Meccanica Razionale

Esercizi di esame e di controllo

Versione con risoluzioni

Daniele Andreucci
Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Università di Roma La Sapienza
via A.Scarpa 16, 00161 Roma
daniele.andreucci@sbai.uniroma1.it

launch_daexam 20240913 14.13

NOTE:

- (ex): esercizi d'esame; (hw): esercizi di controllo.
- *Salvo diverso avviso:*
  - coni e cilindri sono circolari retti;
  - i corpi rigidi sono omogenei;
  - si assume l'ipotesi dei lavori virtuali.

Indice

100. Generalità **2**

120. Conservazione dell'energia **11**

150. Piano delle fasi **18**

220. Moti centrali e simili **40**

310. Vincoli olonomi **45**

330. Calcolo di quantità meccaniche in moti relativi **50**

340. Calcolo di quantità cinematiche in moti relativi **96**

350. Dinamica relativa **126**

450. Corpi rigidi: moti polari **134**

470. Corpi rigidi: equazioni cardinali **219**

520. Statica per sistemi vincolati: vincoli fissi **230**

560. Dinamica per sistemi vincolati: vincoli fissi **236**

580. Dinamica per sistemi vincolati: vincoli mobili **259**

620. Equazioni di Lagrange per vincoli fissi **271**

630. Equazioni di Lagrange per vincoli mobili **357**

660. Equazioni di Lagrange: equilibrio **445**

680. Equazioni di Lagrange: piccole oscillazioni **496**

100. Generalità

1. [29/9/2014 (hw)I] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
\ddot{\varphi} + a\varphi &= b\cos(\omega t)\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,,\\
\varphi(0) &= 0\,,\\
\varphi(0) &= 1\,,
\end{aligned}
$$

per ogni scelta di a, b, $\omega \in \boldsymbol{R}$ con $b > 0$.
SOLUZIONE

È noto che l'integrale generale della e.d.o. lineare si scrive come

$$\varphi = \eta + w\,,$$

ove η è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata e w è un integrale particolare arbitrario della e.d.o. non omogenea (ossia completa).
1) Gli integrali dell'equazione omogenea sono dati da:

$$\begin{aligned} a > 0\,, &\qquad \eta(t) = k_1 \cos(\sqrt{a}t) + k_2 \sin(\sqrt{a}t)\,, \\ a = 0\,, &\qquad \eta(t) = k_1 + k_2 t\,, \\ a < 0\,, &\qquad \eta(t) = k_1 e^{\sqrt{|a|}t} + k_2 e^{-\sqrt{|a|}t}\,. \end{aligned}$$

2) Gli integrali particolari si trovano distinguendo anzitutto i casi $\omega \neq 0$ e $\omega = 0$.
2.1) Caso $\omega \neq 0$. Bisogna ulteriormente distinguere il caso in cui il termine noto

$$F(t) = b\cos(\omega t)$$

non è soluzione dell'equazione omogenea da quello in cui lo è.
2.1.1) Nel primo caso (ossia se $a \neq \omega^2$) si tenta di determinare una soluzione particolare nella forma

$$w(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\,.$$

Sostituendo si ottiene

$$-\omega^2 w + aw = b\cos(\omega t)$$

ossia

$$(a - \omega^2)(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) = b\cos(\omega t)\,.$$

Dunque usando $a \neq \omega^2$ dobbiamo porre

$$A = \frac{b}{a - \omega^2}\,, \qquad B = 0\,.$$

2.1.2) Nel caso in cui invece $a = \omega^2$ si deve provare con

$$w(t) = t[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]\,.$$

Sostituendo si ottiene usando $a = \omega^2$

$$-2A\omega\sin(\omega t) + 2B\omega\cos(\omega t) = b\cos(\omega t)\,.$$

Si deve pertanto avere

$$A = 0\,, \qquad B = \frac{b}{2\omega}\,.$$

2.2) Caso $\omega = 0$. In questo caso

$$F(t) = b\,.$$

Se F non è soluzione dell'equazione omogenea, ossia nei casi $a \neq 0$, si tenta con la funzione

$$w(t) = A\,,$$

ottenendo

$$A = \frac{b}{a}\,.$$

Se invece F è soluzione della e.d.o. omogenea, ossia se $a = 0$, si tenta con

$$w(t) = At^2\,,$$

traendone

$$A = \frac{b}{2}\,.$$

3) ***Conclusione.*** *Avendo trovato in ciascun caso sia η che w imponiamo le condizioni iniziali (o condizioni di Cauchy).*
3.1) $a > 0$
i) $\omega^2 \notin \{0, a\}$

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) = k_1 \cos(\sqrt{a}t) + k_2 \sin(\sqrt{a}t) + \frac{b}{a-\omega^2}\cos(\omega t)\,,\\
&\varphi(0) = k_1 + \frac{b}{a-\omega^2} = 0\,,\\
&\dot{\varphi}(0) = \sqrt{a}k_2 = 1\,.
\end{aligned}$$

ii) $\omega^2 = a$

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) = k_1 \cos(\sqrt{a}t) + k_2 \sin(\sqrt{a}t) + \frac{b}{2\omega}t\sin(\omega t)\,,\\
&\varphi(0) = k_1 = 0\,,\\
&\dot{\varphi}(0) = \sqrt{a}k_2 = 1\,.
\end{aligned}$$

iii) $\omega = 0$

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) = k_1 \cos(\sqrt{a}t) + k_2 \sin(\sqrt{a}t) + \frac{b}{a}\,,\\
&\varphi(0) = k_1 + \frac{b}{a} = 0\,,\\
&\dot{\varphi}(0) = \sqrt{a}k_2 = 1\,.
\end{aligned}$$

3.2) $a = 0$
i) $\omega \neq 0$

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) = k_1 + k_2 t - \frac{b}{\omega^2}\cos(\omega t)\,,\\
&\varphi(0) = k_1 - \frac{b}{\omega^2} = 0\,,\\
&\dot{\varphi}(0) = k_2 = 1\,.
\end{aligned}$$

ii) $\omega = 0$

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) = k_1 + k_2 t + \frac{b}{2}t^2\,,\\
&\varphi(0) = k_1 = 0\,,\\
&\dot{\varphi}(0) = k_2 = 1\,.
\end{aligned}$$

3.3) $a<0$
i) $\omega\neq 0$

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= k_1 e^{\sqrt{|a|}t} + k_2 e^{-\sqrt{|a|}t} + \frac{b}{a-\omega^2}\cos(\omega t)\,,\\
\varphi(0) &= k_1 + k_2 + \frac{b}{a-\omega^2} = 0\\
\dot\varphi(0) &= \sqrt{|a|}k_1 - \sqrt{|a|}k_2 = 1\,,
\end{aligned}
$$

che dà

$$
k_1 = \frac{1}{2}\Big[-\frac{b}{a-\omega^2}+\frac{1}{\sqrt{|a|}}\Big]\,,\qquad k_2 = -\frac{1}{2}\Big[\frac{b}{a-\omega^2}+\frac{1}{\sqrt{|a|}}\Big]\,.
$$

ii) $\omega = 0$

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= k_1 e^{\sqrt{|a|}t} + k_2 e^{-\sqrt{|a|}t} + \frac{b}{a}\cos(\omega t)\,,\\
\varphi(0) &= k_1 + k_2 + \frac{b}{a} = 0\\
\dot\varphi(0) &= \sqrt{|a|}k_1 - \sqrt{|a|}k_2 = 1\,,
\end{aligned}
$$

che dà

$$
k_1 = \frac{1}{2}\Big[-\frac{b}{a}+\frac{1}{\sqrt{|a|}}\Big]\,,\qquad k_2 = -\frac{1}{2}\Big[\frac{b}{a}+\frac{1}{\sqrt{|a|}}\Big]\,.
$$

2. [29/9/2014 (hw)I] Supponiamo che $\varphi_0\in\boldsymbol{R}$, $F\in C^1(\boldsymbol{R})$, $F>0$, e che

$$
\int_{\varphi_0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{F(s)} := \lim_{k\to\infty}\int_{\varphi_0}^{k}\frac{\mathrm{d}s}{F(s)} = L < \infty\,.
$$

Dimostrare che la soluzione di

$$
\dot\varphi = F(\varphi)\,,\qquad \varphi(0)=\varphi_0\,,
$$

non può essere definita per $t\geq L$.
Soluzione
Sia φ la soluzione del problema; dividendo l'equazione per $F(\varphi(t))$ e integrando su $[0,\bar t]$ si ha con il cambiamento di variabile $s=\varphi(t)$

$$
L > \int_{\varphi_0}^{\varphi(\bar t)}\frac{\mathrm{d}s}{F(s)} = \int_0^{\bar t}\frac{\dot\varphi(t)}{F(\varphi(t))}\,\mathrm{d}t = \bar t\,.
$$

Qui $\bar t>0$ è un qualunque istante appartenente all'intervallo di esistenza di φ, pertanto la tesi è provata.

3. [29/9/2014 (hw)I] Trovare tutte le soluzioni di ciascuno dei tre problemi:

$$
1)\begin{cases}\dot\varphi = \varphi^{\frac{3}{5}}\,,\\ \varphi(0)=0\,;\end{cases}\qquad
2)\begin{cases}\dot\varphi = \varphi^{\frac{3}{4}}\,,\\ \varphi(0)=0\,;\end{cases}\qquad
3)\begin{cases}\dot\varphi = \varphi^{\frac{4}{5}}\,,\\ \varphi(0)=0\,.\end{cases}
$$

Soluzione

Notiamo che i membri di destra di ciascuna delle tre equazioni non sono lipschitziani nella variabile φ, e dunque non è possibile applicare il teorema di unicità. Dobbiamo quindi aspettarci di trovare più di una soluzione per ciascun problema.

Il calcolo elementare che useremo in tutti i tre casi è il seguente: sia $c \in (0,1)$; in ciascun intervallo aperto I ove $\varphi(t) \neq 0$

$$\dot{\varphi} = \varphi^c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\varphi^{1-c}}{1-c} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(t)^{1-c} - \varphi(\bar{t})^{1-c} = (1-c)(t-\bar{t})\,.$$

Qui $\bar{t}$, t sono istanti arbitrari di I. È facile vedere che il calcolo precedente resta valido anche se $\bar{t}$ è un estremo di I ove $\varphi(\bar{t}) = 0$. Sotto questa ipotesi si ha perciò

$$\varphi(t)^{1-c} = (1-c)(t-\bar{t})\,. \tag{1}$$

1) In questo caso la formula (1) dà

$$\varphi(t)^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}(t-\bar{t})\,; \tag{2}$$

questo implica che $t > \bar{t}$, ossia se $\varphi(t) \neq 0$, allora $\varphi(\tau) \neq 0$ per ogni $\tau > t$. Estraendo la radice in (2) si ottiene

$$\varphi_{\pm}(t) = \pm\Big[\frac{2}{5}(t-\bar{t})\Big]^{\frac{5}{2}}\,, \qquad t > \bar{t}\,. \tag{3}$$

Verifichiamo separatamente se ciascuna di queste funzioni risolve l'equazione differenziale:

$$\dot{\varphi}_{+}(t) = \Big(\frac{2}{5}\Big)^{\frac{5}{2}}\frac{5}{2}(t-\bar{t})^{\frac{3}{2}} = \varphi_{+}(t)^{\frac{3}{5}}\,,$$
$$\dot{\varphi}_{-}(t) = -\Big(\frac{2}{5}\Big)^{\frac{5}{2}}\frac{5}{2}(t-\bar{t})^{\frac{3}{2}} = \varphi_{-}(t)^{\frac{3}{5}}\,.$$

Pertanto entrambe sono soluzioni. La (3) dà quindi tutte e sole le soluzioni che hanno un valore diverso da zero, almeno in un tratto del loro dominio; rimane solo, inoltre, la soluzione identicamente nulla. Tutte le soluzioni sono quindi in una delle forme:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0\,, & t \leq \bar{t}\,, \\ \Big[\frac{2}{5}(t-\bar{t})\Big]^{\frac{5}{2}}\,, & t > \bar{t}\,; \end{cases} \qquad \varphi(t) = \begin{cases} 0\,, & t \leq \bar{t}\,, \\ -\Big[\frac{2}{5}(t-\bar{t})\Big]^{\frac{5}{2}}\,, & t > \bar{t}\,; \end{cases}$$
$$\varphi(t) = 0\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui $\bar{t} \geq 0$ è arbitrario.

2) Si noti che in questo caso si deve avere $\varphi(t) \geq 0$ perché $\varphi(t)^{3/4}$ sia definita. In questo caso la formula (1) dà

$$\varphi(t)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}(t-\bar{t})\,; \tag{4}$$

questo implica che $t > \bar{t}$, ossia se $\varphi(t) \neq 0$, allora $\varphi(\tau) \neq 0$ per ogni $\tau > t$. Elevando a potenza in (4) si ottiene

$$\varphi(t) = \Big[\frac{1}{4}(t-\bar{t})\Big]^{4}\,, \qquad t > \bar{t}\,. \tag{5}$$

Si verifica subito che questa funzione risolve l'equazione differenziale. La (5) dà quindi tutte e sole le soluzioni che hanno un valore diverso da zero, almeno in un tratto del loro dominio; rimane solo, inoltre, la soluzione identicamente nulla. Tutte le soluzioni sono quindi in una delle forme:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0\,, & t \le \bar{t}\,, \\ \Big[\dfrac{1}{4}(t-\bar{t})\Big]^4\,, & t > \bar{t}\,; \end{cases} \qquad \varphi(t) = 0\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui $\bar{t} \ge 0$ è arbitrario.
3) In questo caso la formula (1) dà

$$\varphi(t)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(t-\bar{t})\,; \tag{6}$$

in questo caso dunque si può avere sia $t > \bar{t}$ che $t < \bar{t}$. Si noti che comunque l'equazione implica che $\dot{\varphi} \ge 0$, quindi le soluzioni sono non decrescenti. Elevando a potenza in (6) si ottiene

$$\varphi(t) = \Big[\frac{1}{5}(t-\bar{t})\Big]^5\,. \tag{7}$$

Si verifica subito che questa funzione risolve l'equazione differenziale per ogni $t \in \boldsymbol{R}$. In effetti per $\bar{t} = 0$ è una soluzione del problema di Cauchy. Più in generale, la (7) dà tutte e sole le soluzioni che hanno un valore diverso da zero, almeno in un tratto del loro dominio; rimane solo, inoltre, la soluzione identicamente nulla. Tutte le soluzioni sono quindi in una delle forme:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \Big[\dfrac{1}{5}(t-\bar{t}_1)\Big]^5\,, & t < \bar{t}_1\,, \\ 0\,, & \bar{t}_1 \le t \le \bar{t}_2\,, \\ \Big[\dfrac{1}{5}(t-\bar{t}_2)\Big]^5\,, & t > \bar{t}_2\,. \end{cases}$$

Qui $-\infty \le \bar{t}_1 \le 0 \le \bar{t}_2 \le +\infty$ sono arbitrari.

4. [29/9/2014 (hw)I] Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\varphi_1\varphi_2 \\ \ln\varphi_1 - 3\varphi_2^2 + 1 \end{pmatrix}\,, \qquad \begin{pmatrix} \varphi_1(0) \\ \varphi_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

sapendo che si scrive nella forma

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at^2} \\ bt \end{pmatrix}\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,,$$

con a, $b \in \boldsymbol{R}$ costanti.
Soluzione
Sostituendo la forma funzionale data nel sistema di e.d.o. si ottengono

$$\begin{aligned} 2ate^{at^2} &= 6bte^{at^2}\,, \\ b &= at^2 - 3b^2t^2 + 1\,. \end{aligned}$$

La prima equazione equivale a

$$a = 3b\,,$$

mentre la seconda è risolubile solo se

$$a = 3b^2\,,$$

caso in cui implica quindi subito $b = 1$. Le altre due condizioni sono di fatto verificate da $a = 3$. Dunque la soluzione è

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t^2} \\ t \end{pmatrix}\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,.$$

5. [6/10/2014 (hw)I] Si consideri il versore funzione di t

$$\boldsymbol{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \big[\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \big]\,.$$

Qui $\omega > 0$ è una costante assegnata, e $t \in \boldsymbol{R}$.
Si costruisca una base ortonormale $(\boldsymbol{u}_h(t))$ positiva (ossia congruente con la base standard $(\boldsymbol{e}_h)$ di $\boldsymbol{R}^3$) in modo che

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \boldsymbol{u}(t)\,, \qquad \boldsymbol{u}_2(t) \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0\,.$$

Soluzione

Se

$$\boldsymbol{u}_2(t) = \sum_{h=1}^{3} \alpha_h(t)\boldsymbol{e}_h\,,$$

deve essere pertanto

$$\alpha_3(t) = \boldsymbol{u}_2(t) \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0\,,$$

e

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{u}_2(t) = \alpha_1(t)\cos(\omega t) + \alpha_2(t)\sin(\omega t) = 0\,.$$

Dato che deve essere anche $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, si conclude per esempio

$$\boldsymbol{u}_2(t) = -\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,.$$

Infine

$$\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{u}_1(t) \times \boldsymbol{u}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \big[-\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \big]\,.$$

Si discuta l'unicità della base trovata.

6. [6/10/2014 (hw)I] Si scriva la rappresentazione parametrica di classe C^1 dell'ellisse intersezione del cilindro e del piano

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= R^2\,, \\ x_2 - x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Esistono infiniti modi di fornire la parametrizzazione richiesta. Presentiamone due.
A) La proiezione dell'ellisse su $x_3 = 0$ è la circonferenza

$$\boldsymbol{\Psi}_0(\theta) = R\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta \boldsymbol{e}_2\,, \qquad \theta \in [0,2\pi]\,.$$

Sull'ellisse vale $x_2 = x_3$, dunque la sua parametrizzazione è

$$\boldsymbol{\Psi}_1(\theta) = R\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta \boldsymbol{e}_2 + R\sin\theta \boldsymbol{e}_3\,, \qquad \theta \in [0,2\pi]\,.$$

B) Rappresentiamo in alternativa l'ellisse nella forma standard

$$\boldsymbol{\Psi}_2(\varphi) = a\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + b\sin\varphi \boldsymbol{u}_2\,, \qquad \varphi \in [0,2\pi]\,,$$

ove a [b] è la lunghezza del semiasse maggiore [minore] e $\boldsymbol{u}_1$ [$\boldsymbol{u}_2$] è il versore del semiasse maggiore [minore].
Nel nostro caso $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ devono giacere sul piano $x_2 = x_3$.
Osserviamo che il segmento OP tra l'origine O e il generico punto P dell'ellisse si proietta su un raggio della circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

che ha lunghezza R. Dunque la lunghezza di OP è crescente con l'angolo formato da OP con il piano $x_3 = 0$. Questo argomento implica che

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1\,,$$

e che

$$a = \sqrt{2}R\,, \qquad b = R\,.$$

7. [6/10/2014 (hw)I] Si scriva almeno una parametrizzazione per ciascuno dei seguenti oggetti geometrici mobili, ove $\alpha(t)$ è un'arbitraria funzione del tempo:

1. Circonferenza con diametro di estremi

   $$(-R,0,0)\,, \qquad (R,0,0)\,,$$

   il cui piano forma all'istante t l'angolo $\alpha(t)$ con il piano $x_3 = 0$.

2. Sfera di raggio R e centro C dato da

   $$\overrightarrow{OC} = L\cos\alpha(t)\boldsymbol{e}_1 + L\sin\alpha(t)\boldsymbol{e}_2\,;$$

   qui O è l'origine del sistema di riferimento.

3. Quadrato (pieno) $ABCD$ di lato L che giace sul piano

   $$-x_1\sin\alpha(t) + x_2\cos\alpha(t) = 0\,,$$

   e tale che

   $$A = O\,, \qquad \overrightarrow{AB} = L\boldsymbol{e}_3\,.$$

Soluzione

1) Il piano della circonferenza deve avere per normale

$$\boldsymbol{\nu} = -\sin\alpha(t)\boldsymbol{e}_2 + \cos\alpha(t)\boldsymbol{e}_3 \,.$$

La circonferenza ha per centro l'origine, e verrà descritta dall'usuale parametrizzazione

$$\boldsymbol{\Psi}(\theta;t) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_2(t)\,, \qquad \theta\in[0,2\pi]\,,$$

ove $\boldsymbol{u}_1$ *e* $\boldsymbol{u}_2$ *sono due versori ortonormali del suo piano. Prendiamo quindi*

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{u}_2(t) = \sum_{h=1}^{3}\lambda_h(t)\boldsymbol{e}_h\,,$$

ove dovranno valere

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_1 &= \lambda_1(t) = 0\,,\\ \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{\nu} &= -\lambda_2(t)\sin\alpha(t) + \lambda_3(t)\cos\alpha(t) = 0\,. \end{aligned}$$

Pertanto si ha per esempio

$$\boldsymbol{u}_2(t) = \cos\alpha(t)\boldsymbol{e}_2 + \sin\alpha(t)\boldsymbol{e}_3\,,$$

e in conclusione

$$\boldsymbol{\Psi}(\theta;t) = R\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\cos\alpha(t)\boldsymbol{e}_2 + R\sin\theta\sin\alpha(t)\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \theta\in[0,2\pi]\,,$$

Si discuta se i dati assegnati identificano il piano della circonferenza in modo univoco.

2) Scriviamo per un generico punto P *della sfera*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}(\varphi,\theta;t) &= \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}\\ &= L\cos\alpha(t)\boldsymbol{e}_1 + L\sin\alpha(t)\boldsymbol{e}_2\\ &\quad + R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3\\ &= (L\cos\alpha(t) + R\cos\varphi\sin\theta)\boldsymbol{e}_1\\ &\quad + (L\sin\alpha(t) + R\sin\varphi\sin\theta)\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Qui si è impiegata l'usuale parametrizzazione della sfera con longitudine $\varphi\in[0,2\pi]$ *e colatitudine* $\theta\in[0,\pi]$*. Si noti che la parametrizzazione è regolare se* $\theta\neq 0$, π.

3) Il quadrato verrà descritto come

$$\boldsymbol{\Psi}(r,s;t) = r\boldsymbol{u}_1(t) + s\boldsymbol{u}_2(t)\,, \qquad r,s\in[0,L]\,.$$

Qui $\boldsymbol{u}_1$ *e* $\boldsymbol{u}_2$ *sono i due versori dei due lati adiacenti* AB, AD*:*

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{L} = \boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{AD}}{L}\,.$$

Resta solo da determinare $\boldsymbol{u}_2(t) = \sum\lambda_h(t)\boldsymbol{e}_h$*, che deve giacere sul piano mobile ed essere ortogonale a* $\boldsymbol{u}_1$*. Perciò*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2 &= \lambda_3 = 0\,,\\ (-\sin\alpha(t)\boldsymbol{e}_1 + \cos\alpha(t)\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{u}_2 &= -\lambda_1\sin\alpha(t) + \lambda_2\cos\alpha(t) = 0\,. \end{aligned}$$

Pertanto possiamo prendere

$$\boldsymbol{u}_2(t) = \cos\alpha(t)\boldsymbol{e}_1 + \sin\alpha(t)\boldsymbol{e}_2 \,.$$

La parametrizzazione diviene

$$\boldsymbol{\Psi}(\varphi,\theta;t) = s\cos\alpha(t)\boldsymbol{e}_1 + s\sin\alpha(t)\boldsymbol{e}_2 + r\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad s, r \in [0, L] \,.$$

Si discuta l'ambiguità della scelta di $\boldsymbol{u}_2$ *e quindi della posizione del quadrato.*

120. Conservazione dell'energia

1. [22/9/2006 (ex)I] Un punto materiale è vincolato a muoversi nel piano (x, y) ed è soggetto a un campo di forze di potenziale

$$U(x, y) = -kx^2y^2 \,.$$

Si dimostri che non si possono avere moti illimitati in cui il punto rimanga sempre nel settore

$$A = \{(x, y) \mid 0 < x < y < 2x\} \,.$$

Soluzione
Poiché le forze sono conservative, vale per ciascun moto $\boldsymbol{X}$

$$T(t) - U(\boldsymbol{X}(t)) = E \,, \qquad \text{per ogni } t,$$

ove l'energia E *è una costante reale. Dato che* $T \geq 0$*, deve essere*

$$E \geq -U(\boldsymbol{X}(t)) = kX_1(t)^2X_2(t)^2 \,.$$

Quindi lungo ciascun moto il prodotto $X_1^2X_2^2$ *resta limitato.*
Se invece il moto fosse illimitato, ossia almeno una delle coordinate X_i *divergesse a infinito (su una successione di istanti* $t_n \to \infty$*), anche l'altra coordinata dovrebbe divergere (sulla stessa successione), per la geometria di* A*, e quindi a maggior ragione divergerebbe il loro prodotto.*

2. [1/4/2008 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = \left(a\tau, b\tau^2, c\tau^3\right) , \qquad -\infty < \tau < \infty \,,$$

ed è soggetto a un campo di forze di potenziale

$$U(\boldsymbol{x}) = -\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}|^2} - \beta|\boldsymbol{x}|^2 \,, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\} \,.$$

Qui a, b, c, α, β sono costanti positive.
Dimostrare che ciascun moto $\boldsymbol{\varphi}$ soddisfa

$$\varepsilon \leq |\boldsymbol{\varphi}(t)| \leq C \,,$$

per due opportune costanti positive C, ε (dipendenti dal moto), e per ogni t per cui è definito.

SOLUZIONE

I vincoli sono lisci, e le forze conservative. Quindi l'energia

$$E = T - U = \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}^2 - U(\boldsymbol{x}) \,,$$

rimane costante lungo ciascun moto. In particolare dunque per ogni t per cui il moto è definito

$$U\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big) = -\frac{\alpha}{|\boldsymbol{\varphi}(t)|^2} - \beta|\boldsymbol{\varphi}(t)|^2 \geq -E \,.$$

Ne seguono

$$\frac{\alpha}{|\boldsymbol{\varphi}(t)|^2} \leq E \,, \qquad \beta|\boldsymbol{\varphi}(t)|^2 \leq E \,,$$

da cui la tesi con

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{E}} \,, \qquad C = \sqrt{\frac{E}{\beta}} \,.$$

3. [17/2/2014 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sull'asse x_3. Su di esso oltre al peso $-mg\boldsymbol{e}_3$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \frac{k}{x_3^2}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Le condizioni iniziali sono

$$\overrightarrow{OP}(0) = L\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = -v_0\boldsymbol{e}_3 \,,$$

con L, $v_0 > 0$ costanti.

Determinare la quota a cui la velocità si annulla (per la prima volta).

SOLUZIONE

Usiamo la conservazione dell'energia. Le forze che agiscono su P sono entrambe conservative (e il vincolo è liscio). I potenziali sono rispettivamente

$$U_{\text{peso}} = -mgx_3 \,, \qquad U_{\boldsymbol{F}} = -\frac{k}{x_3} \,.$$

Scegliendo $z = x_{3P} \in (0, +\infty)$ come coordinata lagrangiana si ha quindi

$$U^{\mathrm{L}}(z) = -mgz - \frac{k}{z} \,.$$

L'energia meccanica quindi per ogni istante vale

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz + \frac{k}{z} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgL + \frac{k}{L} =: E \,.$$

Pertanto si ha $\dot{z} = 0$ se z soddisfa

$$mgz + \frac{k}{z} = E \,,$$

ossia

$$mgz^2 - Ez + k = 0\,,$$

che ha le radici (si noti che $E^2 > 4kmg$)

$$z = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - 4kmg}}{2mg}\,.$$

Il moto deve svolgersi tra queste due quote; quella richiesta è la minore, perché la velocità iniziale è rivolta verso il basso.
R.

$$\frac{E - \sqrt{E^2 - 4kmg}}{2mg}\,, \quad E = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgL + \frac{k}{L}\,.$$

4. [17/2/2014 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sull'asse x_3. Su di esso oltre al peso $-mg\boldsymbol{e}_3$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \frac{k}{x_3^2}\boldsymbol{e}_3\,.$$

Le condizioni iniziali sono

$$\overrightarrow{OP}(0) = L\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_3\,,$$

con L, $v_0 > 0$ costanti.
Determinare la quota a cui la velocità si annulla (per la prima volta).
R.

$$\frac{E + \sqrt{E^2 - 4kmg}}{2mg}\,, \quad E = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgL + \frac{k}{L}\,.$$

5. [10/2/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$1 + \frac{x_3^2}{a^2} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{b}\,,$$

ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda e^{-kx_3}\boldsymbol{e}_3\,,$$

ove λ, $k > 0$ sono costanti.
Si dimostri che i moti di P hanno tutti quota x_3 limitata inferiormente.
Soluzione
Scegliamo come coordinate lagrangiane $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $r > b$ tali che

$$\overrightarrow{OP} = r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 - a\sqrt{\frac{r}{b} - 1}\,\boldsymbol{e}_3\,.$$

Si noti che scegliamo il segno negativo nell'ultima componente di $\overrightarrow{OP}$ perché ci interessa dimostrare una limitazione inferiore, che è pertanto ovvia finché il moto avviene in $x_3 > 0$.

In queste coordinate si ha:

$$U^{\mathrm{L}}(r,\varphi) = -\lambda k^{-1} e^{-kx_3} = -\lambda k^{-1} \exp\left\{ak\sqrt{\frac{r}{b}-1}\right\}.$$

Per la conservazione dell'energia lungo ciascun moto si ha per una opportuna costante E

$$-U^{\mathrm{L}} \le T^{\mathrm{L}} - U^{\mathrm{L}} = E > \lambda k^{-1}.$$

Quindi

$$ak\sqrt{\frac{r}{b}-1} \le \ln(\lambda^{-1}kE),$$

da cui la limitazione cercata.

6. [10/2/2015 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$1 + \frac{x_1^2}{a^2} = \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{b},$$

ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -\lambda e^{kx_1} \boldsymbol{e}_1,$$

ove λ, $k > 0$ sono costanti.
Si dimostri che i moti di P hanno tutti ascissa x_1 limitata superiormente.

7. [3/9/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = -k e^{\alpha |\boldsymbol{x}|^2} \boldsymbol{x} - \lambda |\boldsymbol{x}| \dot{\boldsymbol{x}},$$

ove α, k, $\lambda > 0$ sono assegnati.
All'istante iniziale si ha per il moto $\boldsymbol{X}$ del punto P

$$\boldsymbol{X}(0) = R\boldsymbol{e}_1, \qquad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_2.$$

Si dimostri che per ogni $t \ge 0$

$$|\boldsymbol{X}(t)| \le C,$$

determinando la costante C in funzione di k, α, λ, m, R, v_0.
Soluzione
Scriviamo

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2, \qquad \boldsymbol{F}_1 = -k e^{\alpha|\boldsymbol{x}|^2} \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{F}_2 = -\lambda |\boldsymbol{x}| \dot{\boldsymbol{x}}.$$

La forza $\boldsymbol{F}_1$ è conservativa con potenziale

$$U(\boldsymbol{x}) = -\frac{k}{2\alpha} e^{\alpha |\boldsymbol{x}|^2}, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3.$$

Poiché il moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2,$$

si avrà

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{2}m|\boldsymbol{X}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))\Big) = m\dot{\boldsymbol{X}}(t)\cdot\ddot{\boldsymbol{X}}(t) - \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X}(t))\cdot\dot{\boldsymbol{X}}(t)$$
$$= \dot{\boldsymbol{X}}(t)\cdot[m\ddot{\boldsymbol{X}}(t) - \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X}(t))] = \dot{\boldsymbol{X}}(t)\cdot\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{X}(t)) = -\lambda|\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2|\boldsymbol{X}(t)| \leq 0\,.$$

Pertanto per ogni $t \geq 0$ si ha

$$-U(\boldsymbol{X}(t)) \leq \frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{X}}(0)|^2 - U(\boldsymbol{X}(0)) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{k}{2\alpha}e^{\alpha R^2}\,,$$

da cui la limitazione cercata.
R.
$$|\boldsymbol{X}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\ln\Big(\frac{\alpha}{k}mv_0^2 + e^{\alpha R^2}\Big)}\,.$$

8. [19/3/2016 (ex)I] Un punto materiale di massa m è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) = -k\boldsymbol{x}(\lambda^2 + |\boldsymbol{x}|^2) + \boldsymbol{u}\times\dot{\boldsymbol{x}}\,,$$

ove $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^3$, k, $\lambda > 0$, sono costanti assegnate.
Si dimostri che tutti i moti sono limitati e si determini la limitazione in funzione dei parametri e delle condizioni iniziali.
Soluzione
Si ha
$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -k\boldsymbol{x}(\lambda^2 + |\boldsymbol{x}|^2) + \boldsymbol{u}\times\dot{\boldsymbol{x}}\,,$$
e dunque
$$m\ddot{\boldsymbol{x}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} = -k\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(\lambda^2 + |\boldsymbol{x}|^2)\,,$$
ossia
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{x}}|^2\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(-\frac{k}{4}(\lambda^2 + |\boldsymbol{x}|^2)^2\Big)\,.$$
Quindi
$$\frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{x}}(t)|^2 + \frac{k}{4}(\lambda^2 + |\boldsymbol{x}(t)|^2)^2 = \frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{x}}(0)|^2 + \frac{k}{4}(\lambda^2 + |\boldsymbol{x}(0)|^2)^2\,.$$
R.
$$|\boldsymbol{x}(t)|^2 \leq \sqrt{\frac{2}{k}m|\dot{\boldsymbol{x}}(0)|^2 + (\lambda^2 + |\boldsymbol{x}(0)|^2)^2} - \lambda^2\,.$$

9. [15/01/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove vincolato al piano $z = 0$ e soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = -\alpha x^2\boldsymbol{e}_1 - \beta y^3\boldsymbol{e}_2\,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti.
Si dimostri che i moti non possono diventare illimitati nel semipiano $x > 0$.
Soluzione

La forza è conservativa con potenziale

$$U(x,y) = -\frac{\alpha}{3}x^3 - \frac{\beta}{4}y^4 .$$

Dunque vale la conservazione dell'energia nella forma

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{\beta}{4}y^4 = E .$$

Vale quindi

$$\frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{\beta}{4}y^4 \leq E .$$

Se $x > 0$ per qualche t si deve avere $E > 0$ e in tutti gli istanti in cui risulta $x > 0$ si ha

$$x \leq \sqrt[3]{\frac{3E}{\alpha}} , \qquad |y| < \sqrt[4]{\frac{4E}{\beta}} .$$

R.

$$0 < x \leq \sqrt[3]{\frac{3E}{\alpha}} , \qquad |y| < \sqrt[4]{\frac{4E}{\beta}} .$$

10. [15/01/2018 (ex)II] Un punto materiale P di massa m si muove vincolato al piano $z = 0$ e soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = -\alpha x^3 \boldsymbol{e}_1 - \beta y^4 \boldsymbol{e}_2 ,$$

con α, $\beta > 0$ costanti.
Si dimostri che i moti non possono diventare illimitati nel semipiano $y > 0$.
R.

$$|x| < \sqrt[4]{\frac{4E}{\alpha}} , \qquad 0 < y \leq \sqrt[5]{\frac{5E}{\beta}} .$$

11. [27/06/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = -kxy^2 \boldsymbol{e}_1 - kx^2 y \boldsymbol{e}_2 - \lambda z \boldsymbol{e}_3 ,$$

ed è vincolato alla curva γ parametrizzata da

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = a\tau \boldsymbol{e}_1 + b\tau^2 \boldsymbol{e}_2 + c\cos\tau \boldsymbol{e}_3 , \qquad \tau \in \boldsymbol{R} .$$

Qui k, λ, a, b, c sono costanti positive assegnate. All'istante iniziale valgono

$$\overrightarrow{OP}(0) = c\boldsymbol{e}_3 , \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_1 ,$$

con $v_0 > 0$.
Dimostrare che il moto resta limitato per $t > 0$.
Soluzione

Usiamo la conservazione dell'energia; il vincolo infatti è liscio e la reazione vincolare non fa lavoro.
Si vede subito che

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \nabla U(x,y,z)\,, \qquad U(x,y,z) = -\frac{1}{2}(kx^2y^2 + \lambda z^2)\,, \qquad (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3\,.$$

Pertanto per ogni $t > 0$ vale

$$T(t) - U(\boldsymbol{X}(t)) = T(0) - U(\boldsymbol{X}(0)) = \frac{1}{2}(mv_0^2 + \lambda c^2) =: E_0\,.$$

In particolare quindi

$$\frac{1}{2}(kx^2y^2 + \lambda z^2) \le E_0\,,$$

e

$$ka^2\tau^2 b^2\tau^4 \le 2E_0\,.$$

Dunque

$$|\tau| \le \sqrt[6]{\frac{2E_0}{ka^2b^2}}\,.$$

Si determina infine $R > 0$ tale che $|\boldsymbol{X}(t)| \le R$ per $t > 0$ sostituendo nella parametrizzazione della curva.
R.

$$|\boldsymbol{X}(t)|^2 \le a^2\tau_0^2 + b^2\tau_0^4 + c^2\,, \qquad \tau_0 = \sqrt[6]{\frac{mv_0^2 + \lambda c^2}{ka^2b^2}}\,.$$

12. [06/02/2020 (ex)I] Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva

$$x_2 = \alpha x_1^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Non ci sono forze direttamente applicate.
All'istante iniziale $t = 0$,

$$X_1(0) = x_0 > 0\,, \qquad \dot{X}_1(0) = c > 0\,.$$

Si completino le condizioni iniziali ricavando $\boldsymbol{X}(0)$, $\boldsymbol{v}(0)$ e si dimostri che

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{X}_1(t) = 0\,.$$

[Si può assumere che il moto sia definito su $[0, +\infty]$.]
Soluzione
Si ha, ponendo $x = X_1$ come coordinata lagrangiana, che

$$\boldsymbol{X}(0) = x_0\boldsymbol{e}_1 + \alpha x_0^2\boldsymbol{e}_2\,;$$

inoltre

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{X}} = \dot{x}\boldsymbol{e}_1 + 2\alpha\dot{x}x\boldsymbol{e}_2\,,$$

e quindi

$$\boldsymbol{v}(0) = c\boldsymbol{e}_1 + 2\alpha c x_0\boldsymbol{e}_2\,.$$

Perciò l'energia cinetica (e meccanica)

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + 4\alpha^2 x^2)$$

è costante per la conservazione dell'energia. Si ha per la costante E opportuna

$$\dot{x}(t)^2 = \frac{2}{m}\frac{E}{1 + 4\alpha^2 x(t)^2} > 0$$

per ogni $t > 0$, ossia $\dot{x}$ non può mai annullarsi e quindi cambiare di segno. Pertanto $\dot{x}(t) > 0$ per ogni $t > 0$ e dunque esiste il limite

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = L \leq +\infty\,.$$

Se $0 < L < +\infty$ allora

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}\frac{E}{1 + 4\alpha^2 L^2}} > 0\,,$$

in contraddizione con un noto teorema. Quindi $L = +\infty$ e

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = \lim_{t\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{m}\frac{E}{1 + 4\alpha^2 x(t)^2}} = 0\,.$$

R.

$$\boldsymbol{X}(0) = x_0\boldsymbol{e}_1 + \alpha x_0^2\boldsymbol{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = c\boldsymbol{e}_1 + 2\alpha c x_0\boldsymbol{e}_2\,.$$

13. [06/02/2020 (ex)II] Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva

$$x_3 = \alpha x_1^2\,, \qquad x_2 = 0\,.$$

Non ci sono forze direttamente applicate.
All'istante iniziale $t = 0$,

$$X_1(0) = x_0 < 0\,, \qquad \dot{X}_1(0) = c < 0\,.$$

Si completino le condizioni iniziali ricavando $\boldsymbol{X}(0)$, $\boldsymbol{v}(0)$ e si dimostri che

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{X}_1(t) = 0\,.$$

[Si può assumere che il moto sia definito su $[0, +\infty]$.]
R.

$$\boldsymbol{X}(0) = x_0\boldsymbol{e}_1 + \alpha x_0^2\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = c\boldsymbol{e}_1 + 2\alpha c x_0\boldsymbol{e}_3\,.$$

150. Piano delle fasi

1. [18/7/2005 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r.
Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x) = kx|x| \,,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si determinino tutti i moti che rimangono limitati per $t \to \infty$.
SOLUZIONE
Le orbite nel piano delle fasi corrispondono alle curve

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E + U(x)\big)} \,,$$

definite ove $E + U(x) \geq 0$.
Nel nostro caso occorre distinguere:

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - kx^2\big)} \,, \qquad x < 0 \,,$$
$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E + kx^2\big)} \,, \qquad x \geq 0 \,.$$

1) Caso $E > 0$*:*
$x < 0$*: L'orbita qui coincide con la semiellisse*

$$\frac{m}{2E}p^2 + \frac{k}{E}x^2 = 1 \,, \qquad x < 0 \,.$$

$x \geq 0$*: L'orbita qui coincide con i due tratti di iperbole*

$$\frac{m}{2E}p^2 - \frac{k}{E}x^2 = 1 \,, \qquad x \geq 0 \,.$$

Si noti che come è ovvio le due porzioni di orbita si raccordano su $x = 0$.
2) Caso $E = 0$*:*
$x < 0$*: Le orbite non hanno componenti in questo semipiano.*
$x \geq 0$*: Le orbite qui sono le due semirette aperte*

$$p = \sqrt{\frac{2k}{m}}x \,, \quad x > 0 \,; \qquad p = -\sqrt{\frac{2k}{m}}x \,, \quad x > 0 \,;$$

e il punto critico

$$p = 0 \,, \quad x = 0 \,.$$

3) Caso $E < 0$*:*
$x < 0$*: Le orbite non hanno componenti in questo semipiano.*
$x \geq 0$*: L'orbita qui coincide con il ramo di iperbole*

$$\frac{k}{|E|}x^2 - \frac{m}{2|E|}p^2 = 1 \,, \qquad x \geq \sqrt{\frac{|E|}{k}} \,.$$

Infine, per $t \to \infty$ tutte le orbite corrispondono a moti per cui $x(t) \to \infty$, con l'eccezione delle due orbite, nel caso $E = 0$,

$$p = -\sqrt{\frac{2k}{m}x}\,, \quad x > 0\,, \qquad (x,p) = (0{,}0)\,,$$

che corrispondono a moti nei quali $x(t) \to 0$.

