

**DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI
MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
A.A. 2022-2023
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE**

DANIELE ANDREUCCI, EMILIO CIRILLO
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo [MMM] si riferiscono al testo *Meccanica Razionale, Modelli Matematici per l'Ingegneria*, D. Andreucci, (Independently published (5 settembre 2022) disponibile su www.amazon.it). Quelli al testo [C] si riferiscono al testo *Appunti delle Lezioni di Meccanica Razionale per l'Ingegneria*, E.M.N. Cirillo, edizioni Compomat.

La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m , nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

1. MERCOLEDÌ 28/09/2022
(ANDREUCCI) (AULA 15: 12-14)

Presentazione del corso.

Richiami: Basi ortonormali e componenti in esse.

Matrici di cambiamento di base $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MN}}$. Si ha $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MN}} = \mathbf{\Gamma}_{\mathcal{NM}}^t$.

Teorema 1.1. *Se $\mathbf{a}$ ha componenti λ in $\mathcal{M}$ e μ in $\mathcal{N}$, allora $\lambda = \mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MN}}\mu$, $\mu = \mathbf{\Gamma}_{\mathcal{NM}}\lambda$.*

Definizione di matrice ortogonale.

Teorema 1.2. (s.d.) *Le matrici di cambiamento di base sono ortogonali: $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MN}} = (\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{NM}})^{-1}$. Quindi il loro determinante ha valore assoluto pari a 1.*

Teorema 1.3. (s.d.) *Composizione delle matrici del cambiamento di base: $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MP}} = \mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MN}}\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{NP}}$.*

Per casa 1.4. Si considerino la base ortonormale standard ($\mathbf{e}_h$) e quella data da:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{5}{6}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{11}}{6}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\sqrt{11}}{6}\mathbf{e}_1 + \frac{5}{6}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Si esprima il vettore

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3$$

nella base ($\mathbf{u}_h$), sia calcolando e usando la matrice di cambiamento di base, sia usando direttamente la definizione di ($\mathbf{u}_h$). $\square$

Definizione di base ortonormale positiva.

Prodotto triplo in $\mathbf{R}^3$.

Teorema 1.5. *Se ($\mathbf{u}_h$) è una base ortonormale positiva di $\mathbf{R}^3$, allora*

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3, \quad \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1.$$

Corollario 1.6. *Se ($\mathbf{u}_h$) è una base ortonormale positiva,*

$$\mathbf{a} = \sum_{h=1}^3 \alpha_h \mathbf{u}_h, \quad \mathbf{b} = \sum_{h=1}^3 \beta_h \mathbf{u}_h, \quad \text{si ha} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 1.7. Caratterizzazione delle matrici ortogonali in $\mathbf{R}^2$. $\square$

Per casa 1.8. Si consideri la base ortonormale data da:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{5}{6}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{11}}{6}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\sqrt{11}}{6}\mathbf{e}_1 + \frac{5}{6}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Si calcoli il prodotto vettoriale

$$(3\mathbf{u}_1 + 7\mathbf{u}_2) \times (4\mathbf{u}_2 - 5\mathbf{u}_3).$$

$\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.4, 9.1, 10.1.

2. GIOVEDÌ 29/09/2022
(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Definizione di sistema di riferimento in $\mathbf{R}^3$. Cambiamento di coordinate.
Definizione di sistema di riferimento mobile in $\mathbf{R}^3$.

Esempio 2.1. 1) Moto $\mathbf{X}(t) = R\mathbf{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ con origine mobile nell'origine del sistema fisso e base ruotante intorno all'asse $\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \cos(\alpha t) \mathbf{e}_1 + \sin(\alpha t) \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{u}_2 &= -\sin(\alpha t) \mathbf{e}_1 + \cos(\alpha t) \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

2) Moto $\mathbf{X}(t) = (L + ct)\mathbf{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ dell'esempio precedente. $\square$

Definizione di velocità e accelerazione relativa a un sistema di riferimento mobile.

Per casa 2.2. 1) Calcolare velocità e accelerazione relativa nell'Esempio precedente.

2) 5/100. $\square$

Derivata di un vettore relativa a una terna mobile (velocità e accelerazione relative). Regole di derivazione per la derivata relativa; derivata relativa di uno scalare. Funzioni vettoriali costanti in una terna mobile (e quindi di lunghezza costante); moti solidali con un sistema di riferimento mobile.

Teorema 2.3. Data una terna mobile $(\mathbf{u}_h)$ esiste una unica funzione $\boldsymbol{\omega}$ tale che

$$\frac{d\mathbf{u}_h}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h, \quad h = 1, 2, 3.$$

$\boldsymbol{\omega}$ si dice velocità angolare della terna.

Teorema 2.4. Per ogni $\mathbf{a} \in C^1(I)$ si ha

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt} \right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}.$$

Esercizio 2.5. Si considerino la base ortonormale standard $(\mathbf{e}_h)$ e quella data da:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{5}{6}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{11}}{6}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\sqrt{11}}{6}\mathbf{e}_1 + \frac{5}{6}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Si esprima il vettore

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3$$

nella base $(\mathbf{u}_h)$, sia calcolando e usando la matrice di cambiamento di base, sia usando direttamente la definizione di $(\mathbf{u}_h)$. $\square$

Per casa 2.6. 9/340, 24/340, 29/340, 37/340

MMM/10.36 Trovare la velocità angolare delle rotazioni intorno a $\mathbf{u}_1$, a $\mathbf{u}_2$ e a $\mathbf{u}_3$. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.2, 10.3, 10.4.

3. VENERDÌ 30/09/2022
(CIRILLO) (AULA 15: 8-10)

Presentazione del corso.

L00. Sollecitazione, sistema di vettori applicati, retta di applicazione, somma e momento totale, formula fondamentale per il campo momento e relative proprietà, trinomio invariante, asse della sollecitazione, campo costante, campo circolare e campo elicoidale. Esempi: coppia, forza singola, sistema di forze parallele a un piano. Sollecitazioni equivalenti e proprietà. Esempio del peso.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 1.4 e 17.2.

4. LUNEDÌ 03/10/2022
(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Teorema del moto relativo sulla scomposizione della velocità nel sistema fisso. Velocità di trascinamento.

Teorema di Coriolis sulla scomposizione dell'accelerazione nel sistema fisso. Accelerazione di trascinamento e di Coriolis.

Esercizio 4.1. Calcolo della velocità angolare in una rotazione.

