DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA A.A. 2021-2022 CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE

DANIELE ANDREUCCI, EMILIO CIRILLO
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo [MMM] si riferiscono al testo *Meccanica Razionale, Modelli Matematici per l'Ingegneria*, D. Andreucci, edizioni La Dotta. Quelli al testo [C] si riferiscono al testo *Appunti delle Lezioni di Meccanica Razionale per l'Ingegneria*, E.M.N. Cirillo, edizioni Compomat. La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m, nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

1. Lunedì 27/09/2019
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Presentazione del corso.
Prodotto scalare di vettori di $\boldsymbol{R}^N$ anche in componenti in basi ortonormali.
Matrici di cambiamento di base $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$. Si ha $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = {\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}^{\mathrm{t}}$.

Teorema 1.1. (s.d.) *Se $\boldsymbol{a}$ ha componenti $\boldsymbol{\lambda}$ in $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{\mu}$ in $\mathcal{N}$, allora $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}\boldsymbol{\lambda}$.*

Definizione di matrice ortogonale.

Teorema 1.2. (s.d.) *Le matrici di cambiamento di base sono ortogonali: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = (\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}})^{-1}$. Quindi il loro determinante ha valore assoluto pari a 1.*

Definizione di base ortonormale positiva.

Teorema 1.3. (s.d.) *Composizione delle matrici del cambiamento di base: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{P}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{P}}$.*

Le matrici ortogonali positive in $\boldsymbol{R}^2$ sono date da matrici di rotazione.
Prodotto vettoriale e triplo in $\boldsymbol{R}^3$.

Teorema 1.4. *Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è una base ortonormale positiva di $\boldsymbol{R}^3$, allora*

$$\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \,, \quad \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{u}_2 \,, \quad \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Corollario 1.5. *Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è una base ortonormale positiva,*

$$\boldsymbol{a} = \sum_{h=1}^{3} \alpha_h \boldsymbol{u}_h \,, \qquad \boldsymbol{b} = \sum_{h=1}^{3} \beta_h \boldsymbol{u}_h \,,$$

allora

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \,.$$

Esercizio 1.6. Esercizio D/R. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.4, 9.1, 10.1.

2. Mercoledì 29/09/2021
(*Andreucci*) (Aula 15: 10:00-12:00)

Definizione di sistema di riferimento in $\boldsymbol{R}^3$. Cambiamento di coordinate.
Definizione di sistema di riferimento mobile in $\boldsymbol{R}^3$. Idea di velocità relativa a un sistema di riferimento mobile. Definizione di derivata di un vettore relativa a una base mobile. Definizione di velocità relativa $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ e di accelerazione relativa $\boldsymbol{a}_{\mathcal{S}}$.

Esempio 2.1. Moto $\boldsymbol{X}(t) = (L + ct)\boldsymbol{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ con origine mobile nell'origine del sistema fisso e base ruotante intorno all'asse $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

□

Definizione di funzioni vettoriali costanti in una base mobile e di moti costanti (o solidali) in un sistema di riferimento mobile.

Per casa 2.2. Se $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ sono due moti solidali, allora $|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|$ è costante. □

La posizione (e quindi il moto) di una terna mobile è descritto da 3 parametri.

Teorema 2.3. *Data una terna mobile $(\boldsymbol{u}_h) \in C^k(I)$ esiste una sola funzione $\boldsymbol{\omega} \in C^{k-1}(I)$ tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_h\,,$$

per $h = 1, 2, 3$.

$\boldsymbol{\omega}$ si definisce velocità angolare di $(\boldsymbol{u}_h)$.

Teorema 2.4. *Per ogni funzione vettoriale derivabile $\boldsymbol{a}$ vale*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}\,.$$

Per casa 2.5. Calcolare la velocità angolare della terna mobile dell'esempio sopra (rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$) e anche quella delle rotazioni intorno a $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1$ e a $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_2$. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.2, 10.3, 10.4.

3. Giovedì 30/09/2021
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Proprietà elementari della derivata relativa; derivata relativa di uno scalare.

Teorema 3.1 (del moto relativo)**.** *Per un moto $\boldsymbol{X}$ vale*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O) + \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \,.$$

Velocità di trascinamento. La velocità di trascinamento dipende solo dalla posizione ed è la velocità assoluta dei moti solidali.

Teorema 3.2 (Coriolis)**.** *Per un moto $\boldsymbol{X}$ vale*

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O)] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O) + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{a}_{\mathcal{S}} \,.$$

Accelerazione di trascinamento e di Coriolis. Esempio.
Moti di rotazione [uniforme] di una terna; moto traslatorio, polare e di rotazione di un sistema di riferimento mobile.

Teorema 3.3. *Sia $\boldsymbol{\omega} = \alpha \boldsymbol{u}$ con $\boldsymbol{u}$ versore. Allora*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} , \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} .$$

Quindi $\boldsymbol{\omega}$ è costante (ha direzione costante) nella terna fissa se e solo se ha la stessa proprietà nella terna mobile (di cui è velocità angolare).
Velocità angolare della terna

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Ricostruzione della terna con $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$ e $\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha(t)\boldsymbol{u}_3(t)$. Ricostruzione della terna con $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$ e $\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha(t)\boldsymbol{e}_3$.
Teorema di esistenza e unicità di una terna $(\boldsymbol{u}_h)$ tale che per $\mathit{\Omega}(t, \boldsymbol{u}_h)$ assegnata opportunamente regolare valga

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t} = \mathit{\Omega} \times \boldsymbol{u}_h \,,$$

e che assuma all'istante iniziale il valore di una terna assegnata.(s.d.)