2. [18/7/2005 (ex)II] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r.
Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x) = kx^3|x|\,,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si determinino tutti i moti che rimangono limitati per $t \to \infty$.

3. [7/4/2006 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r.
Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x) = k\cos x\,,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r, e k è una costante positiva.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si discuta qualitativamente l'andamento dei moti.
Soluzione
Le orbite nel piano delle fasi corrispondono alle curve

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E + k\cos x)}$$

definite ove $E + \cos x \geq 0$.
1) Caso $E > k$: La radice quadrata non si annulla mai, ed è sempre definita. Si hanno due orbite corrispondenti a due moti (uno in cui $\dot{x} > 0$, l'altro in cui $\dot{x} < 0$).
2) Caso $E = k$: La radice quadrata si annulla solo per $x = (2n+1)\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. In corrispondenza di tali valori, che sono di minimo per il potenziale, si hanno posizioni di equilibrio (instabile). Per i valori di x intermedi, risultano definite due orbite che connettono (in tmepo infinito) due di tali posizioni.
3) Caso $k > E > -k$: La radice quadrata è definita negli intervalli ove

$$\cos x \geq -\frac{E}{k} \in (-1,1)\,.$$

In tali intervalli risulta definita un'orbita periodica.
4) Caso $E = -k$: La radice quadrata risulta definita solo nei punti $x = 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$, ove si annulla. In corrispondenza di tali valori, che sono di massimo per il potenziale, si hanno posizioni di equilibrio (stabile).

4. [13/12/2007 (ex)I] Tracciare nel piano delle fasi le orbite corrispondenti ai moti determinati da

$$m\ddot{x} = F(x)\,,$$

ove

$$F(x) = ax\sin(bx^2)\,,$$

e a, $b > 0$ sono costanti.
SOLUZIONE
Il potenziale è dato da

$$\int_0^x as\sin(bs^2)\,\mathrm{d}s + \gamma = \frac{a}{2b}\big[1 - \cos(bx^2)\big] + \gamma\,,$$

e quindi possiamo assumere

$$U(x) = -\frac{a}{2b}\cos(bx^2)\,.$$

Le orbite nel piano (x, p) delle fasi sono date da

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E + U(x)\big)} = \pm\sqrt{\frac{a}{mb}}\sqrt{E' - \cos(bx^2)}\,,$$

ridefinendo $E' = 2bE/a$.
Conviene distinguere i casi seguenti:
1) $E' < -1$: nessuna orbita.
2) $E' = -1$: le orbite degeneri

$$x = \pm\sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{b}}\,, \quad p = 0\,, \qquad n \geq 0\,,$$

corrispondenti a quiete in punti di equilibrio stabile.
3) $-1 < E' < 1$: orbite chiuse ciascuna corrispondente a un moto periodico intorno a uno dei punti di equilibrio stabile determinati nel punto 2).
4) $E' = 1$: le orbite degeneri:

$$x = \pm\sqrt{2n\frac{\pi}{b}}\,, \quad p = 0\,, \qquad n \geq 0\,, \tag{1}$$

corrispondenti a quiete in punti di equilibrio instabile, e le orbite

$$p = \pm\sqrt{\frac{a}{mb}}\sqrt{1 - \cos(bx^2)}\,,$$

ciascuna definita tra due consecutivi punti della forma (1).
5) $E' > 1$: orbite definite per ogni $x \in \boldsymbol{R}$, sulle quali p non cambia segno, né si annulla.

5. [13/12/2007 (ex)II] Tracciare nel piano delle fasi le orbite corrispondenti ai moti determinati da

$$m\ddot{x} = F(x)\,,$$

ove

$$F(x) = -ax\cos(bx^2)\,,$$

e a, $b > 0$ sono costanti.

6. [1/7/2008 (ex)I] Disegnare il diagramma nel piano delle fasi corrispondente al potenziale

$$U(x) = -ax^2 + bx^5\,,$$

ove a, b sono costanti positive.

7. [1/7/2008 (ex)II] Disegnare il diagramma nel piano delle fasi corrispondente al potenziale

$$U(x) = -ax^4 + bx^7\,,$$

ove a, b sono costanti positive.

8. [12/6/2009 (ex)I] Tracciare il diagramma nel piano delle fasi per i moti

$$m\ddot{x} = U'(x)\,,$$

con

$$U(x) = kx^3e^{-ax}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui m, a, k sono costanti positive.

Soluzione

Per la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = U(x) + E\,,$$

da cui l'equazione delle orbite

$$p(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(U(x) + E)}\,.$$

Le orbite dunque sono definite, per ciascun valore dell'energia E, ove $E \geq -U(x)$. Si ha

$$U'(x) = k(3 - ax)x^2e^{-ax}\,,$$

e dunque $U(x)$ soddisfa:

- *U è crescente in $(-\infty, 3/a)$; è decrescente in $(3/a, \infty)$;*
- *$U'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ o $x = 3/a$;*
- $$U(0) = 0\,, \qquad U(3/a) = 27k(ae)^{-3} = U_{\max}\,;$$
- $$\lim_{x\to-\infty} U(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to\infty} U(x) = 0\,.$$

Distinguiamo dunque i casi:
A) $E > 0$. *L'orbita è definita sulla semiretta* (x_E, ∞), *ove* $x_E < 0$ *è l'unica radice dell'equazione* $-U(x_E) = E$.
Inoltre l'orbita interseca l'asse x *in* $x = x_E$, *e per* $x \to \infty$ *si ha* $p(x) \to \pm\sqrt{2E/m}$.
B) $E = 0$. *A questo valore corrispondono tre orbite. Oltre alle due simmetriche*

$$p(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}U(x)}\,, \qquad x > 0\,,$$

si ha infatti quella degenere $x = 0$, $p = 0$, *corrispondente a un punto di equilibrio instabile.*
C) $0 > E > -U_{\max}$. *L'orbita è una curva chiusa definita nell'intervallo* (x_E^1, x_E^2), *ove* x_E^1 *e* x_E^2 *sono definiti da*

$$\begin{aligned} -U(x_E^1) &= E\,, \qquad x_E^1 < \frac{3}{a}\,, \\ -U(x_E^2) &= E\,, \qquad x_E^2 > \frac{3}{a}\,. \end{aligned}$$

Per $E \to -U_{\max}$ *l'orbita si stringe sul punto* $(3/a,0)$.
D) $E = -U_{\max}$. *L'orbita è degenere, coincide con il punto* $x = 3/a$, $p = 0$, *e corrisponde a un punto di equilibrio stabile.*
E) $E < -U_{\max}$. *Non ci sono orbite in questo caso.*

9. [12/6/2009 (ex)II] Tracciare il diagramma nel piano delle fasi per i moti

$$m\ddot{x} = U'(x)\,,$$

con

$$U(x) = -k(x-1)^3 e^{ax}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui m, $a < 3$, k sono costanti positive.

10. [20/11/2009 (ex)I] Tracciare le orbite nel piano delle fasi relative al potenziale

$$U(x) = \frac{x}{1+x^2}\,,$$

e discutere la stabilità dei punti di equilibrio.

11. [22/2/2010 (ex)I] Tracciare nel piano delle fasi il diagramma delle orbite corrispondenti al potenziale

$$U(x) = \alpha \sin(\beta x|x|)\,,$$

ove α e β sono costanti positive, mettendo in evidenza tutti i punti di equilibrio.

12. [22/2/2010 (ex)II] Tracciare nel piano delle fasi il diagramma delle orbite corrispondenti al potenziale

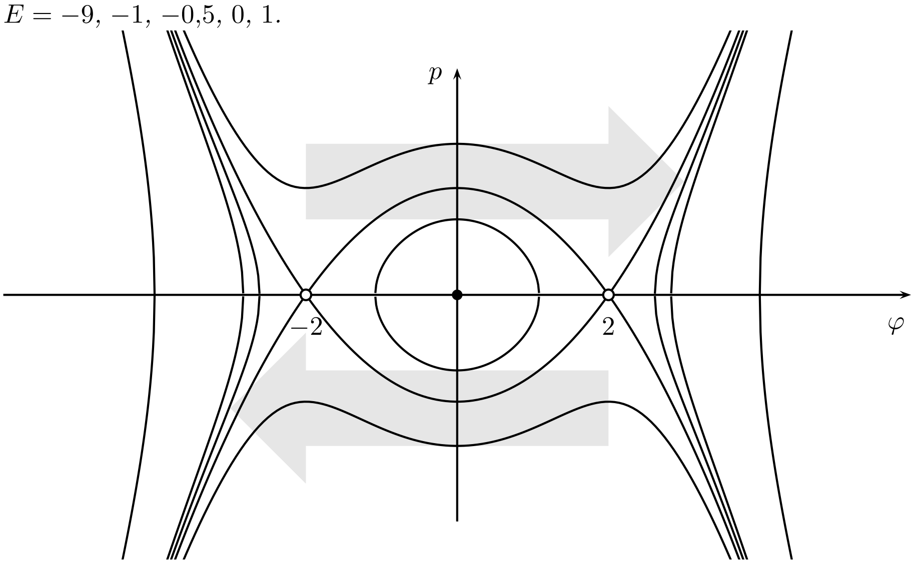
$$U(x) = -\alpha \sin(\beta x|x|)\,,$$

ove α e β sono costanti positive, mettendo in evidenza tutti i punti di equilibrio.

13. [20/1/2014 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r. Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x) = a(x^2 - b^2)^2 \,, \qquad x \in \boldsymbol{R} \,,$$

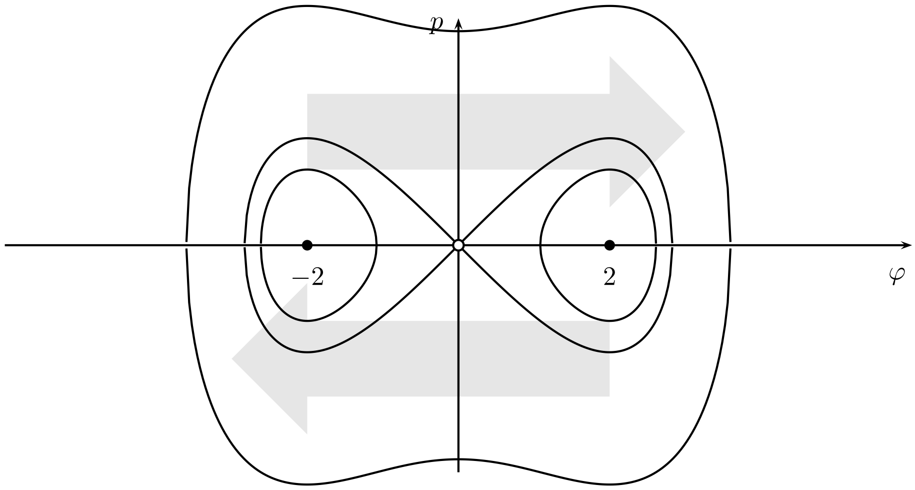
ove x è l'ascissa di P misurata su r, e a, b sono costanti positive.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si discuta qualitativamente l'andamento dei moti.
Soluzione
Il potenziale è una quartica con due minimi globali in $x = -b$, $x = b$ e un massimo locale in $x = 0$, ove $U(0) = ab^4$.
In dipendenza del livello dell'energia E si hanno per le orbite i seguenti casi:
A) $E > 0$: le orbite sono definite in tutto $\boldsymbol{R}$.
B) $E = 0$: ci sono 8 orbite: i due punti di equilibrio instabile $x = b$, $x = -b$ corrispondenti ai minimi del potenziale, e poi altri 3 rami per $p > 0$ e altri 3 per $p < 0$. Ciascuno di questi viene percorso in tempo infinito.
C) $0 > E > -U(0)$: ci sono 3 orbite: una chiusa periodica che circonda il punto $x = 0$, e altre 2 illimitate.
D) $E = -U(0)$: ci sono 3 orbite: il punto di equilibrio stabile $x = 0$ corrispondente al massimo locale del potenziale, altre 2 illimitate.
E) $E < -U(0)$: ci sono 2 orbite illimitate.
R. *Ritratto di fase con $a = 1/16$, $b = 2$, $m = 1$ e le orbite corrispondenti a energie $E = -9$, -1, $-0{,}5$, 0, 1.*



14. [20/1/2014 (ex)II] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r. Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x) = -a(x^2 - b^2)^2 \,, \qquad x \in \boldsymbol{R} \,,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r, e a, b sono costanti positive.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si discuta qualitativamente l'andamento dei moti.
R. *Ritratto di fase con* $a = 1/16$, $b = 2$, $m = 1$ *e le orbite corrispondenti a energie* $E = 5$, 1, 0,5, 0.



15. [17/7/2014 (ex)I] Tracciare il diagramma delle orbite nel piano delle fasi del moto di un punto di massa m corrispondente al potenziale

$$U(x) = x - \sqrt{x}\,, \qquad x > 0\,.$$

Soluzione
Come è noto le orbite sono date da

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\,\sqrt{E + U(x)}\,.$$

Si noti che

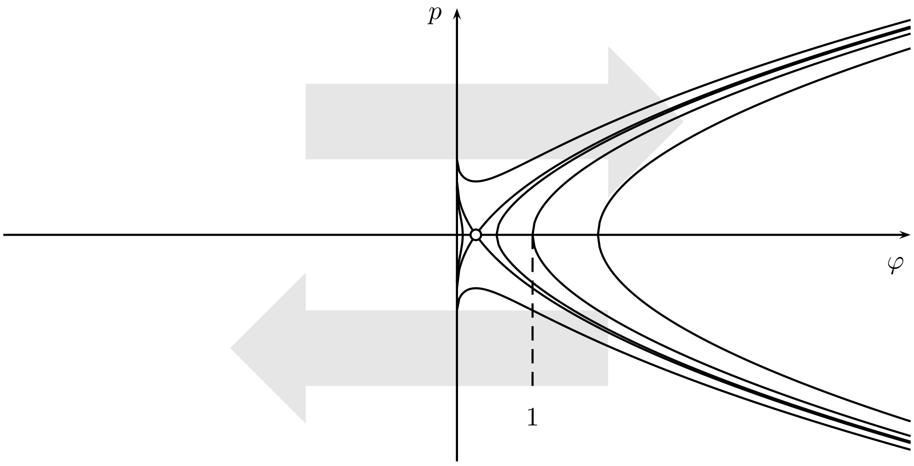
$$U(x) < 0\,, \quad 0 < x < 1\,; \qquad U(1) = 0\,; \qquad U(x) > 0\,, \quad x > 1\,.$$

Inoltre il potenziale è decrescente in (0,1/4, *crescente in* $(1/4, +\infty)$ *e pertanto*

$$\min_{(0,+\infty)} U(x) = U\Big(\frac{1}{4}\Big) = -\frac{1}{4}\,.$$

In dipendenza del livello dell'energia E si hanno per le orbite i seguenti casi:
A) $E > 1/4$: *le orbite sono definite in tutto* $(0, +\infty)$.
B) $E = 1/4$: *ci sono* 5 *orbite: il punto di equilibrio instabile* $x = 1/4$, *corrispondente al minimo del potenziale, e poi altri* 2 *rami per* $p > 0$ *e altri* 2 *per* $p < 0$. *Ciascuno di questi viene percorso in tempo infinito.*
C) $1/4 > E > 0$: *ci sono* 2 *orbite: una limitata per* $x < 1/4$, *e una illimitata per* $x > 1/4$.
D) $E \leq 0$: *c'è una sola orbita illimitata per* $x \geq 1$.

R. *Ritratto di fase con le orbite corrispondenti a energie* $E = -1/2,\ 0,\ 1/5,\ 1/4,\ 1/2$.



16. [13/1/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r.
Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x) = x^2(x-2)(x-4)^2\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si determinino tutti i moti che rimangono limitati per $t \to +\infty$.
SOLUZIONE
Il potenziale soddisfa

$$\lim_{x\to-\infty} U(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} U(x) = +\infty\,.$$

La derivata vale

$$U'(x) = x(x-4)(5x^2-20x+16) = x(x-4)(x-x_1)(x-x_2)\,,$$

ove

$$x_1 := \frac{10-2\sqrt{5}}{5} \in (0{,}2)\,, \quad x_2 := \frac{10+2\sqrt{5}}{5} \in (2{,}4)\,.$$

Perciò il potenziale ha i seguenti punti di massimo locale stretto:

$$x = 0\,, \quad U(0) = 0\,; \qquad x = x_2\,, \quad U(x_2) =: U_2 > 0\,;$$

e i seguenti punti di minimo locale stretto

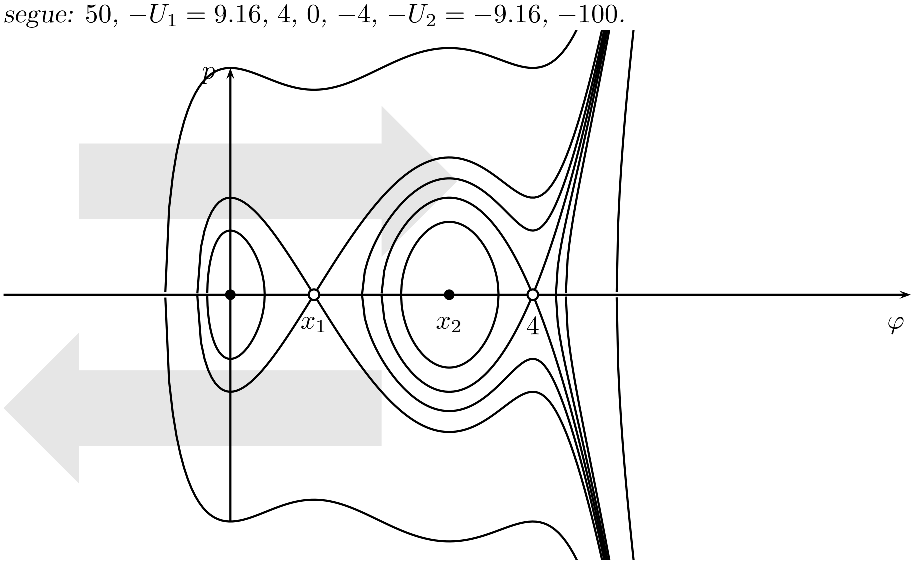
$$x = x_1\,, \quad U(x_1) =: U_1 < 0\,; \qquad x = 4\,, \quad U(4) = 0\,.$$

Poiché le orbite nel piano delle fasi sono parti dei grafici di funzioni del tipo

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E + U(x)\big)}\,,$$

occorre trovare le regioni ove $E \geq -U(x)$ per i vari valori significativi di E.
1) $E_1 > -U_1$. Si ha un'unica orbita, definita per $x \geq \bar{x}$, ove $\bar{x}$ è l'unica soluzione di $-U(x) = E_1$.
2) $E_2 = -U_1$. Si hanno quattro orbite: i) il punto di equilibrio $(x_1,0)$; ii) un'orbita limitata (che chiamiamo γ_1) che approssima tale punto per $t \to \pm\infty$; iii-iv) due orbite illimitate definite per $x > x_1$ che approssimano tale punto rispettivamente per $t \to \pm\infty$. Dunque il punto di equilibrio è instabile.
3) $0 < E_3 < -U_1$. Si hanno due orbite: un'orbita chiusa periodica che circonda l'origine ed è racchiusa in γ_1, e un'orbita definita per $x > \bar{x}$ ove $\bar{x}$ è l'unica soluzione in $(x_1,2)$ di $-U(x) = E_3$.
4) $E_4 = 0$. Si hanno cinque orbite: i) il punto di equilibrio $(0,0)$; ii) il punto di equilibrio $(4,0)$; iii) un'orbita limitata (che chiamiamo γ_2) che è definita per $2 \leq x < 4$ e approssima $(4,0)$ per $t \to \pm\infty$; iv-v) due orbite illimitate definite per $x > 4$ che approssimano tale punto rispettivamente per $t \to \pm\infty$. Dunque il punto di equilibrio $(0,0)$ è stabile, mentre $(4,0)$ è instabile.
5) $-U_2 < E_5 < 0$. Si hanno due orbite: un'orbita chiusa periodica che circonda $(x_2,0)$ ed è racchiusa in γ_2, e un'orbita definita per $x > \bar{x}$ ove $\bar{x}$ è l'unica soluzione in $(4,+\infty)$ di $-U(x) = E_5$.
6) $E_6 = -U_2$. Si hanno due orbite: il punto di equilibrio $(x_2,0)$, e un'orbita definita per $x > \bar{x}$ ove $\bar{x}$ è l'unica soluzione in $(4,+\infty)$ di $-U(x) = E_6$. Il punto di equilibrio risulta stabile.
7) $E_7 < -U_2$. Si ha un'unica orbita, definita per $x \geq \bar{x}$, ove $\bar{x}$ è l'unica soluzione di $-U(x) = E_7$.
I moti limitati corrispondono dunque ai quattro punti di equilibrio, alle due orbite limitate γ_1 e γ_2, alle orbite periodiche dei casi 3) e 5).

R. *Ritratto di fase con $m = 1$ e orbite corrispondenti a livelli di energia E come segue: 50, $-U_1 = 9.16$, 4, 0, -4, $-U_2 = -9.16$, -100.*

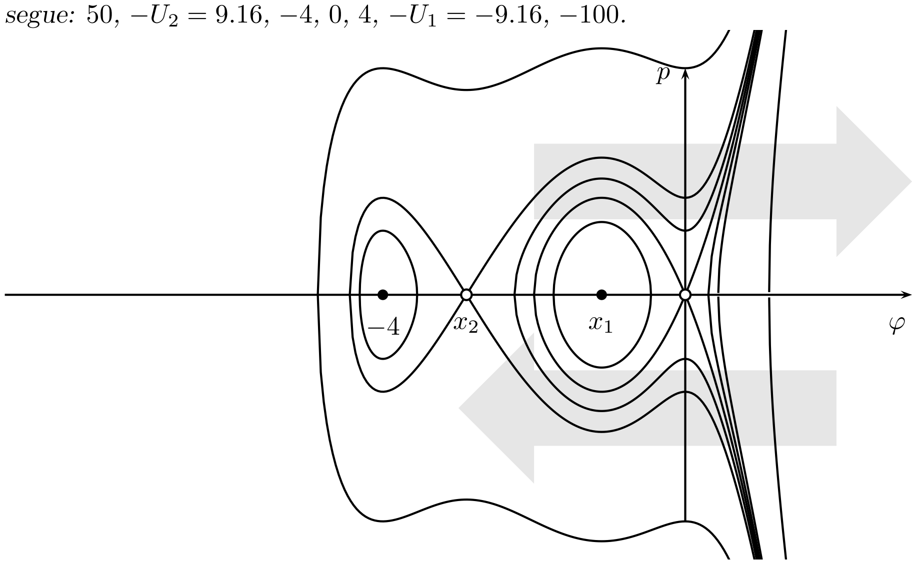


17. [13/1/2015 (ex)II] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r.

Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x) = x^2(x+2)(x+4)^2 , \qquad x \in \boldsymbol{R} ,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si determinino tutti i moti che rimangono limitati per $t \to +\infty$.
R. *Ritratto di fase con* $m = 1$ *e le orbite corrispondenti a livelli di energia* E *come segue:* 50, $-U_2 = 9.16$, -4, 0, 4, $-U_1 = -9.16$, -100.



18. [12/1/2015 (ex)I] Si disegnino le orbite nel piano delle fasi relative ai moti

$$m\ddot{x} = U'(x) ,$$

ove

$$U(x) = \begin{cases} x(x+1) , & x \le 0 , \\ \dfrac{x}{x^2+1} , & x > 0 , \end{cases}$$

spiegando come si è ottenuta la costruzione.
Quindi per ciascuna orbita si determini se esista il limite

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t) ,$$

e se esiste lo si calcoli.
Soluzione
Si vede che $U \in C^1(\boldsymbol{R})$ *e che*

$$U'(x) = \begin{cases} 2x - 1 , & x \le 0 , \\ \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} , & x > 0 . \end{cases}$$

Pertanto si ha

$$U'(x)\begin{cases} <0\,, & x<-\dfrac{1}{2}\,, x>1\,,\\ =0\,, & x=-\dfrac{1}{2}\,,1\,,\\ >0\,, & -\dfrac{1}{2}<x<1\,. \end{cases}$$

Dunque U *ha un minimo globale in* $x=-1/2$, *e un massimo locale in* $x=1$, *entrambi isolati, con*

$$U\Big(-\frac{1}{2}\Big)=-\frac{1}{4}\,,\qquad U(1)=\frac{1}{2}\,.$$

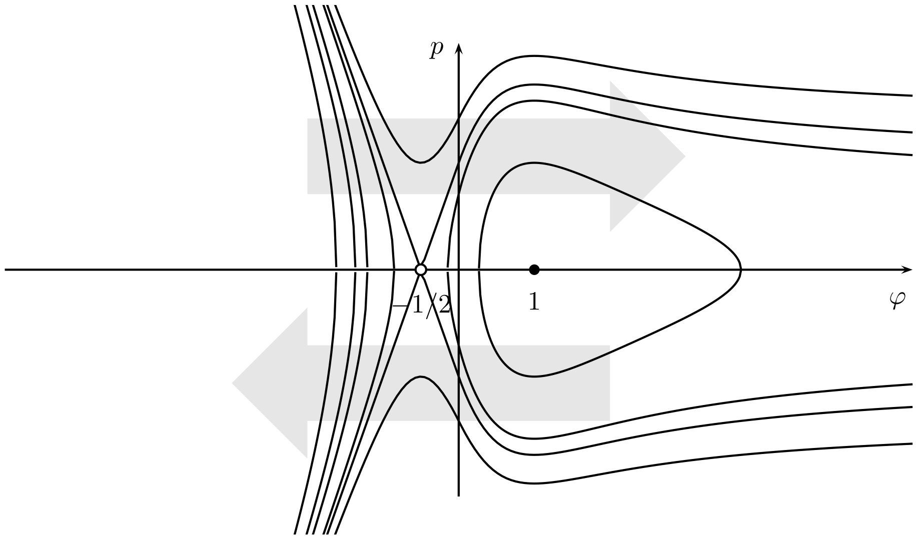
Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty}U(x)=+\infty\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}U(x)=0\,,$$

e $U(x)=0$ *se e solo se* $x\in\{-1{,}0\}$. *Passiamo quindi a tracciare le orbite che come noto giacciono sui grafici delle funzioni*

$$p=\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E+U(x)]}\,.$$

i) $E>1/4$*: Il dominio delle due orbite simmetriche è tutto* $\boldsymbol{R}$*; sull'orbita con* $\dot x>0$, $\dot x(t)\to\sqrt{2E/m}$*, su quella con* $\dot x<0$, $\dot x(t)\to-\infty$.
ii) $E=1/4$*: Si hanno 5 orbite, due simmetriche definite per* $x<-1/2$*, due simmetriche definite per* $x>-1/2$*, e quella degenere* $(-1/2{,}0)$ *corrispondente all'equilibrio instabile* $x=-1/2$.
Sull'orbita con $\dot x>0$ *e* $x<-1/2$, $\dot x(t)\to0$*; su quella con* $\dot x<0$ *e* $x<-1/2$, $\dot x(t)\to-\infty$. *Sull'orbita con* $\dot x>0$ *e* $x>-1/2$, $\dot x(t)\to\sqrt{1/(2m)}$*; su quella con* $\dot x<0$ *e* $x>-1/2$, $\dot x(t)\to0$. *Sull'orbita degenere* $\dot x(t)=0$ *per ogni* t.
iii) $E\in(0{,}1/4)$*: Si hanno due orbite, una definita in* $(-\infty,x_1]$ *con* $x_1<-1/2$*, e l'altra in* $[x_2,+\infty)$ *con* $x_2\in(-1/2{,}0)$*;* x_1 *e* x_2 *sono i rispettivi punti di inversione. Sulla prima orbita si ha* $\dot x(t)\to-\infty$*, sulla seconda* $\dot x(t)\to\sqrt{2E/m}$.
iv) $E=0$*: La situazione è simile al caso iii), con* $x_1=-1$, $x_2=0$.
v) $E\in(-1/2{,}0)$*: Si hanno due orbite, una definita in* $(-\infty,x_3]$ *con* $x_3<-1$*, che ha in* x_3 *il punto di inversione, e una seconda definita nell'intervallo limitato* $[x_4,x_5]$, $0<x_4<1<x_5$*, che ha in* x_4 *e* x_5 *i punti di inversione. Questa seconda orbita corrisponde a un moto periodico.*
Su quest'ultima il limite di $\dot x(t)$ *non esiste; sulla prima si ha* $\dot x(t)\to-\infty$.
vi) $E=-1/2$*: Si hanno due orbite, una definita in* $(-\infty,x_6]$ *con* $x_6<-1$*, simile a quella definita in* $(-\infty,x_3]$ *nel punto v), e una seconda degenere* $(1{,}0)$ *corrispondente al punto di equilibrio stabile* $x=1$. *Sull'orbita degenere* $\dot x(t)=0$ *per ogni* t.
vii) $E<-1/2$*: Si ha una sola orbita, definita per* $x<x_7$, $x_7<x_5<-1$*, simile a quella definita in* $(-\infty,x_3]$ *nel punto v).*
R. *Ritratto di fase con* $m=1/4$ *e le orbite corrispondenti a livelli di energia* E *come segue:* $1/2$, $1/4$, $1/8$, $-1/4$, $-1/2$, -1.



19. [12/1/2015 (ex)II] Si disegnino le orbite nel piano delle fasi relative ai moti

$$m\ddot{x} = U'(x)\,,$$

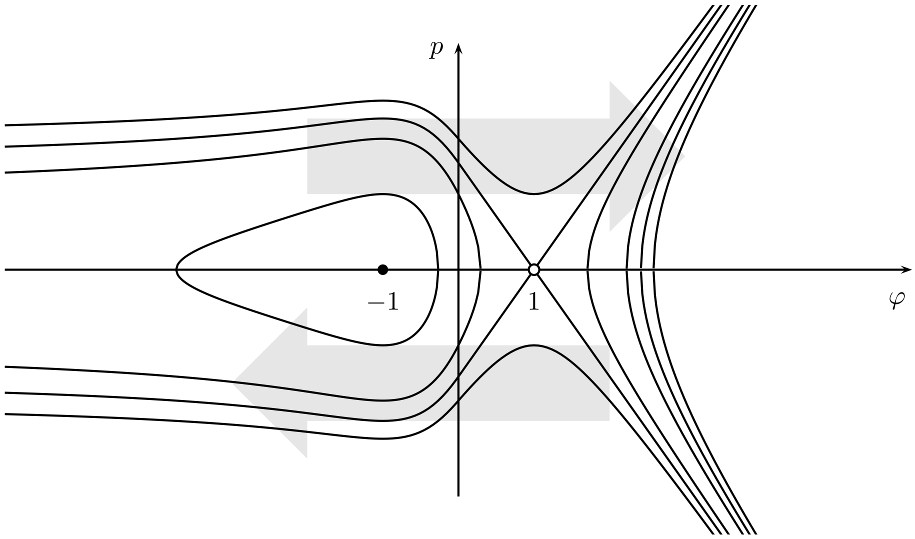
ove

$$U(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x}{x^2+1}\,, & x < 0\,, \\ x(x-2)\,, & x \geq 0\,, \end{cases}$$

spiegando come si è ottenuta la costruzione.
Quindi per ciascuna orbita si determini se esista il limite

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t)\,,$$

e se esiste lo si calcoli.
R. *Ritratto di fase con $m = 1$ e le orbite corrispondenti a livelli di energia E come segue:* $3/2$, 1, $1/2$, $-1/2$, -1, $-3/2$.



20. [6/9/2016 (ex)I] Disegnare e discutere il diagramma di fase del moto

$$m\ddot{x} = U'(x)\,,$$

ove

$$U(x) = ax^3(|x| - b)\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui a, $b > 0$ sono costanti assegnate.

Soluzione

Si vede subito che $U \in C^2(\boldsymbol{R})$ e che è dispari. Studiamo quindi la derivata

$$U'(x) = 3ax^2(|x| - b) + ax^3 \operatorname{sign}(x) = a|x|^2(4|x| - 3b)\,.$$

Si ha perciò

$$\begin{aligned} U'(x) &> 0\,, \qquad x \in \Big(-\infty, -\frac{3}{4}b\Big) \cup \Big(\frac{3}{4}b, +\infty\Big)\,, \\ U'(x) &= 0\,, \qquad x \in \Big\{-\frac{3}{4}b\,, 0\,, \frac{3}{4}b\Big\}\,, \\ U'(x) &< 0\,, \qquad x \in \Big(-\frac{3}{4}b, \frac{3}{4}b\Big) \setminus \{0\}\,. \end{aligned}$$

Osserviamo anche

$$U\Big(\frac{3}{4}b\Big) = -\frac{27}{256}ab^4 =: -U_0\,.$$

Le orbite, nella forma

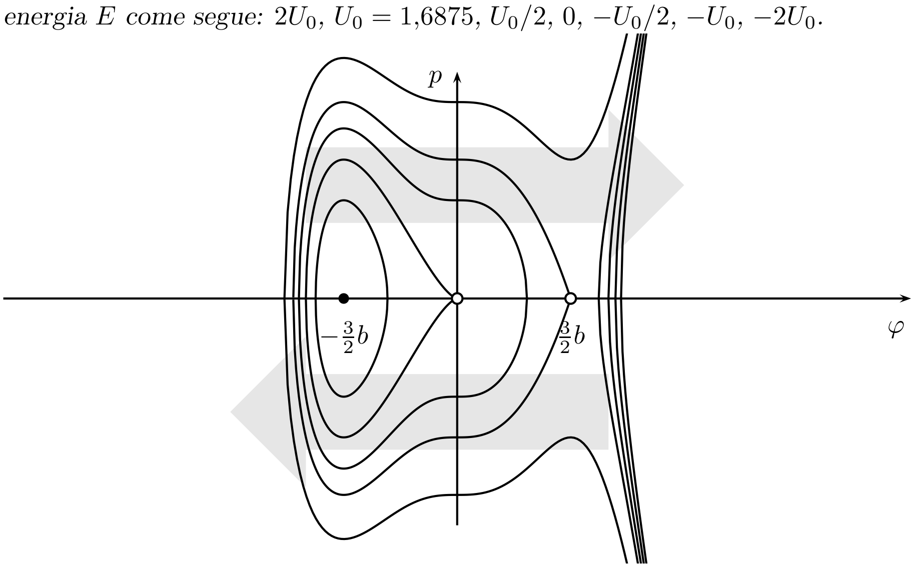
$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))}$$

presentano quindi le seguenti tipologie:

1. *$E > U_0$: una sola orbita illimitata per $x \to +\infty$;*
2. *$E = U_0$: quattro orbite: una degenere corrispondente al punto di equilibrio instabile $x = 3b/4$, e tre orbite limite di cui due illimitate per $x \to +\infty$;*

3. $0 < E < U_0$: *due orbite, una periodica limitata e una illimitata per* $x \to +\infty$;
4. $E = 0$: *tre orbite: una degenere corrispondente al punto di equilibrio instabile* $x = 0$, *una limite illimitata, e una illimitata per* $x \to +\infty$;
5. $-U_0 < E < 0$: *due orbite, una limitata periodica e una illimitata per* $x \to +\infty$;
6. $E = -U_0$: *due orbite: una degenere corrispondente al punto di equilibrio stabile* $x = -3b/4$, *e l'altra illimitata per* $x \to +\infty$;
7. $E < -U_0$: *una sola orbita, illimitata per* $x \to +\infty$.

R. Ritratto di fase con $m = 1$, $a = 1$, $b = 2$ *e orbite corrispondenti a livelli di energia* E *come segue:* $2U_0$, $U_0 = 1{,}6875$, $U_0/2$, 0, $-U_0/2$, $-U_0$, $-2U_0$.



