathbf{\Gamma}_{\mathcal{NM}}^t$.

Teorema 1.1. *Se $\mathbf{a}$ ha componenti λ in $\mathcal{M}$ e μ in $\mathcal{N}$, allora $\lambda = \mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MN}}\mu$, $\mu = \mathbf{\Gamma}_{\mathcal{NM}}\lambda$.*

Definizione di matrice ortogonale.

Teorema 1.2. (s.d.) *Le matrici di cambiamento di base sono ortogonali: $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MN}} = (\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{NM}})^{-1}$. Quindi il loro determinante ha valore assoluto pari a 1.*

Definizione di base ortonormale positiva.

Teorema 1.3. (s.d.) *Composizione delle matrici del cambiamento di base: $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MP}} = \mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MN}}\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{NP}}$.*

Le matrici ortogonali positive in $\mathbf{R}^2$ sono date da matrici di rotazione. Prodotto triplo in $\mathbf{R}^3$.

Teorema 1.4. *Se $(\mathbf{u}_h)$ è una base ortonormale positiva di $\mathbf{R}^3$, allora*

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3, \quad \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1.$$

Corollario 1.5. *Se $(\mathbf{u}_h)$ è una base ortonormale positiva,*

$$\mathbf{a} = \sum_{h=1}^3 \alpha_h \mathbf{u}_h, \quad \mathbf{b} = \sum_{h=1}^3 \beta_h \mathbf{u}_h,$$

allora

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 1.6. Esercizio D/R. □

Per casa 1.7. 5/100. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.4, 9.1, 10.1.

2. MERCOLEDÌ 30/09/2020
(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Definizione di sistema di riferimento in $\mathbf{R}^3$. Cambiamento di coordinate.

Definizione di sistema di riferimento mobile in $\mathbf{R}^3$.

Esempio 2.1. Moto $\mathbf{X}(t) = (L + ct)\mathbf{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ con origine mobile nell'origine del sistema fisso e base ruotante intorno all'asse $\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \cos(\alpha t) \mathbf{e}_1 + \sin(\alpha t) \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{u}_2 &= -\sin(\alpha t) \mathbf{e}_1 + \cos(\alpha t) \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

□

Idea di velocità relativa a un sistema di riferimento mobile. Definizione di derivata di un vettore relativa a una base mobile. Definizione di velocità relativa $\mathbf{v}_{\mathcal{S}}$ e di accelerazione relativa $\mathbf{a}_{\mathcal{S}}$.

Definizione di funzioni vettoriali costanti in una base mobile e di moti costanti (o solidali) in un sistema di riferimento mobile.

Per casa 2.2. Se $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ sono due moti solidali, allora $|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|$ è costante. □

Teorema 2.3. *Data una terna mobile $(\mathbf{u}_h)$ esiste una sola funzione $\boldsymbol{\omega}$ tale che*

$$\frac{d\mathbf{u}_h}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h,$$

per $h = 1, 2, 3$.

$\boldsymbol{\omega}$ si definisce velocità angolare di $(\mathbf{u}_h)$.

Teorema 2.4. *Per ogni funzione vettoriale derivabile $\mathbf{a}$ vale*

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt} \right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}.$$

Per casa 2.5. Calcolare la velocità angolare della terna mobile del primo esempio sopra. □

Esercizio 2.6. Esercizio D/R. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 9.1, 10.1, 10.2.

3. GIOVEDÌ 01/10/2020
(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Teorema 3.1 (del moto relativo). *Per un moto $\mathbf{X}$ vale*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_O) + \mathbf{v}_S.$$

Teorema 3.2 (Coriolis). *Per un moto $\mathbf{X}$ vale*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_O)] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_O) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_S + \mathbf{a}_S.$$

Velocità di trascinamento. Accelerazione di trascinamento e di Coriolis. La velocità di trascinamento dipende solo dalla posizione ed è la velocità assoluta dei moti solidali. Esempio.

Esercizio 3.3. Esercizio D/R. □

Teorema 3.4. *Sia $\boldsymbol{\omega} = \alpha \mathbf{u}$ con $\mathbf{u}$ versore. Allora*

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right]_{\mathcal{M}}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right]_{\mathcal{M}}.$$

Quindi $\boldsymbol{\omega}$ è costante (ha direzione costante) nella terna fissa se e solo se ha la stessa proprietà nella terna mobile (di cui è velocità angolare). Velocità angolare della terna

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{u}_2 &= -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Rotazione di una terna; moto polare, rotazione, traslazione di un sistema mobile di riferimento.

Ricostruzione della terna con $\mathbf{u}_h(0) = \mathbf{e}_h$ e $\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha(t)\mathbf{u}_3(t)$.

Teorema di esistenza e unicità di una terna $(\mathbf{u}_h)$ tale che per $\Omega(t, \mathbf{u}_h)$ assegnata opportunamente regolare valga

$$\frac{d\mathbf{u}_h}{dt} = \Omega \times \mathbf{u}_h,$$

e che assuma all'istante iniziale il valore di una terna assegnata.(s.d.)

Ricostruzione della terna con $\mathbf{u}_h(0) = \mathbf{e}_h$ e $\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha(t)\mathbf{e}_3$.

Per casa 3.5. Determinare le velocità angolari delle rotazioni intorno agli assi $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. □

Esercizio 3.6. 1/340. □

Per casa 3.7. 3, 15, 16/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.4, 10.5, 10.6.

4. VENERDÌ 02/10/2020
(CIRILLO) (AULA 15: 08-10)

Presentazione del corso.