Esercizio 3.4. Esercizio D/R. □

Per casa 3.5. 5/100; 1, 3, 15, 16/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.5, 10.6.

4. Venerdì 01/10/2021
(*Cirillo*) (Aula 15: 08-10)

Presentazione del corso.
L00. Sollecitazione, sistema di vettori applicati, retta di applicazione, somma e momento totale, formula fondamentale per il campo momento e relative proprietà, trinomio invariante, asse della sollecitazione, campo costante, campo circolare e campo elicoidale. Esempi: coppia, forza singola, sistema di forze parallele a un piano.

Paragrafi di riferimento sul testo: C: 1.4, 17.2.

5. Lunedì 04/10/2021
(*Andreucci*) (Aula 15: 17-19)

Definizione di velocità angolare relativa $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ di una terna $\mathcal{M}$ rispetto a un'altra $\mathcal{N}$: per ogni $\boldsymbol{a} \in C^1(\boldsymbol{R})$ si ha

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{a} \,.$$

Teorema 5.1. (s.d.) *Se $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N}$ sono due terne mobili, esiste unica $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ tale che*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{u}_h \,, \qquad h = 1\,, 2\,, 3\,. \,.$$

Le componenti di $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ si trovano in modo simile a quelle di $\boldsymbol{\omega}$.

Teorema 5.2. *Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ sono tre terne ortonormali positive:*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \,.$$

Per casa 5.3. 23, 24, 26, 29/340. □

Esercizio 5.4. 7, 13, 15/340.
Esercizio D/R. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.7.

6. Mercoledì 06/10/2021
(*Andreucci*) (Aula 15: 10–12)

Il moto di un punto come funzione vettoriale. Velocità e accelerazione. Passaggio dall'accelerazione al moto, condizioni iniziali. Esempi di moti: circolare, rettilineo, piano.
Grafico (linea di universo) e orbita (traiettoria) di un moto.
Esempio di un moto di classe C^2 ma con orbita con uno spigolo:

$$\boldsymbol{X}(t) = t^3 \boldsymbol{e}_1 + |t|^3 \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Definizione di retta tangente per la traiettoria di un moto.

Teorema 6.1. *La retta tangente e il vettore tangente sono unici.*

Teorema 6.2. *Se un moto ammette retta tangente, allora la sua derivata è il vettore tangente, e viceversa se un moto ha derivata diversa da zero, allora ammette retta tangente.*

Confronto con il caso del grafico di una funzione scalare.

Esercizio 6.3. Risoluzione completa del problema per la forza elastica:

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -k\boldsymbol{X} \,, \quad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}_0 \,, \quad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{v}_0 \,.$$

□

Esercizio 6.4. 29/340.
Esercizio D/R. □

Per casa 6.5. 1-4/100.
Dimostrare che se $x \in C^1(\boldsymbol{R})$, $x \geq 0$, $x(0) > 0$, $\dot{x} \geq -kx$, $k > 0$, allora $x(t) > 0$ per $t > 0$.
Dimostrare che se $\dot{y} = -\lambda\sqrt{y}$, $y(0) > 0$, $\lambda > 0$, allora $y(t) \to 0$ per $t \to \bar{t} < +\infty$.
Risolvere i problemi ai valori iniziali

$$\dot{y} = y^2 \,, \qquad y(0) = u_0 > 0 \,.$$

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.1, 1.2.

7. Giovedì 07/10/2021
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Funzioni lipschitziane. Criteri di lipschitzianità. Non unicità per il problema

$$\dot{x} = -k\sqrt{|x|}\,, \qquad x(\bar{t}) = 0\,,$$

in cui non è soddisfatta l'ipotesi di lipschitzianità.

Teorema 7.1. (s.d.) *La soluzione massimale del problema di Cauchy per l'equazione* $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}, t)$ *esiste ed è unica se* $\boldsymbol{F}$ *è continua in un aperto* $A \subset \boldsymbol{R}^7$ *e localmente lipschitziana rispetto a* $\boldsymbol{X}$, $\dot{\boldsymbol{X}}$.
Il suo intervallo di definizione (σ, Σ) *è aperto e per* $t \to \Sigma-$ *si deve avere che* $(t, \boldsymbol{X}(t), \dot{\boldsymbol{X}}(t))$ *diventa illimitata oppure la sua distanza da* ∂A *tende a* 0.

Esercizio 7.2. Risoluzione del problema

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\gamma m \frac{\boldsymbol{X}}{|\boldsymbol{X}|^3}\,, \quad \boldsymbol{X}(0) = L\boldsymbol{e}_1\,, \quad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = -c\boldsymbol{e}_1\,, \quad \gamma, L, c > 0\,.$$

□

Energia cinetica T e lavoro di una forza.

Teorema 7.3 (del lavoro o dell'energia cinetica)**.** *Se* $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}$, *allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{X}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Esercizio 7.4. Esercizio D/R.