21. [17/01/2017 (ex)I] Tracciare il diagramma nel piano delle fasi dei moti di un punto di massa m soggetto a forze di potenziale

$$U(x) = axe^{-bx^2}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove a e b sono costanti positive, spiegando come si è ottenuta la costruzione.
Soluzione
Studiamo il potenziale $U \in C^\infty(\boldsymbol{R})$; *si ha*

$$U'(x) = ae^{-bx^2}(1 - 2bx^2)\,.$$

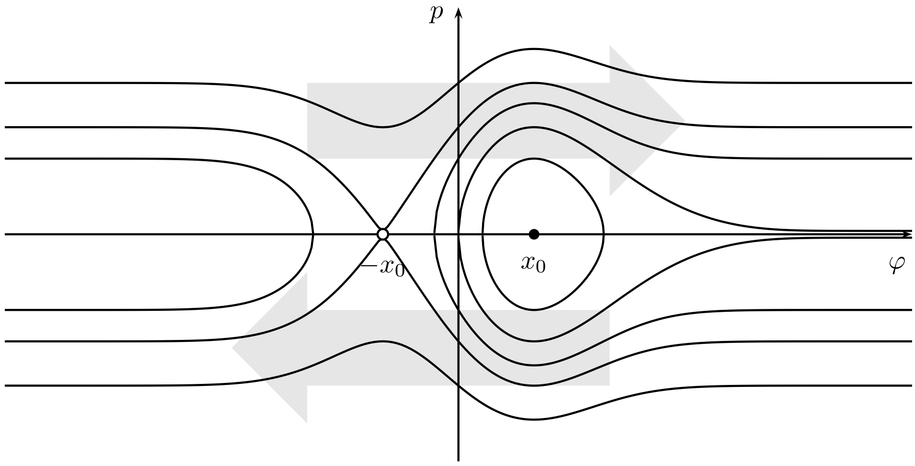
Denotando perciò

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2b}} > 0\,,$$

si ha

$$U'(x) > 0\,, \qquad x \in (-\infty, -x_0) \cup (x_0, \infty)\,;$$
$$U'(x) > 0\,, \qquad x \in (-x_0, x_0)\,.$$

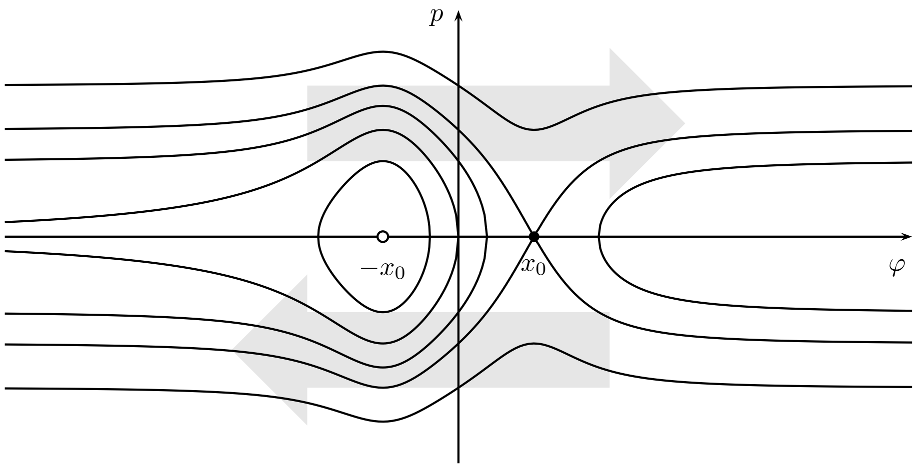
Inoltre
$$\lim_{x\to\pm\infty} U(x) = 0\,.$$
Quindi U ha massimo assoluto in x_0 e minimo assoluto in $-x_0$, con valori
$$U(x_0) = \frac{a}{\sqrt{2be}} =: U_{\max}\,, \qquad U(-x_0) = -\frac{a}{\sqrt{2be}} = -U_{\max}\,.$$
Le orbite si ottengono come parti delle curve
$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))}\,.$$
Classifichiamo le orbite in funzione dell'energia E:
i) $E > U_{\max}$: si hanno due orbite definite entrambe in $(-\infty, \infty)$ senza punti di inversione del moto.
ii) $E = U_{\max}$: si hanno cinque orbite: quella degenere corrispondente al punto di equilibrio $-x_0$, due orbite definite in $(-\infty, -x_0)$, e due definite in $(-x_0, \infty)$; le ultime quattro senza punti di inversione e tendenti a $(-x_0,0)$ per $t \to +\infty$ o per $t \to -\infty$. Dunque $-x_0$ è instabile.
iii) $0 < E < U_{\max}$: si hanno due orbite definite rispettivamente in $(-\infty, x_1]$ e in $[x_2, +\infty)$, ove $x_1 < -x_0 < x_2 < 0$ sono i punti ove $U = -E$. Ciascuna orbita ha un punto di inversione in x_i, $i = 1$ o $i = 2$.
iv) $E = 0$: si ha una sola orbita definita in $[0, +\infty)$ con un punto di inversione in 0.
v) $-U_{\max} < E < 0$: si ha una sola orbita periodica, definita in $[x_3, x_4]$, ove $0 < x_3 < x_0 < x_4$, con punti di inversione in x_3, x_4.
vi) $E = -U_{\max}$: si ha la sola orbita degenere corrispondente al punto di equilibrio stabile x_0 (la stabilità segue dal diagramma di fase stesso o dal teorema di Dirichlet).
vii) $E < -U_{\max}$: non esistono orbite.
R. *Ritratto di fase con $m = 1$, $a = \sqrt{e}$, $b = 1/2$ e orbite corrispondenti a livelli di energia E come segue: $2U_{\max}$, $U_{\max} = 1$, $U_{\max}/2$, 0, $-U_{\max}/2$, $-U_{\max}$; qui $x_0 = 1$.*



22. [17/01/2017 (ex)II] Tracciare il diagramma nel piano delle fasi dei moti di un punto di massa m soggetto a forze di potenziale

$$U(x) = -\frac{ax}{1 + bx^4}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

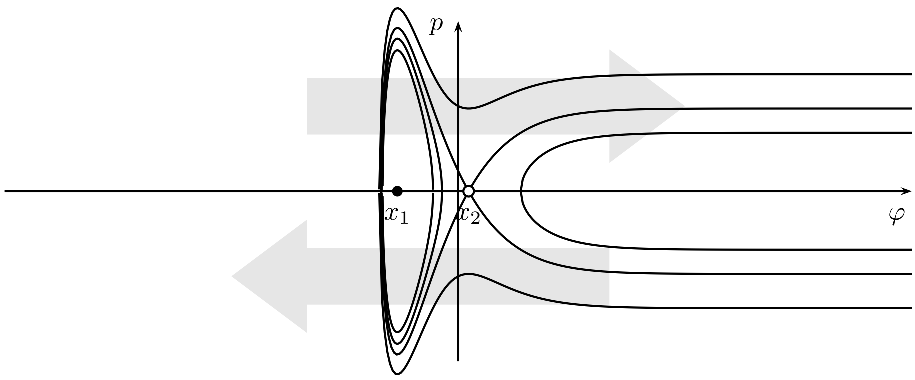
ove a e b sono costanti positive, spiegando come si è ottenuta la costruzione.
R. *Ritratto di fase con* $m = 1$, $a = 4/3$, $b = 1/3$ *e orbite corrispondenti a livelli di energia* E *come segue:* $2U_{\max}$, $U_{\max} = 1$, $U_{\max}/2$, 0, $-U_{\max}/2$, $-U_{\max}$; *qui* $x_0 = 1$.



23. [13/02/2018 (ex)I] Studiare e disegnare le orbite nel piano delle fasi relative al potenziale

$$U(x) = -e^{-3x}(3x + 1)(1 + x)\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

R. *Ritratto di fase con* $m = 1$ *e orbite corrispondenti a livelli di energia* E *come segue:* $-1{,}5$, $-U((\sqrt{2} - 1)/3)$, $-U((\sqrt{2} - 1)/3)/2$, 0. *Punti di equilibrio in* $x_1 = -(\sqrt{2} + 1)/3$, $x_2 = (\sqrt{2} - 1)/3$.



24. [13/02/2018 (ex)II] Studiare e disegnare le orbite nel piano delle fasi relative al potenziale

$$U(x) = e^x (x-1)(3-x) \,, \qquad x \in \boldsymbol{R} \,.$$

SOLUZIONE
Studiamo il grafico di U per quanto necessario. Si ha $U \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ e

$$U'(x) = -e^x (x^2 - 2x - 1) = -e^x (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}) \,.$$

Inoltre osserviamo che

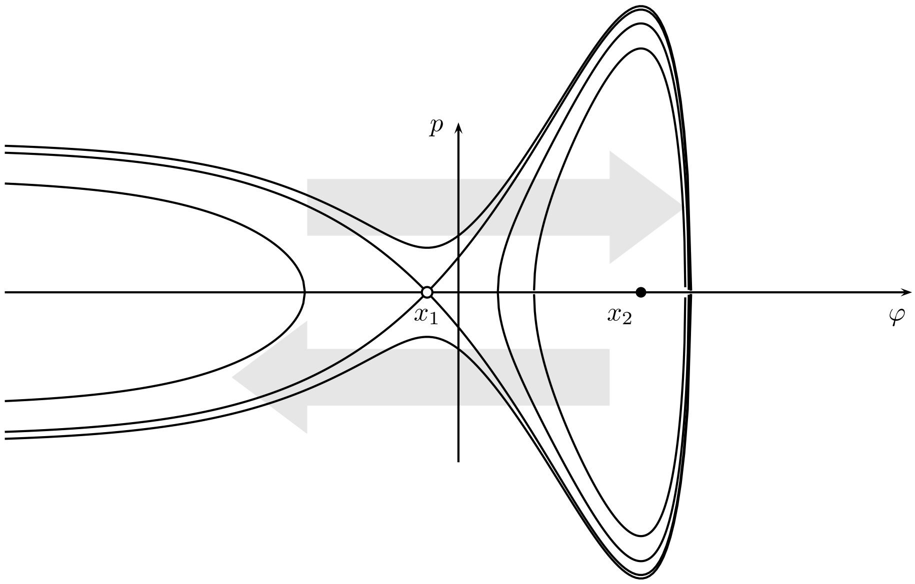
$$\begin{gathered} U(1) = U(3) = 0 \,, \\ U(x) > 0 \,, \qquad 1 < x < 3 \,, \\ U(x) < 0 \,, \qquad x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty) \,, \\ \lim_{x \to -\infty} U(x) = 0 \,, \qquad \lim_{x \to +\infty} U(x) = -\infty \,. \end{gathered}$$

Quindi U ha un minimo locale negativo in $1 - \sqrt{2}$ e un massimo assoluto positivo in $1 + \sqrt{2}$.
Si hanno i seguenti casi significativi per i livelli energetici delle orbite su

$$p = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))} \,.$$

1) $E > -U(1 - \sqrt{2})$: una sola orbita, illimitata verso $x \to -\infty$, con un punto di inversione ove $x > 0$.
2) $E = -U(1 - \sqrt{2})$: si hanno 4 orbite. La prima è quella degenere corrispondente al punto di equilibrio instabile $x = 1 - \sqrt{2}$. La seconda è un'orbita limitata che tende alla prima per $t \to \pm\infty$. Le ultime due sono due orbite illimitate verso $x \to -\infty$ che tendono anch'esse asintoticamente al punto di equilibrio per $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$ rispettivamente.

3) $0 < E < U(1-\sqrt{2})$*: 2 orbite. La prima è illimitata verso* $x \to -\infty$ *e si trova tutta a sinistra di* $x = 1-\sqrt{2}$*. La seconda è periodica e circonda l'altro punto di equilibrio* $x = 1+\sqrt{2}$*.*
4) $-U(1+\sqrt{2}) < E \leq 0$*: si ha una sola orbita periodica intorno al punto di equilibrio* $x = 1+\sqrt{2}$*.*
5) $E = -U(1+\sqrt{2}$*: la sola orbita degenere corrispondente al punto di equilibrio stabile* $x = 1+\sqrt{2}$*.*
R. *Ritratto di fase con* $m = 1$ *e orbite corrispondenti a livelli di energia* E *come segue:* 3,5, $-U(1-\sqrt{2})$, 2, 0.



25. [15/01/2019 (ex)I] Disegnare il ritratto di fase dei moti relativi al potenziale

$$U(x) = \frac{(x-1)^2(x-2)^2}{x^2}\,, \qquad x > 0\,,$$

spiegando come si è ottenuta la costruzione.
Soluzione
Studiamo il potenziale $U \in C^\infty((0,+\infty))$*:*

$$U'(x) = 2x^{-3}(x-1)(x-2)(x^2-2)\,.$$

Dunque

$$U'(x) > 0\,, \qquad x \in (1,\sqrt{2}) \cup (2,+\infty)\,,$$
$$U'(x) < 0\,, \qquad x \in (0,1) \cup (\sqrt{2},2)\,.$$

Pertanto U *ha un massimo locale in* $x = \sqrt{2}$, *dato da*

$$0 < U(\sqrt{2}) = (\sqrt{2} - 1)^4 < 1 \,.$$

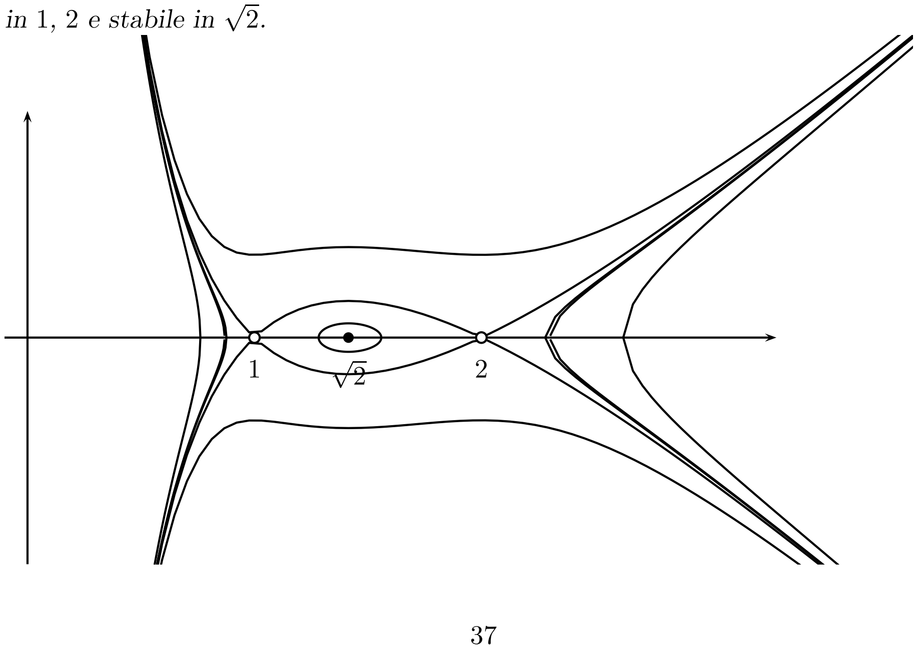
Inoltre il minimo assoluto di U *è*

$$U(1) = U(2) = 0 \,,$$

e

$$\lim_{x \to 0+} U(x) = +\infty \,, \qquad \lim_{x \to +\infty} U(x) = +\infty \,.$$

Distinguiamo le orbite corrispondenti ai seguenti livelli di energia:
1) $E > 0$*: si hanno due orbite simmetriche una per* $\dot{x} > 0$*, l'altra per* $\dot{x} < 0$*, che tendono a un limite finito per* $x \to +\infty$ *e a* $+\infty$ *per* $x \to 0+$.
2) $E = 0$*: si hanno 8 orbite, di cui due degeneri corrispondenti ai due punti di equilibrio instabile* $x = 1$, $x = 2$. *Le due definite per* $1 < x < 2$ *connettono (in tempo infinito) tali punti. Le due definite per* $0 < x < 1$ *tendono (in tempo infinito) a* $x = 1$ *e vanno a* $\pm\infty$ *per* $x \to 0+$. *Le due definite per* $x > 2$ *tendono a un limite finito per* $x \to +\infty$.
3) $0 > E > -(\sqrt{2} - 1)^4$*: si hanno 3 orbite. La prima, definita per* $0 < x < x'_E < 1$ *ha un punto di inversione in* x'_E *diviene illimitata per* $t \to \pm\infty$. *La seconda definita per* $1 < x''_E < x < x'''_E < 2$ *è periodica con i punti di inversione in* x''_E *e* x'''_E. *La terza definita per* $x > x_E > 2$ *ha un punto di inversione in* x_E *e tende a limiti finiti per* $t \to \pm\infty$.
4) $E = -(\sqrt{2} - 1)^4$*: si hanno 3 orbite; la prima e la terza sono qualitativamente simili a quelle del punto 3). La seconda in questo caso è degenere e corrisponde al punto di equilibrio stabile* $x = \sqrt{2}$.
5) $-(\sqrt{2} - 1)^4 > E$*: si hanno due orbite, simili qualitativamente alla prima e terza del punto 3).*
R. *Ritratto di fase con* $m = 1$ *e orbite corrispondenti a livelli di energia* E *come segue:* $0{,}15$, 0, $-0{,}025$, $-(\sqrt{2} - 1)^4 = -0{,}029$, $-0{,}15$. *Punti di equilibrio instabile in* 1, 2 *e stabile in* $\sqrt{2}$.



26. [15/01/2019 (ex)II] Disegnare il ritratto di fase dei moti relativi al potenziale

$$U(x) = \frac{4(x-1)^2(x-3)^2}{x^2}\,, \qquad x > 0\,,$$

spiegando come si è ottenuta la costruzione.

27. [06/02/2020 (ex)I] Un moto unidimensionale si svolge con potenziale

$$U(x) = \operatorname{arctg}\left(ax^3 + bx^2\right), \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui a, b sono costanti positive.
Tracciare il diagramma di fase dei moti e individuare le orbite corrispondenti a moti per cui vale almeno una tra le relazioni

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = 0\,, \qquad \lim_{t\to-\infty} \dot{x}(t) = 0\,.$$

Soluzione
Si ha $U \in C^\infty(\boldsymbol{R})$; si vede subito che U si annulla solo nei due punti

$$x = 0\,, \qquad x = -\frac{b}{a} =: x_0\,.$$

Studiamo la derivata

$$U'(x) = \frac{(3ax+2b)x}{1+(ax^3+bx^2)^2}\,.$$

I punti critici sono quindi

$$x = 0\,, \qquad x = -\frac{2b}{3a} =: x_1 > x_0\,.$$

Dunque U è crescente in $(-\infty, x_1)$ e in $(0, +\infty)$, e decrescente in $(x_1, 0)$; quindi ha un minimo locale in 0 e un massimo locale in x_1 dove vale

$$U(x_1) = \operatorname{arctg}\frac{4b^3}{27a^2} =: U_0 > 0\,.$$

Inoltre

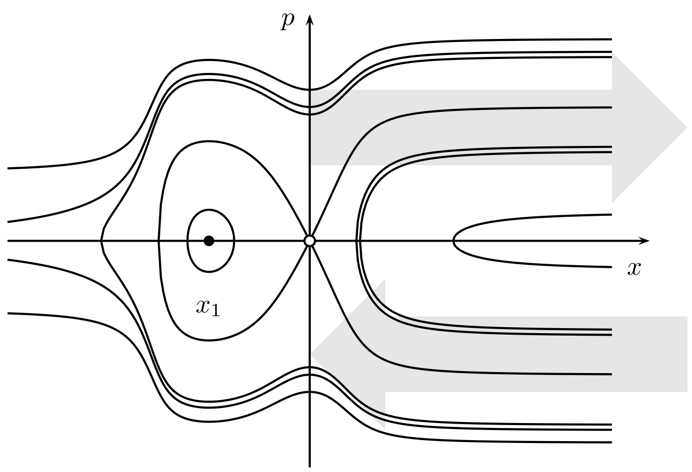
$$\sup_{\boldsymbol{R}} U = \lim_{x\to+\infty} U(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \inf_{\boldsymbol{R}} U = \lim_{x\to-\infty} U(x) = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Per tracciare le orbite sulle curve

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))}\,,$$

scegliamo i seguenti livelli energetici:
1) $E > \pi/2$: si hanno due sole orbite, una per $p > 0$ e l'altra simmetrica per $p < 0$, definite per ogni $x \in \boldsymbol{R}$.
2) $E = \pi/2$: come al punto 1), ma per $x \to -\infty$ il valore $p(x)$ tende a 0, invece che a un valore positivo.
3) $0 < E < \pi/2$: si ha una sola orbita, con un punto di inversione in $(-\infty, x_0)$.
4) $E = 0$: si hanno 4 orbite; l'orbita degenere corrispondente al punto di equilibrio

0, un'orbita con un punto di inversione contenuta in $(x_0,0)$ *e due orbite simmetriche definite in* $(0,+\infty)$.
5) $-U_0 < E < 0$*: si hanno due orbite, una periodica contenuta in un subintervallo compatto di* $(x_0,0)$*, e una con un punto di inversione contenuta in* $(0,+\infty)$.
6) $E = -U_0$*: si hanno due orbite; quella degenere corrispondente al punto di equilibrio* x_1*, e una con un punto di inversione contenuta in* $(0,+\infty)$.
7) $-\pi/2 < E < -U_0$*: si ha un'orbita contenuta in* $(0,+\infty)$.
Non ci sono orbite per $E \leq -\pi/2$.
I moti per cui $\dot{x}(t)$ *tende a* 0 *per* $t \to +\infty$ *o* $t \to -\infty$ *corrispondono alle orbite del punto 2), quelle del punto 4), e quella degenere del punto 6).*
R. *Ritratto di fase con* $m = 1$*,* $a = 1$*,* $b = 2$ *e orbite corrispondenti a livelli di energia* E *come segue:* 1,7, $\pi/2$, 1,4, 0, $-\pi/4$, $-U_0 = -0{,}87$, $-1{,}5$. *Punto di equilibrio instabile in* 0 *e stabile in* $x_1 = -4/3$.



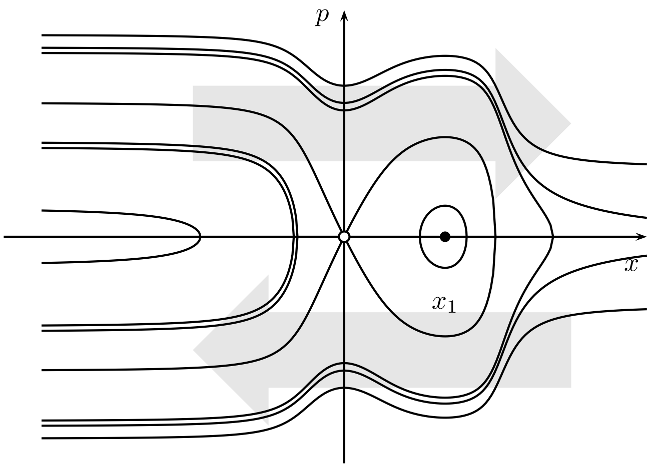
28. [06/02/2020 (ex)II] Un moto unidimensionale si svolge con potenziale

$$U(x) = -\operatorname{arctg}\left(ax^3 - bx^2\right), \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Qui a, b sono costanti positive.
Tracciare il diagramma di fase dei moti e individuare le orbite corrispondenti a moti per cui vale almeno una tra le relazioni

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = 0, \qquad \lim_{t\to-\infty} \dot{x}(t) = 0.$$

R. *Ritratto di fase con* $m = 1$*,* $a = 1$*,* $b = 2$ *e orbite corrispondenti a livelli di energia* E *come segue:* 2, $\pi/2$, 1,4, 0, $-\pi/4$, $-U_0 = -0{,}87$, $-1{,}5$. *Punto di equilibrio instabile in* 0 *e stabile in* $x_1 = 4/3$.



220. Moti centrali e simili

1. [7/7/2006 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|^4} \,,$$

con $k > 0$ costante. Qui O è l'origine del sistema di riferimento fisso. Le condizioni iniziali del moto sono

$$P(0) = (r_0{,}0{,}0) \,, \qquad \boldsymbol{v}_P(0) = (0, v_0{,}0) \,,$$

con r_0, $v_0 > 0$ tali che

$$k = r_0^2 v_0^2 m \,.$$

Determinare la traiettoria di P.
[Suggerimento: usare la formula di Binet.]
Soluzione
Il moto è centrale. Quindi è piano e ha luogo nel piano fisso (x_1, x_2), ove scegliamo coordinate polari r, φ con centro in O e tali che $\varphi = 0$ nella posizione iniziale di P. Ricordando la scomposizione polare della velocità si ha che, all'istante iniziale,

$$r(0) = r_0 \,, \quad \dot r(0) = 0 \,, \qquad \varphi(0) = 0 \,, \quad \dot\varphi(0) = \frac{v_0}{r_0} \,.$$

Perciò un integrale primo del moto è dato da

$$r(t)^2 \dot\varphi(t) = r(0)^2 \dot\varphi(0) = r_0 v_0 =: c \,.$$

Per determinare la traiettoria possiamo usare la formula di Binet:

$$-\frac{c^2}{r^2} \Big[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2} \Big(\frac{1}{r} \Big) + \frac{1}{r} \Big] = a_r = -\frac{k}{m r^3} \,,$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\Big(\frac{1}{r}\Big) + \frac{1}{r} = \frac{k}{c^2 m r} = \frac{1}{r}\,,$$

per le ipotesi. Dunque

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\Big(\frac{1}{r}\Big) = 0\,,$$

e

$$\frac{1}{r(\varphi)} = k_1\varphi + k_2\,,$$

ossia

$$r(\varphi) = \frac{1}{k_1\varphi + k_2}\,,$$

con $k_2 = 1/r_0$ *e* k_1 *determinato da*

$$-\frac{k_1}{(k_1\varphi + k_2)^2} = r'(\varphi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(\varphi(t)) \frac{1}{\dot\varphi(t)}\,.$$

Per $t = 0$ *si ha*

$$-\frac{k_1}{k_2^2} = 0\,,$$

da cui $k_1 = 0$*, e il moto è circolare.*
R. *Circonferenza* $x_1^2 + x_2^2 = r_0^2$ *su* $x_3 = 0$*, percorsa con moto circolare uniforme.*

2. [7/7/2006 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|^4}\,,$$

con $k > 0$ costante. Qui O è l'origine del sistema di riferimento fisso. Le condizioni iniziali del moto sono

$$P(0) = (0, r_0, 0)\,, \qquad \boldsymbol{v}_P(0) = (-v_0, 0, 0)\,,$$

con r_0, $v_0 > 0$ tali che

$$k = r_0^2 v_0^2 m\,.$$

Determinare la traiettoria di P.
[Suggerimento: usare la formula di Binet.]
R. *Circonferenza* $x_1^2 + x_2^2 = r_0^2$ *su* $x_3 = 0$*, percorsa con moto circolare uniforme.*

3. [17/9/2007 (ex)I] Un punto P di massa m è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = k\left|\overrightarrow{OP}\right|^{\frac{1}{2}} \overrightarrow{OP}\,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e $k > 0$ è costante.
All'istante iniziale P occupa la posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = L\boldsymbol{e}_1\,,$$

con velocità iniziale

$$\boldsymbol{v}(0) = \alpha \boldsymbol{e}_2 + \beta \boldsymbol{e}_3 .$$

Si dimostri che il moto di P avviene su un piano fisso Π, si trovi l'equazione di Π, e si calcoli la velocità areolare di P.

SOLUZIONE

Il moto è centrale, quindi è noto che avviene nel piano che passa per la posizione iniziale, e normale a

$$\overrightarrow{OP}(0) \times \boldsymbol{v}(0) = -L\beta \boldsymbol{e}_2 + L\alpha \boldsymbol{e}_3 .$$

L'equazione di Π è dunque

$$(x_1 - L)0 - x_2\beta + x_3\alpha = 0 .$$

La velocità areolare è per definizione

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{OP}(0) \times \boldsymbol{v}(0) \right| = \frac{L}{2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} .$$

R.

$$\Pi : \quad \beta x_2 - \alpha x_3 = 0 ,$$
$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} .$$

4. [17/9/2007 (ex)II] Un punto P di massa m è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = -k \left| \overrightarrow{OP} \right|^4 \overrightarrow{OP} ,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e $k > 0$ è costante.
All'istante iniziale P occupa la posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = L \boldsymbol{e}_2 ,$$

ove $L > 0$, con velocità iniziale

$$\boldsymbol{v}(0) = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_3 .$$

Si dimostri che il moto di P avviene su un piano fisso Π, si trovi l'equazione di Π, e si calcoli la velocità areolare di P.
R.

$$\Pi : \quad \beta x_1 - \alpha x_3 = 0 ,$$
$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} .$$

5. [18/7/2008 (ex)I] Un punto P di massa m si muove sul piano $x_3 = 0$, soggetto alla forza
$$\boldsymbol{F} = \alpha r^{-3} \cos^2 \varphi \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}\,,$$
ove O è l'origine e r, φ sono le coordinate polari nel piano.
All'istante iniziale
$$\overrightarrow{OP}(0) = L\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_2\,.$$
Qui α, L e v_0 sono costanti positive.

1. Si calcoli la velocità areolare di P, dimostrando che rimane costante nel moto.
2. Si dimostri che lungo il moto r è crescente.

SOLUZIONE
Scomponendo l'equazione di moto nelle direzioni radiale e trasversa si ha
$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \alpha r^{-3} \cos^2 \varphi\,, \tag{1}$$
$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0\,. \tag{2}$$
La velocità areolare, come è noto, è definita da
$$V(t) = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}\,.$$
Quindi
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{r} r \dot{\varphi} + \frac{1}{2} r^2 \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0\,,$$
per la (2)*. All'istante iniziale* $r(0) = L$ *e*
$$\boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_2 = \dot{r}\boldsymbol{u} + r\dot{\varphi}\boldsymbol{\tau} = \dot{r}\boldsymbol{e}_1 + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_2\,,$$
per cui
$$\dot{r}(0) = 0\,, \qquad \dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{L}\,.$$
Perciò
$$V(t) = V(0) = \frac{1}{2} L^2 \frac{v_0}{L} = \frac{1}{2} L v_0\,.$$
Da (1)*, si ha*
$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 + \alpha m^{-1} r^{-3} \cos^2 \varphi > 0\,.$$
Dato che $\dot{r}(0) = 0$*, ne segue che* $\dot{r}(t) > 0$ *per ogni* $t > 0$*.*
R.
$$V(t) = V(0) = \frac{1}{2} L v_0\,.$$

6. [18/7/2008 (ex)II] Un punto P di massa m si muove sul piano $x_3 = 0$, soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha r^3 \sin^2 \varphi \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} ,$$

ove O è l'origine e r, φ sono le coordinate polari nel piano.
All'istante iniziale

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_2 , \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_1 .$$

Qui α, R e v_0 sono costanti positive.

1. Si calcoli la velocità areolare di P, dimostrando che rimane costante nel moto.

2. Si dimostri che lungo il moto r è crescente.

R.

$$V(t) = V(0) = -\frac{1}{2} R v_0 .$$

7. [9/4/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = k \frac{\overrightarrow{OP}}{|OP|} ,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
All'istante iniziale P occupa la posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_2 + R\boldsymbol{e}_3 ,$$

con velocità iniziale

$$\boldsymbol{v}(0) = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2 .$$

Qui α, β, k, R sono costanti positive.
Si dimostri che il moto avviene su un piano fisso e si determini l'equazione di tale piano.
Soluzione
Il moto avviene in un campo di forze centrale, e dunque si sa che il moto è piano per risultati generali. Anzi, il piano è quello che passa per la posizione iniziale e che è perpendicolare al vettore

$$\overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{v}(0) = -\beta R \boldsymbol{e}_1 + \alpha R \boldsymbol{e}_2 - \alpha R \boldsymbol{e}_3 .$$

R.

$$-\beta x_1 + \alpha(x_2 - R) - \alpha(x_3 - R) = 0 .$$

310. Vincoli olonomi

1. [09/01/2020 (ex)I] Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_h, m)$ $h = 1, 2$, entrambi di massa m, rappresentati da

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3\,,$$

sono soggetti ai seguenti vincoli:

$$f_1(\boldsymbol{z}) = z_1^2 + z_2^2 - z_4^2 - z_5^2 = 0\,,$$
$$f_2(\boldsymbol{z}) = z_2^2 + z_3^2 - z_5^2 - z_6^2 = 0\,.$$

- Trovare almeno un aperto A di $\boldsymbol{R}^6$ in cui nelle configurazioni compatibili il vincolo è olonomo non singolare e in esse determinare una rappresentazione lagrangiana.

Soluzione
I vincoli sono regolari: f_1, $f_2 \in C^\infty(\boldsymbol{R}^6)$.
Inoltre la matrice iacobiana è

$$2\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & 0 & -z_4 & -z_5 & 0 \\ 0 & z_2 & z_3 & 0 & -z_5 & -z_6 \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice ha rango 2 se nessuna delle due righe si annulla e vale almeno una tra le due $(z_1, z_4) \neq (0{,}0)$ e $(z_3, z_6) \neq (0{,}0)$. Ossia i due punti non devono trovarsi contemporaneamente sull'asse x_2.
Dunque nelle configurazioni ammissibili $\ell = n_c - m = 6 - 2 = 4$. Si possono usare le coordinate indipendenti come coordinate lagrangiane. Per esempio se $z_1 > 0$ e $z_6 < 0$ si possono usare come coordinate indipendenti z_2, z_3, z_4, z_5. La rappresentazione lagrangiana del moto è

$$\begin{aligned} z_1^{\mathrm{L}} &= \sqrt{z_4^2 + z_5^2 - z_2^2}\,, \\ z_2^{\mathrm{L}} &= z_2\,, \\ z_3^{\mathrm{L}} &= z_3\,, \\ z_4^{\mathrm{L}} &= z_4\,, \\ z_5^{\mathrm{L}} &= z_5\,, \\ z_6^{\mathrm{L}} &= -\sqrt{z_2^2 + z_3^2 - z_5^2}\,. \end{aligned}$$

R.

$$A = \{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^6 \mid z_1 > 0\,, z_6 < 0\}\,,$$

con rappresentazione

$$\begin{aligned} z_1^{\mathrm{L}} &= \sqrt{z_4^2 + z_5^2 - z_2^2}\,, \\ z_2^{\mathrm{L}} &= z_2\,, \\ z_3^{\mathrm{L}} &= z_3\,, \\ z_4^{\mathrm{L}} &= z_4\,, \\ z_5^{\mathrm{L}} &= z_5\,, \\ z_6^{\mathrm{L}} &= -\sqrt{z_2^2 + z_3^2 - z_5^2}\,. \end{aligned}$$

2. [09/01/2020 (ex)II] Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_h, m)$ $h = 1, 2$, entrambi di massa m, rappresentati da

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3 \,, \quad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3 \,,$$

sono soggetti ai seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}) &= z_1^2 + z_2^2 - z_4^2 - z_5^2 = 0 \,, \\ f_2(\boldsymbol{z}) &= z_1^2 + z_3^2 - z_4^2 - z_6^2 = 0 \,. \end{aligned}$$

- Trovare almeno un aperto A di $\boldsymbol{R}^6$ in cui nelle configurazioni compatibili il vincolo è olonomo non singolare e in esse determinare una rappresentazione lagrangiana.

R.

$$A = \{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^6 \mid z_2 > 0 \,, z_6 < 0\} \,,$$

con rappresentazione

$$\begin{aligned} z_1^{\mathrm{L}} &= z_1 \,, \\ z_2^{\mathrm{L}} &= \sqrt{z_4^2 + z_5^2 - z_1^2} \,, \\ z_3^{\mathrm{L}} &= z_3 \,, \\ z_4^{\mathrm{L}} &= z_4 \,, \\ z_5^{\mathrm{L}} &= z_5 \,, \\ z_6^{\mathrm{L}} &= -\sqrt{z_1^2 + z_3^2 - z_4^2} \,. \end{aligned}$$

3. [06/02/2020 (ex)I] Due moti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3 \,,$$

sono vincolati come segue per una costante $R > 0$:

- $\boldsymbol{X}_1$ appartiene alla sfera S_1 di centro $(-R,0,0)$ e di raggio R;
- $\boldsymbol{X}_2$ appartiene alla sfera S_2 di centro $(R,0,0)$ e di raggio R;
- $\boldsymbol{X}_1$ e $\boldsymbol{X}_2$ sono a distanza fissa $2R$.

Si dimostri che il vincolo è regolare nella configurazione

$$\boldsymbol{X}_1 = -R\boldsymbol{e}_1 + R\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = R\boldsymbol{e}_1 + R\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Si determini poi almeno una configurazione compatibile con il vincolo in cui questo non è regolare.

Soluzione

A) I vincoli si scrivono come

$$
\begin{aligned}
f_1(\boldsymbol{z}) &= (z_1+R)^2 + z_2^2 + z_3^2 - R^2 = 0\,,\\
f_2(\boldsymbol{z}) &= (z_4-R)^2 + z_5^2 + z_6^2 - R^2 = 0\,,\\
f_3(\boldsymbol{z}) &= (z_1-z_4)^2 + (z_2-z_5)^2 + (z_3-z_6)^2 - 4R^2 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Poiché $f_i \in C^\infty(\boldsymbol{R}^6)$ le ipotesi di regolarità sono soddisfatte e si vede subito che la posizione indicata è compatibile con il vincolo.
Resta da controllare che la matrice iacobiana abbia rango massimo. La matrice è:

$$
2\begin{pmatrix}
z_1+R & z_2 & z_3 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & z_4-R & z_5 & z_6\\
z_1-z_4 & z_2-z_5 & z_3-z_6 & z_4-z_1 & z_5-z_2 & z_6-z_3
\end{pmatrix}.
$$

Dunque nella posizione indicata vale

$$
2\begin{pmatrix}
0 & R & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & R & 0\\
-2R & 0 & 0 & 2R & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

che ha rango massimo, uguale a 3.
B) Consideriamo la posizione

$$
\boldsymbol{X}_1 = 0\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = 2R\boldsymbol{e}_1\,.
$$

Questa è compatibile con i vincoli, e in essa la iacobiana vale

$$
2\begin{pmatrix}
R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & R & 0 & 0\\
-2R & 0 & 0 & 2R & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

in cui la terza riga è ovviamente combinazione lineare delle prime due. Perciò in questa posizione il vincolo non è regolare; lo stesso argomento vale nella posizione

$$
\boldsymbol{X}_1 = -2R\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = 0\,.
$$

C) Per completezza, mostriamo che le due posizioni indicate al punto B) sono le uniche posizioni compatibili con il vincolo in cui esso non è regolare. Riscriviamo la iacobiana nella forma

$$
2\begin{pmatrix}
\boldsymbol{u}_1 & 0\\
0 & \boldsymbol{u}_2\\
\boldsymbol{w} & -\boldsymbol{w}
\end{pmatrix},
$$

ove $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{w}$, $0 \in \boldsymbol{R}^3$ e $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{w}$ hanno ovvia definizione. Si noti che $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\}$. La caratteristica è quindi comunque ≥ 2 e $= 2$ se e solo se

$$
\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{u}_1 = \mu\boldsymbol{u}_2\,, \qquad \lambda\,,\mu \neq 0\,,
$$

da cui

$$
\boldsymbol{u}_1 = \mu\lambda^{-1}\boldsymbol{u}_2\,.
$$

Nelle posizioni non regolari quindi si deve avere in realtà

$$
\boldsymbol{w} = \pm 2\boldsymbol{u}_1\,, \qquad \boldsymbol{u}_1 = \pm\boldsymbol{u}_2\,,
$$

perché $|\boldsymbol{u}_1| = |\boldsymbol{u}_2| = R$ *e* $|\boldsymbol{w}| = 2R$. *La scelta dei segni qui è per ora arbitraria. Per il significato geometrico (di raggio) di* $\boldsymbol{u}_1$ *e* $\boldsymbol{u}_2$ *si tratta di configurazioni in cui* $\boldsymbol{X}_1$ *e* $\boldsymbol{X}_2$ *assumono posizioni coincidenti o opposte sulla sfera, se pensiamo di traslare le due sfere fino a sovrapporle. Dunque si avrebbe*

$$\boldsymbol{X}_1 = -R\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{u}_1 \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = R\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{u}_2 = R\boldsymbol{e}_1 \pm \boldsymbol{u}_1$$

e

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2 = -2R\boldsymbol{e}_1 + \delta\boldsymbol{u}_1 \,,$$

con $\delta \in \{0,2\}$. *Ma sostituendo* $\boldsymbol{w} = \pm 2\boldsymbol{u}_1$, *si vede che il caso* $\delta = 2$ *è impossibile e si ha quindi che* $\boldsymbol{u}_1$ *risulta parallelo a* $\boldsymbol{e}_1$ *e perciò si trovano solo le posizioni in cui entrambi i punti sono sull'asse* x_1.
R. *Le posizioni non regolari sono*

$$\boldsymbol{X}_1 = 0 \,, \quad \boldsymbol{X}_2 = 2R\boldsymbol{e}_1 \,; \qquad \boldsymbol{X}_1 = -2R\boldsymbol{e}_1 \,, \quad \boldsymbol{X}_2 = 0 \,.$$

4. [06/02/2020 (ex)II] Due moti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3 \,,$$

sono vincolati come segue per una costante $R > 0$:

- $\boldsymbol{X}_1$ appartiene alla sfera S_1 di centro $(0,0,-R)$ e di raggio R;
- $\boldsymbol{X}_2$ appartiene alla sfera S_2 di centro $(0,0,R)$ e di raggio R;
- $\boldsymbol{X}_1$ e $\boldsymbol{X}_2$ sono a distanza fissa $2R$.