L00. Sollecitazione, sistema di vettori applicati, retta di applicazione, somma e momento totale, formula fondamentale per il campo momento e relative proprietà, trinomio invariante, asse della sollecitazione, campo costante, campo circolare e campo elicoidale. Esempi: coppia, forza singola, sistema di forze parallele a un piano.

Sollecitazioni equivalenti e proprietà. Esempio del peso.

Paragrafi di riferimento sul testo: C: paragrafi 1.4 e 17.2.

5. LUNEDÌ 05/10/2020
(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Definizione di velocità angolare relativa $\omega_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ di una terna $\mathcal{M}$ rispetto a un'altra $\mathcal{N}$: per ogn $\mathbf{a} \in C^1(\mathbf{R})$ si ha

$$\left[\frac{d\mathbf{a}}{dt} \right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt} \right]_{\mathcal{M}} + \omega_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \mathbf{a}.$$

Teorema 5.1. (s.d.) *Se $\mathcal{M} = (\mathbf{u}_h)$, $\mathcal{N}$ sono due terne mobili, esiste unica $\omega_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ tale che*

$$\left[\frac{d\mathbf{u}_h}{dt} \right]_{\mathcal{N}} = \omega_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \mathbf{u}_h, \quad h = 1, 2, 3..$$

Le componenti di $\omega_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ si trovano in modo simile a quelle di ω .

Teorema 5.2. *Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ sono tre terne ortonormali positive:*

$$\omega_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \omega_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \omega_{\mathcal{N}\mathcal{M}}.$$

La composizione di rotazioni non è una rotazione in genere. Moti di precessione regolare.

Per casa 5.3. 24, 26, 28, 29/340. □

Esercizio 5.4. 15, 5/340.

Esercizio D/R.

6/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.7.

6. MERCOLEDÌ 07/10/2020
(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Il moto di un punto come funzione vettoriale. Velocità e accelerazione.
Passaggio dall'accelerazione al moto, condizioni iniziali.
Grafico (linea di universo) e orbita (traiettoria) di un moto.

Esempio 6.1. Grafico e orbita del moto circolare uniforme.
Caso 1-D. □

Esempio di un moto di classe C^2 ma con orbita con uno spigolo:

$$\mathbf{X}(t) = t^3 \mathbf{e}_1 + |t|^3 \mathbf{e}_2.$$

Definizione di retta tangente per la traiettoria di un moto.

Teorema 6.2. *Se un moto ammette retta tangente, allora la sua derivata è il vettore tangente, e viceversa se un moto ha derivata diversa da zero, allora ammette retta tangente.*

Confronto con il caso del grafico di una funzione scalare.

Esercizio 6.3. Risoluzione completa del problema per la forza elastica:

$$m\ddot{\mathbf{X}} = -k\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{v}_0.$$

□

Esercizio 6.4. Esercizio D/R.
24/340. □

Per casa 6.5. 1-4/100.

Dimostrare che se $x \in C^1(\mathbf{R})$, $x \geq 0$, $x(0) > 0$, $\dot{x} \geq -kx$, $k > 0$, allora $x(t) > 0$ per $t > 0$. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.1, 1.2, 1.3.

7. GIOVEDÌ 08/10/2020
(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Funzioni lipschitziane.

Teorema 7.1. (s.d.) *La soluzione massimale del problema di Cauchy per l'equazione $m\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$ esiste ed è unica se $\mathbf{F}$ è continua in un aperto $A \subset \mathbf{R}^7$ e localmente lipschitziana rispetto a $\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}$. Il suo intervallo di definizione (σ, Σ) è aperto e per $t \rightarrow \Sigma -$ si deve avere che $(\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), t)$ diventa illimitata oppure la sua distanza da ∂A tende a 0.*

Esercizio 7.2. Risoluzione del problema

$$m\ddot{\mathbf{X}} = -\gamma m \frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^3}, \quad \mathbf{X}(0) = L\mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = c\mathbf{e}_2.$$

□

Energia cinetica T e lavoro di una forza.

Teorema 7.3 (del lavoro o dell'energia cinetica). *Se $m\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}$, allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{X}} \, dt.$$

Esercizio 7.4. Esercizio D/R.

Risoluzione del problema

$$m\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{B} \times \dot{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{X}(0) = L\mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = c\mathbf{e}_2.$$

□

Per casa 7.5. 1. Risolvere tutti i problemi di Cauchy

$$m\ddot{\mathbf{X}} = -\mu\dot{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{v}_0;$$

qui $\mu > 0$ è costante.

2. Risolvere tutti i problemi di Cauchy

$$m\ddot{\mathbf{X}} = -\mu(t)\dot{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{v}_0;$$

qui $\mu(t) > 0$ è una funzione continua su $\mathbf{R}$. Dare una condizione su μ tale che $T(t) \not\rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.3, 1.5.

8. VENERDÌ 09/10/2020
(CIRILLO) (AULA 15: 08-10)

Generalità sui sistemi di particelle: centro di massa, quantità di moto totale, energia cinetica totale, momento totale della quantità di moto, teorema dell'energia cinetica e del lavoro, osservatore del centro di massa e relative grandezze cinematiche, teorema di König, somma e momento totale della sollecitazione interna. Equazioni globali della dinamica e relative proprietà.

Paragrafi di riferimento sul testo: C: capitolo 9.

9. LUNEDÌ 12/10/2020
(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Riduzione dell'ordine di un sistema differenziale, aumentando il numero delle variabili.