□

Per casa 7.5. 1. Risolvere il problema (ove $\boldsymbol{B} = b\boldsymbol{e}_3$, L, c, $b > 0$)

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{B} \times \dot{\boldsymbol{X}}\,, \quad \boldsymbol{X}(0) = L\boldsymbol{e}_1\,, \quad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = c\boldsymbol{e}_2\,.$$

2. Risolvere tutti i problemi di Cauchy

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\mu\dot{\boldsymbol{X}}\,, \quad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}_0\,, \quad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{v}_0\,;$$

qui $\mu > 0$ è costante.
3. Risolvere tutti i problemi di Cauchy

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\mu(t)\dot{\boldsymbol{X}}\,, \quad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}_0\,, \quad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{v}_0\,;$$

qui $\mu(t) > 0$ è una funzione continua su $\boldsymbol{R}$. Dare una condizione su μ tale che $T(t) \not\to 0$ per $t \to +\infty$. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.3, 1.5.

8. Venerdì 08/10/2021
(*Cirillo*) (Aula 15: 08-10)

L02. Sollecitazioni equivalenti e proprietà. Esempio del peso.
L10. Generalità sui sistemi di particelle: centro di massa, quantità di moto totale, energia cinetica totale, momento totale della quantità di moto, teorema dell'energia cinetica e del lavoro, osservatore del centro di massa e relative grandezze cinematiche, teorema di König, somma e momento totale della sollecitazione interna. Leggi di conservazione per i sistemi liberi e isolati.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafo 17.2 e capitolo 9.

9. Lunedì 11/10/2021
(*Andreucci*) (Aula 15: 17-19)

Riduzione dell'ordine di un sistema differenziale, aumentando il numero delle variabili.
Il caso della striscia. Vale

$$\left|\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{\varphi}|}{\mathrm{d}t}\right| \leq |\dot{\boldsymbol{\varphi}}|\,, \qquad \text{se } \boldsymbol{\varphi} \neq 0.$$

Teorema 9.1. *Se* $|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi},t)| \leq C|\boldsymbol{\varphi}| + C$ *allora le soluzioni di* $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi},t)$ *sono limitate sui limitati.*

Dipendenza continua dai valori iniziali. Necessità di essere su intervalli limitati.

Esempio 9.2. Dipendenza continua per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \pm k\boldsymbol{X}$. □

Esercizio 9.3. Trovare tutte le soluzioni di

$$\dot{X}_1 = -X_2\,,$$
$$\dot{X}_2 = X_1\,.$$

Trasformare il sistema anche in coordinate polari. □

Per casa 9.4. 2/100
Sia $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1(\boldsymbol{R})$; si dimostri che le uniche soluzioni periodiche sono le costanti. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.6, 1.8.

10. Mercoledì 13/10/2021 (*Andreucci*) (Aula 15: 10-12)

Sistemi autonomi. Traslazione nel tempo delle soluzioni.
Punti di equilibrio e corrispondenza con le soluzioni costanti.
Definizione di punto di equilibrio stabile. I punti di equilibrio non stabili si dicono instabili.

Esempio 10.1. Forza nulla. (Punti di equilibrio sono instabili)
Casi $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \pm k\boldsymbol{X}$, $k > 0$. (Stabili nel caso $-$ e instabili nel caso $+$.) $\square$

Esempio 10.2. Integrale generale del sistema lineare a coefficienti costanti del primo ordine

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{X} \,,$$

nell'ipotesi che la matrice $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ abbia una base di autovettori.
Studio della stabilità dell'origine (è stabile se e solo se tutti gli autovalori sono non positivi o con parte reale non positiva se complessi). $\square$

Forze conservative: criterio necessario della chiusura, necessario e sufficiente della circuitazione nulla su tutte le curve chiuse, sufficiente della chiusura in semplicemente connessi.

Per casa 10.3. 1) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio per la resistenza idraulica (generalizzata)

$$m\ddot{X} = -\mu(\dot{X})^{1+q} \,,$$

μ, $q \geq 0$.
2) Studiare la stabilità dell'origine per $\boldsymbol{F} = (ax_1 - x_2)\boldsymbol{e}_1 - x_2\boldsymbol{e}_2 - x_3\boldsymbol{e}_3$. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.7, 2.4.

11. Giovedì 14/10/2021
(*Andreucci*) (Aula 15: 10-12)

Calcolo del lavoro per la forza elastica e gravitazionale.

Teorema 11.1. *Sia $\boldsymbol{X}$ un moto relativo alla forza $\boldsymbol{F}$ conservativa con potenziale U. Allora per ogni t_0, t_1 vale*

$$T(t_1) - U(\boldsymbol{X}(t_1)) = T(t_0) - U(\boldsymbol{X}(t_0)) .$$

Corollario 11.2. *(Conservazione dell'energia) Sia $\boldsymbol{F}$ conservativa con potenziale U. Allora la funzione*

$$\mathcal{E}(t) := \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

rimane costante durante il moto $\boldsymbol{X}$.

L'energia $\mathcal{E}$ dipende dal moto e quindi dalle condizioni iniziali.

Esempio 11.3. Conservazione dell'energia come strumento per ottenere informazioni (per esempio limitazioni) sul moto. I casi della forza elastica attrattiva e repulsiva. □

Teorema 11.4. *Sia $\boldsymbol{F}$ conservativa con potenziale U, e valga $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$, ove $\boldsymbol{F}_2$ fa lavoro nullo su ogni intervallo di tempo. Allora la funzione*

$$\mathcal{E}(t) := \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

rimane costante durante il moto $\boldsymbol{X}$.