Si dimostri che il vincolo è regolare nella configurazione

$$\boldsymbol{X}_1 = R\boldsymbol{e}_1 - R\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = R\boldsymbol{e}_1 + R\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Si determini poi almeno una configurazione compatibile con il vincolo in cui questo non è regolare.
R. *Le posizioni non regolari sono*

$$\boldsymbol{X}_1 = 0 \,, \quad \boldsymbol{X}_2 = 2R\boldsymbol{e}_3 \,; \qquad \boldsymbol{X}_1 = -2R\boldsymbol{e}_3 \,, \quad \boldsymbol{X}_2 = 0 \,.$$

5. [10/02/2020 (ex)I] Un cono C di altezza H e raggio R è vincolato come segue:

- Il vertice V rimane a distanza fissa $L > 0$ dall'origine del sistema di riferimento fisso.
- L'asse del cono si mantiene parallelo all'asse x_3.

Si scelgano le coordinate locali:

$$z_1 = x_{1V} \,, \quad z_2 = x_{2V} \,, \quad z_3 = x_{3V} \,, \quad z_4 = x_{1A} \,, \quad z_5 = x_{2A} \,, \quad z_6 = x_{1B} \,,$$

ove A è il centro della base del cono, e B un punto solidale della circonferenza di base.
Si scrivano i vincoli corrispondenti e si dimostri che sono olonomi regolari in tutte le configurazioni compatibili con i vincoli; naturalmente ci si limiti alle configurazioni in cui le coordinate locali si possono scegliere come sopra.
SOLUZIONE
I vincoli possono essere espressi come $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = 0$, ove

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - R^2 \\ z_4 - z_1 \\ z_5 - z_2 \end{pmatrix} .$$

La prima componente prescrive quindi la distanza di V dall'origine e le altre due che il vettore $\overrightarrow{VA}$, che ha la direzione dell'asse del cono, sia parallelo a $\boldsymbol{e}_3$. Poiché $\boldsymbol{f} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^6)$ le condizioni di regolarità sono soddisfatte, ed è chiaro che configurazioni compatibili esistono.
La matrice iacobiana in tali configurazioni vale

$$\begin{pmatrix} 2z_1 & 2z_2 & 2z_3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Uno almeno tra z_1, z_2, z_3 non è nullo, per il primo vincolo. Scegliendo la colonna corrispondente, oltre alle 4, 5, si ottiene una tra le matrici

$$\begin{pmatrix} 2z_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 2z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 2z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

che hanno tutte (nell'ipotesi detta) determinante non nullo. Quindi la iacobiana ha rango massimo pari a 3.
R.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - R^2 \\ z_4 - z_1 \\ z_5 - z_2 \end{pmatrix} = 0 .$$

6. [10/02/2020 (ex)II] Un cilindro C di altezza H e raggio R è vincolato come segue:

- Il centro A di una delle due basi rimane a distanza fissa $L > 0$ dall'origine del sistema di riferimento fisso.
- L'asse del cilindro si mantiene parallelo all'asse x_1.

Si scelgano le coordinate locali:

$$z_1 = x_{1A}\,, \quad z_2 = x_{2A}\,, \quad z_3 = x_{3A}\,, \quad z_4 = x_{2B}\,, \quad z_5 = x_{3B}\,, \quad z_6 = x_{2D}\,,$$

ove B è il centro della seconda base del cilindro, e D un punto solidale della circonferenza di base il cui centro è B.
Si scrivano i vincoli corrispondenti e si dimostri che sono olonomi regolari in tutte le configurazioni compatibili con i vincoli; naturalmente ci si limiti alle configurazioni in cui le coordinate locali si possono scegliere come sopra.
R.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - R^2 \\ z_4 - z_2 \\ z_5 - z_3 \end{pmatrix} = 0\,.$$

330. Calcolo di quantità meccaniche in moti relativi

1. [18/7/2005 (ex)I] Sia $\Pi(t)$ il piano mobile di equazione

$$-\sin(\alpha t)x_1 + \cos(\alpha t)x_2 = 0\,,$$

nel riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3).
Un disco rigido omogeneo di massa m e raggio R è vincolato a giacere su $\Pi(t)$, e ad avere il centro C coincidente con un punto P solidale con $\Pi(t)$, a distanza $d > 0$ dall'asse x_3.
Si esprima in coordinate lagrangiane l'energia cinetica del disco nel sistema di riferimento fisso.
SOLUZIONE
Sia $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ *una base solidale con il disco, con* $\boldsymbol{u}_1$ *ortogonale a* $\Pi(t)$.
Se φ *è la coordinata lagrangiana, scelta per esempio come l'angolo tra* $\boldsymbol{e}_3$ *e* $\boldsymbol{u}_3$*, si ha*

$$\boldsymbol{e}_3 = \cos\varphi \boldsymbol{u}_3 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_2\,.$$

Dunque si ha dal teorema di König

$$T = \frac{1}{2}m\alpha^2 d^2 + \frac{1}{2}I(2\dot{\varphi}^2 + \alpha^2)\,,$$

se I *è il momento d'inerzia del disco rispetto a un suo diametro.*
Infatti la velocità $\boldsymbol{v}_C$ *del centro di massa* C *soddisfa*

$$|\boldsymbol{v}_C|^2 = \alpha^2 d^2\,,$$

poiché C *si muove di moto rotatorio uniforme.*
La velocità angolare del disco rispetto a un sistema di riferimento che trasla con il suo centro di massa, mantenendo gli assi paralleli a quelli fissi, è poi

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 + \alpha\sin\varphi \boldsymbol{u}_2 + \alpha\cos\varphi \boldsymbol{u}_3\,.$$

Un modo alternativo di calcolare T è attraverso l'integrale

$$T = \iint_{\text{disco}} \frac{1}{2} \frac{m}{\text{area(disco)}} \left| \boldsymbol{v}(P) \right|^2 \, \mathrm{d}P \,,$$

ove $\boldsymbol{v}(P)$ è la velocità nel sistema di riferimento fisso del generico punto P del disco. Per svolgere il calcolo, parametrizziamo il disco così:

$$\begin{aligned} P(r,\theta) = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} &= \big(d\cos(\alpha t), d\sin(\alpha t), x_{3C}\big) \\ &\quad + r\big(\cos(\theta+\varphi)\cos(\alpha t), \cos(\theta+\varphi)\sin(\alpha t), \sin(\theta+\varphi)\big) \,, \end{aligned}$$

ove x_{3C} è una costante irrilevante per il calcolo di T, e $0 \le r \le R$, $0 \le \theta \le 2\pi$. L'angolo θ ha il significato geometrico di anomalia polare (di polo C) misurata su $\mathit{\Pi}(t)$ a partire dalla semiretta di riferimento di φ. Dunque

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(P(r,\theta)) &= \alpha d\big(-\sin(\alpha t), \cos(\alpha t), 0\big) \\ &\quad - r\dot\varphi\big(\sin(\theta+\varphi)\cos(\alpha t), \sin(\theta+\varphi)\sin(\alpha t), -\cos(\theta+\varphi)\big) \\ &\quad + r\alpha\cos(\theta+\varphi)\big(-\sin(\alpha t), \cos(\alpha t), 0\big) \,. \end{aligned}$$

Si riconosce subito che $\boldsymbol{v}(P)$ è combinazione lineare di due versori ortonormali, e che

$$\begin{aligned} \left|\boldsymbol{v}(P(r,\theta))\right|^2 &= \big(\alpha d + r\alpha\cos(\theta+\varphi)\big)^2 + \big(r\dot\varphi\big)^2 \\ &= \alpha^2 d^2 + 2r\alpha^2 d\cos(\theta+\varphi) + r^2\alpha^2\cos^2(\theta+\varphi) + r^2\dot\varphi^2 \,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{2\pi R^2}{m} T &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \mathrm{d}r\, r\alpha^2 d^2 + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \mathrm{d}r\, r 2r\alpha^2 d\cos(\theta+\varphi) \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \mathrm{d}r\, rr^2\big(\alpha^2\cos^2(\theta+\varphi) + \dot\varphi^2\big) \\ &= \pi R^2\alpha^2 d^2 + \frac{\pi}{2}R^4\dot\varphi^2 + \alpha^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \Big(d\frac{2}{3}R^3\cos(\theta+\varphi) + \frac{1}{4}R^4\cos^2(\theta+\varphi)\Big) \\ &= \pi R^2\alpha^2 d^2 + \frac{\pi}{2}R^4\dot\varphi^2 + \alpha^2\frac{\pi}{4}R^4 \,, \end{aligned}$$

che coincide con l'espressione già trovata.
R.

$$T = \frac{1}{2}m\alpha^2 d^2 + \frac{1}{2}I(2\dot\varphi^2 + \alpha^2) \,,$$

2. [18/7/2005 (ex)II] Sia $\mathit{\Pi}(t)$ il piano mobile di equazione

$$-\sin(\alpha t)x_2 + \cos(\alpha t)x_3 = 0 \,,$$

nel riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3).
Una lamina quadrata rigida omogenea di massa m e lato $2L$ è vincolata a giacere su $\mathit{\Pi}(t)$, e ad avere il centro C coincidente con un punto P solidale con $\mathit{\Pi}(t)$, a distanza $d > 0$ dall'asse x_1.

Si esprima in coordinate lagrangiane l'energia cinetica della lamina nel sistema di riferimento fisso.
R.

$$T = \frac{1}{2} m\alpha^2 d^2 + \frac{1}{2} I(2\dot{\varphi}^2 + \alpha^2)\,.$$

3. [12/9/2005 (ex)I] Un triangolo ABC è formato da tre aste omogenee di lunghezza $2L$, ciascuna di massa m. È vincolato a ruotare intorno a un asse fisso per A, rimanendo sempre ortogonale ad esso; il vertice A è fisso.
Determinare in funzione di m, L e di un'opportuna coordinata lagrangiana l'energia cinetica del triangolo.
SOLUZIONE
Scegliamo come sistema di riferimento solidale con il triangolo $(A, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, ove $\boldsymbol{u}_1$ è un versore (fisso) giacente sull'asse di rotazione, e $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ sono scelti sul piano del triangolo (e solidali con esso).
Sia φ l'angolo formato dal lato AC con una retta fissa nel piano fisso su cui giace ABC, passante per A. Allora la velocità angolare del triangolo è

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1\,.$$

Vale

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I_{11}\dot{\varphi}^2\,.$$

Resta da calcolare I_{11}. Il contributo di ciascuna delle due aste AB e AC è

$$\int_0^{2L} \frac{m}{2L} s^2 \,\mathrm{d}s = \frac{4}{3} mL^2\,.$$

Il contributo I_{BC} di BC si può calcolare mediante il teorema di Huygens: se G è il centro di massa di BC,

$$I_{BC} = I_{BC}^G + m\,\mathrm{dist}(A, G)^2\,,$$

ove indichiamo

$$I_{BC}^G = \int_{-L}^{L} \frac{m}{2L} s^2 \,\mathrm{d}s = \frac{1}{3} mL^2\,.$$

Dunque

$$I_{11} = 2\frac{4}{3} mL^2 + \frac{1}{3} mL^2 + m(\sqrt{3}L)^2 = 6mL^2\,,$$

cosicché

$$T = 3mL^2\dot{\varphi}^2\,.$$

R.

$$T = 3mL^2\dot{\varphi}^2\,.$$

4. [12/9/2005 (ex)II] Un triangolo ABC è formato da tre aste omogenee di lunghezza $4L$, ciascuna di massa m. È vincolato a ruotare intorno a un asse fisso per A, rimanendo sempre ortogonale ad esso; il vertice A è fisso.

Determinare in funzione di m, L e di un'opportuna coordinata lagrangiana l'energia cinetica del triangolo.
R.

$$T = 12mL^2\dot{\varphi}^2 \,.$$

5. [19/7/2006 (ex)I] Un sistema vincolato è costituito da un disco rigido di raggio $R > 0$ e massa $M > 0$, e da un punto materiale P di massa $m > 0$ vincolato a muoversi sulla circonferenza bordo del disco.
Inoltre il disco è vincolato a ruotare intorno a un asse fisso passante per un suo diametro, mantenendo il centro fisso su tale asse.
Determinare l'energia cinetica del sistema in funzione di opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
1) Siano A e B gli estremi del diametro che giace sull'asse di rotazione. Scegliamo un sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$, con O coincidente con il centro del disco, e

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} \,.$$

Scegliamo anche un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ solidale con il disco, in modo che

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \text{per ogni } t; \\ &\boldsymbol{u}_1 \quad \text{sia ortogonale al disco.} \end{aligned}$$

Il moto del disco può allora essere descritto mediante la coordinata lagrangiana θ, ove θ è l'angolo formato da $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{u}_1$. Perciò la velocità angolare del disco sarà

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\theta}(t)\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Visto che il moto si riduce a una rotazione,

$$T_{\text{disco}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}(t)^2 \,,$$

ove I è il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse per $\boldsymbol{e}_3$.
2) Il moto del punto P può essere descritto con una coordinata lagrangiana ψ data dall'angolo formato da $\overrightarrow{OP}$ con $\boldsymbol{u}_2$, ossia

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\psi\boldsymbol{u}_2 + R\sin\psi\boldsymbol{u}_3 \,.$$

D'altra parte

$$\boldsymbol{u}_2(t) = -\sin\theta(t)\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta(t)\boldsymbol{e}_2 \,,$$

perciò nel sistema di riferimento fisso

$$\overrightarrow{OP} = R\{-\cos\psi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\psi\cos\theta\boldsymbol{e}_2 + \sin\psi\boldsymbol{e}_3\} \,.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_P = R\{&(\dot\psi \sin\psi \sin\theta - \dot\theta \cos\psi \cos\theta)\boldsymbol{e}_1 \\ &+ (-\dot\psi \sin\psi \cos\theta - \dot\theta \cos\psi \sin\theta)\boldsymbol{e}_2 \\ &+ \dot\psi \cos\psi \boldsymbol{e}_3\} \,, \end{aligned}$$

per cui

$$T_P = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_P|^2 = \frac{1}{2}mR^2(\dot\psi^2 + \dot\theta^2 \cos^2\psi) \,.$$

3) In alternativa, per trovare $\boldsymbol{v}_P$ si può ricorrere alle formule della cinematica relativa, che, essendo, $\boldsymbol{v}_O = 0$, danno

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_P &= [\boldsymbol{v}_P]_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP} \\ &= R\dot\psi(-\sin\psi \boldsymbol{u}_2 + \cos\psi \boldsymbol{u}_3) \\ &\quad + \dot\theta \boldsymbol{u}_3 \times (R\cos\psi \boldsymbol{u}_2 + R\sin\psi \boldsymbol{u}_3) \\ &= -R\dot\theta \cos\psi \boldsymbol{u}_1 - R\dot\psi \sin\psi \boldsymbol{u}_2 + R\dot\psi \cos\psi \boldsymbol{u}_3 \,, \end{aligned}$$

che permette di ritrovare subito la T_P.

R.

$$T = \frac{1}{2}I\dot\theta(t)^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot\psi^2 + \dot\theta^2 \cos^2\psi) \,.$$

6. [19/7/2006 (ex)II] Un sistema vincolato è costituito da un disco rigido di raggio $R > 0$ e massa $M > 0$, e da un punto materiale P di massa $m > 0$ vincolato a muoversi sulla circonferenza concentrica al disco (e giacente su di esso), di raggio $R/2$.

Inoltre il disco è vincolato a ruotare intorno a un asse fisso passante per un suo diametro, mantenendo il centro fisso su tale asse.

Determinare l'energia cinetica del sistema in funzione di opportune coordinate lagrangiane.

R.

$$T = \frac{1}{2}I\dot\theta(t)^2 + \frac{1}{2}m\frac{R^2}{4}(\dot\psi^2 + \dot\theta^2 \cos^2\psi) \,.$$

7. [22/9/2006 (ex)I] Si trovi in termini delle opportune coordinate lagrangiane l'energia cinetica di un'asta rigida AB, omogenea, di lunghezza $2L$, massa m, e sottoposta ai vincoli:

- A appartiene a una circonferenza fissa di raggio $R > 0$ e centro O;
- l'asta si mantiene sempre ortogonale nel suo moto al raggio $\overrightarrow{OA}$.

Soluzione

L'asta ha due gradi di libertà; sceglieremo dunque due coordinate lagrangiane. Se supponiamo che la circonferenza cui appartiene A giaccia nel piano $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$, si potrà scrivere

$$\overrightarrow{OA} = R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,,$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$ prima coordinata lagrangiana. Poi, visto che l'asta deve mantenersi ortogonale a $\overrightarrow{OA}$, essa giace sempre nel piano individuato dalla tangente $\boldsymbol{\tau}$ e dalla binormale $\boldsymbol{e}_3$ della circonferenza; possiamo scegliere come seconda coordinata lagrangiana l'angolo $\theta \in (-\pi, \pi)$ formato da $\overrightarrow{AB}$ con $\boldsymbol{\tau}$.
Dunque, AB è parametrizzata da

$$\overrightarrow{AP(s)} = s\cos\theta\boldsymbol{\tau} + s\sin\theta\boldsymbol{e}_3 = -s\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + s\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + s\sin\theta\boldsymbol{e}_3\,,$$

con $0 \le s \le 2L$.
Quindi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP(s)} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP(s)}\\ &= (R\cos\varphi - s\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (R\sin\varphi + s\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2 + s\sin\theta\boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(s) = (&-R\dot\varphi\sin\varphi + s\dot\theta\sin\theta\sin\varphi - s\dot\varphi\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1\\ &+ (R\dot\varphi\cos\varphi - s\dot\theta\sin\theta\cos\varphi - s\dot\varphi\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2\\ &+ s\dot\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

e

$$|\boldsymbol{v}(s)|^2 = R^2\dot\varphi^2 + s^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\cos^2\theta) - 2Rs\dot\varphi\dot\theta\sin\theta\,.$$

Si ha infine

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2L} \frac{m}{2L}\,|\boldsymbol{v}(s)|^2\,\mathrm{d}s = \frac{m}{2}\Big[R^2\dot\varphi^2 + \frac{4}{3}L^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\cos^2\theta) - 2LR\dot\varphi\dot\theta\sin\theta\Big]\,.$$

R.

$$T = \frac{m}{2}\Big[R^2\dot\varphi^2 + \frac{4}{3}L^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\cos^2\theta) - 2LR\dot\varphi\dot\theta\sin\theta\Big]\,.$$

8. [13/12/2006 (ex)I] Si trovi in termini delle opportune coordinate lagrangiane l'energia cinetica di un'asta rigida AB, omogenea, di lunghezza L, massa m, e sottoposta ai vincoli:

$$\begin{aligned}x_A^2 + y_A^2 &= z_A^2\,,\\ x_B^2 + y_B^2 &= z_B^2\,,\\ z_B &= z_A + \frac{L}{\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

(Ossia, AB giace tutta sul cono $x^2 + y^2 = z^2$. Si assuma $z_A > 0$.)
Soluzione
Scegliamo $z = z_A$ e l'anomalia polare (cilindrica) φ di A come coordinate lagrangiane.
Allora

$$P(s) = \Big(\Big(z + \frac{s}{\sqrt{2}}\Big)\cos\varphi, \Big(z + \frac{s}{\sqrt{2}}\Big)\sin\varphi, z + \frac{s}{\sqrt{2}}\Big)\,, \qquad 0 \le s \le L\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{v}(s) = \Big(\dot z\cos\varphi - \Big(z + \frac{s}{\sqrt2}\Big)\dot\varphi\sin\varphi, \dot z\sin\varphi + \Big(z + \frac{s}{\sqrt2}\Big)\dot\varphi\cos\varphi, \dot z\Big)\,,$$

e

$$|\boldsymbol{v}(s)|^2 = 2\dot z^2 + \Big(z + \frac{s}{\sqrt2}\Big)^2\dot\varphi^2\,.$$

Perciò

$$T = \frac12\int_0^L \frac{m}{L}\Big(2\dot z^2 + \Big(z + \frac{s}{\sqrt2}\Big)^2\dot\varphi^2\Big)\,\mathrm{d}s\,.$$

R.

$$T = \frac{m}{2L}\Big(2L\dot z^2 + \frac{\sqrt2}{3}\Big(z + \frac{L}{\sqrt2}\Big)^3\dot\varphi^2 - \frac{\sqrt2}{3}z^3\dot\varphi^2\Big)\,.$$

9. [26/3/2007 (ex)I] Un cilindro circolare retto omogeneo di massa M, raggio R e altezza H è sottoposto ai seguenti vincoli:

- il suo centro O appartiene a una circonferenza fissa γ di raggio L, giacente su un piano fisso Π;
- il suo asse si mantiene ortogonale a Π.

Si trovi in termini delle opportune coordinate lagrangiane l'energia cinetica del cilindro.
Soluzione
Sia $(\Omega, \boldsymbol{e}_i)$ *un sistema di riferimento solidale con* Π, *ove* Ω *è il centro di* γ, *e* $\boldsymbol{e}_3$ *è ortogonale a* Π.
Sia poi $(O, \boldsymbol{u}_i)$ *un sistema di riferimento solidale con il cilindro, tale che* $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ *per ogni* t.
Scegliamo come coordinate lagrangiane due angoli φ *e* θ *tali che*

$$\overrightarrow{\Omega O} = L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2\,. \tag{2}$$

Usiamo il teorema di König per trovare l'energia cinetica come

$$T = \frac12 M|\boldsymbol{v}_O|^2 + T_{\mathcal{S}'}\,,$$

ove $\mathcal{S}' = (O, \boldsymbol{e}_i)$. *Da* (1) *segue*

$$\boldsymbol{v}_O = L\dot\varphi(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2)\,, \qquad |\boldsymbol{v}_O|^2 = L^2\dot\varphi^2\,.$$

Inoltre

$$T_{\mathcal{S}'} = \frac12\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac12 I_{33}\dot\theta^2\,,$$

ove $\boldsymbol{\sigma}$ *è il tensore d'inerzia in* O, *e* $\boldsymbol{\omega}$ *è la velocità angolare di* $(\boldsymbol{u}_i)$ *rispetto a* $(\boldsymbol{e}_i)$, *cosicché*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot\theta(t)\boldsymbol{e}_3\,.$$

R.
$$T = \frac{1}{2} ML^2 \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} I_{33} \dot\theta^2 \,.$$

10. [19/7/2007 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere l'estremo A sulla curva
$$\begin{aligned} x_1 &= R\varphi\cos\varphi \,, \\ x_2 &= R\varphi\sin\varphi \,, \\ x_3 &= h\varphi \,, \end{aligned}$$
ove $0 < \varphi < \infty$. Qui R e h sono costanti positive.
Inoltre $\overrightarrow{AB}/2L$ si mantiene coincidente con
$$(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \,.$$
Si calcoli l'energia cinetica di AB in funzione di opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione
Scegliamo il parametro φ corrispondente alla posizione di A come coordinata lagrangiana.
Una parametrizzazione di AB è
$$\overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}(s) = (R\varphi\cos\varphi, R\varphi\sin\varphi, h\varphi) + s(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \,,$$
per $0 \le s \le 2L$. Perciò
$$\boldsymbol{v}(s) = [R\varphi\dot\varphi + s\dot\varphi](-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) + \dot\varphi(R\cos\varphi, R\sin\varphi, h) \,.$$
Dunque
$$|\boldsymbol{v}(s)|^2 = \dot\varphi^2[(R\varphi + s)^2 + R^2 + h^2] \,,$$
e
$$T^{\mathrm{L}}(\varphi, \dot\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^{2L} \frac{m}{2L} \dot\varphi^2 [(R\varphi + s)^2 + R^2 + h^2] \,\mathrm{d}s = \frac{m}{4L}\dot\varphi^2 \Big[\frac{1}{3}(R\varphi + 2L)^3 + (R^2 + h^2)2L - \frac{1}{3}R^3\varphi^3\Big] \,.$$
R.
$$T^{\mathrm{L}}(\varphi, \dot\varphi) = \frac{m}{4L}\dot\varphi^2 \Big[\frac{1}{3}(R\varphi + 2L)^3 + (R^2 + h^2)2L - \frac{1}{3}R^3\varphi^3\Big] \,.$$

11. [19/7/2007 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere il centro G sulla curva
$$\begin{aligned} x_1 &= R\varphi\cos\varphi \,, \\ x_2 &= R\varphi\sin\varphi \,, \\ x_3 &= h\varphi \,, \end{aligned}$$

ove $0 < \varphi < \infty$. Qui R e h sono costanti positive.
Inoltre $\overrightarrow{AB}/2L$ si mantiene coincidente con

$$(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\,.$$

Si calcoli l'energia cinetica di AB in funzione di opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$T^{\mathrm{L}}(\varphi,\dot\varphi) = \frac{m}{2L}\dot\varphi^2\Big[\frac{1}{3}(R+L)^3 - \frac{1}{3}(R-L)^3 + 2L(R^2\varphi^2 + h^2)\Big]\,.$$

12. [17/9/2007 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata:

- ad avere il centro M sulla circonferenza di raggio $R > 0$

$$\gamma \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \\ x_3 = 0\,; \end{cases}$$

- a giacere sul piano passante per l'asse x_3 e per il punto M (che è il piano ortogonale a γ in M).

Scrivere l'energia cinetica di AB in opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione
A) Scegliamo come coordinate lagrangiane

1. *l'anomalia polare φ di M nel piano $x_3 = 0$, con $\varphi \in (-\pi,\pi)$;*
2. *l'angolo θ formato da $\overrightarrow{AB}$ con il piano $x_3 = 0$, con $\theta \in (-\pi,\pi)$ (per la precisione θ è tale che $\overrightarrow{AB}\cdot \boldsymbol{e}_3 = 2L\sin\theta$).*

Quindi

$$\overrightarrow{OM} = R(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,,$$

e per un generico punto P di AB

$$\overrightarrow{MP} = s(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)\,, \qquad -L \le s \le L\,.$$

Dunque

$$\overrightarrow{OP} = \big(\cos\varphi(R + s\cos\theta), \sin\varphi(R + s\cos\theta), s\sin\theta\big)\,,$$

e

$$\boldsymbol{v}_P = \dot\varphi(R + s\cos\theta)(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) + s\dot\theta(-\cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)\,.$$

Quindi

$$|\boldsymbol{v}_P|^2 = \dot\varphi^2(R + s\cos\theta)^2 + s^2\dot\theta^2\,,$$

cosicché

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \frac{m}{2L}|\boldsymbol{v}_P|^2\,\mathrm{d}s = \frac{m}{2}\dot\varphi^2\Big(R^2 + \frac{L^2}{3}\cos^2\theta\Big) + \frac{m}{6}L^2\dot\theta^2\,.$$

B) In alternativa, l'energia cinetica si può calcolare con il teorema di König

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}_M|^2 + T_{\mathcal{S}} \,,$$

ove $T_{\mathcal{S}}$ è l'energia cinetica di AB nel sistema di riferimento $\mathcal{S} = (M, \boldsymbol{e}_i)$. Quindi

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \frac{m}{2L} |\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}P}|^2 \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \frac{m}{2L} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \overrightarrow{MP}(s) \right|^2 \mathrm{d}s = \frac{m}{6} L^2 (\dot{\varphi}^2 \cos^2\theta + \dot{\theta}^2) \,.$$

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2} \dot{\varphi}^2 \Big(R^2 + \frac{L^2}{3} \cos^2\theta \Big) + \frac{m}{6} L^2 \dot{\theta}^2 \,.$$

13. [17/9/2007 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata:

- ad avere l'estremo A sulla circonferenza di raggio $R > 0$

$$\gamma \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \\ x_3 = 0 \,; \end{cases}$$

- a giacere sul piano passante per l'asse x_3 e per il punto A (che è il piano ortogonale a γ in A).

Scrivere l'energia cinetica di AB in opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$T^{\mathrm{L}} = m \dot{\varphi}^2 \Big(\frac{1}{2} R^2 + \frac{2L^2}{3} \cos^2\theta + RL\cos\theta \Big) + \frac{2m}{3} L^2 \dot{\theta}^2 \,.$$

14. [13/12/2007 (ex)I] Un cilindro C di massa M, raggio R e altezza h in un sistema di riferimento solidale è descritto da

$$C = \{(x, y, z) \mid (x - R)^2 + y^2 \le R^2 \,, 0 \le z \le h\} \,.$$

Il cilindro è vincolato a mantenere i due punti $Q_1 = (0,0,0)$ e $Q_2 = (0,0,h)$ fissi su un asse fisso r (e quindi a ruotare intorno a r).
Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sulla circonferenza

$$\gamma = \{(x, y, z) \mid (x - R)^2 + y^2 = R^2 \,, z = 0\} \,,$$

bordo della base del cilindro.
Scrivere l'energia cinetica del sistema.
Soluzione
A) Scegliamo il sistema di riferimento fisso in modo che $\boldsymbol{e}_3$ giaccia su r,

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{h} \overrightarrow{Q_1 Q_2} \,.$$

Inoltre sia $O = Q_1$, e denotiamo con A il centro della base $z = 0$ del cilindro. Introduciamo anche l'angolo φ formato da $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{u}_1$, ponendo $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t. Allora l'energia cinetica del cilindro sarà

$$T_C = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_O(\dot\varphi\boldsymbol{e}_3)\cdot(\dot\varphi\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{2}I_{33}\dot\varphi^2\,,$$

ove I_{33} è il momento d'inerzia del cilindro rispetto a r.
B) Nel sistema di riferimento $(O, \boldsymbol{u}_i)$ solidale, si ha, per P, definito θ come l'angolo tra $\boldsymbol{u}_1$ e $\overrightarrow{AP}$,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = (R + R\cos\theta)\boldsymbol{u}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{u}_2\,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = -R\dot\theta\sin\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot\theta\cos\theta\boldsymbol{u}_2\,.$$

Inoltre la velocità $\boldsymbol{v}_P$ nel sistema fisso è data da

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_P &= \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AP} + \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\omega}\times(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}) + \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}\\ &= \dot\varphi\boldsymbol{e}_3\times\big[(R + R\cos\theta)\boldsymbol{u}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{u}_2\big] - R\dot\theta\sin\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot\theta\cos\theta\boldsymbol{u}_2\\ &= -R(\dot\varphi + \dot\theta)\sin\theta\boldsymbol{u}_1 + \big[R(\dot\varphi + \dot\theta)\cos\theta + R\dot\varphi\big]\boldsymbol{u}_2\,.\end{aligned}$$

Infine

$$T_P = \frac{1}{2}mR^2(\dot\varphi + \dot\theta)^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2 + mR^2\dot\varphi(\dot\varphi + \dot\theta)\cos\theta\,.$$

R.

$$T = \frac{1}{2}I_{33}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot\varphi + \dot\theta)^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2 + mR^2\dot\varphi(\dot\varphi + \dot\theta)\cos\theta\,.$$

15. [13/12/2007 (ex)II] Un cilindro C di massa M, raggio R e altezza h in un sistema di riferimento solidale è descritto da

$$C = \{(x, y, z) \mid (x - R)^2 + y^2 \le R^2\,, 0 \le z \le h\}\,.$$

Il cilindro è vincolato a mantenere i due punti $Q_1 = (0,0,0)$ e $Q_2 = (0,0,h)$ fissi su un asse fisso r (e quindi a ruotare intorno a r).
Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sulla circonferenza

$$\gamma = \{(x, y, z) \mid (x - R)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}\,, z = h\}$$

(circonferenza che quindi è solidale con il cilindro).
Scrivere l'energia cinetica del sistema.
R.

$$T = \frac{1}{2}I_{33}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m\frac{R^2}{4}(\dot\varphi + \dot\theta)^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot\varphi(\dot\varphi + \dot\theta)\cos\theta\,.$$

16. [1/4/2008 (ex)I] Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata:

- ad avere il centro C appartenente alla sfera di centro l'origine O e di raggio $R > 0$;
- a essere ortogonale alla sfera stessa.

Calcolarne l'energia cinetica in funzione di opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
Il sistema ha 2 gradi di libertà. Scegliamo come coordinate lagrangiane le coordinate polari del centro C dell'asta:

$$\begin{aligned} x_{1C} &= R\cos\varphi\sin\theta\,, \\ x_{2C} &= R\sin\varphi\sin\theta\,, \\ x_{3C} &= R\cos\theta\,, \end{aligned}$$

con

$$-\pi < \varphi < \pi\,, \qquad 0 < \theta < \pi\,.$$

La parametrizzazione dell'asta sarà dunque per $s \in [-L, L]$

$$\overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OC} + s\frac{\overrightarrow{OC}}{R} = (R+s)(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)\,,$$

per cui

$$|\boldsymbol{v}(s)|^2 = (R+s)^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta)\,.$$

Quindi

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\frac{m}{2L}(R+s)^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta)\,\mathrm{d}s = \frac{m}{6}(3R^2 + L^2)(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta)\,.$$

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{6}(3R^2 + L^2)(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta)\,.$$

17. [18/7/2008 (ex)I] Una circonferenza γ di centro O, raggio R e massa M è vincolata a ruotare intorno a un proprio diametro AB, che giace su un asse fisso. Anche i punti A e B sono solidali con γ e fissi.
Un'asta CD di lunghezza L e massa m è vincolata ad avere l'estremo C sulla circonferenza, e a mantenersi parallela ad AB (il che implica che CD giace sul piano di γ).
Scrivere l'energia cinetica del sistema in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
Scegliamo come prima coordinata lagrangiana l'angolo φ formato dal piano della circonferenza con la direzione fissa $\boldsymbol{e}_1$, avendo scelto il sistema di riferimento fisso in modo che l'origine sia il centro della circonferenza, e $\boldsymbol{e}_3$ sia parallelo ad $\overrightarrow{AB}$. Allora

$$T^{\mathrm{L}}_{\gamma} = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2\,,$$

ove I è il momento di γ rispetto all'asse per AB.

Scegliamo poi come seconda coordinata lagrangiana l'angolo θ formato da $\overrightarrow{OC}$ e il diametro ortogonale ad $\overrightarrow{AB}$. Allora, nel sistema fisso, ogni P sull'asta è dato da

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = R\cos\theta(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2) + (R\sin\theta + s)\boldsymbol{e}_3 \,,$$

per $0 \leq s \leq L$.
Dunque

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_P = {} & R(-\dot\theta\sin\theta\cos\varphi - \dot\varphi\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 \\ & + R(-\dot\theta\sin\theta\sin\varphi + \dot\varphi\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2 \\ & + R\dot\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_3 \,.\end{aligned}$$

Perciò

$$|\boldsymbol{v}_P|^2 = R^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\cos^2\theta) \,,$$

e quindi

$$T^{\mathrm{L}}_{\text{asta}} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{m}{L} R^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\cos^2\theta)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}mR^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\cos^2\theta) \,.$$

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\cos^2\theta) \,.$$

18. [18/7/2008 (ex)II] Una circonferenza γ di centro O, raggio R e massa M è vincolata a ruotare intorno a un proprio diametro AB, che giace su un asse fisso. Anche i punti A e B sono solidali con γ e fissi.
Un'asta CD di lunghezza L e massa m è vincolata ad avere l'estremo C sulla circonferenza, a giacere sul piano di γ, e a mantenersi ortogonale ad AB.
Scrivere l'energia cinetica del sistema in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mR(R\dot\theta^2 + R\dot\varphi^2\cos^2\theta + L\dot\varphi^2\cos\theta) + \frac{1}{6}mL^2\dot\varphi^2 \,.$$

19. [12/2/2009 (ex)I] Un disco di raggio L e massa m è così vincolato:

- il suo centro C appartiene alla curva

  $$\boldsymbol{\psi}(s) = \big(R\cos\lambda s \,, R\sin\lambda s \,, h\lambda s\big) \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,.$$

  Qui s è la lunghezza d'arco, $\lambda = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, e R, $h > 0$ sono costanti.

- la normale al disco coincide con la binormale $\boldsymbol{B}$ alla curva.