Calcolare le velocità e accelerazioni nell'esempio MMM/10.12.

MMM/10.44 (epiciclo) □

Per casa 4.2. 1/340, 15/340, 21/340

MMM/10.43 (sistema di riferimento terrestre) □

Teorema 4.3. *La velocità angolare di $\mathcal{M}$ è costante in $\mathcal{M}$ se e solo se è costante; ha direzione costante in $\mathcal{M}$ se e solo se ha direzione costante.*

Definizione di rotazione e rotazione costante per una terna. Definizione di moto polare e rotazione (e rotazione costante) per un sistema mobile di riferimento.

Teorema della ricostruzione di terne mobili data la velocità angolare (s.d.).

Esercizio 4.4. Una terna si muove di rotazione (intorno a $\mathbf{u}_3$) se e solo se $\boldsymbol{\omega} = \alpha(t)\mathbf{u}_3$ o $\boldsymbol{\omega} = \alpha(t)\mathbf{e}_3$ (terna fissa e mobile coincidenti a $t = 0$).

29/340 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.5, 10.6.

5. MERCOLEDÌ 05/10/2022
(CIRILLO) (AULA 15: 12-14)

L10. Generalità sui sistemi di particelle: centro di massa, quantità di moto totale, energia cinetica totale, momento totale della quantità di moto, teorema dell'energia cinetica e del lavoro, osservatore del centro di massa e relative grandezze cinematiche, teorema di König, somma e momento totale della sollecitazione interna. Leggi di conservazione per i sistemi liberi e isolati. Equazioni globali della dinamica e relative proprietà.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, capitolo 9.

6. GIOVEDÌ 06/10/2022
(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Velocità angolare relativa di una terna mobile rispetto a un'altra.

Teorema 6.1. *Date due terne mobili $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M} = (\mathbf{u}_h)$ esiste un'unica $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ tale che*

$$\left[\frac{d\mathbf{u}_h}{dt} \right]_{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \mathbf{u}_h.$$

Teorema 6.2. *Per ogni $\mathbf{a} \in C^1(I)$ si ha*

$$\left[\frac{d\mathbf{a}}{dt} \right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt} \right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \mathbf{a}.$$

Dalla definizione segue $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} = 0$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$.

Teorema 6.3 (Composizione di velocità angolari). *Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ sono terne mobili, vale*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}.$$

Esercizio 6.4. 1) Calcolo di velocità angolare di una terna mobile rispetto alla terna fissa mediante composizione di velocità angolari relative.

2) (MMM/10.43) Calcolo di $\mathbf{v}_T$, $\mathbf{a}_T$, $\mathbf{a}_C$ per un moto nel sistema di riferimento terrestre. $\square$

Per casa 6.5. 5/340, 6/340, 26/340, 27/340 $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.7.

7. VENERDÌ 07/10/2022
(CIRILLO) (AULA 15: 08-10)

L03. Trasformazioni di coordinate cartesiane e equazione della trasformazione di coordinate. Rotazione attorno a un asse coordinato: definizione e deduzione delle equazioni della trasformazione di coordinate, Esempio 2.1. Non abelianità del prodotto tra rotazioni, Esempio 2.2. Angoli di Cardano e costruzione della matrice del cambiamento di base. Angoli di Eulero e costruzione della matrice del cambiamento di base.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 2.1 e 2.2.

8. LUNEDÌ 10/10/2022
(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Il moto di un punto come funzione vettoriale.

Per casa 8.1. Trovare un moto tale che $\mathbf{X}(t) \rightarrow 0$ ma $\dot{\mathbf{X}}(t) \not\rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

MMM/1.3, MMM/1.5, MMM/1.6, MMM/1.7, MMM/1.32 □

Velocità e accelerazione. Passaggio dall'accelerazione alla velocità e al moto, condizioni iniziali. Grafico (linea di universo) e orbita (traiettoria) di un moto. Moti piani, rettilinei, circolari, uniformi.

Esempio di un moto di classe C^2 ma con orbita con uno spigolo:

$$\mathbf{X}(t) = t^3 \mathbf{e}_1 + |t|^3 \mathbf{e}_2.$$

Confronto con il caso del grafico di una funzione scalare.

Esercizio 8.2. Dimostrare che se $x \in C^1(\mathbf{R})$, $\dot{x} \geq -kx$, $k > 0$, e $x(0) > 0$, allora $x(t) > 0$ per ogni $t > 0$.

Risolvere i problemi di Cauchy

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0.$$

□

Per casa 8.3. MMM/1.9

Dimostrare che se $x \in C^1(\mathbf{R})$, $\dot{x} = -k\sqrt{x}$, $k > 0$, e $x(0) > 0$, allora $x(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow t_0 - < +\infty$. □

Definizione di retta tangente per la traiettoria di un moto (mediante la dipendenza da t).

Teorema 8.4. *La retta tangente e il vettore tangente sono unici.*

Teorema 8.5. *Se un moto ammette retta tangente, allora la sua derivata è il vettore tangente. Viceversa, se un moto ha derivata diversa da zero, allora ammette retta tangente.*

Per casa 8.6. Consideriamo la curva data dall'intersezione di due superficie:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0;$$

dare una definizione di vettore tangente alla curva indipendente da una sua eventuale parametrizzazione (senza dimostrazioni).

1/100, 4/100 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.1, 1.2, 1.4.

9. MERCOLEDÌ 12/10/2022

(CIRILLO) (AULA 15: 12-14)

L04. Esercizi sul calcolo della velocità angolare: moto rotatorio (esempio 3.1), moto con due cerniere perpendicolari (esempio 3.2), generico moto sferico descritto con gli angoli di Eulero (esempio 3.11), generico moto sferico descritto con gli angoli di Cardano (esempio 3.10).

L13. Sistema rigido, riferimento solidale, rappresentazione cartesiana, velocità angolare, lavoro di una sollecitazione agente su un sistema rigido, velocità del punto solidale. Atto di moto.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 3.2 e 3.4, 14.1, 14.2, 14.3 e 14.4.

10. GIOVEDÌ 13/10/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Definizione di punto materiale. Legge del moto.

Problema di Cauchy o ai valori iniziali. Funzioni localmente lipschitziane.

Criterio di lipschitzianità mediante le derivate. Soluzioni massimali.