$\boldsymbol{F}$ fa lavoro identicamente nullo se e solo se si mantiene ortogonale alla velocità.

Esercizio 11.5. 9/120.
Stabilità per $\ddot{X} = -\mu\dot{X}$, $\mu > 0$. □

Per casa 11.6. 1, 3, 7, 8, 11/120. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.1, 2.2.

12. Venerdì 15/10/2021
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

L10. Equazioni globali della dinamica e relative proprietà.
L03. Trasformazioni di coordinate cartesiane e equazione della trasformazione di coordinate. Rotazione attorno a un asse coordinato: definizione e deduzione delle equazioni della trasformazione di coordinate, Esempio 2.1. Non abelianità del prodotto tra rotazioni, Esempio 2.2. Angoli di Cardano e costruzione della matrice del cambiamento di base.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, capitolo 9, paragrafi 2.1 e 2.2.

13. Lunedì 18/10/2021
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Il caso conservativo unidimensionale. Passaggio da $m\ddot{x} = F(x)$ a

$$\dot{x} = p\,, \qquad \dot{p} = m^{-1} f(x)\,.$$

Orbite. Piano delle fasi (x, p). Conservazione dell'energia. Le orbite giacciono sulle curve che hanno forma cartesiana

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))}\,, \quad x \in J(E) := \{x \mid E + U(x) \geq 0\}\,.$$

Una di queste curve può contenere più orbite.

Esempio 13.1. 1) diagramma di fase del moto $m\ddot{x} = -kx$;
2) diagramma di fase del moto $\ddot{x} = -k\sin(x)$. □

Punti di inversione, di equilibrio stabili e instabili riconosciuti dal ritratto di fase.

Teorema 13.2. *Se due orbite si intersecano allora coincidono.*

Teorema 13.3. *Se un'orbita si autointerseca, allora corrisponde a una soluzione periodica.*

Teorema 13.4. (s.d.) *Se una soluzione massimale di $\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, definita su (σ, Σ) soddisfa*

$$\lim_{t\to\Sigma} \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}_0\,, \qquad |\dot{\boldsymbol{X}}(t)| \leq C\,, \quad t \in (\Sigma - \delta, \Sigma)\,, \tag{13.1}$$

allora $\boldsymbol{x}_0$ è di equilibrio e $\Sigma = +\infty$. Se anche $\dot{\boldsymbol{X}}(t)$ ha limite per $t \to +\infty$, questo è zero.

Esercizio 13.5. Esercizio D/R. □

Per casa 13.6. 14, 20,21/150. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.5.

14. Mercoledì 20/10/2021
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Energia come funzione W di p e x; i punti critici di W corrispondono a posizioni di equilibrio. Il grafico delle linee di livello di W corrisponde al diagramma di fase del moto. Linee di livello di $W(x,p) = mp^2/2 \pm kx^2/2$; punto di minimo e punto sella.

Teorema 14.1. *(Dirichlet) Se $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}$ è un punto di massimo isolato per $U(x)$, allora è stabile.*

Teorema 14.2. *(Caso con resistenza). Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{x} = U'(x) - r(x,\dot{x})\dot{x}$, ove $r \geq 0$.*

Teorema 14.3. (s.d.) *(Dimensione $N > 1$). Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \nabla U(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})$, ove $\boldsymbol{h} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \leq 0$.*

Esercizio 14.4. 21/150.
Esercizio D/R. □

Per casa 14.5. 17, 19, 32, 37, 45, 47, 48, 50, 54/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.6.

15. Giovedì 21/10/2021
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Velocità e accelerazione in coordinate polari; velocità e accelerazione radiali e trasversali.
Forze a direzione radiale. Moti centrali.

Teorema 15.1. *Nei moti centrali* $\boldsymbol{X} \times \dot{\boldsymbol{X}}$ *si mantiene costante.*

Teorema 15.2. *Il moto sia centrale.*
1) Se $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) \neq 0$ *il moto avviene sul piano per* O*,* $\boldsymbol{X}(0)$ *e ortogonale a* $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) \neq 0$*.*
2) Se $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) = 0$ *il moto avviene sulla retta per* O *e* $\boldsymbol{X}(0)$*.*

Equazioni del moto centrale scomposte nella base dei versori radiale e trasversale.
Velocità areolare. Nei moti centrali l'accelerazione trasversale è nulla, quindi la velocità areolare è costante.
Formula di Binet (s.d.).

Teorema 15.3. *Una forza a direzione radiale è conservativa se e solo se è nella forma*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = F(|\boldsymbol{x}|)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,,$$

e allora il suo potenziale è (per $d > 0$ *arbitrario)*

$$U(\boldsymbol{x}) = \int_{d}^{|\boldsymbol{x}|} F(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Esercizio 15.4. Esercizio D/R. □

Per casa 15.5. 1, 3, 5, 7/220. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.8.

16. Venerdì 22/10/2021
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

L03. Angoli di Eulero e costruzione della matrice del cambiamento di base.
L04. Esercizi sul calcolo della velocità angolare: moto rotatorio (esempio 3.1), moto con due cerniere perpendicolari (esempio 3.2), generico moto sferico descritto con gli angoli di Eulero (esempio 3.11), generico moto sferico descritto con gli angoli di Cardano (esempio 3.10).