Si calcoli il momento delle quantità di moto del disco rispetto a C in funzione di due opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE

Si scelgano come coordinate lagrangiane

$$z \in \boldsymbol{R}, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi),$$

tali che $\boldsymbol{X}_C = \boldsymbol{\psi}(z)$ *e, indicando con* $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ *la terna intrinseca della curva* $\boldsymbol{\psi}$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{T} + \sin\varphi \boldsymbol{N}, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi \boldsymbol{T} + \cos\varphi \boldsymbol{N}, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{B}. \end{aligned}$$

Qui $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ *è una terna solidale con il disco. Il momento delle quantità di moto del disco è*

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\sigma\omega},$$

ove $\boldsymbol{\sigma}$ *è calcolata in* C *e* $\boldsymbol{\omega}$ *è la velocità angolare del disco rispetto alla terna fissa. Per calcolare* $\boldsymbol{\omega}$ *usiamo la formula*

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}},$$

ove $\mathcal{P}$ *è la terna fissa e* $\mathcal{N} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$. *Si sa che*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = -\tau\dot{z}\boldsymbol{T}(z) + k\dot{z}\boldsymbol{B}(z) = \lambda^2\dot{z}[h\boldsymbol{T}(z) + R\boldsymbol{B}(z)].$$

Infatti la seconda uguaglianza segue dai calcoli:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(s) &= \lambda\big(-R\sin\lambda s, R\cos\lambda s, h\big), \\ \boldsymbol{N}(s) &= -\big(\cos\lambda s, \sin\lambda s, 0\big), \\ \boldsymbol{B}(s) &= \lambda\big(h\sin\lambda s, -h\cos\lambda s, R\big), \end{aligned}$$

da cui

$$k(s) = \lambda^2 R, \qquad \tau(s) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N} = -\lambda^2 h.$$

Poi si ha $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{B}$. *Dunque*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \lambda^2\dot{z}h\boldsymbol{T}(z) + (\lambda^2\dot{z}R + \dot{\varphi})\boldsymbol{B}(z) \\ &\qquad = \lambda^2\dot{z}h\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 - \lambda^2\dot{z}h\sin\varphi\boldsymbol{u}_2 + (\lambda^2\dot{z}R + \dot{\varphi})\boldsymbol{u}_3. \end{aligned}$$

La matrice di $\boldsymbol{\sigma}$ *in* $\mathcal{M}$ *è, per motivi di simmetria,*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{diag}(I_{11}, I_{11}, 2I_{11}).$$

R.

$$\boldsymbol{L} = I_{11}\lambda^2\dot{z}h\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 - I_{11}\lambda^2\dot{z}h\sin\varphi\boldsymbol{u}_2 + 2I_{11}(\lambda^2\dot{z}R + \dot{\varphi})\boldsymbol{u}_3.$$

20. [12/2/2009 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- ad avere l'estremo A nell'origine O;
- ad avere l'estremo B sulla curva

  $$\boldsymbol{\psi}(s) = \big(\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)\big), \qquad s \in (a, b),$$

  ove s è l'ascissa curvilinea.

Determinare l'energia cinetica dell'asta in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana.
SOLUZIONE
Parametrizziamo l'asta mediante

$$\overrightarrow{OP}(z) = \frac{z}{2L}\boldsymbol{\psi}(s)\,, \qquad 0 \leq z \leq 2L\,,$$

cosicché

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{z}{2L}\dot{s}\boldsymbol{\psi}'(s)\,,$$

e

$$|\boldsymbol{v}_P|^2 = \frac{z^2\dot{s}^2}{4L^2}\,.$$

Dunque

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2L} \frac{m}{2L}\frac{z^2\dot{s}^2}{4L^2}\,\mathrm{d}z = \frac{m}{16L^3}\frac{8L^3}{3}\dot{s}^2 = \frac{m}{6}\dot{s}^2\,.$$

R.

$$T = \frac{m}{6}\dot{s}^2\,.$$

21. [12/2/2009 (ex)II] Un disco di raggio L e massa m è così vincolato:

- il suo centro C appartiene alla curva

$$\boldsymbol{\psi}(s) = \big(R\sin\lambda s\,, R\cos\lambda s\,, h\lambda s\big)\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$

  Qui s è la lunghezza d'arco, $\lambda = 1/\sqrt{R^2+h^2}$, e R, $h > 0$ sono costanti.

- la normale al disco coincide con la binormale $\boldsymbol{B}$ alla curva.

Si calcoli il momento delle quantità di moto del disco rispetto a C in funzione di due opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$\boldsymbol{L} = I_{11}\lambda^2\dot{z}h\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 - I_{11}\lambda^2\dot{z}h\sin\varphi\boldsymbol{u}_2 + 2I_{11}(\lambda^2\dot{z}R + \dot{\varphi})\boldsymbol{u}_3\,.$$

22. [12/2/2009 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- ad avere l'estremo A nell'origine O;
- ad avere il centro C sulla curva

$$\boldsymbol{\psi}(s) = \big(\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)\big)\,, \qquad s \in (a,b)\,,$$

  ove s è l'ascissa curvilinea.

Determinare l'energia cinetica dell'asta in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana.
R.

$$T = \frac{2}{3} m \dot{s}^2 .$$

23. [12/6/2009 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza L e massa m soddisfa i vincoli

$$\begin{gathered} x_{1A}^2 + x_{2A}^2 - R^2 = 0 ; \\ x_{3A} - x_{3B} = 0 ; \\ x_{1A} x_{2B} - x_{2A} x_{1B} = 0 . \end{gathered}$$

Qui m, L, $R > 0$ sono costanti.
Determinare l'energia cinetica dell'asta in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
Si tratta di un'asta con l'estremo A su una superficie cilindrica (primo vincolo), che si mantiene ortogonale all'asse del cilindro (secondo vincolo), e con direzione radiale (terzo vincolo).
I vincoli non specificano se $\overrightarrow{AB}$ abbia il verso di $(x_{1A}, x_{2A}, 0)$ o il verso opposto; qui supponiamo pertanto che

$$\overrightarrow{AB} = \frac{L}{R}(x_{1A} \boldsymbol{e}_1 + x_{2A} \boldsymbol{e}_2) .$$

Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$\begin{gathered} z = x_{3A} \in \boldsymbol{R} , \\ \varphi \in (-\pi, \pi) \quad \textit{tale che} \quad x_{1A} = R\cos\varphi , \quad x_{2A} = R \sin\varphi . \end{gathered}$$

Dunque l'asta è parametrizzata da

$$\overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}(s) = \\ R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 + s\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + s\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 , \qquad 0 \le s \le L .$$

Perciò

$$\boldsymbol{v}_P^{\mathrm{L}}(z, \varphi; s) = -\dot\varphi(R+s)\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \dot\varphi(R+s)\cos\varphi \boldsymbol{e}_2 + \dot z \boldsymbol{e}_3 ,$$

e

$$|\boldsymbol{v}_P^{\mathrm{L}}|^2 = \dot\varphi^2 (R+s)^2 + \dot z^2 .$$

Dunque

$$T^{\mathrm{L}}(z, \varphi, \dot z, \dot\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{m}{L} [\dot\varphi^2 (R+s)^2 + \dot z^2] \, \mathrm{d}s .$$

R.

$$T^{\mathrm{L}}(z, \varphi, \dot z, \dot\varphi) = \frac{m}{6} \dot\varphi^2 (3R^2 + 3RL + L^2) + \frac{m}{2} \dot z^2 .$$

24. [12/6/2009 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza L e massa m soddisfa i vincoli

$$
\begin{aligned}
x_{1A}^2 + x_{2A}^2 - R^2 = 0\,;\\
x_{3A} - x_{3B} = 0\,;\\
x_{1A}x_{1B} + x_{2A}x_{2B} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Qui m, L, $R > 0$ sono costanti.
Determinare l'energia cinetica dell'asta in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
Si tratta di un'asta con l'estremo A su una superficie cilindrica (primo vincolo); l'asta si mantiene ortogonale all'asse del cilindro (secondo vincolo); sul piano ortogonale all'asse, che contiene l'asta, l'estremo B è sulla retta ortogonale al raggio che unisce l'asse del cilindro ad A e passante per l'asse stesso (terzo vincolo). In altre parole, detto Q il punto intersezione del piano ortogonale all'asse del cilindro su cui giace l'asta con l'asse medesimo, il triangolo QAB costituisce la metà di un rettangolo, di cui l'asta è la diagonale e il punto medio dell'asta G il centro; tale rettangolo si muove solidalmente all'asta.
Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$
\begin{gathered}
z = x_{3A} \in \boldsymbol{R}\,,\\
\varphi \in (-\pi, \pi) \quad \textit{tale che} \quad x_{1A} = R\cos\varphi\,, \quad x_{2A} = R\sin\varphi\,.
\end{gathered}
$$

A) Usiamo il Teorema di König:

$$
T^{\mathrm{L}}(z, \varphi, \dot z, \dot\varphi) = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,,
$$

ove G è il centro dell'asta, $\boldsymbol{\sigma}$ è calcolata in G, e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare dell'asta rispetto alla terna fissa. Visto che, per i vincoli, la distanza di G dall'asse del cilindro è sempre uguale a $L/2$, si ha

$$
\boldsymbol{v}_G = [\boldsymbol{v}_G]_\parallel + [\boldsymbol{v}_G]_\perp\,, \qquad [\boldsymbol{v}_G]_\parallel = \dot z\boldsymbol{e}_3\,, \quad |[\boldsymbol{v}_G]_\perp| = \frac{L}{2}|\dot\varphi|\,.
$$

Poi,

$$
\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\boldsymbol{e}_3\,.
$$

Perciò

$$
T^{\mathrm{L}}(z, \varphi, \dot z, \dot\varphi) = \frac{1}{2}m\Big(\frac{L^2}{4}\dot\varphi^2 + \dot z^2\Big) + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2\,,
$$

ove I denota il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse ortogonale in G.
B) In alternativa, usiamo la definizione di energia cinetica.
I vincoli non specificano se l'anomalia polare di B sia maggiore o minore di quella di A. Qui supponiamo pertanto che

$$
\overrightarrow{AB} = L(\cos(\varphi + \theta_0 - \pi)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\varphi + \theta_0 - \pi)\boldsymbol{e}_2)\,,
$$

ove

$$
\theta_0 = \arccos\frac{R}{L}\,.
$$

Osserviamo anche che l'altra scelta possibile sarebbe stata

$$\overrightarrow{AB} = L(\cos(\varphi - \theta_0 + \pi)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\varphi - \theta_0 + \pi)\boldsymbol{e}_2)\,.$$

Dunque l'asta è parametrizzata da

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}(s) = \\ &R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 - s\cos(\varphi+\theta_0)\boldsymbol{e}_1 - s\sin(\varphi+\theta_0)\boldsymbol{e}_2\,, \qquad 0 \le s \le L\,.\end{aligned}$$

Perciò

$$\boldsymbol{v}_P^{\mathrm{L}}(z,\varphi;s) = \dot\varphi(-R\sin\varphi + s\sin(\varphi+\theta_0))\boldsymbol{e}_1 + \dot\varphi(R\cos\varphi - s\cos(\varphi+\theta_0))\boldsymbol{e}_2 + \dot z\boldsymbol{e}_3\,,$$

e

$$|\boldsymbol{v}_P^{\mathrm{L}}|^2 = \dot\varphi^2(R^2 + s^2 - 2Rs\cos\theta_0) + \dot z^2\,.$$

Dunque

$$T^{\mathrm{L}}(z,\varphi,\dot z,\dot\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{m}{L}[\dot\varphi^2(R^2 + s - 2Rs\cos\theta_0) + \dot z^2]\,\mathrm{d}s\,.$$

R.

$$T^{\mathrm{L}}(z,\varphi,\dot z,\dot\varphi) = \frac{m}{6}L^2\dot\varphi^2 + \frac{m}{2}\dot z^2\,.$$

25. [15/7/2009 (ex)I] Una sfera solida di raggio R e massa M è vincolata:

- ad avere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso;
- ad avere il punto solidale A mobile con equazione assegnata

$$\overrightarrow{OA} = R(a\cos ct\boldsymbol{e}_1 + a\sin ct\boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_3)\,.$$

Qui a, b, c sono costanti positive tali che $a^2 + b^2 = 1$.
Determinare l'energia cinetica della sfera in funzione di una opportuna coordinata lagrangiana.

Soluzione

Si tratta di una sfera vincolata a ruotare intorno a un asse mobile assegnato. Dunque ha in effetti un solo grado di libertà.
Visto che il moto è di precessione, si ha

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Si tratta perciò di trovare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ della sfera. Consideriamo un sistema di riferimento mobile $\Sigma = (O, \boldsymbol{w}_i)$, con $\boldsymbol{w}_3$ diretto lungo l'asse mobile, ossia per esempio

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}_1 &= -\sin ct\boldsymbol{e}_1 + \cos ct\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{w}_2 &= -b\cos ct\boldsymbol{e}_1 - b\sin ct\boldsymbol{e}_2 + a\boldsymbol{e}_3\,,\\ \boldsymbol{w}_3 &= a\cos ct\boldsymbol{e}_1 + a\sin ct\boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

Sia poi $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con la sfera, con

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{w}_3 \,.$$

Il moto di $\mathcal{S}$ rispetto a Σ perciò non può essere che una rotazione intorno all'asse comune $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{w}_3$; sia

$$\varphi \in (-\pi, \pi)$$

l'angolo che misura questa rotazione. Indichiamo anche $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_i)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$. Allora, per il teorema sulla composizione di velocità angolari,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \,,$$

ove per quanto sopra

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot\varphi \boldsymbol{u}_3 = \dot\varphi \boldsymbol{w}_3 \,.$$

Infine $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}}$ si trova con un calcolo esplicito: posto

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \boldsymbol{w}_i \,,$$

si sa che:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_2}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{w}_3 = (bc \sin ct \boldsymbol{e}_1 - bc \cos ct \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{w}_3 \\
&= abc \sin ct \cos ct - abc \cos ct \sin ct = 0 \,, \\
\omega_2 &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_3}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{w}_1 = (-ac \sin ct \boldsymbol{e}_1 + ac \cos ct \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{w}_1 = ac \,, \\
\omega_3 &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{w}_2 = (-c \cos ct \boldsymbol{e}_1 - c \sin ct \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{w}_2 = bc \,.
\end{aligned}$$

Perciò

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = ac \boldsymbol{w}_2 + (bc + \dot\varphi) \boldsymbol{w}_3 \,.$$

Si noti che, per le proprietà di simmetria della sfera, nonostante che $\mathcal{N}$ non sia solidale, la matrice di $\boldsymbol{\sigma}$ in $\mathcal{N}$ è

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{N}} = \mathrm{diag}(I, I, I) \,,$$

ove I indica il momento diametrale della sfera. Dunque

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}(0, ac, bc+\dot\varphi) \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} 0 \\ ac \\ bc + \dot\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I [a^2 c^2 + (bc+\dot\varphi)^2] = \frac{1}{2} I [c^2 + 2bc\dot\varphi + \dot\varphi^2] \,.$$

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} I [c^2 + 2bc\dot\varphi + \dot\varphi^2] \,.$$

26. [15/7/2009 (ex)I] Un disco di raggio R e massa M è vincolato:

- ad avere il centro C sull'asse fisso x_3;

- a mantenersi sempre ortogonale all'asse x_3.

Scrivere il momento della quantità di moto $\boldsymbol{L}_O$ del disco rispetto all'origine O, in funzione di opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione
Il disco ha due gradi di libertà. Scegliamo come coordinate lagrangiane la coordinata $z = x_3$ del centro C del disco, con $z \in \boldsymbol{R}$, e un angolo φ che misuri la rotazione del disco intorno a $\boldsymbol{e}_3$; per esempio se $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$ indica un sistema di riferimento solidale con il disco, si ponga

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$.
Allora, come è noto,

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma\omega} + M\overrightarrow{OC} \times [\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CO}] = \boldsymbol{\sigma\omega} \,,$$

perché i tre vettori

$$\overrightarrow{OC} = z\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{v}_C = \dot{z}\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3 \,,$$

sono paralleli. Dunque

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma\omega} = I_{33}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 \,,$$

dato che la $(\boldsymbol{u}_i)$ è principale d'inerzia.
R.

$$\boldsymbol{L}_O = I_{33}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

27. [15/7/2009 (ex)II] Una sfera solida di raggio R e massa M è vincolata:

- ad avere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso;
- ad avere il punto solidale A mobile con equazione assegnata

$$\overrightarrow{OA} = \frac{R}{2}(a \sin ct\boldsymbol{e}_1 + a\cos ct\boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_3) \,.$$

Qui a, b, c sono costanti positive tali che $a^2 + b^2 = 1$.
Determinare l'energia cinetica della sfera in funzione di una opportuna coordinata lagrangiana.
R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} I[c^2 + 2bc\dot{\varphi} + \dot{\varphi}^2] \,.$$

28. [15/7/2009 (ex)II] Un disco di raggio R e massa M è vincolato:

- ad avere il centro C sull'asse fisso x_1;
- a mantenersi sempre ortogonale all'asse x_1.

Scrivere il momento della quantità di moto $\boldsymbol{L}_A$ del disco rispetto al punto A tale che $\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_1$, in funzione di opportune coordinate lagrangiane. Qui O è l'origine del sistema di riferimento.
R.

$$\boldsymbol{L}_A = I_{11}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_1 \,.$$

29. [11/9/2009 (ex)I] Una lamina rettangolare $ABCD$ di massa M e lati

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = a \,, \qquad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = b \,,$$

è vincolata ad avere il lato $\overrightarrow{AD}$ sull'asse mobile r definito da

$$x_1 = L\cos\omega t \,, \qquad x_2 = L\sin\omega t \,, \qquad x_3 \in \boldsymbol{R} \,.$$

Supponiamo anche che

$$x_{3A} = 0 \,, \qquad x_{3D} = b \,.$$

Calcolare l'energia cinetica della lamina nel sistema fisso (O, x_i).
SOLUZIONE
A) Usiamo il teorema di König:

$$T = \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_G|^2 + T_{\mathcal{S}} \,,$$

ove $T_{\mathcal{S}}$ è l'energia cinetica nel sistema di riferimento $\mathcal{S} = (G, \boldsymbol{e}_i)$, e G è il centro di massa della lamina.
Indichiamo con $\varphi \in (-\pi, \pi)$ l'angolo tale che

$$\overrightarrow{OG} = L\cos\omega t\boldsymbol{e}_1 + L\sin\omega t\boldsymbol{e}_2 + \frac{a}{2}\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \frac{a}{2}\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + \frac{b}{2}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Si noti che φ è l'angolo che misura la rotazione della lamina nel sistema fisso.
Dunque, se I denota il momento d'inerzia della lamina rispetto alla retta per G parallela a AD,

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 \,,$$

e

$$\boldsymbol{v}_G = \Big(-L\omega\sin\omega t - \frac{a}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\Big)\boldsymbol{e}_1 + \Big(L\omega\cos\omega t + \frac{a}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\Big)\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Allora

$$|\boldsymbol{v}_G|^2 = L^2\omega^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\varphi}^2 + L\omega a\dot{\varphi}\cos(\omega t - \varphi) \,.$$

R.

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\big(L^2\omega^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\varphi}^2 + L\omega a\dot{\varphi}\cos(\omega t - \varphi)\big) \,.$$

30. [11/9/2009 (ex)II] Una lamina quadrata $ABCD$ di massa M e lato b è vincolata ad avere il lato $\overrightarrow{AD}$ sull'asse mobile r definito da

$$x_1 = L\cos\omega t\,, \qquad x_2 = L\sin\omega t\,, \qquad x_3 \in \boldsymbol{R}\,.$$

Supponiamo anche che

$$x_{3A} = b\,, \qquad x_{3D} = 2b\,.$$

Calcolare l'energia cinetica della lamina nel sistema fisso (O, x_i).
R.

$$T = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}M\bigl(L^2\omega^2 + \frac{b^2}{4}\dot\varphi^2 + L\omega b\dot\varphi\cos(\omega t - \varphi)\bigr)\,.$$

31. [20/11/2009 (ex)I] Una lamina quadrata di massa M e lato $2L$ è vincolata a ruotare intorno all'asse mobile r

$$x_1\cos\alpha t + x_2\sin\alpha t = R\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

in modo che r coincida con l'asse comune di due lati opposti della lamina. Il centro C della lamina occupa su r la posizione

$$\overrightarrow{OC} = R(\cos\alpha t\boldsymbol{e}_1 + \sin\alpha t\boldsymbol{e}_2)\,.$$

Calcolare in funzione delle opportune coordinate lagrangiane il momento delle quantità di moto della lamina, rispetto all'origine del sistema di riferimento fisso.
Soluzione
Introduciamo la coordinata lagrangiana $\varphi \in (-\pi, \pi)$ che misura la rotazione della lamina intorno a r. In particolare, sia $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema solidale con la lamina, dato da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= -\sin\alpha t\boldsymbol{e}_1 + \cos\alpha t\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 = -\cos\alpha t\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 - \sin\alpha t\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \cos\varphi\boldsymbol{w}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_3 = \cos\varphi\cos\alpha t\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\sin\alpha t\boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Qui $\boldsymbol{w}_1$ è il versore nel piano $x_3 = 0$ ortogonale a r, e φ è quindi l'angolo formato dalla lamina con $\boldsymbol{e}_3$; la direzione solidale $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale alla lamina, e la $\boldsymbol{u}_1$ è diretta lungo r.
Dunque in questa terna si ha

$$\overrightarrow{OC} = R(-\sin\varphi\boldsymbol{u}_2 + \cos\varphi\boldsymbol{u}_3)\,, \qquad \boldsymbol{v}_C = R\alpha\boldsymbol{u}_1\,.$$

Per calcolare la velocità $\boldsymbol{v}_P$ di un generico punto della lamina usiamo la scomposizione

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}\,, \qquad \overrightarrow{CP} = s_1\boldsymbol{u}_1 + s_2\boldsymbol{u}_2\,,$$

ove s_1, $s_2 \in [-L, L]$ sono i parametri della lamina. Con calcoli elementari che usano la forma esplicita ricavata sopra per i $\boldsymbol{u}_h$ si ottiene

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_C + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{CP}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_C - \alpha s_1 \frac{\overrightarrow{OC}}{R} - \alpha s_2 \sin\varphi \boldsymbol{u}_1 - \dot{\varphi} s_2 \boldsymbol{u}_3 \,.$$

Usando quindi le scomposizioni appena trovate di $\overrightarrow{OC}$ e $\boldsymbol{v}_P$ nella terna $(\boldsymbol{u}_h)$ si calcola:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{v}_P &= (R^2\alpha - R\alpha s_2 \sin\varphi + \alpha s_1^2)(\sin\varphi \boldsymbol{u}_3 + \cos\varphi \boldsymbol{u}_2) \\ &+ (R\dot{\varphi} s_2 \sin\varphi - \alpha s_1 s_2 \cos\varphi - s_2^2 \dot{\varphi})\boldsymbol{u}_1 \\ &+ s_1 s_2 \dot{\varphi} \boldsymbol{u}_2 + (\alpha s_2^2 \sin\varphi - R\alpha s_2)\boldsymbol{u}_3 \,.\end{aligned}$$

Quindi il momento cercato si trova integrando

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_O &= \iint_{[-L,L]^2} [\overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{v}_P] \frac{M}{4L^2} \,\mathrm{d}s_1 \,\mathrm{d}s_2 \\ &= M\alpha\Big(R^2 + \frac{L^2}{3}\Big)(\sin\varphi \boldsymbol{u}_3 + \cos\varphi \boldsymbol{u}_2) \\ &\quad + M\alpha \frac{L^2}{3} \sin\varphi \boldsymbol{u}_3 - M\frac{L^2}{3}\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 \,.\end{aligned}$$

Il calcolo dell'integrale è immediato, e semplificato dall'osservazione che tutti i termini dispari nei parametri s_1, s_2 si annullano per la simmetria del dominio.
R.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_O &= M\alpha\Big(R^2 + \frac{L^2}{3}\Big)\boldsymbol{e}_3 \\ &+ M\alpha\frac{L^2}{3}\sin\varphi(\cos\varphi\cos\alpha t \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \sin\alpha t \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_3) \\ &- M\frac{L^2}{3}(-\sin\alpha t \boldsymbol{e}_1 + \cos\alpha t \boldsymbol{e}_2) \,.\end{aligned}$$

32. [25/1/2010 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di massa M e lato $2R$ è vincolata a giacere sul piano fisso $x_3 = 0$, mantenendo il lato AB sull'asse x_1 e rimanendo nel semipiano $x_2 > 0$.
Un'asta EF di lunghezza $2L$ e di massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, e ad avere l'estremo E coincidente con il centro K della lamina.
Si calcoli l'energia cinetica del sistema in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
Il sistema ha due gradi di libertà. Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1K} \in \boldsymbol{R} \,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi) \,,$$

tali che, posto $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{EF}/(2L)$, si abbia

$$\boldsymbol{u} = \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Calcoliamo a parte le energie della lamina e dell'asta.
Per il teorema di König

$$T^{\mathrm{L}}_{ABCD} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \,.$$

Sempre per il teorema di König

$$T^{\mathrm{L}}_{EF} = \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \,,$$

ove G è il centro di massa dell'asta. Si ha poi

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OK} + L\boldsymbol{u} = (L\cos\varphi + x)\boldsymbol{e}_1 + (L\sin\varphi + R)\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{v}_G = (-L\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{x})\boldsymbol{e}_1 + L\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Perciò

$$T^{\mathrm{L}}_{EF} = \frac{1}{2} m (L^2\dot{\varphi}^2 - 2L\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi + \dot{x}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \,.$$

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (L^2\dot{\varphi}^2 - 2L\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi + \dot{x}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \,.$$

33. [25/1/2010 (ex)II] Una lamina quadrata $ABCD$ di massa M e lato $2R$ è vincolata a giacere sul piano fisso $x_3 = 0$, mantenendo il lato AB sull'asse x_1 e rimanendo nel semipiano $x_2 < 0$.
Un'asta EF di lunghezza $2L$ e di massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, e ad avere l'estremo E coincidente con il vertice C della lamina.
Si calcoli l'energia cinetica del sistema in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (L^2\dot{\varphi}^2 - 2L\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi + \dot{x}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \,.$$

34. [22/2/2010 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di raggio R, centro C e massa M è vincolata ad avere il centro sulla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos\varphi \,, \\ x_2 &= R\sin\varphi \,, \\ x_3 &= h\varphi \,, \end{aligned}$$

ove $-\infty < \varphi < \infty$ e h, R sono costanti positive. Inoltre la circonferenza è vincolata a giacere sul piano osculatore alla curva, ossia sul piano che ha normale $\boldsymbol{B}$.
Determinare l'energia cinetica di γ in funzione di opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione

Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$\psi \in \boldsymbol{R}, \qquad \theta \in (-\pi, \pi),$$

ove θ *è l'angolo formato da un raggio solidale con* γ *e da* $\boldsymbol{T}$, *mentre* ψ *è tale che*

$$\overrightarrow{OC} = (R\cos\psi, R\sin\psi, h\psi).$$

Sull'elica si ha con calcoli usuali che l'ascissa d'arco è data da

$$s = \lambda^{-1}\varphi, \qquad \lambda := (R^2 + h^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Inoltre la terna intrinseca e è data da

$$\boldsymbol{T} = \lambda(-R\sin(\lambda s), R\cos(\lambda s), h), \qquad \boldsymbol{N} = -(\cos(\lambda s), \sin(\lambda s), 0),$$
$$\boldsymbol{B} = \lambda(h\sin(\lambda s), -h\cos(\lambda s), R),$$

mentre curvatura e torsione sono date da

$$k(s) = \lambda^2 R, \qquad \tau(s) = -\lambda^2 h.$$

Vogliamo determinare l'energia cinetica usando il teorema di König. Parametrizziamo la circonferenza con

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP},$$

ove P *è il punto generico su* γ. *Si ha*

$$\overrightarrow{CP} = R\cos(\theta + \sigma R^{-1})\boldsymbol{T}(s(\psi)) + R\sin(\theta + \sigma R^{-1})\boldsymbol{N}(s(\psi)),$$

ove $0 \le \sigma \le 2\pi R$ *è l'ascissa curvilinea su* γ.
Derivando si ha, posto $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{e}_i)$, *e ricordando le formule di Frenet-Serret,*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(P) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{CP} &= -R\sin(\theta + \sigma R^{-1})(\dot\theta + \lambda R\dot\psi)\boldsymbol{T}(s(\psi)) \\ &+ R\cos(\theta + \sigma R^{-1})(\dot\theta + \lambda R\dot\psi)\boldsymbol{N}(s(\psi)) - \lambda hR\dot\psi\sin(\theta + \sigma R^{-1})\boldsymbol{B}(s(\psi)).\end{aligned}$$

Dunque

$$|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(P)|^2 = R^2(\dot\theta + \lambda R\dot\psi)^2 + \lambda^2 h^2 R^2 \dot\psi^2 \sin^2(\theta + \sigma R^{-1}).$$

Perciò l'energia cinetica relativa a C *di* γ *è*

$$\begin{aligned}T_{\mathcal{S}} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi R} \frac{M}{2\pi R}\Big\{R^2(\dot\theta + \lambda R\dot\psi)^2 + \lambda^2 h^2 R^2 \dot\psi^2 \sin^2(\theta + \sigma R^{-1})\Big\}\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \frac{1}{2}MR^2(\dot\theta + \lambda R\dot\psi)^2 + \frac{1}{4}M\lambda^2 h^2 R^2 \dot\psi^2.\end{aligned}$$

Si ha infine subito

$$\frac{1}{2}M\,|\boldsymbol{v}(C)|^2 = \frac{1}{2}M(R^2 + h^2)\dot\psi^2.$$

R.

$$T = \frac{1}{2}M(R^2 + h^2)\dot\psi^2 + \frac{1}{2}MR^2(\dot\theta + \lambda R\dot\psi)^2 + \frac{1}{4}M\lambda^2 h^2 R^2 \dot\psi^2.$$

35. [22/2/2010 (ex)II] Una circonferenza materiale γ di raggio R, centro C e massa M è vincolata ad avere il centro sulla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos\varphi\,, \\ x_2 &= R\sin\varphi\,, \\ x_3 &= -h\varphi\,, \end{aligned}$$

ove $-\infty < \varphi < \infty$ e h, R sono costanti positive. Inoltre la circonferenza è vincolata a giacere sul piano osculatore alla curva, ossia sul piano che ha normale $\boldsymbol{B}$.
Determinare l'energia cinetica di γ in funzione di opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$T = \frac{1}{2}M(R^2+h^2)\dot\psi^2 + \frac{1}{2}MR^2(\dot\theta+\lambda R\dot\psi)^2 + \frac{1}{4}M\lambda^2h^2R^2\dot\psi^2\,.$$

36. [9/4/2010 (ex)I] Una lamina quadrata rigida omogenea $ABCD$ di massa m e lato $2L$ è vincolata a mantenere il lato AB sulla retta mobile

$$x_2 = R\cos(\alpha t)\,, \qquad x_3 = R\sin(\alpha t)\,,$$

ove (O, x_i) è il sistema di riferimento fisso.
Si esprima l'energia cinetica della lamina, nel sistema di riferimento fisso, in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione
Si potrebbe usare il teorema di König, oppure direttamente la parametrizzazione lagrangiana, come sotto.
Indichiamo con $(A, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con la lamina, ossia

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_3\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_3\,,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_1 \end{aligned}$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Si prende $\boldsymbol{u}_2$ ortogonale alla lamina. Indichiamo anche, per $x \in \boldsymbol{R}$,

$$\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{e}_1 + R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_3\,.$$

Quindi x e φ sono le coordinate lagrangiane.
Allora, se P indica il punto generico sulla lamina, sulla quale introduciamo le coordinate solidali $(s_1, s_3) \in [0,2L] \times [0,2L]$,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = (x+s_3)\boldsymbol{e}_1 + [R\cos(\alpha t) + s_1\cos\varphi]\boldsymbol{e}_2 + [R\sin(\alpha t) + s_1\sin\varphi]\boldsymbol{e}_3\,.$$

Perciò

$$\boldsymbol{v}_P = \dot x\boldsymbol{e}_1 - [\alpha R\sin(\alpha t) + \dot\varphi s_1\sin\varphi]\boldsymbol{e}_2 + [\alpha R\cos(\alpha t) + \dot\varphi s_1\cos\varphi]\boldsymbol{e}_3\,,$$

cosicché

$$|\boldsymbol{v}_P|^2 = \dot x^2 + \alpha^2R^2 + \dot\varphi^2 s_1^2 + 2\alpha\dot\varphi R s_1\cos(\varphi - \alpha t)\,.$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
T^{\mathrm{L}} &= \frac{1}{2}\int_0^{2L}\int_0^{2L}\frac{m}{4L^2}\,|\boldsymbol{v}_P|^2\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_3 \\
&= \frac{m}{4L}\int_0^{2L}[\dot{x}^2+\alpha^2R^2+\dot{\varphi}^2 s_1^2+2\alpha\dot{\varphi}Rs_1\cos(\varphi-\alpha t)]\,\mathrm{d}s_1 \\
&= \frac{m}{4L}\Big[2L(\dot{x}^2+\alpha^2R^2)+\frac{8}{3}L^3\dot{\varphi}^2+4L^2\alpha\dot{\varphi}R\cos(\varphi-\alpha t)\Big]\,.
\end{aligned}
$$

R.

$$
T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{4L}\Big[2L(\dot{x}^2+\alpha^2R^2)+\frac{8}{3}L^3\dot{\varphi}^2+4L^2\alpha\dot{\varphi}R\cos(\varphi-\alpha t)\Big]\,.
$$

37. [8/7/2010 (ex)I] Calcolare in funzione delle opportune coordinate lagrangiane l'energia cinetica di una circonferenza materiale γ di raggio R e massa M.
La circonferenza è vincolata ad avere il centro C su un asse mobile r, a cui inoltre il piano di γ rimane ortogonale in ogni istante. L'asse r ha equazioni

$$
-x_1\sin(\omega t)+x_2\cos(\omega t)=0\,,\qquad x_3=0\,.
$$

Soluzione

Scegliamo come coordinate lagrangiane l'ascissa $s\in\boldsymbol{R}$, misurata su r, del centro C di γ, e un angolo $\theta\in(-\pi,\pi)$ di rotazione di γ intorno a r.
Secondo il teorema di König

$$
T=\frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_C|^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_C\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,,
$$

ove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare di γ rispetto alla terna fissa.
Dato che

$$
\overrightarrow{OC}=s\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1+s\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,,
$$

vale

$$
\boldsymbol{v}_C=\dot{s}(\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1+\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2)+s\omega(-\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1+\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2)\,,
$$

e quindi

$$
|\boldsymbol{v}_C|^2=\dot{s}^2+s^2\omega^2\,.
$$

Troviamo $\boldsymbol{\omega}$ usando il teorema di composizione di velocità angolari. Sia $\mathcal{P}$ la terna fissa, $\mathcal{M}=(\boldsymbol{u}_i)$ una terna solidale con γ, e $\mathcal{N}=(\boldsymbol{w}_i)$ una terna tale che

$$
\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{u}_1=\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1+\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,,\qquad \boldsymbol{w}_3=\boldsymbol{e}_3\,.
$$

In questo modo $\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{u}_1$ è il versore di r. Si ha

$$
\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}}=\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}}+\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}=\omega\boldsymbol{e}_3+\dot{\theta}\boldsymbol{u}_1\,.
$$

In $\mathcal{M}$ si ha

$$
\boldsymbol{\sigma}_C=\operatorname{diag}(2I,I,I)\,.
$$

Inoltre

$$\boldsymbol{e}_3 = \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + \cos\theta \boldsymbol{u}_3 ,$$

e dunque

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\theta \boldsymbol{u}_1 + \omega\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + \omega\cos\theta \boldsymbol{u}_3 ,$$

e

$$\boldsymbol{\sigma}_C \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = 2I\dot\theta^2 + I\omega^2 .$$

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} M(\dot s^2 + s^2\omega^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\omega^2) .$$

38. [7/9/2010 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato L è vincolata ad avere il centro G appartenente alla circonferenza γ

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 , \qquad x_3 = 0 ,$$

e a mantenere la sua normale coincidente con la normale principale a γ. Scrivere l'energia cinetica di $ABCD$ in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

SOLUZIONE

Usiamo il Teorema di König. Si ha

$$T = \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}_G|^2 + T_{\mathcal{S}} .$$

Qui $\mathcal{S} = (G, (\boldsymbol{e}_i))$. *Scegliamo le coordinate lagrangiane* $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in (-\pi, \pi)$, *in modo che*

$$\overrightarrow{OG} = R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 ;$$

ovviamente vale

$$|\boldsymbol{v}_G|^2 = R^2\dot\varphi^2 .$$

Consideriamo poi la terna $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{T} , \qquad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{N} , \qquad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{B} ,$$

ove $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ *è la terna principale di* γ, *e* $\boldsymbol{w}_2$ *quindi è normale alla lamina. Consideriamo anche il sistema solidale con la lamina* $(G, \mathcal{M})$, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$, *ove*

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{w}_2 ,$$

e quindi $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_3$ *appartengono al piano della lamina. Indichiamo con* θ *l'angolo di rotazione di* $\boldsymbol{u}_1$ *intorno a* $\boldsymbol{w}_2$.