Teorema di esistenza e unicità per sistemi di equazioni differenziali del primo ordine. L'unicità segue dalla lipschitzianità.

Il caso della striscia. Vale

$$\left| \frac{d|\varphi|}{dt} \right| \leq |\dot{\varphi}|, \quad \text{se } \varphi \neq 0.$$

Teorema 9.1. Se $|\mathbf{F}(\varphi, t)| \leq C|\varphi| + C$ allora le soluzioni di $\dot{\varphi} = \mathbf{F}(\varphi, t)$ sono limitate sui limitati.

Dipendenza continua dai valori iniziali. Necessità di essere su intervalli limitati; caso scalare del primo ordine.

Esercizio 9.2. Caso dell'equazione $m\ddot{\mathbf{X}} = -\mu(t)\dot{\mathbf{X}}$; discussione dell'energia cinetica per $t \rightarrow +\infty$.

2/100. □

Per casa 9.3. Dimostrare la dipendenza continua per $m\ddot{\mathbf{X}} = k\mathbf{X}$, $m, k > 0$. □

Per casa 9.4. Trovare tutte le soluzioni di

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= -X_2, \\ \dot{X}_2 &= X_1.\end{aligned}$$

Trasformare il sistema anche in coordinate polari. □

Per casa 9.5. Sia $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1(\mathbf{R})$; si dimostri che le uniche soluzioni periodiche sono le costanti. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.6, 1.8.

10. MERCOLEDÌ 14/10/2020
(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Sistemi autonomi. Traslazione nel tempo delle soluzioni.
Punti di equilibrio e corrispondenza con le soluzioni costanti.

Esempio 10.1. Forza nulla. (Punti di equilibrio sono instabili)
Casi $m\ddot{\mathbf{X}} = \pm\mu\dot{\mathbf{X}}$, $\mu > 0$. (Stabili nel caso $-$ e instabili nel caso $+$.) $\square$

Definizione di punto di equilibrio stabile. I punti di equilibrio non stabili si dicono instabili.

Esempio 10.2. Punti di equilibrio e loro stabilità per $\dot{y} = y(y-1)$. $\square$

Per casa 10.3. 1) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio per la resistenza idraulica (generalizzata)

$$m\ddot{X} = -\mu(\dot{X})^{1+q},$$

$\mu, q > 0$.

2) Studiare la stabilità dell'origine per $\mathbf{F} = (ax_1 - x_2)\mathbf{e}_1 - x_2\mathbf{e}_2 - x_3\mathbf{e}_3$. $\square$

Esempio 10.4. Integrale generale del sistema lineare a coefficienti costanti del primo ordine

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X},$$

nell'ipotesi che la matrice $\mathbf{A}$ abbia una base di autovettori.

Studio della stabilità dell'origine (è stabile se e solo se tutti gli autovalori sono non positivi o con parte reale non positiva se complessi). $\square$

Forze conservative: criterio necessario della chiusura, necessario e sufficiente del lavoro nullo su tutte le curve chiuse, sufficiente della chiusura in semplicemente connessi.

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.7, 2.4.

11. GIOVEDÌ 15/10/2020
(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Calcolo del lavoro per la forza gravitazionale.

Teorema 11.1. (CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA) Sia $\mathbf{F}$ conservativa con potenziale U . Allora la funzione

$$\mathcal{E}(t) := \frac{m}{2} |\mathbf{v}(t)|^2 - U(\mathbf{X}(t))$$

rimane costante durante il moto $\mathbf{X}$.

Teorema 11.2. Sia $\mathbf{F}$ conservativa con potenziale U , e valga $m\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_0$, ove $\mathbf{F}_0$ fa lavoro nullo su ogni intervallo di tempo. Allora la funzione

$$\mathcal{E}(t) := \frac{m}{2} |\mathbf{v}(t)|^2 - U(\mathbf{X}(t))$$

rimane costante durante il moto $\mathbf{X}$.

Definizione di integrale primo di un sistema del II ordine; energia come integrale primo.

Esercizio 11.3. 9/120. □

Esercizio 11.4. Resistenza idraulica generalizzata e stabilità. □

Per casa 11.5. 3, 7, 8/120. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.1, 2.2, 2.3.

12. VENERDÌ 16/10/2020
(CIRILLO) (AULA 15: 08-10)

L10. Equazioni globali della dinamica e relative proprietà.

L03. Trasformazioni di coordinate cartesiane e equazione della trasformazione di coordinate. Rotazione attorno a un asse coordinato: definizione e deduzione delle equazioni della trasformazione di coordinate, Esempio 2.1. Non abelianità del prodotto tra rotazioni, Esempio 2.2. Angoli di Cardano e costruzione della matrice del cambiamento di base.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, capitolo 9, paragrafi 2.1 e 2.2.

13. LUNEDÌ 19/10/2020

(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Il caso conservativo unidimensionale. Passaggio da $m\ddot{x} = F(x)$ a

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = m^{-1}f(x).$$

Orbite. Piano delle fasi (x, p) . Conservazione dell'energia. Le orbite giacciono sulle curve che hanno forma cartesiana

$$p = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))}, \quad x \in J(E) := \{x \mid E + U(x) \geq 0\}.$$

Esempio 13.1. 1) diagramma di fase del moto $m\ddot{x} = -kx$;

2) diagramma di fase del moto $\ddot{x} = -k \sin(x)$. □

Punti di inversione, di equilibrio stabili e instabili riconosciuti dal ritratto di fase.