Paragrafi di riferimento sul testo: C: paragrafi 2.2, 3.2 e 3.4.

17. Lunedì 25/10/2021
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Lunghezza L della traiettoria di un moto, definizione come estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte, risulta poi

$$L = \int_a^b |\dot{\boldsymbol{X}}(t)| \, \mathrm{d}t$$

(la $\leq$ è ovvia dalla disuguaglianza del modulo per gli integrali).
Definizione di ascissa curvilinea; riparametrizzazione di una curva regolare mediante l'ascissa curvilinea.
Traiettoria e legge oraria identificano il moto.
Versore tangente e velocità. Normale principale, curvatura e accelerazione. Definizione di raggio di curvatura.

Esempio 17.1. Riparametrizzazione della circonferenza con l'ascissa curvilinea. Moto circolare. □

Determinazione di $\boldsymbol{N}$ nelle curve piane. Determinazione di k per qualunque curva.
Definizione di binormale $\boldsymbol{B}$ e di terna intrinseca.

Esempio 17.2. Esempio dell'ellisse. □

Equazioni del moto scomposte nella terna intrinseca.

Esercizio 17.3. Esercizio D/R. □

Per casa 17.4. Calcolare terna intrinseca e curvatura dell'elica cilindrica. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.2, 3.3, 3.5.

18. Mercoledì 27/10/2021
(*Andreucci*) (Aula 15: 10-12)

Moto vincolato a una curva. Necessità di introdurre ipotesi costitutive sulle reazioni vincolari.
Legge di attrito dinamico (ossia valida per velocità non nulla) di Coulomb-Morin.
Sistema del moto per un vincolo scabro; procedura per ridurlo a un'equazione differenziale ordinaria.

Teorema 18.1. *Il problema ai valori iniziali per il sistema del moto per un punto vincolato a una curva scabra di classe C^3, se le forze sono continue in $(s, \dot{s}, t)$ e localmente lipschitziane in $(s, \dot{s})$, ammette unica soluzione.*

Il vincolo di curva liscia. La componente tangente dell'equazione del moto è indipendente dalle 2 normali, che servono a determinare la reazione vincolare. (È in pratica il caso con attrito con coefficiente di attrito nullo, ma è definito anche per $\dot{s} = 0$.)

Esercizio 18.2. 21/620
Esercizio D/R. □

Per casa 18.3. 2/120;
9, 16, 23/560. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.6, 3.7.

19. Giovedì 28/10/2021
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Superfici come superfici parametrizzate. Superfici regolari, normale alla superficie e vettori tangenti coordinati. Piano tangente; la velocità di un moto vincolato alla superficie appartiene al piano tangente.
L'accelerazione in coordinate locali.
Equazioni di moto per il vincolo liscio dato da una superficie; proiezione sul piano tangente.

Teorema 19.1. *Sia $\boldsymbol{r} \in C^3(A)$ una superficie regolare, e $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ (qui $\boldsymbol{q}$ sono i 2 parametri della superficie) funzione continua di $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$, t e localmente lipschitziana in $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$. Allora il problema del moto vincolato alla superficie con vincolo liscio ha una unica soluzione massimale.*

Esempio 19.2. Moti su cilindro $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ con forza direttamente applicata nulla. Geodetiche (eliche cilindriche). □

Esercizio 19.3. 9/560 □

Per casa 19.4. 9/560 modificato con attrito: studio asintotico dei moti per $t \to +\infty$
1, 7/620
3, 5/120
Parametrizzare il toro □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 4.1, 4.2, 4.4.

20. Venerdì 29/10/2021
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

L13. Sistema rigido, riferimento solidale, rappresentazione cartesiana, velocità angolare, lavoro di una sollecitazione agente su un sistema rigido, velocità del punto solidale. Atto di moto, formula fondamentale, trinomio invariante, proprietà. Classificazione: atto traslatorio e rotatorio. Campo circolare e elicoidale. Esempi.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 14.1, 14.2, 14.3 e 14.4.

21. Mercoledì 03/11/2021
(Cirillo) (Aula 15: 10-12)

L13. Moto rigido di contatto, moto assoluto e relativo del punto di contatto, velocità di strisciamento.
Esempi di calcolo della velocità di strisciamento e relativa condizione di assenza di strisciamento: disco su guida rettilinea (esempio 14.8), disco su guida circolare (esempi 14.9 e problema 14.1), sfera appoggiata su un piano (esempio 14.10), cono su piano (esempio 14.12) e cilindro su piano (esempio 14.11).

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafo 14.5.

22. Giovedì 04/11/2021
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Vincolo di attrito dinamico per superficie scabra.

Esercizio 22.1. Equazioni di moto per un punto vincolato al piano $x_3 = 0$ con vincolo scabro e forza $\boldsymbol{F} = \alpha x_1 \boldsymbol{e}_1 + \beta x_2 \boldsymbol{e}_2 + \gamma \boldsymbol{e}_3$ con α, β, $\gamma \in \boldsymbol{R}$. □

Attrito statico; forze ammissibili per la quiete, coni di attrito per la superficie e la curva.

Esercizio 22.2. (MMM 4.18, 4.19) Punto pesante vincolato a una sfera scabra e a un suo meridiano.
Esercizio D/R □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 4.4., 4.5.