Teorema 10.1. (s.d.) *La soluzione massimale del problema di Cauchy per l'equazione $m\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$, t esiste ed è unica se $\mathbf{F}$ è continua in un aperto $A \subset \mathbf{R}^7$ e localmente lipschitziana rispetto a $\mathbf{X}$, $\dot{\mathbf{X}}$.*

Il suo intervallo di definizione (σ, Σ) è aperto e per $t \rightarrow \Sigma -$ si deve avere che $(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t))$ diventa illimitata oppure la sua distanza da ∂A tende a 0.

Per casa 10.2. 2/100, 3/100 □

Esercizio 10.3. MMM/1.24: Risoluzione completa del problema

$$m\ddot{\mathbf{X}} = -k\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{v}_0.$$

□

Esercizio 10.4. MMM/1.25: Prima integrazione del problema

$$m\ddot{\mathbf{X}} = -\gamma m \frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^3}, \quad \mathbf{X}(0) = L\mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = -c\mathbf{e}_1.$$

Uso del teorema di unicità. L'intervallo di definizione è limitato a destra ($\Sigma < +\infty$). □

Per casa 10.5. 1) Trovare tutte le soluzioni di

$$\dot{X}_1 = -X_2, \quad \dot{X}_2 = X_1.$$

2) Riduzione del problema precedente in coordinate polari. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.3.

11. VENERDÌ 14/10/2022

(*CIRILLO*) (AULA 15: 08-10)

L13. Atto di moto, formula fondamentale, trinomio invariante, proprietà. Classificazione: atto traslatorio e rotatorio. Campo circolare e elicoidale. Esempi.

Moto rigido di contatto, moto assoluto e relativo del punto di contatto, velocità di strisciamento.

Esempi di calcolo della velocità di strisciamento e relativa condizione di assenza di strisciamento: disco su guida rettilinea (esempio 14.8), disco su guida circolare (esempi 14.9 e problema 14.1), cono su piano (esempio 14.12) e cilindro su piano (esempio 14.11).

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 14.4, 14.5.

12. LUNEDÌ 17/10/2022
(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Riduzione dell'ordine di un sistema differenziale, aumentando il numero delle variabili.

Energia cinetica T di un punto materiale.

Teorema 12.1 (del lavoro o dell'energia cinetica). *Se $m\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}$, allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{X}} \, dt.$$

Per casa 12.2. MMM/1.45: Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{X}} &= \mathbf{B} \times \dot{\mathbf{X}}, \\ \mathbf{X}(0) &= L\mathbf{e}_1, \\ \dot{\mathbf{X}}(0) &= c\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Qui $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$, $B > 0$, $L > 0$, $c > 0$. Integrale dell'energia cinetica. □

Dipendenza continua. Necessità di assumere intervalli limitati.

Esercizio 12.3. Il caso $m\ddot{\mathbf{X}} = \alpha\mathbf{X}$, $m, \alpha > 0$.

Il caso $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, $\mathbf{F}$ globalmente lipschitziana. □

Esempio 12.4. Integrale generale del sistema lineare a coefficienti costanti del primo ordine

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X},$$

nell'ipotesi che la matrice $\mathbf{A}$ abbia una base di autovettori. Studio della stabilità dell'origine (è stabile se e solo se tutti gli autovalori sono non positivi o con parte reale non positiva se complessi). □

Esercizio 12.5. MMM/1.69: Si dimostri che le sole soluzioni periodiche di

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C^1(\mathbf{R}),$$

sono le costanti. □

Per casa 12.6. Dimostrare la dipendenza continua per $m\ddot{\mathbf{X}} = -k\mathbf{X}$, $m, k > 0$.

MMM/1.49 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.5, 1.6, 1.8.

13. MERCOLEDÌ 19/10/2022

(CIRILLO) (AULA 15: 12-14)

L13. Esempi di calcolo della velocità di strisciamento e relativa condizione di assenza di strisciamento: sfera appoggiata su un piano (esempio 14.10). Moto rigido piano: proprietà dell'atto di moto, centro di istantanea rotazione, base e rulletta. Esempio dell'ellissografo (esempio 14.13).

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 14.5, 14.6.

14. GIOVEDÌ 20/10/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Sistemi differenziali autonomi. Traslazione nel tempo delle soluzioni.

Definizione di punto di equilibrio $\mathbf{x}_{eq} \in \mathbf{R}^3$ per un sistema autonomo di primo o di secondo ordine.

Il punto $\mathbf{x}_{eq}$ è di equilibrio se e solo se la funzione costante $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}_{eq}$ è soluzione. Esempi.

Esercizio 14.1. Andamento qualitativo delle soluzioni di $\dot{x} = x(1 - x)$. $\square$

Per casa 14.2. Andamento qualitativo delle soluzioni di $\dot{x} = \sin x$. $\square$

Definizione di equilibrio stabile.

Esercizio 14.3. Il caso $\dot{x} = x(1 - x)$.

Il caso $\mathbf{F} = 0$.

MMM/1.58: Tutti i punti di $\mathbf{R}^3$ sono di equilibrio stabile per $m\ddot{\mathbf{X}} = -\mu\dot{\mathbf{X}}$, $m, \mu > 0$. $\square$

Per casa 14.4. 1) MMM/1.59: Studiare la stabilità dell'equilibrio per $m\ddot{\mathbf{X}} = -\mu\dot{\mathbf{X}}^{1+q}$, $m, \mu, q > 0$. Si assuma $\dot{\mathbf{X}} > 0$.

2) I casi $m\ddot{\mathbf{X}} = \pm k\mathbf{X}$, $k > 0$.

3) MMM/1.64

4) MMM/1.46: Risolvere tutti i problemi di Cauchy

$$m\ddot{\mathbf{X}} = -\mu(t)\dot{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{v}_0;$$

qui $\mu(t) > 0$ è una funzione continua su $\mathbf{R}$. Dare una condizione su μ tale che $T(t) \not\rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.7.

15. VENERDÌ 21/10/2022

(CIRILLO) (AULA 15: 10-12)

L13. Moto sferico e rotatorio. Coni di Poincaré. Moto di precessione.

L14. Centro di massa di uno corpo rigido, proprietà di simmetria e metodi di calcolo. Esempio del cono. Il problema del corpo forato. Esempio del disco forato.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafo 14.7 e paragrafo 15.1.

16. LUNEDÌ 24/10/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Esempio di integrazione completa nel teorema dell'energia cinetica (attrazione gravitazionale). Definizione di forza conservativa.

Teorema 16.1. Se $\mathbf{F} = \nabla U$, allora

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{X}(\tau)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(\tau) d\tau = U(\mathbf{X}(t_1)) - U(\mathbf{X}(t_0)).$$

Definizione di energia (meccanica).