Esercizio 13.2. Esercizio D/R. □

Per casa 13.3. 21, 27/150. □

14. MERCOLEDÌ 21/10/2020
(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Teorema 14.1. *Se due orbite si intersecano allora coincidono.*

Teorema 14.2. *Se un'orbita si autointerseca, allora corrisponde a una soluzione periodica.*

Teorema 14.3. (s.d.) *Se una soluzione massimale di $\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, definita su (σ, Σ) soddisfa*

$$\lim_{t \rightarrow \Sigma} \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}_0, \quad |\dot{\mathbf{X}}(t)| \leq C, \quad t \in (\Sigma - \delta, \Sigma), \quad (14.1)$$

allora $\mathbf{x}_0$ è di equilibrio e $\Sigma = +\infty$. Se anche $\dot{\mathbf{X}}(t)$ ha limite, questo è zero.

Esercizio 14.4. 27/150. □

Energia come funzione W di p e x ; i punti critici di W corrispondono a posizioni di equilibrio. Il grafico delle linee di livello di W corrisponde al diagramma di fase del moto. Linee di livello di $W(x, p) = mp^2/2 \pm kx^2/2$; punto di minimo e punto sella.

Teorema 14.5. (DIRICHLET) *Se $\mathbf{x}_{\text{eq}}$ è un punto di massimo isolato per $U(x)$, allora è stabile.*

Esercizio 14.6. Esercizio di MMM 1.64: studiare la stabilità di $0 \in \mathbf{R}^3$ per il moto soggetto alla forza

$$\mathbf{F} = (ax_1 - x_2)\mathbf{e}_1 - x_2\mathbf{e}_2 - x_3\mathbf{e}_3.$$

□

Per casa 14.7. 6, 25/150.

17, 19, 37/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.5, 2.6.

15. GIOVEDÌ 22/10/2020
(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Teorema 15.1. (s.d.) (*Dimensione $N > 1$*). *Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{\mathbf{X}} = \nabla U(\mathbf{X}) + \mathbf{h}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$, ove $\mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{X}} \leq 0$.*

Esercizio 15.2. Esercizio D/R. □

Forze a direzione radiale. Moti centrali.

Teorema 15.3. *In un moto centrale il vettore $\mathbf{X}(t) \times \dot{\mathbf{X}}(t)$ è costante.*

Teorema 15.4. *Sia $\mathbf{X}$ un moto centrale.*

1) *Se $\mathbf{X}(t_0) \times \dot{\mathbf{X}}(t_0) \neq 0$, allora il moto avviene nel piano per $\mathbf{X}(t_0)$ perpendicolare al vettore $\mathbf{X}(t_0) \times \dot{\mathbf{X}}(t_0)$.*

2) *Se $\mathbf{X}(t_0) \times \dot{\mathbf{X}}(t_0) = 0$, allora il moto avviene sulla semiretta che parte dall'origine e include $\mathbf{X}(t_0)$.*

Velocità e accelerazione in coordinate polari; velocità e accelerazione radiali e trasversali.

Velocità areolare.

Equazioni del moto centrale scomposte nella base dei versori radiale e trasversale; l'accelerazione trasversale è nulla, quindi la velocità areolare è costante.

Teorema 15.5. *Una forza a direzione radiale è conservativa se e solo se è nella forma*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = F(|\mathbf{x}|) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|},$$

e allora il suo potenziale è (per $d > 0$ arbitrario)

$$U(\mathbf{x}) = \int_d^{|\mathbf{x}|} F(s) ds.$$

Esercizio 15.6. Esercizio D/R. □

Per casa 15.7. 1, 3, 5, 7/220. □

16. VENERDÌ 23/10/2020
(CIRILLO) (AULA 15: 08-10)

L03. Angoli di Eulero e costruzione della matrice del cambiamento di base.

L04. Esercizi sul calcolo della velocità angolare: moto rotatorio (esempio 3.1), moto con due cerniere perpendicolari (esempio 3.2), generico moto sferico descritto con gli angoli di Eulero (esempio 3.11), generico moto sferico descritto con gli angoli di Cardano (esempio 3.10).

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 2.2, 3.2 e 3.4.

17. LUNEDÌ 26/10/2020
(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Formula di Binet (s.d.).

Lunghezza L della traiettoria di un moto, definizione come estremo superiore delle lunghezze delle poligoni inscritte, risulta poi

$$L = \int_a^b |\dot{\mathbf{X}}(t)| dt$$

(la $\leq$ è ovvia dalla disuguaglianza del modulo per gli integrali).

Definizione di ascissa curvilinea; riparametrizzazione di una curva regolare mediante l'ascissa curvilinea.

Traiettoria e legge oraria identificano il moto.

Versore tangente e velocità. Normale principale, curvatura e accelerazione.

Esempio 17.1. Riparametrizzazione della circonferenza con l'ascissa curvilinea. □

Determinazione di $\mathbf{N}$ nelle curve piane.

Definizione di raggio di curvatura. Definizione di binormale $\mathbf{B}$ e di terna intrinseca.

Esempio 17.2. Esempio dell'ellisse. □

Esercizio 17.3. Esercizio D/R. □

Equazioni del moto scomposte nella terna intrinseca.

Per casa 17.4. Calcolare terna intrinseca e curvatura dell'elica cilindrica. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.2, 3.3, 3.5.

18. MERCOLEDÌ 28/10/2020
(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Moto vincolato a una curva. Necessità di introdurre ipotesi costitutive sulle reazioni vincolari.