Pertanto, indicando con $\mathcal{P}$ *la terna fissa,*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} .$$

Dato che il moto di $\mathcal{N}$ *rispetto a* $\mathcal{P}$ *è una rotazione di asse* $\boldsymbol{e}_3$, *la velocità angolare risulta data da*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = \dot\varphi \boldsymbol{w}_3 = \dot\varphi \boldsymbol{e}_3 .$$

Invece il moto di $\mathcal{M}$ rispetto a $\mathcal{N}$ è una rotazione di asse $\boldsymbol{w}_2$, e quindi

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot{\theta}\boldsymbol{w}_2 = \dot{\theta}\boldsymbol{u}_2 \,.$$

Scomponiamo la matrice d'inerzia $\boldsymbol{\sigma}$ rispetto alla terna $\mathcal{N}$, ottenendo

$$\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{diag}(I, 2I, I) \,,$$

per la simmetria materiale della lamina.
Perciò

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + I\dot{\theta}^2 \,,$$

se I è il momento d'inerzia della lamina in G rispetto all'asse comune di due suoi lati opposti.
R.

$$T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + I\dot{\theta}^2 \,.$$

39. [20/1/2014 (ex)I] Un disco di raggio R e massa M è vincolato a mantenere il centro C sulla retta mobile r di equazione

$$-x_1\sin(\omega t) + x_2\cos(\omega t) = 0 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

ove $\omega > 0$, e l'asse ortogonale in C coincidente con tale retta. In particolare si ha

$$\overrightarrow{OC} = L\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + L\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2 \,,$$

ove O è l'origine del sistema fisso.
Si determini il momento delle quantità di moto del disco rispetto a O, in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione
Introduciamo un sistema di riferimento solidale con il disco $\mathcal{S} = (C, (\boldsymbol{u}_h))$, ove

$$\boldsymbol{u}_3 = \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2$$

è ortogonale al disco e quindi $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ giacciono invece sul piano del disco. Si noti che la $(\boldsymbol{u}_h)$ è principale in C e che

$$\overrightarrow{CO} = -L\boldsymbol{u}_3 \,,$$

e pertanto O è solidale con $\mathcal{S}$, oltre che fisso. Dunque vale come è noto

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}^O\boldsymbol{\omega} \,,$$

ove $\boldsymbol{\omega}$ indica la velocità angolare di $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ rispetto alla terna fissa $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$. Per trovare $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}}$ introduciamo la terna $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ mediante le

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{u}_3 \,, \\
\boldsymbol{w}_2 &= -\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Allora

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \,,$$

e come si sa dato che i due moti relativi sono due rotazioni

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = \omega \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot\varphi \boldsymbol{u}_3 \,.$$

Qui scegliamo come coordinata lagrangiana φ, l'angolo di rotazione del disco intorno al proprio asse.
Si noti che $\mathcal{N}$ è principale d'inerzia per il disco, nel suo centro di massa C e quindi in O, che appartiene a uno degli assi principali centrali. Inoltre per il teorema di Huygens i momenti relativi a $\mathcal{N}$ in O sono

$$I_{22}^O = I_{33}^O = I + ML^2 \,, \qquad I_{11}^O = 2I \,,$$

ove I indica il momento del disco rispetto a un suo diametro. Quindi le componenti di $\boldsymbol{L}_O$ in $\mathcal{N}$ sono date da

$$\begin{pmatrix} 2I & 0 & 0 \\ 0 & I+ML^2 & 0 \\ 0 & 0 & I+ML^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\varphi \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I\dot\varphi \\ 0 \\ (I+ML^2)\omega \end{pmatrix} .$$

R.

$$\boldsymbol{L}_O = 2I\dot\varphi \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + 2I\dot\varphi \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2 + (I+ML^2)\omega \boldsymbol{e}_3 \,.$$

40. [20/1/2014 (ex)II] Una lamina quadrata di lato R e massa M è vincolata a mantenere il centro C sulla retta mobile r di equazione

$$-x_1 \sin(\omega t) + x_2 \cos(\omega t) = 0 \,,$$

ove $\omega > 0$, e l'asse ortogonale in C coincidente con tale retta. In particolare si ha

$$\overrightarrow{OC} = L\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + L\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2 \,,$$

ove O è l'origine del sistema fisso.
Si determini il momento delle quantità di moto della lamina rispetto a O, in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$\boldsymbol{L}_O = 2I\dot\varphi \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + 2I\dot\varphi \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2 + (I+ML^2)\omega \boldsymbol{e}_3 \,.$$

41. [17/2/2014 (ex)I] Un cubo rigido di spigolo L e massa M è vincolato ad avere il centro nell'origine del sistema fisso O e due vertici opposti A e B giacenti sul piano $x_3 = 0$. Qui (x_h) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso, e A e B sono opposti nel senso che

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}L \,.$$

Si calcoli l'energia cinetica del cubo in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

SOLUZIONE

Il moto è polare, con polo il centro del cubo C. L'energia cinetica è quindi data come noto da

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,,$$

ove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare del cubo e $\boldsymbol{\sigma}$ il suo tensore d'inerzia in C.
Per calcolare $\boldsymbol{\omega}$ usiamo il teorema di composizione

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}\,,$$

ove $\mathcal{P}$ è la terna fissa, $\mathcal{M}$ è una terna solidale, e $\mathcal{N}$ è data da

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\,,\qquad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{e}_3\,,\qquad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_3\times\boldsymbol{w}_1\,.$$

Il cubo ha due gradi di libertà; scegliamo come coordinate lagrangiane gli angoli $\varphi\in(-\pi,\pi)$ tali che

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{3}L(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2)\,,$$

e $\theta\in(-\pi,\pi)$ che descriva la rotazione del cubo intorno all'asse $\overrightarrow{AB}$.
I due moti relativi in cui abbiamo scomposto il moto polare del cubo sono entrambi rotazioni e perciò

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = \dot\varphi\boldsymbol{w}_3\,,\qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot\theta\boldsymbol{w}_1\,,$$

e pertanto

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\theta\boldsymbol{w}_1 + \dot\varphi\boldsymbol{w}_3\,.$$

Per le proprietà di simmetria del cubo

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{N}} = \operatorname{diag}(I,I,I)\,,$$

ove I è il momento d'inerzia del cubo rispetto a un qualunque asse per il centro C.

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}I(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2)\,.$$

42. [17/2/2014 (ex)II] Una sfera (piena) rigida di raggio L e massa M è vincolata ad avere il centro nell'origine del sistema fisso O e due punti solidali diametralmente opposti A e B giacenti sul piano $x_3 = 0$. Qui (x_h) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso, e A e B sono opposti nel senso che

$$|\overrightarrow{AB}| = 2L\,.$$

Si calcoli l'energia cinetica della sfera in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}I(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2)\,.$$

43. [19/6/2014 (ex)I] Un sistema olonomo è costituito da due aste AB e CD ciascuna di massa M e lunghezza $2L$, vincolate a giacere nel piano $x_3 = 0$ e ad avere gli estremi B e C coincidenti.
Determinare l'energia cinetica del sistema in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione
Scegliamo come coordinate lagrangiane x, $y \in \boldsymbol{R}$, φ, $\theta \in (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\overrightarrow{OA} &= (x + 2L\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (y + 2L\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\overrightarrow{OD} &= (x + 2L\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (y + 2L\sin\theta)\boldsymbol{e}_2 \,.
\end{aligned}$$

Applichiamo il teorema di König a ciascuna delle due aste, indicando con P_1 [rispettivamente P_2] il centro di massa di AB [rispettivamente di CD]. Dunque

$$\begin{aligned}
T_{AB} &= \frac{1}{2}M|v_{P_1}|^2 + T_{\mathcal{S}}^{AB} = \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_{P_1}|^2 + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 \,, \\
T_{CD} &= \frac{1}{2}M|v_{P_2}|^2 + T_{\mathcal{S}}^{CD} = \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_{P_2}|^2 + \frac{1}{2}I\dot\theta^2 \,.
\end{aligned}$$

Con semplici calcoli si ha poi ad esempio

$$\boldsymbol{v}_{P_1} = (\dot x - L\dot\varphi\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (\dot y + L\dot\varphi\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2 \,.$$

R.

$$\begin{aligned}
T^{\mathrm{L}} = M(\dot x^2 + \dot y^2) + \frac{M}{2}(L^2\dot\varphi^2 &- 2L\dot x\dot\varphi\sin\varphi + 2L\dot y\dot\varphi\cos\varphi \\
&+ L^2\dot\theta^2 - 2L\dot x\dot\theta\sin\theta + 2L\dot y\dot\theta\cos\theta) + \frac{1}{2}I(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2) \,.
\end{aligned}$$

44. [17/7/2014 (ex)I] Un parallelepipedo E di massa M e spigoli di lunghezze a, b, c tutte diverse tra di loro è vincolato ad avere uno degli spigoli di lunghezza a giacente sul piano $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso, con un estremo nell'origine O del sistema.
Si calcoli l'energia cinetica di E in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione
Introduciamo un sistema di riferimento solidale con E, con origine in O. Denotiamo con $\overrightarrow{OA}$ lo spigolo vincolato al piano $x_3 = 0$, e con $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ gli altri due spigoli di estremo O, di lunghezza b e c rispettivamente. La terna solidale sarà allora

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{OA}}{a} \,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{OB}}{b} \,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{OC}}{c} \,,$$

che possiamo assumere positiva senza perdita di generalità.

Scegliamo come coordinate lagrangiane l'angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *tale che*

$$\boldsymbol{u}_1 = \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,,$$

e l'angolo $\theta \in (-\pi, \pi)$ *formato da* $\boldsymbol{u}_3$ *con il piano* $x_3 = 0$*, ossia tale che*

$$\boldsymbol{u}_3 = \sin\theta \boldsymbol{e}_3 + \cos\theta \boldsymbol{w}_2 \,,$$

ove $\boldsymbol{w}_2$ *è l'opportuno versore sul piano* $x_3 = 0$*. In effetti, dato che* $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{w}_2 = 0$*, si ha scegliendo uno dei due segni possibili,*

$$\boldsymbol{w}_2 = -\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Oltre alla terna solidale $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ *e a quella fissa* $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$ *introduciamo la terna* $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$*, ove*

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1 \,, \quad \boldsymbol{w}_2 = -\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2 \,, \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Si sa che la velocità angolare di E *in* $(O, \mathcal{P})$ *è data dalla composizione delle due rotazioni*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot\varphi \boldsymbol{e}_3 + \dot\theta \boldsymbol{w}_1 = \dot\varphi(\sin\theta \boldsymbol{u}_3 - \cos\theta \boldsymbol{u}_2) + \dot\theta \boldsymbol{u}_1 \,,$$

Qui si usano la definizione di $\boldsymbol{\omega}$ *e la*

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{w}_1 = \sin\theta \boldsymbol{w}_2 - \cos\theta \boldsymbol{w}_3 \,.$$

Dunque

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\theta \\ -\dot\varphi\cos\theta \\ \dot\varphi\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot\theta \\ -\dot\varphi\cos\theta \\ \dot\varphi\sin\theta \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}I_{11}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}(I_{22}\cos^2\theta - 2I_{23}\cos\theta\sin\theta + I_{33}\sin^2\theta)\dot\varphi^2 + (I_{13}\sin\theta - I_{12}\cos\theta)\dot\varphi\dot\theta \,.$$

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}I_{11}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}(I_{22}\cos^2\theta - 2I_{23}\cos\theta\sin\theta + I_{33}\sin^2\theta)\dot\varphi^2 + (I_{13}\sin\theta - I_{12}\cos\theta)\dot\varphi\dot\theta \,.$$

45. [10/2/2015 (ex)I] Un disco di massa M e raggio R è vincolato ad avere il centro C sul cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2 \,,$$

e a mantenersi a esso tangente. Qui $L > 0$ è costante e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso.
Calcolare l'energia cinetica del disco in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
Scegliamo come coordinate lagrangiane $\varphi \in (-\pi, \pi)$*,* $z \in \boldsymbol{R}$ *e* $\theta \in (-\pi, \pi)$ *tali che*

$$\overrightarrow{OC} = L\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 \,,$$

e θ misuri la rotazione del disco intorno al suo asse, che per i vincoli imposti ha versore

$$\boldsymbol{u}_1 = \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Per il Teorema di König

$$T = \frac{1}{2} M |\boldsymbol{v}_C|^2 + T_{\mathcal{S}} \,,$$

ove

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \,,$$

con $\boldsymbol{\sigma}$ tensore d'inerzia del disco in C. Per determinare $\boldsymbol{\omega}$ usiamo il teorema di composizione delle velocità angolari:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} \,.$$

Qui $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$ è la terna fissa, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ è la terna solidale al disco, e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ è data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos\varphi \, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{w}_2 &= -\sin\varphi \, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \, \boldsymbol{e}_2 \,, . \\
\boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$

Si ha

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \dot\varphi \boldsymbol{w}_3 \,, \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} = \dot\theta \boldsymbol{w}_1 \,.$$

D'altronde si osserva che $\mathcal{N}$, benché non solidale con il disco, è in ogni istante principale d'inerzia. Dunque se I denota il momento d'inerzia diametrale del disco,

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\theta \\ 0 \\ \dot\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot\theta \\ 0 \\ \dot\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2) \,.$$

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} M (L^2 \dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2} (2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2) \,.$$

46. [10/2/2015 (ex)II] Un disco di massa M e raggio R è vincolato ad avere il centro C sul cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2 \,,$$

e a mantenere il proprio asse tangente al cilindro e ortogonale all'asse x_3. Qui $L > 0$ è costante e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso.
Calcolare l'energia cinetica del disco in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} M (L^2 \dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2} (2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2) \,.$$

47. [2/7/2015 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a mantenere l'estremo A sull'elica circolare γ

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos(\lambda s)\,, \\ x_2 &= R\sin(\lambda s)\,, \\ x_3 &= hs\,, \end{aligned}$$

ove le costanti positive λ, h, R soddisfano $\lambda^2R^2 + h^2 = 1$ cosicché $s \in \boldsymbol{R}$ è l'ascissa curvilinea su γ. Inoltre AB deve mantenersi nel piano Π_A passante per l'asse x_3 e per A.
Scrivere l'energia cinetica di AB nelle opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
Se denotiamo

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (R\cos(\lambda s), R\sin(\lambda s), hs)\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

scegliamo come coordinate $r \in \boldsymbol{R}$ *e* $\varphi \in (-\pi,\pi)$ *tali che* $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{\psi}(r(t))$ *e*

$$\overrightarrow{AB} = 2L\cos\varphi[\cos(\lambda r)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\lambda r)\boldsymbol{e}_2] + 2L\sin\varphi\boldsymbol{e}_3\,.$$

In altri termini, φ *è un'anomalia polare nel piano* Π_A*. Dunque il generico punto* P *di* AB *sarà parametrizzato da*

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \boldsymbol{\psi}(r(t)) + \sigma\frac{\overrightarrow{AB}}{2L}\,, \qquad \sigma \in [0,2L]\,;$$

qui σ *è l'ascissa su* AB*. Pertanto la velocità di* P *è*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{\psi}(r) + \sigma\dot{\varphi}\big\{ -\sin\varphi[\cos(\lambda r)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\lambda r)\boldsymbol{e}_2] + \cos\varphi\boldsymbol{e}_3\big\} \\ + \lambda\dot{r}\sigma\cos\varphi[-\sin(\lambda r)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\lambda r)\boldsymbol{e}_2]\,, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{v}|^2 &= \dot{r}^2 + \sigma^2\dot{\varphi}^2 + \lambda^2\dot{r}^2\sigma^2\cos^2\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sigma h\cos\varphi + 2\lambda\dot{r}^2\sigma\cos\varphi R\lambda \\ &= \sigma^2(\dot{\varphi}^2 + \lambda^2\dot{r}^2\cos\varphi^2) + 2\sigma(\dot{r}\dot{\varphi}h\cos\varphi + R\lambda^2\dot{r}^2\cos\varphi) + \dot{r}^2\,. \end{aligned}$$

Si calcola poi

$$T^{\text{L}}(\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\int_{AB}\frac{M}{2L}|\boldsymbol{v}|^2\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

R.

$$T^{\text{L}}(r,\varphi) = \frac{2}{3}ML^2(\dot{\varphi}^2 + \lambda^2\dot{r}^2\cos\varphi^2) + ML\dot{r}\cos\varphi(\dot{\varphi}h + R\lambda^2\dot{r}) + \frac{1}{2}M\dot{r}^2\,.$$

48. [3/9/2015 (ex)I] Una lamina rettangolare di massa M e lati $a > b > 0$ è vincolata a mantenere il centro C sulla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Inoltre la lamina si mantiene ortogonale alla circonferenza. Qui $R > a$.
Scrivere il momento delle quantità di moto della lamina rispetto al centro C, in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

SOLUZIONE

La lamina ha due gradi di libertà corrispondenti alle coordinate lagrangiane

$$s \in (0{,}2\pi R) , \qquad \varphi \in (-\pi, \pi) ,$$

ove s è l'ascissa curvilinea di C tale che

$$\overrightarrow{OC} = R \cos \frac{s}{R} \boldsymbol{e}_1 + R \sin \frac{s}{R} \boldsymbol{e}_2 ,$$

con O origine del sistema di riferimento, e φ è un angolo di rotazione della lamina intorno alla sua normale in C, che è la tangente alla circonferenza in C. L'angolo φ verrà specificato sotto.
Come è noto si ha

$$\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{\sigma\omega} ,$$

ove $\boldsymbol{\sigma}$ è il tensore d'inerzia in C e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare della lamina. Determiniamo $\boldsymbol{\omega}$ mediante il teorema di composizione delle velocità angolari. Sia $\mathcal{N} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della circonferenza in C, e sia $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ una terna solidale alla lamina, principale in C. In particolare prendiamo $\boldsymbol{u}_1$ [rispettivamente $\boldsymbol{u}_2$] parallelo ai lati di lunghezza a [rispettivamente b], e quindi $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{T}$ normale alla lamina. Denotiamo anche $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$.
Allora

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} ,$$

e si ha subito peraltro (in genere salvo il segno)

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} = \dot\varphi \boldsymbol{u}_3 = \dot\varphi \boldsymbol{T} .$$

È noto poi che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \dot s[-\tau \boldsymbol{T} + k \boldsymbol{B}] = \frac{\dot s}{R} \boldsymbol{B} = \frac{\dot s}{R} \boldsymbol{e}_3 .$$

Occorre scomporre $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{B}$ in $\mathcal{M}$. Come definizione di φ possiamo infine precisare

$$\boldsymbol{u}_1 = \cos\varphi \boldsymbol{N} + \sin\varphi \boldsymbol{B} , \qquad \boldsymbol{u}_2 = -\sin\varphi \boldsymbol{N} + \cos\varphi \boldsymbol{B} ,$$

e dunque

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{B} = \sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{u}_2 .$$

Si noti che la scelta fatta di φ conferma il segno scelto sopra. In conclusione

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\dot s}{R} \sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \frac{\dot s}{R} \cos\varphi \boldsymbol{u}_2 + \dot\varphi \boldsymbol{u}_3 .$$

Essendo

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{pmatrix} ,$$

si ottiene infine

$$\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{\sigma\omega} = I_{11} \frac{\dot s}{R} \sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + I_{22} \frac{\dot s}{R} \cos\varphi \boldsymbol{u}_2 + (I_{11} + I_{22}) \dot\varphi \boldsymbol{u}_3 .$$

R.

$$\boldsymbol{L}_C = I_{11}\frac{\dot{s}}{R}\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + I_{22}\frac{\dot{s}}{R}\cos\varphi\boldsymbol{u}_2 + (I_{11}+I_{22})\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3\,.$$

49. [9/2/2016 (ex)I] Una lamina rettangolare $ABCD$ di massa M e lati $\overline{AB} = L$ e $\overline{BC} = 2L$ è vincolata ad avere il vertice A nell'origine del sistema di riferimento fisso, e il lato AB sulla retta mobile $r(t)$

$$-x_1\sin(kt) + x_2\cos(kt) = 0\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Si calcoli l'energia cinetica della lamina in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana.

Soluzione

Consideriamo un sistema di riferimento solidale con la lamina $\mathcal{S} = (A, \mathcal{M})$ con $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h))$,

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{L}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{AD}}{2L}\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2\,.$$

Si noti che $\boldsymbol{u}_3$ è principale, ma $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ non lo sono.

Consideriamo anche la terna fissa $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$ e quella ausiliaria $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$,

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1\,, \qquad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_3\times\boldsymbol{w}_1\,, \qquad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

Il teorema di composizione delle velocità angolari dà

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}\,.$$

Chiaramente, se $\varphi\in(0,2\pi)$ denota l'angolo di rotazione intorno ad AB, ossia quello formato dalla lamina con il piano $x_3 = 0$, si ha

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = k\boldsymbol{w}_3\,, \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{w}_1\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = k\boldsymbol{e}_3 + \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1\,.$$

Occorre esprimere $\boldsymbol{e}_3$ in termini di $\mathcal{M}$. Questo si ottiene da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(kt)\boldsymbol{e}_1 + \sin(kt)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(kt)\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos(kt)\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \sin(kt)\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 - \cos(kt)\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Perciò

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0\\ I_{12} & I_{22} & 0\\ 0 & 0 & I_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ k\sin\varphi\\ k\cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ k\sin\varphi\\ k\cos\varphi\end{pmatrix}\,.$$

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}[I_{11}\dot{\varphi}^2 + 2I_{12}k\dot{\varphi}\sin\varphi + I_{22}k^2\sin^2\varphi + I_{33}k^2\cos^2\varphi]\,.$$

50. [9/2/2016 (ex)II] Una lamina ABC a forma di triangolo rettangolo di massa M e cateti $\overline{AB} = L$ e $\overline{AC} = 2L$ è vincolata ad avere il vertice A nell'origine del sistema di riferimento fisso, e il lato AB sulla retta mobile $r(t)$

$$x_1 \sin(kt) - x_2 \cos(kt) = 0 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Si calcoli l'energia cinetica della lamina in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana.
R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}[I_{11}\dot\varphi^2 + 2I_{12}k\dot\varphi \sin\varphi + I_{22}k^2\sin^2\varphi + I_{33}k^2\cos^2\varphi] \,.$$

51. [19/3/2016 (ex)I] Un disco di raggio R e massa M è vincolato ad avere il centro C sulla parabola

$$x_2 = ax_1^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Qui $a > 0$ è una costante assegnata.
Inoltre l'asse ortogonale al disco in C si mantiene tangente alla parabola.
Scrivere l'energia cinetica del disco in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
Scegliamo le due coordinate lagrangiane $x \in \boldsymbol{R}$ e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\overrightarrow{OC} = x\boldsymbol{e}_1 + ax^2\boldsymbol{e}_2 \,,$$

e che φ indichi l'angolo formato da un raggio solidale con il disco con la normale alla parabola.
Usiamo il teorema di König. Dunque

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_C|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} \,,$$

ove $\boldsymbol{\sigma}$ è calcolata in C. Si ha anzitutto

$$\boldsymbol{v}_C = \dot x[\boldsymbol{e}_1 + 2ax\boldsymbol{e}_2] \,.$$

Per determinare la velocità angolare del disco $\boldsymbol{\omega}$, usiamo il teorema di composizione delle velocità angolari, ossia

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} \,,$$

ove $\mathcal{P}$ è la terna fissa $(\boldsymbol{e}_h)$, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ è la terna solidale con il disco scelta in modo che $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{T}$ e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca della parabola, ossia

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{e}_1 + 2ax\boldsymbol{e}_2}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} \,, \quad \boldsymbol{N} = \frac{-2ax\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} \,, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Per la scelta dell'angolo φ si ha

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} = \dot\varphi\boldsymbol{T} \,;$$

inoltre è noto dalla teoria che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \dot{s}[-\tau \boldsymbol{T} + k\boldsymbol{B}] = \dot{s}k\boldsymbol{B}\,.$$

Poi si ha

$$\dot{s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\dot{x} = \sqrt{1+4a^2x^2}\,\dot{x}\,,$$

e

$$k = \frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Dunque in conclusione

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{T} + \frac{2a\dot{x}}{(1+4a^2x^2)^{\frac{1}{2}}}\boldsymbol{B}\,.$$

Si conclude ricordando che la $\boldsymbol{\sigma}$ per le proprietà di simmetria del disco si scompone in $\mathcal{N}$ come

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{diag}(2I, I, I)\,,$$

ove I è il momento d'inerzia diametrale del disco.
R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2(1+4a^2x^2) + I\dot{\varphi}^2 + \frac{2Ia^2\dot{x}^2}{1+4a^2x^2}\,.$$

52. [12/7/2016 (ex)I] Un disco di raggio R e massa M è vincolato ad avere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso $\mathcal{S} = (O, (x_h))$, e ad avere il diametro solidale AB appartenente al piano $x_3 = 0$.
Si determini il momento angolare del disco in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
Usiamo l'espressione

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\sigma}^O\boldsymbol{\omega}\,.$$

Determiniamo la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$: introduciamo il sistema di riferimento ausiliario $\mathcal{S}' = (O, (\boldsymbol{w}_h))$, ove

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{\overrightarrow{OB}}{R}\,, \qquad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_3 \times \boldsymbol{w}_1\,, \qquad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

Il sistema solidale $(O, (\boldsymbol{u}_h))$ sia invece dato da

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{OB}}{R}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 \text{ ortogonale al disco.}$$

Allora si avrà per φ, $\theta \in (-\pi, \pi)$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2 &= \cos\theta\, \boldsymbol{w}_2 + \sin\theta\, \boldsymbol{w}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\theta\, \boldsymbol{w}_2 + \cos\theta\, \boldsymbol{w}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{w}_1 \,.
\end{aligned}$$

Scegliamo φ, θ come coordinate lagrangiane. Dunque se $\mathcal{P}$ è la terna fissa $(\boldsymbol{e}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ si ha

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} = \dot\varphi \boldsymbol{w}_3 + \dot\theta \boldsymbol{u}_1 = \dot\varphi(\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + \cos\theta \boldsymbol{u}_3) + \dot\theta \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Scomponendo anche $\boldsymbol{\sigma}^O$ nella base solidale $\mathcal{M}$ si ottiene se I denota il momento diametrale del disco

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\sigma}^O \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\theta \\ \dot\varphi\sin\theta \\ \dot\varphi\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I\dot\theta \\ I\dot\varphi\sin\theta \\ 2I\dot\varphi\cos\theta \end{pmatrix} .$$

R.

$$\boldsymbol{L} = I(\dot\theta \boldsymbol{u}_1 + \dot\varphi \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + 2\dot\varphi\cos\theta \boldsymbol{u}_3) \,.$$

53. [8/02/2017 (ex)I] Un cilindro di massa M, raggio R e altezza H è vincolato ad avere il centro C nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O, (x_h))$ e a mantenere l'asse sul piano $x_3 = 0$.

- Si calcoli il momento $\boldsymbol{L}_C$ delle quantità di moto del cilindro rispetto a C, in funzione delle opportune coordinate lagrangiane, scomponendolo nella base fissa.
- Si dimostri che se

  $$\boldsymbol{L}_C \cdot \boldsymbol{e}_3 \geq \mu > 0 \,, \qquad \text{per ogni } t > 0,$$

  allora $\boldsymbol{L}_C \cdot \boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{L}_C \cdot \boldsymbol{e}_2$ si annullano infinite volte per $t > 0$.

Soluzione
A) È noto che

$$\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{\sigma}^C \boldsymbol{\omega} \,.$$

Siano A e B i due centri delle basi del cilindro. Scegliamo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ in modo che

$$\overrightarrow{AB} = H\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + H\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,,$$

e $\theta \in (-\pi, \pi)$ che misuri la rotazione del cilindro intorno ad $\overrightarrow{AB}$.
Cerchiamo $\boldsymbol{\omega}$; useremo la scomposizione

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} \,,$$

ove $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$, $\mathcal{M}$ è la base solidale costituita da

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{H} \,, \qquad \boldsymbol{u}_2,\, \boldsymbol{u}_3 \text{ arbitrari e opportuni,}$$

e $\mathcal{N}$ è data da

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}
$$

Si noti che $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1$. Ovviamente $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = \dot\varphi\boldsymbol{w}_3$. Inoltre $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot\theta\boldsymbol{w}_1$.
Nonostante $\mathcal{N}$ non sia solidale, a causa della simmetria del cilindro si ha comunque

$$
\boldsymbol{\sigma}^C_{\mathcal{N}} = \mathrm{diag}(I_{11}, I_{22}, I_{22})\,,
$$

con I_{hh} costanti. Dunque (calcolando in componenti in $\mathcal{N}$)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0\\ 0 & I_{22} & 0\\ 0 & 0 & I_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\theta\\ 0\\ \dot\varphi\end{pmatrix}\\
= I_{11}\dot\theta\boldsymbol{w}_1 + I_{22}\dot\varphi\boldsymbol{w}_3 = I_{11}\dot\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + I_{11}\dot\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + I_{22}\dot\varphi\boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}
$$

B) Se $\boldsymbol{L}_c\cdot\boldsymbol{e}_3 \geq \mu > 0$, allora

$$
\dot\varphi \geq \mu I_{22}^{-1}\,,
$$

e dunque

$$
\varphi(t) \geq \mu I_{22}^{-1}t + \varphi(0) \to +\infty\,,\qquad t\to+\infty\,.
$$

Quindi sia $\sin\varphi(t)$ che $\cos\varphi(t)$ si annullano infinite volte.
R.

$$
\boldsymbol{L}_C = I_{11}\dot\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + I_{11}\dot\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + I_{22}\dot\varphi\boldsymbol{e}_3\,.
$$

54. [8/02/2017 (ex)II] Un parallelepipedo con base quadrata di massa M, lato della base R e altezza H è vincolato ad avere il centro C nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O,(x_h))$ e a mantenere l'asse sul piano $x_1 = 0$.

- Si calcoli il momento $\boldsymbol{L}_C$ delle quantità di moto del parallelepipedo rispetto a C, in funzione delle opportune coordinate lagrangiane, scomponendolo nella base fissa.
- Si dimostri che se

  $$
  \boldsymbol{L}_C\cdot\boldsymbol{e}_1 \geq \mu > 0\,,\qquad \text{per ogni } t>0,
  $$

  allora $\boldsymbol{L}_C\cdot\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{L}_C\cdot\boldsymbol{e}_3$ si annullano infinite volte per $t>0$.

R.

$$
\boldsymbol{L}_C = I_{11}\dot\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + I_{11}\dot\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + I_{22}\dot\varphi\boldsymbol{e}_3\,.
$$

55. [15/01/2018 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e di massa M è vincolata ad avere l'estremo A sulla curva piana regolare

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (\psi_1(s), \psi_2(s), 0) \,, \qquad s \in (a, b) \,,$$

ove s è la lunghezza d'arco. Inoltre tutta l'asta è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Calcolare l'energia cinetica dell'asta in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione
Parametrizziamo $\overrightarrow{AB}$ mediante le coordinate lagrangiane $\varphi \in (0, 2\pi)$ e $r \in (a, b)$ tali che

$$\overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2) \,,$$
$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{\psi}(r) \,.$$

L'energia cinetica si può trovare con il teorema di König: se G denota il centro di massa di AB, ossia

$$\overrightarrow{OG} = \boldsymbol{\psi}(r) + L(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2) \,,$$

si ha

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{\psi}'(r)\dot{r} + L\dot{\varphi}(-\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2) \,.$$

Pertanto

$$|\boldsymbol{v}_G|^2 = \dot{r}^2 + L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{r}\dot{\varphi}(-\psi_1'(r)\sin\varphi + \psi_2'(r)\cos\varphi) \,.$$

Infine l'energia cinetica relativa al centro di massa è

$$\frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \,,$$

con I momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse ortogonale ad $\overrightarrow{AB}$ in G.
R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} M[\dot{r}^2 + L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{r}\dot{\varphi}(-\psi_1'(r)\sin\varphi + \psi_2'(r)\cos\varphi)] + \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 \,.$$

56. [15/01/2018 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza L e di massa M è vincolata ad avere l'estremo A sulla curva piana regolare

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (0, \psi_2(s), \psi_3(s)) \,, \qquad s \in (a, b) \,,$$

ove s è la lunghezza d'arco. Inoltre tutta l'asta è vincolata a giacere sul piano $x_1 = 0$.
Calcolare l'energia cinetica dell'asta in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} M[\dot{r}^2 + L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{r}\dot{\varphi}(-\psi_2'(r)\sin\varphi + \psi_3'(r)\cos\varphi)] + \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 \,.$$

57. [13/02/2018 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata ad avere il centro sulla circonferenza mobile

$$\gamma(t) = \Big\{ R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3(t) \mid 0 \le s \le 2\pi R \Big\} ,$$

ove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 . \end{aligned}$$

Qui $\alpha > 0$ è costante.
Inoltre AB si mantiene in ogni istante parallela a $\boldsymbol{u}_2$.
Calcolare l'energia cinetica dell'asta in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
Soluzione
L'asta ha un grado di libertà. Scegliamo come coordinata lagrangiana $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che se C è il centro dell'asta

$$\overrightarrow{OC} = R\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{u}_3 .$$

Qui O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Dunque

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_C = -R\dot\varphi\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + R\cos\varphi\dot{\boldsymbol{u}}_1 + R\dot\varphi\cos\varphi\boldsymbol{u}_3 \\ = -R\dot\varphi\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \alpha R\cos\varphi\boldsymbol{u}_2 + R\dot\varphi\cos\varphi\boldsymbol{u}_3 , \end{aligned}$$

da cui

$$|\boldsymbol{v}_C|^2 = R^2\dot\varphi^2 + \alpha^2R^2\cos^2\varphi .$$

Per usare il teorema di König dobbiamo calcolare $\boldsymbol{\omega}$. Ma dato che AB è parallela a $\boldsymbol{u}_2$ si ha

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha\boldsymbol{e}_3 = \alpha\boldsymbol{u}_3 .$$

Perciò

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_C\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I\alpha^2 .$$

R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}MR^2(\dot\varphi^2 + \alpha^2\cos^2\varphi) + \frac{1}{2}I\alpha^2 .$$

58. [13/02/2018 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza L e massa M è vincolata ad avere l'estremo A sulla circonferenza mobile

$$\gamma(t) = \Big\{ R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_2(t) + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3(t) \mid 0 \le s \le 2\pi R \Big\} ,$$

ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Qui $\beta > 0$ è costante.
Inoltre AB si mantiene in ogni istante parallela a $\boldsymbol{u}_1$.
Calcolare l'energia cinetica dell'asta in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}MR^2(\dot\varphi^2 + \beta^2\cos^2\varphi) + \frac{1}{2}M\Big(\frac{\beta^2L^2}{4} - \beta LR\dot\varphi\sin\varphi\Big) + \frac{1}{2}I\beta^2\,.$$

59. [11/02/2019 (ex)I] Si calcoli, in funzione di una opportuna coordinata lagrangiana, il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_O$ del disco di raggio R e massa M vincolato a avere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso e un punto A, solidale e appartenente al suo bordo, mobile con legge assegnata

$$\boldsymbol{X}_A(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante.
Soluzione
Introduciamo il sistema solidale $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{OA}}{R}\,,\qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3\times\boldsymbol{u}_1\,,\qquad \boldsymbol{u}_3 \textit{ ortogonale al disco.}$$

Evidentemente il disco ha 1 grado di libertà, e possiamo scegliere come coordinata lagrangiana l'angolo $\varphi\in(-\pi,\pi)$ di rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_1$.
Per calcolare $\boldsymbol{\omega}$ scriviamo

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}\,,$$

ove $\mathcal{P}$ è la base fissa, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ è data da

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1\,,\qquad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{u}_1\,,\qquad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

Quindi si ha subito

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \alpha\boldsymbol{e}_3\,,\qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} = \dot\varphi\boldsymbol{u}_1\,.$$

Resta da esprimere $\boldsymbol{e}_3$ nella base $\mathcal{M}$: si ha dato che $\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{u}_1 = 0$,

$$\boldsymbol{e}_3 = \sin\varphi\boldsymbol{u}_2 + \cos\varphi\boldsymbol{u}_3\,.$$

Verifichiamo che questa scelta esplicita di φ sia coerente con quella del segno in $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}$ fatta sopra: in effetti si ottiene

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3}{\mathrm{d}t} = \Big[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3}{\mathrm{d}t}\Big]_{\mathcal{M}} &+ \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_3\\
&= \dot\varphi(\cos\varphi\boldsymbol{u}_2 - \sin\varphi\boldsymbol{u}_3) + \dot\varphi(\sin\varphi\boldsymbol{u}_3 - \cos\varphi\boldsymbol{u}_2)\,.
\end{aligned}$$

Infine

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi \boldsymbol{u}_1 + \alpha \sin\varphi \boldsymbol{u}_2 + \alpha \cos\varphi \boldsymbol{u}_3 .$$

Si ha quindi

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 2I_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\varphi \\ \alpha\sin\varphi \\ \alpha\cos\varphi \end{pmatrix} .$$

R.

$$\boldsymbol{L}_O = I_{11}(\dot\varphi \boldsymbol{u}_1 + \alpha \sin\varphi \boldsymbol{u}_2 + 2\alpha \cos\varphi \boldsymbol{u}_3) .$$

60. [11/02/2019 (ex)II] Si calcoli, in funzione di una opportuna coordinata lagrangiana, il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_O$ della lamina quadrata di lato $2R$ e massa M vincolata a avere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso e il punto medio A di un lato mobile con legge assegnata

$$\boldsymbol{X}_A(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_3 .$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante.
R.

$$\boldsymbol{L}_O = I_{11}(\dot\varphi \boldsymbol{u}_1 + \alpha \sin\varphi \boldsymbol{u}_2 + 2\alpha \cos\varphi \boldsymbol{u}_3) .$$

61. [09/01/2020 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ ha lato $2R$ e massa m, ed è vincolata ad avere il centro G sulla circonferenza γ

$$x_1^2 + x_2^2 = 2R^2 , \qquad x_3 = 0 ,$$

e il vertice A nell'origine O del sistema di riferimento fisso.

- Calcolare in funzione delle opportune coordinate lagrangiane il momento delle quantità di moto della lamina rispetto a A, esprimendolo nella base solidale alla lamina.

SOLUZIONE
Il corpo ha 2 gradi di libertà: infatti, determinata la posizione di G su γ, resta un grado di libertà per la rotazione intorno a $\overrightarrow{OG}$.
Introduciamo le coordinate lagrangiane φ, $\theta \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}}(\varphi) = \sqrt{2}R(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2) ,$$

e θ è l'angolo di rotazione intorno a $\overrightarrow{OG}$.
È noto che $\boldsymbol{L}_A = \boldsymbol{\sigma}_A \boldsymbol{\omega}$ perché il moto è polare di polo A. Per calcolare $\boldsymbol{\omega}$ introduciamo le terne $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$ (fissa), $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ (solidale) e la terna ausiliaria $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ data da

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{\overrightarrow{GO}}{\sqrt{2}R} , \qquad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_3 \times \boldsymbol{w}_1 , \qquad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{e}_3 .$$

Si noti che $\boldsymbol{w}_1$ *è solidale e si può pertanto assumere che* $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$*.*
Quindi per il teorema di composizione delle velocità angolari

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{w}_3 + \dot{\theta}\boldsymbol{w}_1 \,.$$

Resta da esprimere $\boldsymbol{w}_3$ *in funzione della terna* $\mathcal{M}$ *che può essere scelta come la terna principale in* A

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{w}_1 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= \cos\theta \boldsymbol{w}_2 + \sin\theta \boldsymbol{w}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\theta \boldsymbol{w}_2 + \cos\theta \boldsymbol{w}_3 \,, \end{aligned}$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ *è normale alla lamina.*
Dunque, poiché $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{e}_3$ *e perciò* $\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$, $\boldsymbol{w}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$, *si ha*

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{w}_3 = \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + \cos\theta \boldsymbol{u}_3 \,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{u}_1 + \dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + \dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

cosicché

$$(\boldsymbol{\sigma}_A \boldsymbol{\omega})_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} + m2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2I_{11} + m2R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\varphi}\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11}\dot{\theta} \\ (I_{11} + 2mR^2)\dot{\varphi}\sin\theta \\ 2(I_{11} + mR^2)\dot{\varphi}\cos\theta \end{pmatrix} ,$$

ove I_{11} *è il momento d'inerzia in* G *calcolato rispetto a un asse del piano della lamina.*
R.

$$\boldsymbol{L}_A = I_{11}\dot{\theta}\boldsymbol{u}_1 + (I_{11} + 2mR^2)\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + 2(I_{11} + mR^2)\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_3 \,.$$

62. [09/01/2020 (ex)II] Un disco C ha raggio R e massa m, ed è vincolato ad avere il centro G sulla circonferenza γ

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

e un punto solidale A appartenente alla circonferenza bordo del disco nell'origine O del sistema di riferimento fisso.

- Calcolare in funzione delle opportune coordinate lagrangiane il momento delle quantità di moto del disco rispetto a A, esprimendolo nella base solidale al disco.