Teorema 16.2. Se un moto $\mathbf{X}$ soddisfa $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ e $\mathbf{F}$ è conservativa con potenziale U , allora l'energia

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{X}}(t)|^2 - U(\mathbf{X}(t))$$

si mantiene costante durante il moto.

Se un moto $\mathbf{X}$ soddisfa $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_0$, con $\mathbf{F}$ conservativa con potenziale U , e $\mathbf{F}_0 \cdot \dot{\mathbf{X}} = 0$, allora l'energia $\mathcal{E}(t)$ si mantiene costante durante il moto.

Conservazione dell'energia come strumento per ottenere informazioni sul moto. Esempi di $\mathbf{F} = \pm k\mathbf{X}$.

Esercizio 16.3. 9/120

□

Per casa 16.4. MMM/2.9

1/120, 3/120, 7/120, 8/120

□

Campi di forze posizionali e conservativi (potenziali). Esempi. Un campo conservativo è chiuso, ma non vale l'implicazione contraria.

Teorema 16.5 (Criterio necessario e sufficiente della circuitazione nulla.). (s.d.) Un campo $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in A \subset \mathbf{R}^3$ è conservativo in A se e solo se il suo integrale su tutte le curve chiuse contenute in A è nullo.

Semplicemente connessi in $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$.

Teorema 16.6. (s.d.) Un campo chiuso in un aperto semplicemente connesso A è conservativo in A .

Esercizio 16.7. Se $\varphi(x, y)$ è un'anomalia polare in $\mathbf{R}^2$; si ha

$$\nabla \varphi = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{e}_1 + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{e}_2, \quad (x, y) \neq (0, 0);$$

quindi questo campo ha per potenziale locale l'anomalia polare, ma non esiste potenziale in tutto $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. □

Per casa 16.8. MMM/2.22 (esempio), MMM/2.23

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.1, 2.2, 2.3, 2.4.

17. MERCOLEDÌ 26/10/2022

(CIRILLO) (AULA 15: 12-14)

L14. Momento d'inerzia di uno corpo rigido, metodi di calcolo, e teorema degli assi paralleli (Huygens). Il problema del corpo forato. Esempio del cono. Esempio: energia potenziale della sollecitazione centrifuga. Matrice d'inerzia, riferimento principale, proprietà di simmetria, esempio del quadrato (esempio 15.11). Grandezze cinematiche e matrice d'inerzia: atto di moto rotatorio.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 15.2, 15.3 e 15.4.

18. GIOVEDÌ 27/10/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Piano delle fasi di moti 1-dimensionali conservativi. Passaggio da $m\ddot{x} = f(x) = U'(x)$ al sistema equivalente

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = \frac{1}{m}f(x).$$

Orbite. Le orbite giacciono sulle curve che hanno la forma

$$p = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))}, \quad x \in J(E) = \{x \in \mathbf{R} \mid E + U(x) \geq 0\}.$$

Ciascuna curva può contenere più orbite.

Esercizio 18.1. Il diagramma di fase di $m\ddot{x} = -kx$ e di $m\ddot{x} = -k \sin x$. Punti di inversione, di equilibrio stabili e instabili riconosciuti dal ritratto di fase. $\square$

Teorema 18.2. *Se due orbite si intersecano, allora coincidono.*

Teorema 18.3. *Se un'orbita si autointerseca, allora corrisponde a una soluzione periodica.*

Teorema 18.4. (s.d.) *Se $X \in C^2((\sigma, \Sigma))$ è una soluzione massimale di $m\ddot{X} = F(X)$ e*

$$X(t) \rightarrow x_0, \quad t \rightarrow \Sigma-, \quad |\dot{X}(t)| \leq C, \quad t \in (\delta, \Sigma),$$

allora $\Sigma = +\infty$ e $F(x_0) = 0$. Se anche $\dot{X}(t) \rightarrow \mathbf{p}$ per $t \rightarrow +\infty$, allora $\mathbf{p} = 0$.

Per casa 18.5. È possibile fare tutti gli esercizi del gruppo 150.

6/150, 16/150, 18/150, 21/150, 25/150, 27/150 $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.5.

19. VENERDÌ 28/10/2022

(CIRILLO) (AULA 15: 08-10)

L14. Grandezze cinematiche e matrice d'inerzia: esempio della ruota con assenza di strisciamento, moto sferico. Tensore d'inerzia, determinazione del riferimento principale come problema agli autovalori, Esempi e applicazioni.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 15.4, 15.5.

20. MERCOLEDÌ 2/11/2022

(CIRILLO) (AULA 15: 12-14)

L14. Proprietà di simmetria dei corpi rigidi, ellissoide d'inerzia, relazione tra la direzione del momento angolare e della velocità angolare.

L17. Equazioni cardinali per il corpo rigido libero e loro sufficienza. Equazioni cardinali per il corpo rigido vincolato.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 15.5, 15.6, 17.1.

21. GIOVEDÌ 3/11/2022
(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Energia come funzione di due variabili:

$$W(x, p) = \frac{m}{2} p^2 - U(x);$$

uguaglianza $W(X(t), \dot{X}(t)) = \mathcal{E}(t)$.

Punti di equilibrio di $m\ddot{x} = U'(x)$ sono i punti critici del potenziale e corrispondono ai punti $(x_{\text{eq}}, 0)$ critici per W . Questi ultimi possono essere sella o minimi. Le orbite del piano delle fasi (x, p) giacciono su curve di livello di W . Curve di livello di W vicino a massimi e minimi di U e confronto con il diagramma di fase.

Teorema 21.1. (DIRICHLET) *Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X)$.*

Per casa 21.2. Dimostrare che se $U(x) = U(0)$ per ogni $x \in [0, 1]$ allora ogni $x \in [0, 1]$ è di equilibrio instabile. $\square$

Teorema 21.3. *Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X) - r(X, \dot{X})\dot{X}$, ove $r \geq 0$.*

Teorema 21.4. (Dimensione $N > 1$). *Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{\mathbf{X}} = \nabla U(\mathbf{X}) + \mathbf{h}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$, ove $\mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{X}} \leq 0$.*

Esercizio 21.5. 17/660

Sia $f \in C^2(\mathbf{R})$. Trovare condizioni sufficienti su $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ perché il moto piano $m\mathbf{a} = \nabla U$ abbia in $(0, 0)$ un punto di equilibrio stabile, ove

$$U(x_1, x_2) = f(x_1^2 + x_2^2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

$\square$

Per casa 21.6. 19/660, 39/660, 50/660, 52/660, 56/660

$\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.6.