Legge di attrito dinamico (ossia valida per velocità non nulla) di Coulomb-Morin.

Sistema del moto per un vincolo scabro; procedura per ridurlo a un'equazione differenziale ordinaria.

Teorema 18.1. *Il problema ai valori iniziali per il sistema del moto per un punto vincolato a una curva scabra di classe C^3 , se le forze sono continue e localmente lipschitziane in $(s, \dot{s})$, ammette unica soluzione.*

Il vincolo di curva liscia. La componente tangente dell'equazione del moto è indipendente dalle 2 normali, che servono a determinare la reazione vincolare. (È in pratica il caso con attrito con coefficiente di attrito nullo, ma è definito anche per $\dot{s} = 0$.)

Esercizio 18.2. 22/620

Esercizio D/R.

□

Per casa 18.3. 2/120;

9, 16, 23/560.

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.6, 3.7.

19. GIOVEDÌ 29/10/2020

(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Superfici come superfici parametrizzate. Superfici regolari, normale alla superficie e vettori tangenti coordinati. Piano tangente; la velocità di un moto vincolato alla superficie appartiene al piano tangente.

La traiettoria del moto come curva sulla superficie.

L'accelerazione in coordinate locali.

Equazioni di moto per il vincolo liscio dato da una superficie; proiezione sul piano tangente.

Teorema 19.1. *Sia $\mathbf{r} \in C^3(A)$ una superficie regolare, e $\mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ (qui $\mathbf{q}$ sono i 2 parametri della superficie) funzione continua di $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t$ e localmente lipschitziana in $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$. Allora il problema del moto vincolato alla superficie con vincolo liscio ha una unica soluzione massimale.*

Esempio 19.2. Moti su cilindro $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ con forza direttamente applicata nulla. □

Esercizio 19.3. 9/560 (modificato con attrito). □

Per casa 19.4. 1, 7/620.

3, 5/120

Parametrizzare il toro.

Studiare l'andamento asintotico per t grande dei moti dell'esercizio 9/560 svolto in classe. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 4.1, 4.2, 4.4.

20. VENERDÌ 30/10/2020

(CIRILLO) (AULA 15: 08-10)

L13. Sistema rigido, riferimento solidale, rappresentazione cartesiana, velocità angolare, lavoro di una sollecitazione agente su un sistema rigido, velocità del punto solidale. Atto di moto, formula fondamentale, trinomio invariante, proprietà. Classificazione: atto traslatorio e rotatorio. Campo circolare e elicoidale. Esempi.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 14.1, 14.2, 14.3 e 14.4.

21. LUNEDÌ 02/11/2020

(ANDREUCCI) (A DISTANZA PER DECISIONE DEL CAD: 17-19)

Vincolo per superficie scabra.

Attrito statico; forze ammissibili per la quiete, con i di attrito per la superficie e la curva.

Esercizio 21.1. (MMM 4.18, 4.19) Punto pesante vincolato a una sfera scabra e a un suo meridiano.

Esercizio D/R.

1/620.

□

Per casa 21.2. 12, 26/620; 13/560; 2/520.

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 4.4., 4.5.

22. MERCOLEDÌ 04/11/2020

(CIRILLO) (A DISTANZA PER DECISIONE DEL CAD: 10-12)

L13. Moto rigido di contatto, moto assoluto e relativo del punto di contatto, velocità di strisciamento.

Esempi di calcolo della velocità di strisciamento e relativa condizione di assenza di strisciamento: disco su guida rettilinea (esempio 14.8), disco su guida circolare (esempi 14.9 e problema 14.1), sfera appoggiata su un piano (esempio 14.10), cono su piano (esempio 14.12) e cilindro su piano (esempio 14.11).

Paragrafi di riferimento sul testo: C: paragrafo 14.5.

23. GIOVEDÌ 05/11/2020

(ANDREUCCI) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 10-12)

Teorema 23.1. *Una curva ha curvatura identicamente nulla se e solo se è un segmento di retta.*

Teorema 23.2. *Una curva con curvatura positiva è piana se e solo se $\mathbf{B}(s)$ è costante.*

Teorema 23.3. *Le formule di Frenet-Serret.*

Per casa 23.4. Determinare la torsione per l'elica cilindrica- □

Teorema 23.5. *Velocità angolare della terna intrinseca $(\mathbf{T}(s(t)), \mathbf{N}(s(t)), \mathbf{B}(s(t)))$.*

Esercizio 23.6. 2/520, 13/560. □

Per casa 23.7. 34, 36/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.5, 10.8.

24. VENERDÌ 06/11/2020

(CIRILLO) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 08-10)

L13. Moto rigido piano: proprietà dell'atto di moto, centro di istantanea rotazione, base e rulletta. Esempio dell'ellissografo (esempio 14.13).

Paragrafi di riferimento sul testo: C: paragrafo 14.6.

25. LUNEDÌ 09/11/2020
(ANDREUCCI) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 17-19)

Esempi di vincoli per un singolo moto: superficie, curva come intersezione di due superficie. Calcolo empirico dei gradi di libertà.

Vincolo di rigidità per due punti. Vincolo di parallelismo per due moti (4 gradi di libertà); una delle componenti del prodotto vettoriale (che devono essere tutte nulle) risulta combinazione lineare delle altre, in certe configurazioni (ma non in altre).

Vincolo dato da piano e sfera; vari casi. Superfici come superfici di livello di funzioni. Due superfici hanno intersezione regolare se non sono tangenti, ossia i due gradienti delle funzioni sono non paralleli.