R.

$$\boldsymbol{L}_A = I_{11}\dot{\theta}\boldsymbol{u}_1 + (I_{11} + mR^2)\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + (2I_{11} + mR^2)\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_3 \,.$$

340. Calcolo di quantità cinematiche in moti relativi

1. [15/12/2005 (ex)I] Un sistema di riferimento $(O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ si muove rispetto al sistema di riferimento fisso $(\Omega, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ con

$$\boldsymbol{v}_O = c\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_2 \,,$$

con c, $\omega > 0$ costanti. All'istante iniziale le terne fissa e mobile coincidono. Un punto P ha velocità nel sistema mobile data da

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = k\boldsymbol{u}_2 \,, \qquad k > 0 \text{ costante.}$$

Determinare le componenti della velocità di P lungo $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.
SOLUZIONE
Per la formula della velocità relativa

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP} = k\boldsymbol{u}_2(t) + c\boldsymbol{e}_1 + \omega\boldsymbol{e}_2 \times \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t)\boldsymbol{u}_i(t) \,.$$

Resta dunque da esprimere la terna mobile $(\boldsymbol{u}_i)$ nella terna fissa $(\boldsymbol{e}_i)$, e da determinare le coordinate λ_i di P nel sistema mobile.
Anzitutto si ha, per la definizione di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_2(t) &= \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3(t) &= \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Inoltre, per integrazione,

$$\lambda_1(t) = \lambda_1(0) \,, \quad \lambda_2(t) = \lambda_2(0) + kt \,, \quad \lambda_3(t) = \lambda_3(0) \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

Sostituendo nella formula della velocità si ha la soluzione.
R.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = \big[c - \omega\lambda_1(t)\sin(\omega t) + \omega\lambda_3(t)\cos(\omega t)\big]\boldsymbol{e}_1 + k\boldsymbol{e}_2 \\ - \big[\omega\lambda_1(t)\cos(\omega t) + \omega\lambda_3(t)\sin(\omega t)\big]\boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

ove le coordinate di P nel sistema mobile sono date da

$$(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)) = (\lambda_1(0), \lambda_2(0) + kt, \lambda_3(0)) \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

2. [7/4/2006 (ex)I] Un sistema di riferimento $(O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ si muove rispetto al sistema di riferimento fisso $(\Omega, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ con

$$\boldsymbol{v}_O = c\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_2 \,,$$

e in modo che all'istante iniziale

$$O = \Omega \,, \qquad \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{e}_i \,, \quad i = 1\,,2\,,3 \,.$$

Un punto P ha velocità nel sistema mobile data da

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = k\boldsymbol{u}_1 \,.$$

Qui c, ω, k sono costanti positive.
Determinare le componenti della velocità nel sistema fisso $\boldsymbol{v}$ di P lungo $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.
Soluzione
Per la formula della velocità relativa

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP} = k\boldsymbol{u}_1(t) + c\boldsymbol{e}_2 + \omega\boldsymbol{e}_2 \times \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t)\boldsymbol{u}_i(t) \,.$$

Resta dunque da esprimere la terna mobile $(\boldsymbol{u}_i)$ nella terna fissa $(\boldsymbol{e}_i)$, e da determinare le coordinate λ_i di P nel sistema mobile.
Anzitutto si ha, per la definizione di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_2(t) &= \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Inoltre, per integrazione,

$$\lambda_1(t) = \lambda_1(0) + kt \,, \quad \lambda_2(t) = \lambda_2(0) \,, \quad \lambda_3(t) = \lambda_3(0) \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

Sostituendo nella formula della velocità si ha la soluzione.
R.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} = \big[k\cos(\omega t) - \omega\lambda_1(t)\sin(\omega t) + \omega\lambda_3(t)\cos(\omega t)\big]\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_2 \\
+ \big[-k\sin(\omega t) - \omega\lambda_1(t)\cos(\omega t) - \omega\lambda_3(t)\sin(\omega t)\big]\boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

ove le coordinate di P nel sistema mobile sono date da

$$(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)) = (\lambda_1(0) + kt, \lambda_2(0), \lambda_3(0)) \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

3. [22/9/2006 (ex)I] Un punto si muove sulla circonferenza mobile

$$\gamma = \{R\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{u}_2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \,,$$

ove $(\boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare rispetto alla terna fissa data da

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Qui R, $\omega > 0$ sono costanti.
Il centro della circonferenza, l'origine del sistema di riferimento fisso, e l'origine del sistema di riferimento mobile O coincidono in ogni istante.
I due vettori $\boldsymbol{u}_3$ e $\boldsymbol{e}_3$ coincidono all'istante iniziale.

Sapendo che il moto del punto nel sistema di riferimento mobile è uniforme (cioè che la velocità relativa ha modulo costante c), si trovi la velocità del punto nel sistema di riferimento fisso.

SOLUZIONE

Usando le formule della cinematica relativa si ha

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}\,,$$

ove si denota $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$. D'altra parte, denotando con $\varphi(t)$ la coordinata lagrangiana di P, tale che

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{u}_2\,,$$

si ha

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = R\dot{\varphi}(-\sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{u}_2)\,,$$

per cui (a meno della scelta del segno)

$$|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}| = c \qquad \text{se e solo se} \qquad \dot{\varphi} = cR^{-1}\,.$$

Inoltre

$$\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP} = \omega \boldsymbol{u}_3 \times [R(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_2)] = \omega R(-\sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{u}_2)\,.$$

R.

$$\boldsymbol{v} = (cR^{-1} + \omega)\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{OP}\,.$$

4. [13/12/2006 (ex)I] Sia $(O, \boldsymbol{e}_i)$ il sistema di riferimento fisso, e sia $(\boldsymbol{u}_i)$ una terna mobile tale che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2(t) &= -\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Consideriamo un disco D di centro C, sottoposto ai vincoli

- $\overrightarrow{OC} = L\boldsymbol{u}_1(t)$;
- D giace nel piano ortogonale a $\boldsymbol{u}_1$;
- D ruota intorno all'asse ad esso ortogonale in C con velocità angolare (scalare) costante $\beta > 0$.

Determinare la velocità angolare vettoriale di D nel sistema di riferimento fisso, esprimendola nella base $(\boldsymbol{e}_i)$.

SOLUZIONE

Indichiamo con $\mathcal{P}$ la terna fissa $(\boldsymbol{e}_i)$, con $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$ una terna solidale con D, ove $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1$ è ortogonale a D, e con $\mathcal{M}$ la terna $(\boldsymbol{u}_i)$.

L'esercizio richiede la velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}}$ di $\mathcal{N}$ rispetto a $\mathcal{P}$.

È noto che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} \,.$$

D'altra parte

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} = \alpha \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} = \beta \boldsymbol{w}_1 \,.$$

Resta solo da scomporre $\boldsymbol{w}_1$ *in* $\mathcal{P}$*. Si ha*

$$\boldsymbol{w}_1(t) = \boldsymbol{u}_1(t) = \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 \,.$$

R.

$$\boldsymbol{\omega} = \beta \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \beta \sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 + \alpha \boldsymbol{e}_3 \,.$$

5. [26/3/2007 (ex)I] Consideriamo tre terne $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$, $\mathcal{P} = (\boldsymbol{z}_i)$, tali che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} = \lambda \boldsymbol{u}_1 \,, \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NP}} = \mu \boldsymbol{w}_1 \,.$$

All'istante $t = 0$

$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{w}_i(0) = \boldsymbol{z}_i(0) \,, \qquad i = 1,2,3 \,.$$

Determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MP}}$ sia in termini di $(\boldsymbol{u}_i)$ che di $(\boldsymbol{z}_i)$.

Soluzione

Si sa che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MP}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NP}} = \lambda \boldsymbol{u}_1 + \mu \boldsymbol{w}_1 \,.$$

Osserviamo che

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}}(t) = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}(t) \times \boldsymbol{u}_1(t) = -\lambda \boldsymbol{u}_1(t) \times \boldsymbol{u}_1(t) = 0 \,.$$

Quindi per ogni t

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t) \boldsymbol{w}_i(t) \,,$$

con λ_i *funzioni costanti, ossia, per le condizioni iniziali,*

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \boldsymbol{w}_1(t) \,.$$

Perciò

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MP}}(t) = (\lambda + \mu)\boldsymbol{u}_1(t) \,.$$

Resta da esprimere $\boldsymbol{u}_1$ *in termini delle* $\boldsymbol{z}_i$*. Si ha come sopra*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}}(t) \times \boldsymbol{u}_1(t) = -(\lambda + \mu)\boldsymbol{u}_1(t) \times \boldsymbol{u}_1(t) = 0 \,,$$

da cui

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \boldsymbol{z}_1(t) \,,$$

e

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MP}}(t) = (\lambda + \mu)\boldsymbol{z}_1(t) \,.$$

R.

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}(t) = (\lambda + \mu)\boldsymbol{u}_1(t) = (\lambda + \mu)\boldsymbol{z}_1(t) .$$

6. [16/5/2007 (hw)I] Una terna $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ si muove rispetto a una terna $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$ con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ che soddisfa

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = -\alpha\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} + \boldsymbol{b} , \tag{1}$$

ove $\alpha > 0$ e $\boldsymbol{b}$ è un vettore solidale con $\mathcal{N}$. Sapendo che all'istante iniziale $t = 0$ vale

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(0) = \beta\boldsymbol{w}_1 ,$$

con $\beta \in \boldsymbol{R}$, si determini $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$.
Soluzione
Denotiamo

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \boldsymbol{w}_i , \qquad \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i \boldsymbol{w}_i .$$

Allora la (1), *ricordando che*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} ,$$

dà le

$$\begin{gathered} \dot{\omega}_i = -\alpha\omega_i + b_i , \qquad i = 1, 2, 3 ; \\ \omega_1(0) = \beta , \quad \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0 . \end{gathered}$$

Si ottiene pertanto

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \beta e^{-\alpha t} + \frac{b_1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) , \\ \omega_i(t) &= \frac{b_i}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) , \qquad i = 2, 3 . \end{aligned}$$

R.

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \frac{\boldsymbol{b}}{\alpha} + e^{-\alpha t}\Big[\Big(\beta - \frac{b_1}{\alpha}\Big)\boldsymbol{w}_1 - \frac{b_2}{\alpha}\boldsymbol{w}_2 - \frac{b_3}{\alpha}\boldsymbol{w}_2\Big] , \qquad t > 0 .$$

7. [16/5/2007 (hw)I] Una terna $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ si muove rispetto a una terna $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$ con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ che soddisfa

$$\begin{gathered} \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \alpha\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 , \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(0) = 0 , \end{gathered}$$

ove $\alpha > 0$ e φ è l'angolo tra $\boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{w}_2$. Si determini $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$, sapendo anche che

$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{w}_i(0) \,, \qquad i = 1, 2, 3 \,.$$

SOLUZIONE
Denotiamo

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \boldsymbol{u}_i \,.$$

Allora la $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$, ricordando che

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} \,,$$

soddisfa

$$\dot{\omega}_1 = \alpha \cos\varphi \,, \qquad \dot{\omega}_2 = 0 \,, \qquad \dot{\omega}_3 = 0 \,. \tag{1}$$

Perciò

$$\omega_2(t) = \omega_2(0) = 0 \,, \qquad \omega_3(t) = \omega_3(0) = 0 \,, \qquad \textit{per ogni } t > 0.$$

Ne segue che il moto di $\mathcal{M}$ rispetto a $\mathcal{N}$ è una rotazione intorno all'asse $\boldsymbol{u}_1$, cosicché per ogni $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t) \,, \\
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi(t)\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi(t)\boldsymbol{w}_3(t) \,, \\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi(t)\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi(t)\boldsymbol{w}_3(t) \,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \dot{\varphi}(t)\boldsymbol{u}_1(t) = \dot{\varphi}(t)\boldsymbol{w}_1(t) \,.$$

Segue allora da (1) *che*

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= \alpha \cos\varphi \,, \\
\dot{\varphi}(0) &= 0 \,, \\
\varphi(0) &= 0 \,.
\end{aligned}$$

R.

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \sqrt{2\alpha \sin\varphi(t)}\boldsymbol{w}_1 \,, \quad \textit{ove} \quad \int_0^{\varphi(t)} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2\alpha \sin s}} = t \,, \qquad t > 0 \,.$$

8. [16/5/2007 (hw)I] Un punto A si muove su una circonferenza con centro il punto B, con velocità angolare costante $\omega_A \boldsymbol{e}$. A sua volta B si muove di moto circolare uniforme intorno al punto C (fisso), con velocità angolare costante $\omega_B \boldsymbol{e}$. Qui $\boldsymbol{e}$ è un versore costante, perpendicolare al piano delle orbite di A e B. Denotiamo

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = R \,, \qquad \left|\overrightarrow{CB}\right| = d \,.$$

Determinare se la velocità di A può annullarsi, e in quali posizioni del sistema. Si assuma $\omega_A \neq 0$, $\omega_B \neq 0$.
Soluzione
A) Introduciamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (B, \boldsymbol{e}_i)$, che ha velocità angolare nulla nel sistema fisso $(C, \boldsymbol{e}_i)$. Possiamo assumere $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_3$. Le formule della cinematica relativa danno subito

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \omega_B \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{CB} + \omega_A \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{BA} \,.$$

Segue che $\boldsymbol{v}_A = 0$ se e solo se (visto che $\boldsymbol{e}_3$ è ortogonale a $\overrightarrow{CB}$ e a $\overrightarrow{BA}$)

$$\omega_B \overrightarrow{CB} + \omega_A \overrightarrow{BA} = 0 \,,$$

ossia

$$\overrightarrow{BA} = -\frac{\omega_B}{\omega_A} \overrightarrow{CB} \,.$$

Perciò le posizioni ricercate esistono se e solo se

$$R = \left| \frac{\omega_B}{\omega_A} \right| d \,,$$

caso nel quale sono:

1. *se $\omega_A \omega_B < 0$: i tre punti sono allineati, con B tra A e C;*
2. *se $\omega_A \omega_B > 0$: i tre punti sono allineati, con A tra B e C.*

B) In alternativa al metodo precedente, troviamo $\boldsymbol{v}_A$ derivando il vettore posizione $\overrightarrow{CA}$, parametrizzato in modo opportuno.
Introduciamo le coordinate φ e θ, definite come gli angoli formati da $\boldsymbol{e}_1$ con $\overrightarrow{CB}$ e, rispettivamente, con $\overrightarrow{BA}$. Allora

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = d(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) + R(\cos\theta, \sin\theta, 0) \,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{v}_A = (-d\dot\varphi \sin\varphi - R\dot\theta \sin\theta, d\dot\varphi \cos\varphi + R\dot\theta \cos\theta, 0) \,,$$

e

$$|\boldsymbol{v}_A|^2 = d^2\dot\varphi^2 + R^2\dot\theta^2 + 2d\dot\varphi R\dot\theta \cos(\varphi - \theta) \,.$$

Questa forma quadratica, in

$$(d\dot\varphi, R\dot\theta) = (d\omega_B, R\omega_A) \,,$$

risulta definita positiva a meno che

$$\cos^2(\varphi - \theta) = 1 \,,$$

caso in cui è semidefinita positiva, e in effetti si annulla nei casi:

1. *$\varphi = \theta + 2k\pi$, $d\omega_B + R\omega_A = 0$;*
2. *$\varphi = \theta + (2k+1)\pi$, $d\omega_B - R\omega_A = 0$.*

Si sono quindi ritrovate le soluzioni ottenute nella parte A).
R. *Si hanno soluzioni se e solo se*

$$R = \left|\frac{\omega_B}{\omega_A}\right| d\,;$$

le soluzioni sono:

1. *se* $\omega_A \omega_B < 0$*: i tre punti sono allineati, con* B *tra* A *e* C*;*
2. *se* $\omega_A \omega_B > 0$*: i tre punti sono allineati, con* A *tra* B *e* C*.*

9. [4/7/2007 (ex)I] Una terna mobile $(\boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna $(\boldsymbol{e}_i)$ data da

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha t \boldsymbol{u}_3\,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante.
Determinare la scomposizione di $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ nella terna $(\boldsymbol{e}_i)$ sapendo che

$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{e}_i(0)\,, \qquad i = 1\,,2\,,3\,.$$

Soluzione
Si ha

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_3}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_3 = 0\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3\,, \qquad t > 0\,.$$

Perciò la coppia $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ *giace sul piano* $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ *e quindi, per un angolo* φ *opportuno si può scrivere*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,, \qquad &\Longrightarrow \qquad &\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t} = \dot\varphi \boldsymbol{u}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2\,, \qquad &\Longrightarrow \qquad &\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_2}{\mathrm{d}t} = -\dot\varphi \boldsymbol{u}_1\,.
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_1 = \alpha t \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 = \alpha t \boldsymbol{u}_2\,,\\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_2}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_2 = \alpha t \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_2 = -\alpha t \boldsymbol{u}_1\,.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\dot\varphi(t) = \alpha t\,, \qquad \varphi(t) = \frac{\alpha}{2} t^2\,.$$

R.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \cos\varphi(t) \boldsymbol{e}_1(t) + \sin\varphi(t) \boldsymbol{e}_2(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_2(t) &= -\sin\varphi(t) \boldsymbol{e}_1(t) + \cos\varphi(t) \boldsymbol{e}_2(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \boldsymbol{e}_3(t)\,,
\end{aligned}$$

con $\varphi(t) = \alpha t^2/2$.

10. [4/7/2007 (ex)II] Una terna mobile $(\boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna $(\boldsymbol{e}_i)$ data da

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \gamma t^2 \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante.
Determinare la scomposizione di $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ nella terna $(\boldsymbol{e}_i)$ sapendo che

$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{e}_i(0) \,, \qquad i = 1\,,2\,,3 \,.$$

R.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_1(t) = \boldsymbol{e}_1(t) \,, \\
&\boldsymbol{u}_2(t) = \cos\varphi(t)\boldsymbol{e}_2(t) + \sin\varphi(t)\boldsymbol{e}_3(t) \,, \\
&\boldsymbol{u}_3(t) = -\sin\varphi(t)\boldsymbol{e}_2(t) + \cos\varphi(t)\boldsymbol{e}_3(t) \,,
\end{aligned}$$

con $\varphi(t) = \gamma t^3/3$.

11. [1/7/2008 (ex)I] Determinare in funzione di due opportune coordinate la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di un disco di centro C soggetto ai vincoli

- C appartiene alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = -R \,;$$

- l'asse del disco si mantiene ortogonale all'asse x_3 e alla circonferenza.

Qui (O, x_i) è il sistema di riferimento fisso, e $R > 0$ è costante.
SOLUZIONE
Introduciamo per comodità di notazione il punto A, proiezione di C sull'asse x_3. Allora per ipotesi l'asse del disco si mantiene allineato con $\overrightarrow{AC}$.
Scomponiamo poi

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{P}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} \,,$$

ove: $\mathcal{N}$ è la terna fissa; $\mathcal{P} = (\boldsymbol{z}_i)$ è la terna data da

$$\boldsymbol{z}_1 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{\overrightarrow{AC}}{R} \,, \qquad \boldsymbol{z}_3 = \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_3 \times \boldsymbol{z}_1 \,;$$

$\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ è una terna solidale con il disco tale che

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{z}_1 \,.$$

Se φ indica la coordinata tale che

$$\overrightarrow{AC} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 \,,$$

è noto che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{P}} = \dot\varphi\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Inoltre, visto che $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{z}_1$, il moto di $\mathcal{M}$ in $\mathcal{P}$ è di rotazione; sia θ l'angolo relativo, per esempio l'angolo tra $\boldsymbol{u}_2$ e il piano $x_3 = 0$. Allora

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \dot\theta\boldsymbol{z}_1 = \dot\theta(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2) \,.$$

R.
$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 + \dot{\theta}(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2) \,.$$

12. [1/7/2008 (ex)II] Determinare in funzione di due opportune coordinate la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di un disco di centro C soggetto ai vincoli

- C appartiene alla circonferenza
$$x_1^2 + x_3^2 = R^2 \,, \qquad x_2 = R \,;$$
- l'asse del disco si mantiene ortogonale all'asse x_2 e alla circonferenza.

Qui (O, x_i) è il sistema di riferimento fisso, e $R > 0$ è costante.
R.
$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_2 + \dot{\theta}(\cos\varphi\boldsymbol{e}_3 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_1) \,.$$

13. [12/1/2009 (ex)I] Un cono circolare retto di altezza H e raggio di base R è vincolato ad avere il vertice nell'origine del sistema fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Inoltre è vincolato ad avere l'asse sul piano fisso $x_3 = 0$ (qui le x_i indicano le coordinate nel sistema di riferimento fisso).
Trovare la velocità angolare del cono nel sistema di riferimento fisso, in funzione di due opportune coordinate lagrangiane, e di $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.
SOLUZIONE
La velocità angolare del cono, cioè di una terna solidale $\mathcal{M}$ rispetto alla terna fissa $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_i)$, verrà calcolata mediante la formula
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \,,$$
ove $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$ è la terna mobile (non solidale)
$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= \cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{w}_2 &= -\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$
Qui φ è scelto in modo che $\boldsymbol{w}_1$ sia diretto come l'asse del cono. Quindi
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 \,.$$
Nel sistema di riferimento $(O, \mathcal{N})$ il cono dunque si muove con una rotazione intorno al proprio asse, per cui
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot{\theta}\boldsymbol{w}_1 \,,$$
ove θ è appunto l'angolo che misura tale rotazione.
R.
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \dot{\theta}\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \dot{\theta}\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

14. [12/1/2009 (ex)II] Un cilindro circolare retto di altezza H e raggio di base R è vincolato ad avere il centro nell'origine del sistema fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$. Inoltre è vincolato ad avere l'asse sul piano fisso $x_3 = 0$ (qui le x_i indicano le coordinate nel sistema di riferimento fisso).
Trovare la velocità angolare del cilindro nel sistema di riferimento fisso, in funzione di due opportune coordinate lagrangiane, e di $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.
R.

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} = \dot{\theta} \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \dot{\theta} \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + \dot{\varphi} \boldsymbol{e}_3 \,.$$

15. [9/4/2010 (ex)I] Un sistema di riferimento $(O, \boldsymbol{u}_i)$ si muove rispetto al sistema di riferimento fisso $(\Omega, \boldsymbol{e}_i)$ in modo che

$$\boldsymbol{v}_O = c\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_1 \,.$$

All'istante iniziale le terne fissa e mobile, e i due punti O e Ω, coincidono.
Un punto P ha velocità nel sistema di riferimento mobile data da

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(t) = k\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad t > 0 \,,$$

e all'istante iniziale

$$\overrightarrow{OP}(0) = L\boldsymbol{u}_1 \,.$$

Qui c, ω, k, L sono costanti positive.
Determinare le componenti della velocità di P nel sistema fisso lungo la terna $(\boldsymbol{u}_i)$, in funzione di c, ω, k, L.
Soluzione
Per la formula delle velocità relative

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP} = k\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_2 + \omega \boldsymbol{e}_1 \times \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t) \boldsymbol{u}_i(t) \,.$$

Si ha per definizione di $\boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= \cos\omega t \boldsymbol{e}_2 + \sin\omega t \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\omega t \boldsymbol{e}_2 + \cos\omega t \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = (k+c)\cos\omega t \boldsymbol{u}_2 - (k+c)\sin\omega t \boldsymbol{u}_3 + \omega \boldsymbol{u}_1 \times (\lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{u}_3) \\ = [-\omega\lambda_3 + (k+c)\cos\omega t]\boldsymbol{u}_2 + [\omega\lambda_2 - (k+c)\sin\omega t]\boldsymbol{u}_3 \,. \end{aligned}$$

Infine dall'integrazione di

$$(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_3) = k(0, \cos\omega t, -\sin\omega t) \,,$$

si ha, tenuto conto delle condizioni iniziali,

$$\lambda_1(t) = L \,, \qquad \lambda_2(t) = \frac{k}{\omega} \sin\omega t \,, \qquad \lambda_3(t) = \frac{k}{\omega}(\cos\omega t - 1) \,.$$

R.
$$\boldsymbol{v} = (k + c\cos\omega t)\boldsymbol{u}_2 - c\sin\omega t\boldsymbol{u}_3 \,.$$

16. [7/9/2010 (ex)I] Una terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ si muove rispetto alla terna fissa $(\boldsymbol{e}_i)$ con velocità angolare
$$\boldsymbol{\omega} = \alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 \,,$$
con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.
Il sistema di riferimento $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$ ha l'origine coincidente con quella del sistema di riferimento fisso.
Determinare l'insieme dei punti solidali con $\mathcal{S}$ tali che la loro velocità (nel sistema fisso) si annulla.
Soluzione
Si ha, come è noto,
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP} = (\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2) \times \overrightarrow{OP} \,.$$
Quindi $\boldsymbol{v} = 0$ *se e solo se*
$$\overrightarrow{OP} = \lambda(\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2) \,, \qquad \lambda \in \boldsymbol{R} \,.$$
Questa è l'equazione di una retta solidale con $\mathcal{S}$*, che è anche fissa nel sistema di riferimento fisso avendo come versore proprio* $\boldsymbol{\omega}$*, che come è noto ha derivata relativa nulla se e solo se ha derivata assoluta nulla.*
R. *La retta*
$$\overrightarrow{OP} = \lambda(\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2) \,, \qquad \lambda \in \boldsymbol{R} \,.$$

17. [17/2/2014 (ex)I] Un sistema rigido $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ soddisfa a un certo istante $\bar{t}$
$$\boldsymbol{v}_O = \lambda\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 \,,$$
con α, β, $\lambda > 0$ costanti.
Scrivere la velocità di trascinamento (relativa a $\mathcal{S}$) in tutti i punti dell'asse istantaneo di moto nell'istante $\bar{t}$.
Soluzione
Per definizione l'asse istantaneo di moto è la retta ove la velocità di trascinamento è parallela a $\boldsymbol{\omega}$*, e quindi uguale per tutti i punti.*
Il valore cercato dunque si ottiene come
$$\boldsymbol{v}_O \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} = \frac{\alpha\lambda}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2) \,.$$
R.
$$\frac{\alpha\lambda}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2) \,.$$

18. [17/2/2014 (ex)II] Un sistema rigido $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ soddisfa a un certo istante $\bar{t}$

$$\boldsymbol{v}_O = \lambda \boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2 + \gamma \boldsymbol{e}_3 \,,$$

con α, β, γ, $\lambda > 0$ costanti.
Scrivere la velocità di trascinamento (relativa a $\mathcal{S}$) in tutti i punti dell'asse istantaneo di moto nell'istante $\bar{t}$.
R.

$$\frac{\beta\lambda}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} (\alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2 + \gamma \boldsymbol{e}_3) \,.$$

19. [10/2/2015 (ex)I] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ che soddisfa

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} &= \lambda \boldsymbol{\omega} + \cos(\beta t) \boldsymbol{u}_1 \,, \\ \boldsymbol{\omega}(0) &= 0 \,, \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{v}_O = k \boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{X}_O(0) = 0 \,.$$

Qui λ, β, k sono costanti positive assegnate. Si supponga anche $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Determinare in funzione dei parametri assegnati le equazioni nel sistema di riferimento fisso del luogo dei punti ove la velocità di trascinamento è nulla, negli istanti in cui $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$.
Soluzione
Poiché vale

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \right]_{\mathcal{M}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \,,$$

si ha che

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \right]_{\mathcal{M}} &= \lambda \boldsymbol{\omega} + \cos(\beta t) \boldsymbol{u}_1 \,, \\ \boldsymbol{\omega}(0) &= 0 \,, \end{aligned}$$

da cui possiamo ricavare le componenti scalari di $\boldsymbol{\omega}$ in $\mathcal{M}$. Si ottiene con semplici calcoli

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{1}{\lambda^2 + \beta^2} [\lambda (e^{\lambda t} - \cos(\beta t)) + \beta \sin(\beta t)] \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Dunque il moto di $\mathcal{M}$ è una rotazione intorno alla direzione fissa $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{u}_1$.
Il campo di velocità di trascinamento è dato per definizione da

$$\boldsymbol{V}_{T}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_O(t)) \,.$$

Si ha per le ipotesi

$$\boldsymbol{X}_O(t) = k t \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Dunque, denotando con x_i le coordinate nel sistema fisso, il luogo dei punti cercati è dato dalle soluzioni di

$$\boldsymbol{V}_{T}(\boldsymbol{x},t) = k\boldsymbol{e}_2 + \omega(t)\boldsymbol{e}_1 \times [x_1\boldsymbol{e}_1 + (x_2 - kt)\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3] = 0\,.$$

R.

$$x_2 = kt\,, \quad x_3 = \frac{k}{\omega(t)}\,; \qquad \omega(t) = \frac{1}{\lambda^2+\beta^2}[\lambda(e^{\lambda t} - \cos(\beta t)) + \beta\sin(\beta t)]\,.$$

20. [10/2/2015 (ex)II] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ che soddisfa

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} &= -k\boldsymbol{\omega} + \sin(\beta t)\boldsymbol{u}_3\,, \\ \boldsymbol{\omega}(0) &= 0\,, \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{v}_O = \lambda\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{X}_O(0) = 0\,.$$

Qui λ, β, k sono costanti positive assegnate. Si supponga anche $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Determinare in funzione dei parametri assegnati le equazioni nel sistema di riferimento fisso del luogo dei punti ove la velocità di trascinamento è nulla, negli istanti in cui $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$.
R.

$$x_1 = \lambda t\,, \quad x_2 = \frac{\lambda}{\omega(t)}\,; \qquad \omega(t) = \frac{1}{k^2+\beta^2}[\beta(e^{-kt} - \cos(\beta t)) + k\sin(\beta t)]\,.$$

21. [4/6/2015 (ex)I] Sia $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_i))$ un sistema di riferimento mobile tale che

$$\boldsymbol{X}_O(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{\omega}(t) = k\boldsymbol{e}_3\,, \qquad t > 0\,,$$

con $\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{e}_i$.
Sia $\boldsymbol{X}$ un moto tale che la sua velocità relativa sia

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = c\boldsymbol{u}_1(t)\,,$$

e che $\boldsymbol{X}(0) = L\boldsymbol{u}_2(0)$. Qui L, R, c, k, $\alpha > 0$ sono costanti.
Si determini la scomposizione di $\boldsymbol{X}(t)$ nel sistema fisso.
Soluzione
Dalle condizioni date si evince che il moto di $(\boldsymbol{u}_i)$ è una rotazione costante, ossia che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(kt)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(kt)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(kt)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(kt)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Scriviamo

$$\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{X}_O(t) = \sum_{h=1}^{3} \lambda_h(t) \boldsymbol{u}_t(t) \,.$$

Allora per l'ipotesi si ha

$$\dot\lambda_1 = c \,, \quad \dot\lambda_2 = 0 \,, \quad \dot\lambda_3 = 0 \,,$$

e quindi per le condizioni iniziali

$$\lambda_1(t) = -R + ct \,, \quad \lambda_2(t) = L \,, \quad \lambda_3(t) = 0 \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

R.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(t) = {} & [R\cos(\alpha t) + (-R + ct)\cos(kt) - L\sin(kt)]\boldsymbol{e}_1 \\ & + [R\sin(\alpha t) + (-R + ct)\sin(kt) + L\cos(kt)]\boldsymbol{e}_2 \,. \end{aligned}$$

22. [4/6/2015 (ex)II] Sia $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_i))$ un sistema di riferimento mobile tale che

$$\boldsymbol{X}_O(t) = -L\sin(ct)\boldsymbol{e}_1 + L\cos(ct)\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{\omega}(t) = -k\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad t > 0 \,,$$

con $\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{e}_i$.
Sia $\boldsymbol{X}$ un moto tale che la sua velocità relativa sia

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \alpha \boldsymbol{u}_2(t) \,,$$

e che $\boldsymbol{X}(0) = R\boldsymbol{u}_2(0)$. Qui L, R, c, k, $\alpha > 0$ sono costanti.
Si determini la scomposizione di $\boldsymbol{X}(t)$ nel sistema fisso.
R.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(t) = {} & [-L\sin(ct) - L\cos(kt) + (R + \alpha t)\sin(kt)]\boldsymbol{e}_1 \\ & + [L\cos(ct) + L\sin(kt) + (R + \alpha t)\cos(kt)]\boldsymbol{e}_2 \,. \end{aligned}$$

23. [2/7/2015 (ex)I] È assegnata una terna mobile $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i(t))$, $t \in I$. Una seconda terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare relativa a $\mathcal{N}$ data da

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2 \,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti assegnate. Inoltre

$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{w}_i(0) \,, \qquad i = 1\,,2\,,3 \,.$$

Determinare $(\boldsymbol{u}_i(t))$ in funzione dei vettori $(\boldsymbol{w}_i(t))$.
SOLUZIONE

Si ha

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{u}_1 = -\beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$
$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_2}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{u}_2 = \alpha \boldsymbol{u}_3 \,,$$
$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_3}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{u}_3 = -\alpha \boldsymbol{u}_2 + \beta \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Dunque

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}_3}{\mathrm{d}t^2}\right]_{\mathcal{N}} = -\alpha \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_2}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} + \beta \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = -\gamma^2 \boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \gamma := \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \,.$$

Pertanto per $k_{ji} \in \boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{u}_3(t) = \sum_{i=1}^{3} (k_{1i} \boldsymbol{w}_i(t)) \cos(\gamma t) + \sum_{i=1}^{3} (k_{2i} \boldsymbol{w}_i(t)) \sin(\gamma t) \,.$$

Le costanti di integrazione k_{ji} *sono determinate da*

$$\boldsymbol{u}_3(0) = \boldsymbol{w}_3(0) \quad \Rightarrow \quad k_{11} = k_{12} = 0 \,, \quad k_{13} = 1 \,,$$
$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_3}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}}(0) = -\alpha \boldsymbol{w}_2(0) + \beta \boldsymbol{w}_1(0) \quad \Rightarrow \quad k_{21} = \beta\gamma^{-1} \,, \quad k_{22} = -\alpha\gamma^{-1} \,, \quad k_{23} = 0 \,.$$

Pertanto

$$\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{w}_3(t) \cos(\gamma t) + \gamma^{-1} \big(\beta \boldsymbol{w}_1(t) - \alpha \boldsymbol{w}_2(t)\big) \sin(\gamma t) \,.$$

Gli altri due vettori $\boldsymbol{u}_1$ *e* $\boldsymbol{u}_2$ *si determinano ora per integrazione diretta delle rispettive equazioni differenziali.*

R.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \beta^2\gamma^{-2} \cos(\gamma t) \boldsymbol{w}_1(t) - \alpha\beta\gamma^{-2} (\cos(\gamma t) - 1) \boldsymbol{w}_2(t) - \beta\gamma^{-1} \sin(\gamma t) \boldsymbol{w}_3(t) \,, \\
\boldsymbol{u}_2(t) &= -\alpha\beta\gamma^{-2} (\cos(\gamma t) - 1) \boldsymbol{w}_1(t) + \alpha^2\gamma^{-2} \cos(\gamma t) \boldsymbol{w}_2(t) + \alpha\gamma^{-1} \sin(\gamma t) \boldsymbol{w}_3(t) \,, \\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \beta\gamma^{-1} \sin(\gamma t) \boldsymbol{w}_1(t) - \alpha\gamma^{-1} \sin(\gamma t) \boldsymbol{w}_2(t) + \cos(\gamma t) \boldsymbol{w}_3(t) \,.
\end{aligned}$$

Qui $\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

24. [9/2/2016 (ex)I] Un sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ è tale che

$$\boldsymbol{X}_O(t) = ct\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{\omega}(t) = k\boldsymbol{u}_1(t) \,, \qquad \boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h \,, \quad h = 1,2,3 \,.$$

Qui c, $k > 0$ sono costanti assegnate.
Determinare, al variare di $\alpha \in \boldsymbol{R}$, i moti tali che

$$\boldsymbol{X}(0) = 0 \,, \qquad \boldsymbol{v}(t) = \alpha \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(t) \,, \quad \text{per ogni } t.$$

Soluzione

Cominciamo con l'osservare che a causa della forma di $\boldsymbol{\omega}$ si ha $\boldsymbol{u}_1(t) = \boldsymbol{e}_1(t)$ per ogni $t > 0$. Si ha poi come noto

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O)\,,$$

per cui i moti cercati sono caratterizzati da

$$(\alpha - 1)\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O)\,.$$

Se indichiamo

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_O(t) + \sum_{h=1}^{3} \lambda_h(t)\boldsymbol{u}_h(t)\,,$$

questa equazione vettoriale equivale al sistema

$$\begin{aligned}
(\alpha - 1)\dot{\lambda}_1 &= c\,,\\
(\alpha - 1)\dot{\lambda}_2 &= -k\lambda_3\,,\\
(\alpha - 1)\dot{\lambda}_3 &= k\lambda_2\,.
\end{aligned}$$

Se $\alpha = 1$ la prima equazione implica che non esistono i moti richiesti; altrimenti

$$\lambda_1(t) = \frac{ct}{\alpha - 1}\,.$$

La seconda e la terza equazione danno

$$\lambda_2(t)^2 + \lambda_3(t)^2 = \lambda_2(0)^2 + \lambda_3(0)^2 = 0\,.$$

Quindi l'unico moto ammissibile si ha per $\alpha \neq 1$.
R. Se $\alpha = 1$ non esistono moti ammissibili; altrimenti l'unico è

$$\boldsymbol{X}(t) = \frac{\alpha c}{\alpha - 1} t\boldsymbol{e}_1\,.$$

25. [9/2/2016 (ex)II] Un sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ è tale che

$$\boldsymbol{X}_O(t) = ct\boldsymbol{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{\omega}(t) = k\boldsymbol{u}_2(t)\,, \qquad \boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h\,, \quad h = 1,2,3\,.$$

Qui c, $k > 0$ sono costanti assegnate.
Determinare, al variare di $\alpha \in \boldsymbol{R}$, i moti tali che

$$\boldsymbol{X}(0) = 0\,, \qquad \boldsymbol{v}(t) = \alpha\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(t)\,, \quad \text{per ogni } t.$$

R. *Se $\alpha = 1$ non ci sono moti ammissibili; altrimenti essi sono tutti e soli quelli della forma*

$$\boldsymbol{X}(t) = \frac{\alpha c}{\alpha - 1} t\boldsymbol{e}_2\,.$$

26. [19/3/2016 (ex)I] Una terna $\mathcal{M}$ si muove rispetto a una terna $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ che soddisfa

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = k\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{w}_3 + \lambda\boldsymbol{w}_3\,.$$

All'istante iniziale $t = 0$ vale

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \beta \boldsymbol{w}_1 \,.$$

Qui k, λ, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.
Si determini $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$.
Soluzione
Denotiamo

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \boldsymbol{w}_i \,.$$

Allora l'equazione differenziale assegnata, ricordando che

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t} \right]_{\mathcal{M}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t} \right]_{\mathcal{N}} ,$$

dà le

$$\begin{aligned} \dot\omega_1 &= k\omega_2 \,, \\ \dot\omega_2 &= -k\omega_1 \,, \\ \dot\omega_3 &= \lambda \,. \end{aligned}$$

Si ottiene pertanto dalle prime due equazioni

$$\ddot\omega_1 + k^2 \omega_1 = 0 \,,$$

che integrata con l'aiuto delle condizioni iniziali

$$\omega_1(0) = \beta \,, \quad \omega_2(0) = 0 \,, \quad \omega_3(0) = 0 \,,$$

dà

$$\omega_1(t) = \beta \cos(kt) \,.$$

Ne segue

$$\omega_2(t) = -\beta \sin(kt) \,.$$

Infine per integrazione diretta della equazione differenziale per ω_3 si conclude

$$\omega_3(t) = \lambda t \,.$$

R.