22. VENERDÌ 4/11/2022
(CIRILLO) (AULA 15: 8-10)

L17. Equazioni cardinali per il corpo rigido vincolato. Esercizi: cerniera ideale e caratterizzazione della sollecitazione esplicata dal vincolo di cerniera ideale, moto sferico di un disco vincolato mediante due cerniere con assi mutuamente ortogonali (soluzione mediante l'uso delle equazioni cardinali del problema fisico posto nell'esempio 16.4) e caratterizzazione della sollecitazione vincolare.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 17.3.

23. LUNEDÌ 7/11/2022
(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Forze a direzione radiale. Esempi. Moti centrali.

Teorema 23.1. *In un moto centrale il vettore $\mathbf{X}(t) \times \dot{\mathbf{X}}(t)$ è costante.*

Teorema 23.2. *Sia $\mathbf{X}$ un moto centrale.*

1) *Se $\mathbf{X}(0) \times \dot{\mathbf{X}}(0) \neq 0$, allora il moto avviene nel piano per $\mathbf{X}(t_0)$ perpendicolare al vettore $\mathbf{X}(0) \times \dot{\mathbf{X}}(0)$.*

2) *Se $\mathbf{X}(0) \times \dot{\mathbf{X}}(0) = 0$, allora il moto avviene sulla retta per $\mathbf{X}(t_0)$ e l'origine.*

Moti piani e coordinate polari; versori radiale e trasversale. Velocità e accelerazione radiale e trasversale. Equazioni del moto centrale scomposte nella base dei versori radiale e trasversale; l'accelerazione trasversale è nulla, quindi la velocità areolare è costante.

Esercizio 23.3. 3/220 □

Per casa 23.4. 5/220, 7/220 □

La formula di Binet (s.d.).

Teorema 23.5. *Una forza a direzione radiale è conservativa se e solo se è nella forma*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|},$$

e allora il suo potenziale è (per $d > 0$ arbitrario)

$$U(\mathbf{x}) = \int_d^{|\mathbf{x}|} f(s) \, ds.$$

Per casa 23.6. MMM/2.43 La formula di Binet nel caso della forza gravitazionale.

1/220 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.8.

24. MERCOLEDÌ 9/11/2022
(ANDREUCCI) (AULA 15: 12-14)

Disuguaglianza del modulo per gli integrali; formula di Taylor per funzioni vettoriali.

Definizione di lunghezza L della traiettoria di un moto come estremo superiore delle lunghezze delle approssimazioni con spezzate. Si ha

$$L \leq \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\mathbf{X}}(\tau)| d\tau.$$

In effetti

Teorema 24.1. (s.d.)

$$L = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\mathbf{X}}(\tau)| d\tau.$$

Definizione di lunghezza d'arco s . Funzione inversa della lunghezza d'arco per moti regolari. Parametrizzazione mediante s .

Moto dato mediante la traiettoria e la legge oraria.

Esercizio 24.2. 1) Lunghezza d'arco nella circonferenza.

2) Lunghezza d'arco nella retta.

3) Lunghezza d'arco nell'elica cilindrica (definita nell'Esempio MMM 3.22). □

Per casa 24.3. 1) Scrivere il moto che ha per traiettoria l'elica cilindrica e legge oraria $s(t) = bt^2$.

2) Scrivere la legge oraria per il moto sull'elica cilindrica che ha per prima coordinata $R \cos(bt^3)$.

3) Nel caso dell'ellisse scrivere $s(t)$ come integrale di una funzione continua (questo integrale non si può calcolare elementarmente). □

Versore tangente, versore normale principale, curvatura, raggio di curvatura. Scomposizione di velocità e accelerazione:

$$\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{T}(s), \quad \mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{T}(s) + \dot{s}^2 k(s)\mathbf{N}(s).$$

Accelerazione tangente e normale.

La terna intrinseca $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ (se $k > 0$).

Esercizio 24.4. 1) Moti con traiettoria circolare.

2) Terna intrinseca dell'elica cilindrica.

3) 5/220. □

Per casa 24.5. 6/100 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.1, 3.2, 3.3.

25. GIOVEDÌ 10/11/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Moto vincolato a una curva, reazioni vincolari. Necessità di ipotesi costitutive. La $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \mathbf{B} = 0$ non va bene, la $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \mathbf{T} = 0$ sì. È la legge di vincolo liscio.

Il caso del vincolo liscio per le curve; la componente tangente dell'equazione del moto è indipendente dalle altre 2, che servono a determinare la reazione vincolare.

Esercizio 25.1. 9/560 □

La conservazione dell'energia è applicabile nel caso di vincolo liscio se le forze direttamente applicate sono conservative.

Legge di attrito dinamico di Coulomb-Morin.

Esercizio 25.2. 15/560 □

Per casa 25.3. 7/560, 19/560, 20/560 □

Teorema 25.4. *Il problema ai valori iniziali per il sistema del moto per un punto vincolato a una curva scabra, se le forze sono continue e localmente lipschitziane in $(s, \dot{s})$, ammette unica soluzione.*

Teorema 25.5. *Una curva è un segmento di retta per $s \in (a, b)$ se e solo se la curvatura è nulla per $s \in (a, b)$.*

Per casa 25.6. 2/120, 3/120, 12/120, 11/560, 13/560, 16/560, 22/560, 23/560, 24/560, 10/620 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.5, 3.6, 3.7.

26. VENERDÌ 11/11/2022

(CIRILLO) (AULA 15: 8-10)

L17. Esercizio su moto rotatorio di un corpo in un campo centrifugo.

L18. Corpo rigido con asse fisso: caratterizzazione della sollecitazione vincolare come nell'esercizio svolto in precedenza, bilanciamento statico e dinamico.

L19. Corpo rigido con un punto fisso e equazioni di Eulero. Moti alla Poincaré: esempi del moto relativo al riferimento del centro di massa e del giunto ideale (caratterizzazione della sollecitazione del giunto ideale). Statica, equazioni di Eulero, equazioni pure, leggi di conservazione, teorema di Poincaré.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 17.3, 17.4, 17.5 e 17.5.1.

27. LUNEDÌ 14/11/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Teorema 27.1. *Una curva è piana se e solo se $\mathbf{B}(s)$ è costante.*

Superfici regolari e loro parametrizzazioni; i vettori derivate rispetto ai due parametri; la normale.