Teorema del Dini (s.d.).

Coordinate dipendenti e indipendenti.

Esercizio 25.1. Esercizio D/R. □

Per casa 25.2. 11/560.

Caso di due punti vincolati al piano $x_3 = 0$, a distanza costante, uno all'asse x_1 , l'altro a distanza R dall'origine. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.3, 5.4, 5.5.

26. MERCOLEDÌ 11/11/2020
(ANDREUCCI) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 10-12)

Definizione di vincoli olonomi regolari. Configurazioni compatibili. Vincoli fissi e mobili. Gradi di libertà. Esempio dei vincoli lineari. Definizione di parametrizzazione lagrangiana $\mathbf{z}^L(\mathbf{q}, t)$. Le coordinate indipendenti del teorema del Dini sono lagrangiane. Esempi: parametrizzazione di curve e superfici.

Esercizio 26.1. Esercizio D/R. □

Esempio 26.2. Vincolo per due moti

$$\mathbf{X}_1 = z_1 \mathbf{e}_1 + z_2 \mathbf{e}_2 + z_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{X}_1 = z_4 \mathbf{e}_1 + z_5 \mathbf{e}_2 + z_6 \mathbf{e}_3,$$

dato da

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 &= R^2, & (z_1 - z_4)^2 + z_2^2 &= L^2, \\ z_5 &= 0, & z_3 &= 0, & z_6 &= 0. \end{aligned}$$

La configurazione $\mathbf{z} = (0, R, 0, 0, 0, 0)$ non è regolare ma è possibile se $R = L$. □

Per casa 26.3. 1) Discutere la regolarità del vincolo per due punti: ciascuno appartiene a una diversa superficie regolare, e sono a distanza costante tra di loro (es. 5.40 di MMM).

2) 65/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.6, 5.7.

27. GIOVEDÌ 12/11/2020

(ANDREUCCI) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 10-12)

Moto lagrangiano, velocità lagrangiana, rappresentazione lagrangiana del moto e della velocità.

Teorema 27.1. *Si ha*

$$\mathbf{v}_i^L = \sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial \mathbf{X}_i^L}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathbf{X}_i^L}{\partial t}.$$

Il termine $\frac{\partial \mathbf{X}_i^L}{\partial t}$ è nullo se i vincoli sono fissi.

Esempio 27.2. Parametrizzazione lagrangiana di due moti allineati con l'origine, di cui il primo appartiene alla sfera con centro l'origine e raggio $R(t) > 0$. Calcolo delle velocità in forma lagrangiana. $\square$

Atti di moto.

Vale per ogni $j \in \{1, \dots, \ell\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\nabla_z f_k \cdot \frac{\partial \mathbf{z}^L}{\partial q_j} = 0.$$

Definizione di spazio normale come sottospazio di $\mathbf{R}^{n_c}$ generato dai $\nabla_z f_k$. Definizione di spazio tangente. I vettori della base tangente sono le derivate parziali $\partial \mathbf{z}^L / \partial q_h$.

Teorema 27.3. *Lo spazio normale è l'ortogonale dello spazio tangente.*

In particolare lo spazio tangente è indipendente dalla parametrizzazione lagrangiana.

Teorema 27.4. *Gli atti di moto costituiscono lo spazio affine*

$$V_{z,t} \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{z}^L}{\partial t}.$$

Spostamenti virtuali e effettivi. Coincidono per i vincoli fissi.

Esercizio 27.5. 65/630. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.1, 6.2, 6.3.

28. VENERDÌ 13/11/2020

(CIRILLO) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 08-10)

L13. Moto di precessione.

L14. Centro di massa di uno corpo rigido, proprietà di simmetria e metodi di calcolo. Il problema del corpo forato. Esempio del cono.

Paragrafi di riferimento sul testo: C: paragrafo 14.7 e paragrafo 15.1.

29. LUNEDÌ 16/11/2020

(ANDREUCCI) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 17-19)

Esempio 29.1. Sistema vincolato di due punti, con $n_c = 6$, $m = 1$,

$$f_1(z_1, \dots, z_6) = 2z_1 - z_4 = 0.$$

Inoltre le forze sono $\mathbf{F}_1 = \alpha_1 \mathbf{e}_1$, $\mathbf{F}_2 = \alpha_2 \mathbf{e}_1$.

Equazioni di moto; ipotesi sulle reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in N_{z,t} \mathbf{f}$.

Soluzione esplicita.

La $\mathbf{f}_{\text{vin}} = \mathbf{f}_{\text{vin}}^1 + \mathbf{f}_{\text{vin}}^2$ fa lavoro complessivo nullo, ma ciascuna $\mathbf{f}_{\text{vin}}^i$ fa lavoro non nullo sul moto $\mathbf{X}_i$. $\square$

Dinamica relativa. Forze apparenti, di trascinamento e di Coriolis.

Esercizio 29.2. 8/580. $\square$

Per casa 29.3. 10/580, 57/620. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.1, 7.2, 12.1.

30. MERCOLEDÌ 18/11/2020

(CIRILLO) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 10-12)

L14. Momento d'inerzia di uno corpo rigido, metodi di calcolo, e teorema degli assi paralleli (Huygens). Il problema del corpo forato. Esempio del cono. Esempio: energia potenziale della sollecitazione centrifuga. Matrice d'inerzia, riferimento principale, proprietà di simmetria, esempio del quadrato (esempio 15.11).