23. Venerdì 05/11/2021
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

L13. Moto rigido piano: proprietà dell'atto di moto, centro di istantanea rotazione, base e rulletta. Esempio dell'ellissografo (esempio 14.13). Coni di Poinsot.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 14.6, 14.7.

24. Lunedì 08/11/2021
(*Andreucci*) (Aula 15: 17-19)

Teorema 24.1. *Una curva ha curvatura identicamente nulla se e solo se è un segmento di retta.*

Teorema 24.2. *Una curva con curvatura positiva è piana se e solo se* $\boldsymbol{B}(s)$ *è costante.*

Teorema 24.3. *Le formule di Frenet-Serret.*

Teorema 24.4. *Velocità angolare della terna intrinseca* $(\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$.

Esercizio 24.5. 2/520, 13/560
Dimostrare che se una curva piana ha curvatura costante allora è una circonferenza (MMM 10.70).
Esercizio D/R. □

Per casa 24.6. Determinare la torsione per l'elica cilindrica.
12, 26, 34, 36/620 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.5, 10.8.

25. Mercoledì 09/11/2021
(*Andreucci*) (Aula 15: 10-12)

Sistemi di punti vincolati; il vettore complessivo delle coordinate. Esempi di vincoli per un singolo moto: superficie, curva come intersezione di due superficie. Calcolo empirico dei gradi di libertà.
Vincolo di rigidità per due punti. Vincolo di parallelismo per due moti (4 gradi di libertà); una delle componenti del prodotto vettoriale (che devono essere tutte nulle) risulta combinazione lineare delle altre, in certe configurazioni (ma non in altre).
Vincolo dato da piano e sfera; vari casi. Superfici come superfici di livello di funzioni. Due superfici hanno intersezione regolare se non sono tangenti, ossia i due gradienti delle funzioni sono non paralleli.
Teorema del Dini (s.d.).
Coordinate dipendenti e indipendenti.

Esercizio 25.1. Esercizio D/R. □

Per casa 25.2. 11/560.
(MMM 5.39) Caso di due punti vincolati al piano $x_3 = 0$, a distanza costante, uno all'asse x_1, l'altro a distanza R dall'origine. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.3, 5.4, 5.5.

26. Giovedì 11/11/2021
(*Andreucci*) (Aula 15: 10-12)

Definizione di vincoli olonomi regolari. Configurazioni compatibili. Vincoli fissi e mobili. Gradi di libertà. Esempio dei vincoli lineari.
Definizione di parametrizzazione lagrangiana $\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t)$. Le coordinate indipendenti del teorema del Dini sono lagrangiane. Esempi: parametrizzazione di curve e superfici.

Esercizio 26.1. Vincolo per due moti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_1 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3\,,$$

dato da

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 = R^2\,, \qquad (z_1 - z_4)^2 + z_2^2 = L^2\,, \\ z_5 = 0\,, \qquad z_3 = 0\,, \qquad z_6 = 0\,. \end{aligned}$$

La configurazione $\boldsymbol{z} = (0, R, 0, 0, 0, 0)$ non è regolare ma è possibile se $R = L$.
11/560 □

Per casa 26.2. 1) Discutere la regolarità del vincolo per due punti: ciascuno appartiene a una diversa superficie regolare, e sono a distanza costante tra di loro (es. 5.40 di MMM).
2) 65/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.6, 5.7.

27. Venerdì 12/11/2021
(*Cirillo*) (Aula 15: 08-10)

L13. Moto di precessione.
L14. Centro di massa di uno corpo rigido, proprietà di simmetria e metodi di calcolo. Esempio del cono. Il problema del corpo forato. Esempio del disco forato.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafo 14.7 e paragrafo 15.1.

28. Lunedì 15/11/2021 (*Andreucci*) (Aula 15: 17-19)

Moto lagrangiano, velocità lagrangiana, rappresentazione lagrangiana del moto e della velocità.

Teorema 28.1. *Si ha*

$$\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}} = \sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial t} \,.$$

Il termine $\frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial t}$ *è nullo se i vincoli sono fissi.*

Atti di moto. Definizione di spazio tangente. I vettori della base tangente sono le derivate parziali $\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}/\partial q_h$.

Teorema 28.2. *Gli atti di moto costituiscono lo spazio affine*

$$V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} + \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial t} \,.$$

Spostamenti virtuali e effettivi. Coincidono per i vincoli fissi.
Vale per ogni $j \in \{1\,, \dots\,, \ell\}$, $k \in \{1\,, \dots\,, m\}$

$$\nabla_{\boldsymbol{z}}\, f_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial q_j} = 0\,.$$

Definizione di spazio normale come sottospazio di $\boldsymbol{R}^{n_c}$ generato dai $\nabla_{z}\, f_k$.

Teorema 28.3. *Lo spazio normale è l'ortogonale dello spazio tangente.*

In particolare lo spazio tangente è indipendente dalla parametrizzazione lagrangiana.

Esempio 28.4. Parametrizzazione lagrangiana di due moti allineati con l'origine, di cui il primo appartiene alla sfera con centro l'origine e raggio $R(t) > 0$. Calcolo delle velocità in forma lagrangiana. □

Esercizio 28.5. 65/630. □

Per casa 28.6. 9/620; 69/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.1, 6.2, 6.3.