Definizione di piano tangente. Le velocità dei moti vincolati alla superficie appartengono al piano tangente.

Il piano tangente in realtà è indipendente dalla parametrizzazione (per superfici di livello).

Scomposizione dell'accelerazione in termini dei vettori tangenti coordinati e delle loro derivate.

L'equazione di moto di un punto vincolato alla superficie nella base data dai vettori tangenti coordinati e dalla normale. La reazione vincolare. Vincolo liscio per una superficie.

Teorema 27.2. *Sia S una superficie con parametrizzazione di classe C^3 , e $\mathbf{F}(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, t)$ una forza continua e localmente lipschitziana in $(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta})$. Allora il problema del moto del punto vincolato a una superficie liscia ha unica soluzione massimale.*

Nel caso del vincolo liscio il moto si determina indipendentemente dalla reazione vincolare che scompare dalle equazioni di moto.

Esercizio 27.3. Parametrizzazione delle superfici di rotazione ottenute ruotando intorno all'asse x_3 la curva

$$x_3 = f(x_2), \quad x_1 = 0.$$

1/620

□

Per casa 27.4. 1) Parametrizzare la superficie data dalla rotazione intorno all'asse x_3 della curva

$$x_2 = a(\sin(bx_3) + 2), \quad x_1 = 0.$$

2) Scrivere le equazioni di moto per il punto pesante vincolato alla sfera.

3) 5/120, 3/620, 7/620

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 4.1, 4.2.

28. MERCOLEDÌ 16/11/2022
(ANDREUCCI) (AULA 15: 12-14)

Vincolo scabro per una superficie: attrito dinamico.

Attrito statico; motivi della disuguaglianza nella legge di Coulomb-Morin.

Coni di attrito per la superficie e la curva.

Esercizio 28.1. MMM/4.18, MMM/4.19: Punti di equilibrio per un punto pesante vincolato a una sfera scabra, e poi a un suo meridiano scabro. $\square$

Per casa 28.2. 1/520, 2/520, 5/520, 6/520

27/560, 29/560 $\square$

Sistemi di punti materiali $(\mathbf{X}_h, m_h)$, $h = 1, \dots, n$.

Sistemi di forze conservative $\mathbf{F}_i$, cioè tali che

$$\mathbf{F}_i = \nabla_{\mathbf{x}_i} U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n).$$

Per casa 28.3. 10/620, 12/620, 16/620, 21/620 $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 4.4, 4.5, 5.2.

29. GIOVEDÌ 17/12/2022
(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Energia cinetica e meccanica del sistema.

Conservazione dell'energia, anche in presenza di forze non conservative di lavoro complessivo nullo.

Teorema 29.1. *Se un sistema di punti materiali liberi è soggetto alle equazioni di moto $m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i^0$ ove il sistema delle forze $\mathbf{F}_i$ è conservativo con potenziale U , e*

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^0 \cdot \mathbf{v}_i = 0 \quad \text{in ogni istante}$$

allora l'energia meccanica $T - U$ si conserva lungo i moti.

Esercizio 29.2. 66/620

□

Per casa 29.3. MMM/5.19
64/620

□

Esempi di vincoli per un singolo moto: superficie, curva come intersezione di due superficie.

Calcolo dei gradi di libertà mediante i parametri necessari o mediante le equazioni vincolari. Vincolo per due moti di essere allineati con l'origine; una delle componenti del prodotto vettoriale (che devono essere tutte nulle) risulta combinazione lineare delle altre. Vincoli in generale. Configurazioni compatibili. Esempi.

Esercizio 29.4. Piano e sfera: i 3 casi possibili.

□

Per casa 29.5. MMM/5.21, MMM/5.25

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.2, 5.3, 5.4.

30. VENERDÌ 18/11/2022
(CIRILLO) (AULA 15: 8-10)

L19. Moti alla Poincaré: moti particolari, rotazioni permanenti, moti e simmetria del corpo, stabilità delle rotazioni permanenti.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 17.5.1 e 17.5.2.

31. LUNEDÌ 21/11/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Teorema del Dini per 1 vincolo scalare e per $m > 1$ vincoli scalari (s.d.).

Esempi di applicazione del teorema del Dini.

Coordinate dipendenti e indipendenti. Gradi di libertà come dimensione dell'insieme di livello.

Per casa 31.1. Coordinate dipendenti e indipendenti sulla sfera e sull'iperboloide

$$x_3^2 + 1 = x_1^2 + x_2^2.$$

MMM/5.32 (Due superfici)

□

Dinamica relativa; le forze apparenti di trascinamento e di Coriolis.

Esercizio 31.2. MMM/12.6

□

Per casa 31.3. 1/350, 4/350, 8/350, 10/350, 3/580, 5/580, 10/580, 65/630, 69/630, 2/660

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.5, 12.1.

32. MERCOLEDÌ 23/11/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 12-14)

Definizione di vincolo olonomo regolare. Numero dei gradi di libertà.

Vincoli fissi e mobili.

Esercizio 32.1. MMM/5.39

□

Per casa 32.2. 1/310, 2/310, 3/310, 4/310

MMM/5.40

□

Coordinate lagrangiane e rappresentazione lagrangiana del moto. Moto lagrangiano. Velocità in coordinate lagrangiane per vincoli fissi e mobili.

Esercizio 32.3. MMM/6.5: Esempio di un punto vincolato a una sfera di raggio variabile e di un punto vincolato a essere allineato con il primo e con l'origine.

□

Per casa 32.4. Mostrare che le coordinate indipendenti sono anche coordinate lagrangiane.

MMM/5.44

26/620, 9/630, 15/630

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.6, 5.7, 6.1.

33. GIOVEDÌ 24/11/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Definizione di spazio tangente. Atti di moto (ossia derivata nel tempo del vettore delle coordinate locali $\mathbf{z}$).

Teorema 33.1. *Gli atti di moto costituiscono lo spazio affine*

$$V_{\mathbf{z},t}\mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{z}^L}{\partial t}.$$

Spostamenti virtuali e effettivi, e loro significato. Coincidono per i vincoli fissi. Se il vincolo è fisso la concatenazione di tutti i vettori velocità appartiene allo spazio tangente. Il vettore $\dot{\mathbf{q}}$ può assumere qualunque valore.