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 15.2 e 15.3.

31. GIOVEDÌ 19/11/2020
(ANDREUCCI) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 10-12)

L'ipotesi dei lavori virtuali.

Teorema 31.1. *L'ipotesi dei lavori virtuali determina il moto.*

Energia cinetica T^L in forma lagrangiana.

Teorema 31.2. *Vale*

$$T^L = \frac{1}{2} \mathbf{p}^t \mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{p} + b_0.$$

$\mathbf{A}$ è la matrice simmetrica data da

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{X}_i^L}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_i^L}{\partial q_k},$$

e $\mathbf{b}_1$ e b_0 si annullano se $\partial \mathbf{z}^L / \partial t = 0$.

Teorema 31.3. *La matrice $\mathbf{A}$ è definita positiva.*

Esercizio 31.4. Esercizio D/R.

57/620. □

Per casa 31.5. 59/620, 23/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.3, 7.5.

32. VENERDÌ 20/11/2020
(CIRILLO) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 08-10)

L14. Matrice d'inerzia, riferimento principale, proprietà di simmetria, esempio del quadrato (esempio 15.12). Grandezze cinematiche e matrice d'inerzia. Tensore d'inerzia.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 15.3, 15.4, 15.5.

33. LUNEDÌ 23/11/2020
(ANDREUCCI) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 17-19)

Lemma 33.1. *Valgono*

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i^L}{\partial p_h}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{\partial \mathbf{X}_i^L}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t),$$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{X}^L}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i^L}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t).$$

Notazione

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial}{\partial p_h}.$$

Teorema 33.2. (EQUAZIONI DI LAGRANGE) *Le ℓ equazioni*

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T^L}{\partial \dot{q}_h} \right] - \frac{\partial T^L}{\partial q_h} = Q_h, \quad h = 1, \dots, \ell,$$

sono equivalenti all'ipotesi dei lavori virtuali.

Forze conservative e componenti lagrangiane delle forze.

Teorema 33.3. *Se il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\mathbf{z})$, si ha*

$$Q_h = \frac{\partial}{\partial q_h} [U(\mathbf{z}^L(\mathbf{q}, t))], \quad h = 1, \dots, \ell.$$

Definizione di potenziale lagrangiano e forze conservative in senso lagrangiano. Definizione di lagrangiana. Equazioni di Lagrange in forma conservativa. Se $\ell = 1$ e $Q_1 = Q_1(q_1, t)$ allora esiste il potenziale lagrangiano.

Esercizio 33.4. Esercizio D/R.

76/620.

□

Per casa 33.5. 1/620, 69/630.

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.6, 8.1, 8.2.

34. MERCOLEDÌ 25/11/2020
(CIRILLO) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 10-12)

L14. Tensore d'inerzia, proprietà di simmetria dei corpi rigidi, ellissoide d'inerzia.

L17. Equazioni cardinali per il corpo rigido libero e loro sufficienza.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 15.6, 17.1.

35. GIOVEDÌ 26/11/2020

(ANDREUCCI) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 10-12)

Teorema 35.1. *Se i vincoli sono fissi e il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\mathbf{z})$, l'energia*

$$T^L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{z}^L(\mathbf{q})),$$

si conserva lungo un moto lagrangiano che soddisfa l'ipotesi dei lavori virtuali.

Teorema 35.2. *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e $U^L = U^L(\mathbf{q})$. Allora se*

$$\frac{\partial U^L}{\partial q_h}(\mathbf{q}_0) = 0, \quad h = 1, \dots, \ell,$$

la funzione costante $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0$ risolve le equazioni di Lagrange.

Teorema 35.3. *Nelle ipotesi del teorema precedente, se inoltre le forze direttamente applicate sono conservative in senso tradizionale, e $\mathbf{q}_0$ è un punto di massimo isolato per U^L , allora è di equilibrio stabile.*

Sistemi di corpi rigidi vincolati. Coordinate locali.

Esempio 35.4. Asta ortogonale all'asse x_3 . □

Moti solidali a un corpo rigido del sistema (dipendenti dalle coordinate solidali); velocità di moti solidali in forma lagrangiana.

Ipotesi dei lavori virtuali. Le equazioni di Lagrange per sistemi di corpi rigidi. Le componenti lagrangiane delle forze.

Esercizio 35.5. Esercizio D/R (componenti lagrangiane delle forze). □

Per casa 35.6. 14, 28, 30, 63/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.1, 8.4, 16.1, 16.2.

36. VENERDÌ 27/11/2020

(CIRILLO) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 08-10)

L17. Equazioni cardinali per il corpo rigido vincolato. Esercizi: moto rotatorio di un disco rigido vincolato mediante una cerniera, moto sferico di un disco vincolato mediante due cerniere con assi mutuamente ortogonali (esempio 16.4),

Paragrafi di riferimento sul testo: C: paragrafi 17.3.

37. LUNEDÌ 30/11/2020

(ANDREUCCI) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 17-19)

Forze fittizie e equazioni di Lagrange in sistemi mobili di riferimento.

Esercizio 37.1. 37, 42/630.

Esercizio D/R.

□

Per casa 37.2. 28/620

16, 21, 54, 66/630

27, 38/660

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 12.1, 12.2.