29. Mercoledì 17/11/2021
(Cirillo) (Aula 15: 10-12)

L14. Momento d'inerzia di uno corpo rigido, metodi di calcolo, e teorema degli assi paralleli (Huygens). Il problema del corpo forato. Esempio del cono. Matrice d'inerzia, riferimento principale, proprietà di simmetria, esempio del quadrato (esempio 15.11).

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 15.2 e 15.3.

30. Giovedì 18/11/2021
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Esempio 30.1. Sistema vincolato di due punti, con $n_c = 6$, $m = 1$,

$$f_1(z_1, \dots, z_6) = 2z_1 - z_4 = 0\,.$$

Inoltre le forze sono $\boldsymbol{F}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{F}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{e}_1$.
Equazioni di moto; ipotesi sulle reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$.
Soluzione esplicita.
La $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = {\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^1 + {\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^2$ fa lavoro complessivo nullo, ma ciascuna ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^i$ fa lavoro non nullo sul moto $\boldsymbol{X}_i$. □

Dinamica relativa. Forze apparenti, di trascinamento e di Coriolis.

Esercizio 30.2. 8/580. □

Per casa 30.3. 10/580, 57/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.1, 7.2, 12.1.

31. Venerdì 19/11/2021
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

L14. Grandezze cinematiche e matrice d'inerzia. Tensore d'inerzia, eterminazion del riferimento principale, proprietà di simmetria dei corpi rigidi, Esempi e applicazioni.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 15.4, 15.5.

32. Lunedì 22/11/2021 *(Andreucci)* (Aula 15: 17-19)

Energia cinetica T^{L} in forma lagrangiana.

Teorema 32.1. *Vale*

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{p} + b_0 \,.$$

$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ è la matrice simmetrica data da

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_k} \,,$$

e $\boldsymbol{b}_1$ e b_0 si annullano se $\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}/\partial t = 0$.

Teorema 32.2. *La matrice $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ è definita positiva.*

L'ipotesi dei lavori virtuali nelle varie forme.

Teorema 32.3. *L'ipotesi dei lavori virtuali determina il moto.*

Esercizio 32.4. 57/620. □

Per casa 32.5. 59/620, 23/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.3, 7.5.

33. MERCOLEDÌ 24/11/2021 (ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Lemma 33.1. *Valgono*

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial p_h}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q},t)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t),t)\Big) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),t)\,.$$

Notazione

$$\frac{\partial}{\partial \dot q_h} = \frac{\partial}{\partial p_h}\,.$$

Teorema 33.2. *(EQUAZIONI DI LAGRANGE) Le ℓ equazioni*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial \dot q_h}\Big] - \frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} = Q_h\,,\quad h=1\,,\dots\,,\ell\,,$$

sono equivalenti all'ipotesi dei lavori virtuali.

Esercizio 33.3. 40/620 □

Definizione di potenziale lagrangiano e forze conservative in senso lagrangiano. Definizione di lagrangiana. Equazioni di Lagrange in forma conservativa. Forze conservative e componenti lagrangiane delle forze.

Teorema 33.4. *Se il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, si ha*

$$Q_h = \frac{\partial}{\partial q_h}[U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},t))]\,,\qquad h=1\,,\dots\,,\ell\,.$$

Esercizio 33.5. 76/620 □

Per casa 33.6. 1/620, 69/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.6, 8.1, 8.2.

34. Giovedì 25/11/2021
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Teorema 34.1. *Se i vincoli sono fissi e il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, l'energia*

$$T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})) \,,$$

si conserva lungo un moto lagrangiano che soddisfa l'ipotesi dei lavori virtuali.

Teorema 34.2. *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})$. Allora se*

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}_0) = 0 \,, \qquad h = 1 \,, \dots \,, \ell \,,$$

la funzione costante $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0$ risolve le equazioni di Lagrange.

Teorema 34.3. *Nelle ipotesi del teorema precedente, se inoltre le forze direttamente applicate sono conservative in senso tradizionale, e $\boldsymbol{q}_0$ è un punto di massimo isolato per U^{L}, allora è di equilibrio stabile.*

Sistemi di corpi rigidi vincolati. Coordinate locali.
Moti solidali a un corpo rigido del sistema (dipendenti dalle coordinate solidali); velocità di moti solidali in forma lagrangiana.
Ipotesi dei lavori virtuali. Le componenti lagrangiane delle forze. Le equazioni di Lagrange per sistemi di corpi rigidi.

Esercizio 34.4. 14/620 □

Per casa 34.5. 28, 30, 63/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.1, 8.4, 16.1, 16.2.

35. Venerdì 26/11/2021
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

L14. ellissoide d'inerzia.
L17. Equazioni cardinali per il corpo rigido libero e loro sufficienza. Equazioni cardinali per il corpo rigido vincolato: esercizio su cerniera ideale e caratterizzazione della sollecitazone esplicata dal vincolo di cerniera ideale.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 15.6, 17.1.

36. Lunedì 29/11/2021
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Se $\ell = 1$ e $Q_1 = Q_1(q_1, t)$ allora esiste il potenziale lagrangiano.
Forze fittizie e equazioni di Lagrange in sistemi mobili di riferimento.

Esercizio 36.1. 37, 42/630. □

Per casa 36.2. 28/620
16, 21, 54, 66/630
27, 38/660 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 12.1, 12.2.