Esercizio 33.2. MMM/6.24 Trovare lo spazio tangente e degli spostamenti effettivi per un punto vincolato al piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0.$$

1/630 (senza equazioni di Lagrange); 3/310

□

Per casa 33.3. 1) Trovare lo spazio tangente per due punti vincolati a essere a distanza costante. 2) 66/620 (spazio tangente)

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.3.

34. VENERDÌ 25/11/2022

(CIRILLO) (AULA 15: 8-10)

L21. Corpo rigido appoggiato su un piano liscio: statica e dinamica. Esempi.

Paragrafi di riferimento sul testo: C, 17.6.

35. LUNEDÌ 28/11/2022
(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Vale per ogni $j \in \{1, \dots, \ell\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\nabla_z f_k \cdot \frac{\partial \mathbf{z}^L}{\partial q_j} = 0.$$

Definizione di spazio normale come sottospazio di $\mathbf{R}^{n_c}$ generato dai $\nabla_z f_k$.

Teorema 35.1. *Lo spazio normale è l'ortogonale dello spazio tangente.*

In particolare lo spazio tangente è indipendente dalla parametrizzazione lagrangiana.

Esercizio 35.2. MMM/6.21 Calcolo dello spazio normale e tangente nei casi:

- 1) superficie ($n_c = 3$, $m = 1$),
- 2) curva ($n_c = 3$, $m = 2$),
- 3) due punti vincolati a avere uguale quota ($n_c = 6$, $m = 1$). □

Esercizio 35.3. 15/630 □

Per casa 35.4. Trovare lo spazio normale per: i) due punti vincolati a essere a distanza costante; ii) MMM/6.24 un punto vincolato al piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0. \quad \square$$

Esercizio 35.5. MMM/7.1 Sistema vincolato di due punti, con $n_c = 6$, $m = 1$,

$$f_1(z_1, \dots, z_6) = 2z_1 - z_4 = 0.$$

Inoltre le forze sono $\mathbf{F}_1 = \alpha_1 \mathbf{e}_1$, $\mathbf{F}_2 = \alpha_2 \mathbf{e}_1$. Equazioni di moto; ipotesi sulle reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in N_{z,t} \mathbf{f}$. Lavoro complessivo nullo delle reazioni vincolari in questo caso, ma ciascuna $\mathbf{f}_{\text{vin}}^i$ fa lavoro non nullo sul moto $\mathbf{X}_i$. □

Esercizio 35.6. 15/620 (modificato: asta omogenea $\rightarrow$ asta composta da due punti materiali), risolto con l'ipotesi $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in N_{z,t} \mathbf{f}$. □

Per casa 35.7. 1) MMM/6.25 Spostamenti virtuali e effettivi per la circonferenza che trasla.

- 2) Scrivere le equazioni di moto con l'ipotesi dei lavori virtuali:
9/620, 36/620, 57/620, 59/620, 23/630 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.3, 7.1.

36. MERCOLEDÌ 30/11/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 12-14)

Forze in coordinate lagrangiane. L'ipotesi dei lavori virtuali (ILV) in diverse forme.

Energia cinetica T^L in forma lagrangiana.

Teorema 36.1. *Vale*

$$T^L = \frac{1}{2} \mathbf{p}^t \mathcal{A} \mathbf{p} + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{p} + b_0.$$

$\mathcal{A}$ è la matrice simmetrica e definita positiva data da

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{X}_i^L}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_i^L}{\partial q_k},$$

e $\mathbf{b}_1$ e b_0 si annullano se $\partial \mathbf{z}^L / \partial t = 0$.

Esercizio 36.2. 1/630: energia cinetica nel sistema fisso e in quello mobile, equazioni di moto con la ILV. $\square$

Per casa 36.3. 1) Calcolare le energie cinetiche negli esercizi:

9/620, 36/620, 57/620, 59/620, 23/630

2) MMM/7.9 Ricavare dalla ILV la precedente definizione di vincolo liscio per il singolo punto vincolato a una curva. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.2, 7.5.

37. GIOVEDÌ 1/12/2022
(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Teorema 37.1. *L'ipotesi dei lavori virtuali determina il moto.*

Per casa 37.2. 66/620

Scrivere le equazioni di moto di un punto libero con la ILV.

Punto su piano ruotante, in assenza di forze direttamente applicate. $\square$

Lemma 37.3. *Valgono*

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i^L}{\partial p_h}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{\partial \mathbf{X}_i^L}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{X}^L}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i^L}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t).$$

Notazione

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial}{\partial p_h}.$$

Le componenti lagrangiane delle forze Q_h .

Teorema 37.4. (EQUAZIONI DI LAGRANGE) *Le ℓ equazioni*

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T^L}{\partial \dot{q}_h} \right] - \frac{\partial T^L}{\partial q_h} = Q_h, \quad h = 1, \dots, \ell,$$

sono equivalenti all'ipotesi dei lavori virtuali.

Esercizio 37.5. 36/620, 57/620 $\square$

Per casa 37.6. (Non usare lagrangiana né passaggio al sistema di riferimento mobile)

37/620, 61/620 (senza potenziale lagrangiano)

17/630, 29/630, 31/630, 37/630 $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.3, 7.6.

38. VENERDÌ 2/12/2022
(CIRILLO) (AULA 15: 8-10)

L22. Sfera appoggiata su un piano scabro.

L20. Trottola di Lagrange: discussione euristica, integrali primi, equazioni pure del moto, analisi del moto (cenni).

Paragrafi di riferimento sul testo: C, paragrafi 17.7, 17.5.3, 17.5.4, 17.5.5, 17.5.6.

39. LUNEDÌ 5/12/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Forze conservative e componenti lagrangiane delle forze.

Teorema 39.1. *Se il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\mathbf{z})$, si ha*

$$Q_h = \frac{\partial}{\partial q_h}[U(\mathbf{z}^L(\mathbf{q}, t))], \quad h = 1, \dots, \ell.$$

Esercizio 39.2. Componenti lagrangiane delle forze per un punto materiale $(\mathbf{X}, m)$ vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2,$$

e soggetto alla forza elastica

$$\mathbf{F} = -k(\mathbf{X} - \mathbf{X}_A), \quad \mathbf{X}_A = R\mathbf{e}_3.$$

□

Per casa 39.3. Calcolare le componenti lagrangiane delle forze per il punto materiale $(\mathbf{X}, m)$ vincolato alla circonferenza mobile

$$x_1^2 + x_2^2 = r(t)^2, \quad r > 0, r \in C^2(\mathbf{R}),$$

e soggetto alla forza

$$\mathbf{F} = -k(\mathbf{X} - \mathbf{X}_A), \quad \mathbf{X}_A = R\mathbf{e}_2, \quad R > 0.$$

□

Definizione di potenziale lagrangiano e forze conservative in senso lagrangiano. Definizione di lagrangiana. Equazioni di Lagrange in forma conservativa.