38. MERCOLEDÌ 02/12/2020

(ANDREUCCI) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 10-12)

Componenti lagrangiane della forza di Coriolis. Due casi in cui sono nulle:

Teorema 38.1. *Se $\ell = 1$ e i vincoli sono fissi nel sistema mobile $\mathbf{F}_C$ ha componenti lagrangiane nulle.*

Teorema 38.2. *Se tutti i moti appartengono a un piano solidale al sistema mobile, che contiene anche la velocità angolare allora $\mathbf{F}_C$ ha componenti lagrangiane nulle.*

Esempio 38.3. Vincoli mobili: punto materiale vincolato a circonferenza che trasla:

$$R \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \frac{ct^2}{2} \mathbf{e}_1,$$

soggetto al peso $-mg\mathbf{e}_2$.

Determinazione delle equazioni di Lagrange nel sistema mobile e in quello fisso.

□

Teorema 38.4. *Se due lagrangiane soddisfano*

$$\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = \frac{d}{dt} F(\mathbf{q}, t),$$

allora hanno equazioni di Lagrange equivalenti.

Esercizio 38.5. Esercizio D/R.

66, 54/630.

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 12.1, 12.2.

39. GIOVEDÌ 03/12/2020

(ANDREUCCI) (A DISTANZA PER DPCM 03/11: 10-12)

Piccole oscillazioni in punti di equilibrio, con hessiana del potenziale definita negativa, per sistemi vincolati da vincoli olonomi fissi e soggetti a forze conservative.

Lagrangiana ridotta.

Il caso 1-dimensionale: moto armonico. Equazioni di Lagrange delle piccole oscillazioni nel caso $\ell > 1$:

$$\mathcal{A}\ddot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}\mathbf{q} = 0.$$

Ricerca delle frequenze delle piccole oscillazioni con la sostituzione $\mathbf{q}(t) = \bar{\mathbf{q}} \cos(\omega t + \varphi)$; equazione $\det(\omega^2 \mathcal{A} + \mathcal{U}) = 0$.

Composizione di moti armonici non è necessariamente periodica; condizione dei periodi commensurabili.

Teorema di esistenza delle coordinate normali.(s.d.)

Esercizio 39.1. Esercizio D/R, 6/680. □

Per casa 39.2. 1, 11, 25/680. 45/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 9.3.

40. VENERDÌ 04/12/2020

(CIRILLO) (A DISTANZA PER DPCM 03/12: 08-10)

L18. Corpo rigido con asse fisso: bilanciamento statico e dinamico.

L19. Corpo rigido con un punto fisso e equazioni di Eulero. Moti alla Poinsot: statica, leggi di conservazione, teorema di Poinsot.

Paragrafi di riferimento sul testo: C: paragrafi 17.4, 17.5 e 17.5.1.

41. LUNEDÌ 07/12/2020

(ANDREUCCI) (A DISTANZA PER DPCM 03/12: 17-19)

Esercizio 41.1. MMM 12.6 (equilibrio relativo a ellisse scabra ruotante).

21/630.

MMM 5.40 (vincolo olonomo regolare per due punti a distanza fissa vincolati su due superfici). □

Per casa 41.2. 17/560, 28/620, 54/630. □

42. MERCOLEDÌ 09/12/2020
(ANDREUCCI) (A DISTANZA PER DPCM 03/12: 10-12)

Esercizio 42.1. 17/560.

Esercizio D/R.

Simulazione numerica del moto alla Poincaré.

28/620. □

Potenziale e distribuzione di potenziale.

Coordinate cicliche e relativi integrali primi.

Curvatura della traiettoria data da $|\dot{\mathbf{X}} \times \ddot{\mathbf{X}}| |\dot{\mathbf{X}}|^{-3}$.

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.3, 8.2.

43. GIOVEDÌ 10/12/2020
(ANDREUCCI) (A DISTANZA PER DPCM 03/12: 10-12)

L'ipotesi dei lavori virtuali e il vincolo di rigidità tra due punti: la ILV equivale al fatto che le reazioni vincolari soddisfino le usuali ipotesi sulle forze interne.

Teorema 43.1. (s.d.) *Per un corpo rigido libero non degenerare, l'ipotesi dei lavori virtuali implica le equazioni cardinali.*

Teorema 43.2. (s.d.) *Per un corpo rigido non degenerare vincolato a avere un punto fisso (moto polare), l'ipotesi dei lavori virtuali implica che il momento delle reazioni vincolari rispetto al polo sia nullo.*

Per un corpo rigido non degenerare vincolato a ruotare intorno a un asse fisso, l'ipotesi dei lavori virtuali implica che il momento delle reazioni vincolari rispetto a un polo abbia componente lungo l'asse nulla.

Esercizio 43.3. Esercizio D/R.

54/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.2, 16.5.

44. VENERDÌ 11/12/2020
(CIRILLO) (A DISTANZA PER DPCM 03/12: 08-10)

L19. Moti alla Poincaré: moti particolari, rotazioni permanenti, stabilità delle rotazioni permanenti.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 17.5.1 e 17.5.2.

45. MERCOLEDÌ 16/12/2020
(CIRILLO) (A DISTANZA PER DPCM 03/12: 10-12)

L20. Trottola di Lagrange: discussione euristica, integrali primi, equazioni pure del moto, analisi del moto.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 17.5.3, 17.5.4, 17.5.5, 17.5.6.

46. VENERDÌ 18/12/2020
(CIRILLO) (A DISTANZA PER DPCM 03/12: 08-10)

L20. Trottola lanciata velocemente.

L21. Corpo rigido appoggiato su un piano liscio: statica e dinamica.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 17.5.7 (senza discussione dell'ampiezza della nutazione), 17.6.

FINE DEL CORSO