37. Mercoledì 01/12/2021
(Cirillo) (Aula 15: 10-12)

L17. Equazioni cardinali per il corpo rigido vincolato. Esercizi: moto sferico di un disco vincolato mediante due cerniere con assi mutuamente ortogonali (soluzione per mezzo delle equazioni cardinali de problema fisico posto nell'esempio 16.4) e caratterizzazione della sollecitazione vincolare, esercizio su moto rotatorio di un corpo in un campo centrifugo (esempio 17.4), moto di un disco con assenza di strisciamento.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 17.3.

38. Giovedì 02/12/2021
(*Andreucci*) (Aula 15: 10-12)

Componenti lagrangiane della forza di Coriolis. Due casi in cui sono nulle:

Teorema 38.1. *Se $\ell = 1$ e i vincoli sono fissi nel sistema mobile $\boldsymbol{F}_C$ ha componenti lagrangiane nulle.*

Teorema 38.2. *Se tutti i moti appartengono a un piano solidale al sistema mobile, che contiene anche la velocità angolare allora $\boldsymbol{F}_C$ ha componenti lagrangiane nulle.*

Esempio 38.3. Vincoli mobili: punto materiale vincolato a circonferenza che trasla:

$$R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + \frac{ct^2}{2}\boldsymbol{e}_1\,,$$

soggetto al peso $-mg\boldsymbol{e}_2$.
Determinazione delle equazioni di Lagrange nel sistema mobile e in quello fisso. □

Teorema 38.4. *Se due lagrangiane soddisfano*

$$\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\boldsymbol{q}, t)\,,$$

allora hanno equazioni di Lagrange equivalenti.

Esercizio 38.5. 54/630.
Esercizio D/R. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 12.1, 12.2.

39. Venerdì 03/12/2021
(*Cirillo*) (Aula 15: 08-10)

L18. Corpo rigido con asse fisso: bilanciamento statico e dinamico.
L19. Corpo rigido con un punto fisso e equazioni di Eulero. Moti alla Poinsot: statica, leggi di conservazione, teorema di Poinsot.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 17.4, 17.5 e 17.5.1.

40. Lunedì 06/12/2021
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Piccole oscillazioni in punti di equilibrio, con hessiana del potenziale definita negativa, per sistemi vincolati da vincoli olonomi fissi e soggetti a forze conservative.
Lagrangiana ridotta.
Il caso 1-dimensionale: moto armonico. Equazioni di Lagrange delle piccole oscillazioni nel caso $\ell > 1$:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\mathcal{U}}\boldsymbol{q} = 0 \,.$$

Teorema di esistenza delle coordinate normali.(s.d.)
Ricerca delle frequenze delle piccole oscillazioni con la sostituzione $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0 \cos(\omega t + \varphi)$; equazione $\det(\omega^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{U}}) = 0$.
Composizione di moti armonici non è necessariamente periodica; condizione dei periodi commensurabili.

Esercizio 40.1. 6/680. □

Per casa 40.2. 1, 11, 16, 25/680. 45/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 9.3.

41. Giovedì 09/12/2021
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Esercizio 41.1. MMM 12.6 (equilibrio relativo a ellisse scabra ruotante).
21/630 (distribuzioni di potenziale).
□

Per casa 41.2. 17/560, 28/620.
MMM 5.40 (vincolo olonomo regolare per due punti a distanza fissa vincolati su due superfici). □

42. Venerdì 10/12/2021
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

L19. Moti alla Poinsot: moti particolari, rotazioni permanenti, stabilità delle rotazioni permanenti.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 17.5.1 e 17.5.2.

43. Lunedì 13/12/2021
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Teorema 43.1. (s.d.) *Per un corpo rigido libero non degenere, l'ipotesi dei lavori virtuali implica le equazioni cardinali.*

Teorema 43.2. (s.d.) *Per un corpo rigido non degenere vincolato a avere un punto fisso (moto polare), l'ipotesi dei lavori virtuali implica che il momento delle reazioni vincolari rispetto al polo sia nullo.*
Per un corpo rigido non degenere vincolato a ruotare intorno a un asse fisso, l'ipotesi dei lavori virtuali implica che il momento delle reazioni vincolari rispetto a un polo abbia componente lungo l'asse nulla.

Esercizio 43.3. 17/560, 28/620.
MMM 5.40 (vincolo olonomo regolare per due punti a distanza fissa vincolati su due superfici). □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.2, 16.5.

44. Mercoledì 15/12/2021
(Cirillo) (Aula 15: 10-12)

L20. Trottola di Lagrange: discussione euristica, integrali primi, equazioni pure del moto, analisi del moto.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 17.5.3, 17.5.4, 17.5.5, 17.5.6.

45. Venerdì 17/12/2021
(Cirillo) (Aula 15: 08-10)

L20. Trottola lanciata velocemente.
L21. Corpo rigido appoggiato su un piano liscio: statica e dinamica.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 17.5.7 (senza discussione dell'ampiezza della nutazione), 17.6.

46. Lunedì 20/12/2021
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Ipotesi dei lavori virtuali e vincolo rigido.
Coordinate cicliche o ignorabili e integrali primi relativi.

Esercizio 46.1. 26/450, 25/680. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.2, 8.2.

47. Mercoledì 22/12/2021
(Cirillo) (Aula 15: 10-12)

L21. Corpo rigido appoggiato su un piano liscio: esempi.
L22. Sfera appoggiata su un piano scabro.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, 17.6, 17.7.

Fine del corso