Esercizio 39.4. MMM/8.19 Un moto con potenziale lagrangiano ma con forze non conservative (punto vincolato a circonferenza con forza tangente). □

Se i vincoli sono mobili l'energia in genere non si conserva anche se le forze direttamente applicate sono conservative.

Teorema 39.5. *Se i vincoli sono fissi e il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\mathbf{z})$, l'energia*

$$T^L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{z}^L(\mathbf{q})),$$

si conserva lungo un moto lagrangiano che soddisfa l'ipotesi dei lavori virtuali.

Esempio 39.6. Una forza non conservativa equivalente sul vincolo a una conservativa. □

Esercizio 39.7. 64/620 □

Per casa 39.8. MMM/8.17, MMM/8.20

32/620, 35/620, 40/620, 56/620, 59/620, 64/620, 65/620, 68/620, 71/620

6/630 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.1, 8.2.

40. MERCOLEDÌ 7/12/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 12-14)

Sistemi di corpi rigidi vincolati. Coordinate locali. Moti solidali a un corpo rigido del sistema; velocità di moti solidali in forma lagrangiana; energia cinetica di un corpo rigido e del sistema di corpi rigidi. Ipotesi dei lavori virtuali.

Teorema 40.1. (s.d.) *Le equazioni date dall'ipotesi dei lavori virtuali determinano il moto.*

Le equazioni di Lagrange per sistemi di corpi rigidi.
Coordinate cicliche e relativo integrale primo.

Esercizio 40.2. 63/620, 21/630

□

Per casa 40.3. 7/330, 10/330

11/620, 14/620, 20/620, 28/620, 30/620, 51/620, 58/620

1/660, 5/660, 13/660, 25/660, 36/660, 44/660, 57/660

10/680, 18/680, 22/680

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.2, 16.1, 16.2.

41. LUNEDÌ 12/12/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Teorema 41.1. *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e $U^L = U^L(\mathbf{q})$. Allora se*

$$\frac{\partial U^L}{\partial q_h}(\mathbf{q}_0) = 0, \quad h = 1, \dots, \ell,$$

la funzione costante $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0$ risolve le equazioni di Lagrange.

Esercizio 41.2. 8/660

□

Per casa 41.3. 60/620

15/630

53/660

□

Teorema 41.4. *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e $U^L = U^L(\mathbf{q})$ e inoltre le forze direttamente applicate siano conservative in senso tradizionale, con $\mathbf{q}_0$ punto di massimo isolato per U^L . Allora $\mathbf{q}_0$ è di equilibrio stabile.*

Esercizio 41.5. 44/660, 9/630, 40/660

□

Per casa 41.6. 14/660, 20/660, 27/660, 41/660, 42/660 (senza piccole oscillazioni), 46/660, 47/660 (senza piccole oscillazioni), 48/660

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.4.

42. MERCOLEDÌ 14/12/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 12-14)

Le equazioni di Lagrange in un sistema di riferimento mobile: i vincoli regolari restano regolari; le forze fittizie soddisfano le necessarie ipotesi di regolarità; l'ILV nel sistema fisso è equivalente a quella nel sistema mobile (s.d.).

Le coordinate lagrangiane valide in uno dei due sistemi di riferimento lo sono anche nell'altro.

Teorema 42.1. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i vincoli sono fissi e $\ell = 1$.*

Teorema 42.2. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i moti sono vincolati a un piano solidale cui appartiene anche la velocità angolare.*

Esercizio 42.3. 54/630, 3/630, 72/620 □

Per casa 42.4. MMM/12.18 (piano che ruota intorno a un asse esterno)
1/630, 5/630, 8/630, 14/630, 25/630, 42/630, 63/630
23/680 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 12.2, 12.4.

43. GIOVEDÌ 15/12/2022
(ANDREUCCI) (AULA 15: 10-12)

Le formule di Frenet-Serret.

Corollario 43.1. *Una curva è piana se e solo se ha torsione nulla.*

Teorema 43.2. *La velocità angolare della terna intrinseca di una curva descritta da un moto di legge oraria $s(t)$ è*

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{s}[-\tau \mathbf{T} + k \mathbf{B}].$$

Esercizio 43.3. MMM/12.12 Vincoli mobili: punto materiale vincolato a circonferenza che trasla:

$$R \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \frac{ct^2}{2} \mathbf{e}_1,$$

soggetto al peso $-mg\mathbf{e}_2$.

Determinazione della lagrangiana e delle equazioni di Lagrange nel sistema mobile e in quello fisso. $\square$

Teorema 43.4. *Se due lagrangiane soddisfano*

$$\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = \frac{d}{dt} F(\mathbf{q}, t),$$

allora hanno equazioni di Lagrange equivalenti.

Esercizio 43.5. 68/630 $\square$

Per casa 43.6. Calcolare la torsione dell'elica cilindrica.
66/630 $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.8, 12.3.

44. LUNEDÌ 19/12/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 17-19)

Piccole oscillazioni in punti di equilibrio, con hessiana del potenziale definita negativa, per sistemi vincolati da vincoli olonomi fissi e soggetti a forze conservative. Energia cinetica ridotta, potenziale ridotto, lagrangiana ridotta.

Il caso 1-dimensionale: moto armonico.

Equazioni di Lagrange delle piccole oscillazioni nel caso $\ell > 1$:

$$\mathcal{A}\ddot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}\mathbf{q} = 0.$$

Ricerca delle frequenze delle piccole oscillazioni con la sostituzione $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \cos(\omega t)$; equazione $\det(\omega^2 \mathcal{A} + \mathcal{U}) = 0$.

Teorema di esistenza delle coordinate normali (s.d.). Moti normali.

Esercizio 44.1. 6/680, 23/680

□

Per casa 44.2. 4/680, 16/680, 20/680, 25/680, 37/680

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 9.3.

45. MERCOLEDÌ 21/12/2022

(ANDREUCCI) (AULA 15: 12-14)

Esercizio 45.1. 55/620, 58/620, 20/620

□

Velocità angolare propria di asta rigida (risoluzione dell'esercizio 20/620).

FINE DEL CORSO