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \beta \cos(kt) \boldsymbol{w}_1(t) - \beta \sin(kt) \boldsymbol{w}_2(t) + \lambda t \boldsymbol{w}_3(t) \,.$$

27. [7/6/2016 (ex)I] Una circonferenza γ_1 di raggio R_1 è vincolata ad avere i due estremi A e B di un diametro solidale coincidenti con due punti fissi

$$\overrightarrow{OP_1} = -R_1 \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \overrightarrow{OP_2} = R_1 \boldsymbol{e}_3 \,,$$

e quindi il centro coincidente con l'origine O. Una seconda circonferenza γ_2 di raggio $R_2 < R_1$ è vincolata ad avere il centro C_2 su γ_1, ma libero di muoversi su γ_1, e a giacere nel piano ortogonale a γ_1 in C_2.

Esprimere la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di γ_2 in termini delle opportune coordinate lagrangiane, nella base fissa.

SOLUZIONE

Usiamo il teorema di composizione delle velocità angolari. I gradi di libertà del sistema sono 3 corrispondenti alle 3 coordinate angolari

$$\varphi\,, \theta_1\,, \theta_2 \in (-\pi, \pi)\,,$$

date come specificato nel seguito. Introduciamo la terna $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ *solidale con* γ_1

$$\boldsymbol{w}_1\,, \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_3 \times \boldsymbol{w}_1\,, \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{e}_3\,,$$

ove $\boldsymbol{w}_1$ *è ortogonale al piano della circonferenza* γ_1*. Si noti che* $\boldsymbol{w}_3$ *è parallelo a* $\overrightarrow{AB}$*. Allora* φ *è tale che*

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{w}_1 = \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
&\boldsymbol{w}_2 = -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
&\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Qui $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$ *è la base fissa.*

Introduciamo una seconda terna ausiliaria $\mathcal{M}'$ *data da*

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{OC_2}}{R_1}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{w}_1\,.$$

Allora l'angolo θ_1 *è tale che*

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_1 = \cos\theta_1\,\boldsymbol{w}_2 + \sin\theta_1\,\boldsymbol{w}_3\,,\\
&\boldsymbol{u}_2 = -\sin\theta_1\,\boldsymbol{w}_2 + \cos\theta_1\,\boldsymbol{w}_3\,,\\
&\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{w}_1\,.
\end{aligned}$$

Infine θ_2 *esprime la rotazione (in un verso opportuno) di una terna* $\mathcal{M}$ *solidale con* γ_2 *intorno a* $\boldsymbol{u}_2$ *che è la tangente a* γ_1 *in* C_2*. Dunque*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}'\mathcal{M}}\\
&= \dot\varphi\boldsymbol{e}_3 + \dot\theta_1\boldsymbol{w}_1 + \dot\theta_2\boldsymbol{u}_2\\
&= \dot\varphi\boldsymbol{e}_3 + \dot\theta_1(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2)\\
&\quad + \dot\theta_2[-\sin\theta_1(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2) + \cos\theta_1\boldsymbol{e}_3]\\
&= (\dot\varphi + \dot\theta_2\cos\theta_1)\boldsymbol{e}_3 + (\dot\theta_1\cos\varphi + \dot\theta_2\sin\varphi\sin\theta_1)\boldsymbol{e}_1 + (\dot\theta_1\sin\varphi - \dot\theta_2\cos\varphi\sin\theta_1)\boldsymbol{e}_2\,.
\end{aligned}$$

R.

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot\theta_1\cos\varphi + \dot\theta_2\sin\varphi\sin\theta_1)\boldsymbol{e}_1 + (\dot\theta_1\sin\varphi - \dot\theta_2\cos\varphi\sin\theta_1)\boldsymbol{e}_2 + (\dot\varphi + \dot\theta_2\cos\theta_1)\boldsymbol{e}_3\,.$$

28. [7/6/2016 (ex)I] Un sistema mobile di riferimento $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ soddisfa

$$\boldsymbol{X}_O(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2\,,$$

e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Dire per quali valori dei parametri positivi R, α, ω, L, β il moto di P descritto in $\mathcal{S}$ come

$$\overrightarrow{OP} = L\cos(\beta t)\boldsymbol{u}_1(t) + L\sin(\beta t)\boldsymbol{u}_2(t) \,,$$

ha istanti di arresto nel sistema fisso, ossia soddisfa $\boldsymbol{v}(t) = 0$ per qualche $t \in \boldsymbol{R}$.

Soluzione

La velocità di P nel sistema fisso è data da

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP} + \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \,,$$

ove si calcola subito

$$\boldsymbol{v}_O = R\alpha[-\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2] \,, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Inoltre se il moto di P è come prescritto si ha

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = L\beta[-\sin(\beta t)\boldsymbol{u}_1(t) + \cos(\beta t)\boldsymbol{u}_2(t)] \,.$$

Dunque si ha $\boldsymbol{v}(t) = 0$ se e solo se

$$\begin{aligned}
0 &= R\alpha[-\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2] \\
&\quad + \omega \boldsymbol{u}_3 \times [L\cos(\beta t)\boldsymbol{u}_1(t) + L\sin(\beta t)\boldsymbol{u}_2(t)] \\
&\quad + L\beta[-\sin(\beta t)\boldsymbol{u}_1(t) + \cos(\beta t)\boldsymbol{u}_2(t)] \\
&= R\alpha[\sin(\omega-\alpha)t\boldsymbol{u}_1 + \cos(\omega-\alpha)t\boldsymbol{u}_2] \\
&\quad + L(\omega+\beta)[-\sin(\beta t)\boldsymbol{u}_1(t) + \cos(\beta t)\boldsymbol{u}_2(t)] \,.
\end{aligned}$$

Dunque i moti richiesti sono quelli che soddisfano

$$\begin{aligned}
R\alpha\sin(\omega-\alpha)t &= L(\omega+\beta)\sin(\beta t) \,, \\
R\alpha\cos(\omega-\alpha)t &= -L(\omega+\beta)\cos(\beta t) \,.
\end{aligned}$$

Dividendo membro a membro si ottiene, assumendo per il momento $\cos(\beta t) \neq 0$, e quindi $\cos(\omega-\alpha)t \neq 0$,

$$\operatorname{tg}(\omega-\alpha)t = -\operatorname{tg}(\beta t) \,,$$

ossia

$$(\omega-\alpha)t = -(\beta t) + k\pi \,,$$

con $k \in \boldsymbol{Z}$. Sostituendo nelle due uguaglianze sopra, si vede che sono verificate se e solo se k è dispari e si assume $R\alpha = L(\omega+\beta)$.
Il caso $\cos(\beta t) = \cos(\omega-\alpha)t = 0$ conduce ancora a $(\omega-\alpha+\beta)t = n\pi$ con $n \in \boldsymbol{Z}$ e usando solo la prima delle due uguaglianze sopra si vede ancora che n è dispari. Dunque in ogni caso si ha

$$(\omega-\alpha+\beta)t = (2h+1)\pi \,, \qquad h \in \boldsymbol{Z} \,.$$

Se $\omega - \alpha + \beta \neq 0$ *questo è vero per*

$$t = \frac{(2h+1)\pi}{\omega - \alpha + \beta}, \qquad h \in \boldsymbol{Z},$$

mentre se $\omega - \alpha + \beta = 0$ *non è mai vero.*
R.

$$R\alpha = L(\omega + \beta), \qquad \omega - \alpha + \beta \neq 0.$$

29. [6/9/2016 (ex)I] Una terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ si muove rispetto a quella fissa con con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ che obbedisce alla legge

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = -\lambda e^{-\alpha t}\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}, \qquad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 \neq 0.$$

Qui α, $\lambda > 0$ sono costanti assegnate.
Si determini se $\boldsymbol{\omega}(t) \to 0$ per $t \to t_0$ per qualche $t_0 > 0$.
SOLUZIONE
Si sa che

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = -\lambda e^{-\alpha t}\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}.$$

Dunque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{|\boldsymbol{\omega}|^2}{2} = \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = -\lambda e^{-\alpha t}|\boldsymbol{\omega}|.$$

Possiamo riscrivere allora

$$|\boldsymbol{\omega}|\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{\omega}|}{\mathrm{d}t} = -\lambda e^{-\alpha t}|\boldsymbol{\omega}|,$$

e quindi visto che stiamo assumendo $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ *(altrimenti l'equazione data non è definita)*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{\omega}(t)| = -\lambda e^{-\alpha t},$$

da cui

$$|\boldsymbol{\omega}(t)| = |\boldsymbol{\omega}(0)| - \lambda\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}.$$

Poiché

$$\inf_{t>0}\left[|\boldsymbol{\omega}(0)| - \lambda\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}\right] = \lim_{t\to+\infty}\left[|\boldsymbol{\omega}(0)| - \lambda\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}\right] = |\boldsymbol{\omega}(0)| - \lambda\frac{1}{\alpha},$$

vale $\boldsymbol{\omega}(t) \to 0$ *per* $t \to t_0 < +\infty$ *se e solo se*

$$|\boldsymbol{\omega}(0)| - \lambda\frac{1}{\alpha} < 0.$$

R. *Si ha* $\boldsymbol{\omega}(t) \to 0$ *per* $t \to t_0 < +\infty$ *se e solo se*

$$|\boldsymbol{\omega}_0| < \frac{\lambda}{\alpha}.$$

30. [17/01/2017 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e massa M è vincolata ad avere il vertice A sull'elica cilindrica γ

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos(\lambda s)\,, \\ x_2 &= R\sin(\lambda s)\,, \\ x_3 &= h\lambda s\,, \end{aligned}$$

ove R, $h > 0$ sono costanti, $\lambda = (R^2 + h^2)^{-1/2}$, cosicché $s \in \boldsymbol{R}$ è l'ascissa curvilinea. Qui le (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$.
Inoltre la diagonale $\overrightarrow{AC}$ è diretta come la normale a γ, ossia

$$\overrightarrow{AC} = \sqrt{2}L\boldsymbol{N}(s)\,.$$

Determinare la velocità angolare della lamina in funzione di due opportune coordinate lagrangiane, esprimendola nella base fissa $(\boldsymbol{e}_h)$.
Soluzione
Scegliamo come coordinate

$$r \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi)\,,$$

ove

$$\overrightarrow{OA} = R\cos(\lambda r)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\lambda r)\boldsymbol{e}_2 + h\lambda r\boldsymbol{e}_3\,,$$

e φ è l'angolo che misura la rotazione del piano della lamina $ABCD$ intorno alla diagonale $\overrightarrow{AC}$.
Calcoliamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(s) &= -\lambda R\sin(\lambda s)\boldsymbol{e}_1 + \lambda R\cos(\lambda s)\boldsymbol{e}_2 + \lambda h\boldsymbol{e}_3\,, \\ \boldsymbol{N}(s) &= \frac{\boldsymbol{T}'(s)}{|\boldsymbol{T}'(s)|} = -\cos(\lambda s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\lambda s)\boldsymbol{e}_2\,. \end{aligned}$$

Per trovare $\boldsymbol{\omega}$ usiamo la composizione di velocità angolari

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}\,.$$

Qui $\mathcal{P}$ è la terna fissa, $\mathcal{M}$ quella solidale alla lamina, e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$. Si sa che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \dot{r}(-\tau(r)\boldsymbol{T}(r) + k(r)\boldsymbol{B}(r))\,,$$

ove

$$k(s) = |\boldsymbol{T}'(s)| = \lambda^2 R\,, \qquad \tau(s) = -\lambda^2 h\,.$$

Qui τ viene ricavato dalle formule di Frenet-Serret, ossia da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{T}(s) \times \boldsymbol{N}(s) &= \lambda h\sin(\lambda s)\boldsymbol{e}_1 - \lambda h\cos(\lambda s)\boldsymbol{e}_2 + \lambda R\boldsymbol{e}_3\,, \\ \boldsymbol{B}'(s) &= -\lambda^2 h\boldsymbol{N}(s) = \tau(s)\boldsymbol{N}(s)\,. \end{aligned}$$

Infine per definizione di φ

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{N}(r) \,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{r}(\lambda^2 h\boldsymbol{T}(r) + \lambda^2 R\boldsymbol{B}(r)) + \dot{\varphi}\boldsymbol{N}(r) \,.$$

Sostituendo le scomposizioni sopra dei versori di $\mathcal{N}$ *si ottiene la scomposizione nella base* $\mathcal{P}$*.*
R.

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi}\cos(\lambda r)\boldsymbol{e}_1 - \dot{\varphi}\sin(\lambda r)\boldsymbol{e}_2 + \lambda\dot{r}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

31. [17/01/2017 (ex)II] Una sfera di raggio R e massa M è vincolata ad avere il centro A sull'elica cilindrica γ

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos(\lambda s) \,, \\ x_2 &= R\sin(\lambda s) \,, \\ x_3 &= h\lambda s \,, \end{aligned}$$

ove R, $h > 0$ sono costanti, $\lambda = (R^2 + h^2)^{-1/2}$, cosicché $s \in \boldsymbol{R}$ è l'ascissa curvilinea. Qui le (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$.
Inoltre il raggio solidale della sfera $\overrightarrow{AB}$ è diretto come la normale a γ, ossia

$$\overrightarrow{AB} = R\boldsymbol{N}(s) \,.$$

Determinare la velocità angolare della sfera in funzione di due opportune coordinate lagrangiane, esprimendola nella base fissa $(\boldsymbol{e}_h)$.
R.

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi}\cos(\lambda r)\boldsymbol{e}_1 - \dot{\varphi}\sin(\lambda r)\boldsymbol{e}_2 + \lambda\dot{r}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

32. [8/02/2017 (ex)I] Una terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ soddisfa

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha\boldsymbol{u}_1(t) + \beta\boldsymbol{u}_3(t) \,, \qquad \boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h \,, \quad h = 1\,,2\,,3 \,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti.
Si scriva l'equazione differenziale (vettoriale) di secondo ordine soddisfatta da $\boldsymbol{u}_2$, ricavandone la scomposizione di $\boldsymbol{u}_2(t)$ nella base fissa $(\boldsymbol{e}_h)$, e si riconosca che il moto di $\mathcal{M}$ è una rotazione.
Soluzione
Si ha

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_2}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_2 = \alpha\boldsymbol{u}_3 - \beta\boldsymbol{u}_1 \,,$$

e derivando ancora in modo simile

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}_2}{\mathrm{d}t^2} = -(\alpha^2 + \beta^2)\boldsymbol{u}_2 \,.$$

Dunque $\boldsymbol{u}_2$ soddisfa l'equazione dei moti armonici, che integrata dà:

$$\boldsymbol{u}_2(t) = \boldsymbol{u}_2(0)\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}t) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_2}{\mathrm{d}t}(0)\frac{\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}t)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} .$$

D'altronde per le condizioni iniziali $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$ e per il calcolo sopra

$$\boldsymbol{u}_2(0) = \boldsymbol{e}_2 , \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_2}{\mathrm{d}t}(0) = \alpha\boldsymbol{e}_3 - \beta\boldsymbol{e}_1 .$$

Il moto è una rotazione uniforme perché $\boldsymbol{\omega}$ è costante nella base mobile e dunque lo è anche nella base fissa.
R.

$$\boldsymbol{u}_2(t) = \boldsymbol{e}_2\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}t) + (\alpha\boldsymbol{e}_3 - \beta\boldsymbol{e}_1)\frac{\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}t)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} .$$

33. [8/02/2017 (ex)II] Una terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ soddisfa

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha\boldsymbol{u}_2(t) + \beta\boldsymbol{u}_3(t) , \qquad \boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h , \quad h = 1\,,2\,,3 ,$$

con α, $\beta > 0$ costanti.
Si scriva l'equazione differenziale (vettoriale) di secondo ordine soddisfatta da $\boldsymbol{u}_1$, ricavandone la scomposizione di $\boldsymbol{u}_1(t)$ nella base fissa $(\boldsymbol{e}_h)$, e si riconosca che il moto di $\mathcal{M}$ è una rotazione.
R.

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \boldsymbol{e}_1\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}t) + (-\alpha\boldsymbol{e}_3 + \beta\boldsymbol{e}_2)\frac{\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}t)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} .$$

34. [06/06/2017 (ex)I] Una lamina quadrata di lato $L > 0$ è vincolata a giacere nel piano $x_3 = 0$ e ad avere il centro C sull'ellisse

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{B^2} = 1 , \qquad x_3 = 0 ,$$

A, $B > 0$ assegnati. La lamina è anche vincolata a mantenere i punti O, C, K allineati, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso (O, x_i), e K è un vertice della lamina.
Si scriva la velocità angolare del corpo in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
Il corpo ha un grado di libertà. Introduciamo la coordinata lagrangiana $\theta \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\overrightarrow{OC} = A\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + B\sin\theta\boldsymbol{e}_2 .$$

Allora

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OC}\Big(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{L}{|\overrightarrow{OC}|}\Big) .$$

Scegliamo come terna solidale con la lamina

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \frac{\overrightarrow{CK}}{|\overrightarrow{CK}|} = \frac{A\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + B\sin\theta\boldsymbol{e}_2}{\sqrt{A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta}}\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= \frac{-B\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + A\cos\theta\boldsymbol{e}_2}{\sqrt{A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta}}\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Allora il moto è una rotazione intorno all'asse fisso $\boldsymbol{u}_3$, e

$$\boldsymbol{\omega} = \Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{u}_2\Big)\boldsymbol{u}_3 = \frac{AB}{A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta}\dot\theta\boldsymbol{e}_3\,.$$

R.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{AB}{A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta}\dot\theta\boldsymbol{e}_3\,.$$

35. [11/07/2017 (ex)I] Una lamina quadrata di lato $2L$ è vincolata ad avere il vertice A nell'origine del sistema di riferimento fisso $(O,(\boldsymbol{e}_h))$, e il vertice opposto B sulla curva

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 8L^2\,,\\
x_1 = x_2\,, &\qquad x_1 > 0\,.
\end{aligned}$$

Determinare la scomposizione della velocità angolare della lamina nella base fissa $(\boldsymbol{e}_h)$, in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
Scegliamo una terna solidale principale in A $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ con

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2\sqrt{2}L}\,,\qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{CD}}{2\sqrt{2}L}\,,\qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2\,,$$

ove $\overrightarrow{CD}$ è l'altra diagonale del quadrato. Quindi $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale alla lamina. Introduciamo le coordinate sferiche

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt{2}L\cos\varphi\sin\theta\,,\\
x_2 &= 2\sqrt{2}L\sin\varphi\sin\theta\,,\\
x_3 &= 2\sqrt{2}L\cos\theta\,,
\end{aligned}$$

con $\varphi \in (-\pi,\pi)$, $\theta \in (0,\pi)$. Allora $x_1 = x_2$ dà

$$\cos\varphi = \sin\varphi\,,$$

da cui considerando che $x_1 > 0$, segue $\varphi = \pi/4$. Pertanto la curva data risulterà parametrizzata da

$$\overrightarrow{AB} = 2L\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + 2L\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + 2\sqrt{2}L\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,,$$

$\theta \in (0,\pi)$. Scegliamo θ come coordinata lagrangiana; l'ulteriore coordinata $\psi \in (-\pi,\pi)$ misurerà la rotazione della lamina intorno ad $\overrightarrow{AB}$. In particolare si avrà

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \boldsymbol{e}_2 + \cos\theta \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Per calcolare $\boldsymbol{\omega}$ introduciamo la terna ausiliaria $\mathcal{N} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3)$ con

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta \boldsymbol{e}_2 - \sin\theta \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Dunque se $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h))$ è la terna fissa

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \,,$$

e

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot\psi \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Inoltre per calcolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}}$ troviamo

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t} &= \dot\theta \boldsymbol{w}_3 \,, \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_2}{\mathrm{d}t} &= 0 \,.
\end{aligned}$$

Essendo pertanto $\boldsymbol{w}_2$ fisso in $\mathcal{P}$ si deve avere

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = F(t) \boldsymbol{w}_2 \,.$$

Pertanto

$$\dot\theta \boldsymbol{w}_3 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t} = F(t) \boldsymbol{w}_2 \times \boldsymbol{u}_1 = -F(t) \boldsymbol{w}_3 \,.$$

R.

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\psi \Big[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \boldsymbol{e}_2 + \cos\theta \boldsymbol{e}_3 \Big] - \dot\theta \frac{\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2}{\sqrt{2}} \,.$$

36. [11/07/2017 (ex)I] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ si muove di moto tale che

$$\boldsymbol{X}_O(t) = ht\boldsymbol{e}_3 \,,$$

e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Qui h, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.
Trovare le velocità relative (scomposte in $(\boldsymbol{u}_h)$) di tutti i moti che siano rettilinei uniformi nel sistema di riferimento fisso.

Soluzione
Il moto $\boldsymbol{X}(t)$ è rettilineo uniforme nel sistema fisso se e solo se

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_1 \in \boldsymbol{R}^3 \,, \qquad t \in \boldsymbol{R} \,.$$

D'altra parte

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O) \,.$$

Sostituendo $\boldsymbol{X}_O$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_O$ da quanto sopra, insieme con $\boldsymbol{\omega} = \beta \boldsymbol{e}_3$ e con

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}_1 t \,,$$

si ottiene

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + h\boldsymbol{e}_3 + \beta \boldsymbol{e}_3 \times (\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}_1 t - ht\boldsymbol{e}_3) \,,$$

ossia

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{v}_3 + t\boldsymbol{v}_4 \,,$$

con

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 - h\boldsymbol{e}_3 - \beta \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{x}_0 \,, \qquad \boldsymbol{v}_4 = \beta \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{v}_1 \,.$$

Si noti che a causa dell'arbitrarietà di $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{x}_0$ i due vettori $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$ sono di fatto arbitrari, a parte la condizione $\boldsymbol{v}_4 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$. Dunque possiamo scrivere

$$\boldsymbol{v}_3 = \mu_1 \boldsymbol{e}_1 + \mu_2 \boldsymbol{e}_2 + \mu_3 \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{v}_4 = \nu_1 \boldsymbol{e}_1 + \nu_2 \boldsymbol{e}_2 \,,$$

con μ_h, $\nu_h \in \boldsymbol{R}$ arbitrari. Posto

$$\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{X}_O(t) = \sum_{h=1}^{3} \lambda_h(t) \boldsymbol{u}_h(t) \,,$$

segue dunque

$$\sum_{h=1}^{3} \dot{\lambda}_h(t) \boldsymbol{u}_h(t) = (\mu_1 + t\nu_1)\boldsymbol{e}_1 + (\mu_2 + t\nu_2)\boldsymbol{e}_2 + \mu_3 \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Sostituendo la scomposizione dei $\boldsymbol{e}_i$ in funzione dei $\boldsymbol{u}_h$ si ottiene la risposta.
R.

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= (\mu_1 + t\nu_1)\cos(\beta t) + (\mu_2 + t\nu_2)\sin(\beta t) \,, \\
\dot{\lambda}_2 &= -(\mu_1 + t\nu_1)\sin(\beta t) + (\mu_2 + t\nu_2)\cos(\beta t) \,, \\
\dot{\lambda}_3 &= \mu_3 \,,
\end{aligned}$$

con μ_1, μ_2, μ_3, ν_1, $\nu_2 \in \boldsymbol{R}$ arbitrari.

37. [23/07/2018 (ex)I] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ mantiene l'origine coincidente con quella del sistema di riferimento fisso e si muove di rotazione intorno all'asse $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$. L'angolo di rotazione è dato da $\varphi \in C^2(\boldsymbol{R})$, $\varphi(0) = 0$. All'istante iniziale $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Consideriamo un moto $\boldsymbol{X}$ tale che

$$\boldsymbol{X}(0) = 0 \,, \qquad \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ assegnati, non entrambi nulli.

- Determinare esplicitamente la scomposizione nella base fissa del moto $\boldsymbol{X}$.
- Trovare un vincolo olonomo mobile $f(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ soddisfatto dal moto; qui x_i denotano le coordinate nel sistema fisso.

SOLUZIONE
A) Per integrazione diretta

$$\boldsymbol{X}(t) = \alpha t \boldsymbol{u}_1 + \beta t \boldsymbol{u}_3 .$$

D'altronde

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 ,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 ,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 ,
\end{aligned}$$

e quindi

$$\boldsymbol{X}(t) = \alpha t \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \alpha t \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + \beta t \boldsymbol{e}_3 .$$

B) Si ha

$$|\boldsymbol{X}(t)|^2 = (\alpha^2 + \beta^2) t^2 .$$

Pertanto il moto soddisfa per esempio il vincolo

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (\alpha^2 + \beta^2) t^2 .$$

R.

$$\boldsymbol{X}(t) = \alpha t \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \alpha t \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + \beta t \boldsymbol{e}_3 ; \quad f(x_1, x_2, x_3, t) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (\alpha^2 + \beta^2) t^2 .$$

38. [15/01/2019 (ex)I] Un disco D di raggio R è vincolato

- a avere il centro C sulla circonferenza
$$\gamma : \qquad x_1^2 + x_2^2 = L^2 , \quad x_3 = L ;$$
- a essere ortogonale al versore
$$\boldsymbol{\nu}(C) = \frac{(-x_{1C}, -x_{2C}, L)}{\sqrt{2}L} ,$$
ossia a mantenersi tangente al cono $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$.

Si esprima la velocità angolare del disco in funzione delle opportune coordinate lagrangiane, scomposta nella base fissa.
SOLUZIONE
Il disco ha due gradi di libertà; scegliamo come coordinate lagrangiane φ, $\theta \in (-\pi, \pi)$, ove

$$\overrightarrow{OC} = L\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + L\sin\theta \boldsymbol{e}_2 + L \boldsymbol{e}_3 ,$$

mentre φ è l'angolo di rotazione del disco intorno alla sua normale, ossia a $\boldsymbol{\nu}(C)$. Per determinare $\boldsymbol{\omega}$ usiamo il teorema di composizione delle velocità angolari:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} \,,$$

ove $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$ è la terna fissa, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ è la terna solidale al disco e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ è una terna mobile ausiliaria data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos\theta\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{w}_2 &= -\sin\theta\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Il moto di $\mathcal{M}$ relativo a $\mathcal{N}$ è la rotazione di asse

$$\boldsymbol{\nu}(C) = \frac{-\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_3}{\sqrt{2}} \,,$$

e di angolo φ. Quindi

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} = \dot\varphi \frac{-\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_3}{\sqrt{2}} \,,$$

mentre è noto che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \dot\theta \boldsymbol{w}_3 \,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\dot\varphi}{\sqrt{2}}(-\cos\theta \boldsymbol{e}_1 - \sin\theta \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) + \dot\theta \boldsymbol{e}_3 \,.$$

R.

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{\dot\varphi}{\sqrt{2}} \cos\theta \boldsymbol{e}_1 - \frac{\dot\varphi}{\sqrt{2}} \sin\theta \boldsymbol{e}_2 + \Big(\frac{\dot\varphi}{\sqrt{2}} + \dot\theta\Big) \boldsymbol{e}_3 \,.$$

39. [15/01/2019 (ex)II] Una lamina quadrata Q di raggio L è vincolata

- a avere il centro C sulla circonferenza

$$\gamma : \qquad x_1^2 + x_2^2 = \frac{R^2}{2} \,, \quad x_3 = -\frac{R}{\sqrt{2}} \,;$$

- a essere ortogonale al versore

$$\boldsymbol{\nu}(C) = \frac{(-x_{1C}, -x_{2C}, -x_{3C})}{R} \,,$$

  ossia a mantenersi tangente alla sfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$.

Si esprima la velocità angolare della lamina in funzione delle opportune coordinate lagrangiane, scomposta nella base fissa.

40. [13/01/2020 (ex)I] Si consideri la parametrizzazione nell'ascissa curvilinea dell'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s \boldsymbol{e}_3 \,, \quad s \in \boldsymbol{R} \,,$$

con R, h, $\alpha > 0$ e $\alpha^2(h^2 + R^2) = 1$.
Si consideri anche il sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, ove $\boldsymbol{X}_O(t) = \boldsymbol{\psi}(ct)$ per $c > 0$ assegnato e $\mathcal{M}$ è la terna intrinseca dell'elica in $\boldsymbol{\psi}(ct)$.
Si dimostri che i moti $\boldsymbol{X}(t)$ solidali a $\mathcal{S}$ per cui vale $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_O(t)$ sono tutti e soli quelli per cui

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_O(t) + f(t)\boldsymbol{e}_3\,,$$

per un'opportuna $f \in C^2(\boldsymbol{R})$.
Per comodità ricordiamo che per l'elica:

$$\boldsymbol{T}(s) = -R\alpha\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\alpha\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{N}(s) = -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2\,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3\,, \quad k(s) = R\alpha^2\,, \quad \tau(s) = -\alpha^2 h\,.$$

41. [13/01/2020 (ex)II] Si consideri la parametrizzazione nell'ascissa curvilinea dell'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \quad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con R, h, $\alpha > 0$ e $\alpha^2(h^2 + R^2) = 1$.
Si consideri anche il sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, ove $\boldsymbol{X}_O(t) = \boldsymbol{\psi}(ct)$ per $c > 0$ assegnato e $\mathcal{M}$ è la terna intrinseca dell'elica in $\boldsymbol{\psi}(ct)$.
Si dimostri che i moti $\boldsymbol{X}(t)$ per cui vale

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_O(t) + \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(t)\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,,$$

sono tutti e soli quelli per cui

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_O(t) + f(t)\boldsymbol{e}_3\,,$$

per un'opportuna $f \in C^2(\boldsymbol{R})$.
Per comodità ricordiamo che per l'elica:

$$\boldsymbol{T}(s) = -R\alpha\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\alpha\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{N}(s) = -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2\,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3\,, \quad k(s) = R\alpha^2\,, \quad \tau(s) = -\alpha^2 h\,.$$

SOLUZIONE
Per la formula del moto relativo

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O) + \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}\,,$$

i moti cercati sono tutti e soli quelli per cui

$$\boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{X}_O(t)) = 0\,,$$

ossia quelli per cui vale per ogni t

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_O(t) + f(t)\boldsymbol{\omega}(t)\,,$$

con $f \in C^2(\boldsymbol{R})$ opportuna.
Infine ricordiamo che

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{s}(t)[-\tau(s(t))\boldsymbol{T}(s(t)) + k(s(t))\boldsymbol{B}(s(t))] = c\alpha \boldsymbol{e}_3 ,$$

come segue sostituendo i valori espliciti.

350. Dinamica relativa

1. [4/7/2005 (ex)I] Una retta $r(t)$ si muove mantenendosi sovrapposta all'asse fisso x_1, con velocità di traslazione $-\alpha t \boldsymbol{e}_1$, con $\alpha > 0$ costante.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a $r(t)$, e al tempo $t = 0$ ha velocità relativa a $r(0)$ data da $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_1$, con $v_0 > 0$.
Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} , \qquad \mu > 0 \text{ costante,}$$

ove $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ è la velocità di P relativa a $r(t)$.
Per quali valori dei parametri α, μ, v_0 il moto di P relativo a $r(t)$ è uniforme (cioè $|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}| \equiv$ costante)?
SOLUZIONE
Consideriamo un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$, che trasla rispetto al sistema di riferimento fisso, con l'origine O solidale con r, e con un asse coordinato coincidente con r. Indichiamo con s l'ascissa su quest'asse, e con $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1$ il versore corrispondente.
L'equazione di moto in $\mathcal{S}$ è

$$m\boldsymbol{a}_{\mathcal{S}} = -\mu \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{F}_{T} + \boldsymbol{F}_{C} + \mathbf{f}_{\text{vin}} ,$$

ove $\boldsymbol{a}_{\mathcal{S}}$ e $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ denotano rispettivamente accelerazione e velocità relative a $\mathcal{S}$. Proiettando su r si ottiene

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= -\mu\dot{s} + m\alpha , \\ \dot{s}(0) &= v_0 , \end{aligned}$$

dato che $\boldsymbol{F}_{C}$ e $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ sono ortogonali a $\boldsymbol{u}$, e $\boldsymbol{F}_{T} = m\alpha\boldsymbol{u}$ nel caso presente.
La velocità $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \dot{s}\boldsymbol{u}$ risulta perciò costante se e solo se

$$-\mu v_0 + m\alpha = 0 .$$

2. [4/7/2005 (ex)II] Una retta $r(t)$ si muove mantenendosi sovrapposta all'asse fisso x_1, con velocità di traslazione $\alpha t \boldsymbol{e}_1$, con $\alpha > 0$ costante.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a $r(t)$, e al tempo $t = 0$ ha velocità relativa a $r(0)$ data da $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_1$, con $v_0 < 0$.
Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} , \qquad \mu > 0 \text{ costante,}$$

ove $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ è la velocità di P relativa a $r(t)$.
Per quali valori dei parametri α, μ, v_0 il moto di P relativo a $r(t)$ è uniforme (cioè $|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}| \equiv$ costante)?
R.

$$-\mu v_0 = m\alpha$$

3. [16/5/2007 (hw)I] Un punto P di massa m è vincolato al piano ruotante $\Pi(t)$ di equazione

$$x_1 \sin(\alpha t) - x_2 \cos(\alpha t) = 0$$

(qui le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso). Si calcolino in funzione della posizione e della velocità di P le forze fittizie che agiscono su P nel sistema di riferimento $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ è data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2(t) &= -\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Si dimostri anche che il lavoro relativo

$$\int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}) \cdot \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \,\mathrm{d}t$$

dipende solo dalle posizioni di P agli istanti t_1 e t_2.
SOLUZIONE
La velocità angolare di $\mathcal{M}$ *è*

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha \boldsymbol{u}_3 \,.$$

Quindi, se, osservando che $\boldsymbol{u}_2$ *è sempre ortogonale a* Π, *denotiamo*

$$\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{X} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_3 \boldsymbol{u}_3 \,,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{T} = \boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O)] \\
= \alpha^2 \boldsymbol{u}_3 \times [\boldsymbol{u}_3 \times (\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_3 \boldsymbol{u}_3)] = -\alpha^2 \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \,.
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\boldsymbol{a}_{C} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = 2\alpha \boldsymbol{u}_3 \times (\dot{\lambda}_1 \boldsymbol{u}_1 + \dot{\lambda}_3 \boldsymbol{u}_3) = 2\alpha \dot{\lambda}_1 \boldsymbol{u}_2 \,.$$

Pertanto

$$\boldsymbol{F}_{T} = m\alpha^2 \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \,, \qquad \boldsymbol{F}_{C} = -2m\alpha \dot{\lambda}_1 \boldsymbol{u}_2 \,.$$

Infine

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{F}_{T} + \boldsymbol{F}_{C}) \cdot \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{F}_{T} + \boldsymbol{F}_{C}) \cdot (\dot{\lambda}_1 \boldsymbol{u}_1 + \dot{\lambda}_3 \boldsymbol{u}_3) \,\mathrm{d}t \\
= \int_{t_1}^{t_2} m\alpha^2 \lambda_1 \dot{\lambda}_1 \,\mathrm{d}t = m\alpha^2 \frac{\lambda_1^2(t_2) - \lambda_1^2(t_1)}{2} \,.
\end{aligned}$$

R. *Se* $\overrightarrow{OP} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_3 \boldsymbol{u}_3$*:*

$$\boldsymbol{F}_{T} = m\alpha^2 \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \,, \qquad \boldsymbol{F}_{C} = -2m\alpha\dot{\lambda}_1 \boldsymbol{u}_2 \,;$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{F}_{T} + \boldsymbol{F}_{C}) \cdot \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \, \mathrm{d}t = m\alpha^2 \frac{\lambda_1^2(t_2) - \lambda_1^2(t_1)}{2} \,.$$

4. [15/7/2009 (ex)I] Consideriamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\omega t \, \boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t \, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\omega t \, \boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t \, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Indichiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$. Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra di raggio R di equazioni

$$y_1^2 + y_2^2 = R^2 \,, \qquad y_3 = 0 \,.$$

La circonferenza è solidale con $\mathcal{S}$.
Il punto P è soggetto alla reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$, che soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| = \mu \left| [\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}]_{\perp} \right| \,,$$

ove $\mu > 0$ è costante e $[\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}]_{\perp}$ indica la componente di $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ normale alla circonferenza. Inoltre $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ ha componente tangenziale diretta in modo tale da opporsi al moto di P (relativo alla circonferenza).

1. Scrivere l'equazione di moto di P (almeno fino al primo istante in cui ha velocità nulla in $\mathcal{S}$), sapendo che all'istante iniziale

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{u}_1(0) \,, \qquad \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = v_0 \boldsymbol{u}_2(0) \,,$$

   con $v_0 > 0$.

2. Dimostrare che in effetti $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(\bar{t}) = 0$ per qualche $\bar{t} > 0$.

SOLUZIONE
1) Scegliendo l'ascissa curvilinea s sulla circonferenza γ in modo opportuno, questa risulta parametrizzata da

$$R \cos \frac{s}{R} \boldsymbol{u}_1 + R \sin \frac{s}{R} \boldsymbol{u}_2 \,,$$

cosicché

$$\boldsymbol{T}(s) = -\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1 + \cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_2 \,, \quad \boldsymbol{N}(s) = -\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1 - \sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_2 \,, \quad \boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{u}_3 \,,$$

$$k(s) = \frac{1}{R} \,.$$

Prendiamo s come coordinata per P; allora

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(t) = \dot{s}(t)\boldsymbol{T}(s(t)) .$$

In $\mathcal{S}$ su P agiscono anche le forze fittizie: la forza di trascinamento

$$\boldsymbol{F}_{T} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}) = m\omega^2\overrightarrow{OP} = -m\omega^2 R\boldsymbol{N} ,$$

e quella di Coriolis

$$\boldsymbol{F}_{C} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = -2m\omega\dot{s}\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{T} = -2m\omega\dot{s}\boldsymbol{N} .$$

Dunque l'equazione di moto proiettata sulla terna intrinseca dà

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} , \\ m\frac{\dot{s}^2}{R} &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} - m\omega^2 R - 2m\omega\dot{s} , \\ 0 &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} . \end{aligned}$$

Perciò l'equazione di moto, almeno finché $\dot{s} \geq 0$ (si noti che $\dot{s}(0) = v_0 > 0$), è data da

$$m\ddot{s} = \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = -\left|\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}\right| = -\mu\left|\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N}\right| = -\mu\Big(m\frac{\dot{s}^2}{R} + m\omega^2 R + 2m\omega\dot{s}\Big) . \qquad (1)$$

2) Senz'altro, dalla (1) si ha, finché $\dot{s} \geq 0$,

$$\ddot{s} \leq -\mu\omega^2 R ,$$

e dunque

$$\dot{s}(t) \leq \dot{s}(0) - \mu\omega^2 Rt = v_0 - \mu\omega^2 Rt ,$$

che implica che $\dot{s}(\bar{t}) = 0$ per qualche istante $\bar{t} < v_0/(\mu\omega^2 R)$.
R.

$$1) \qquad \ddot{s} = -2\mu\omega\dot{s} - \frac{\mu}{R}\dot{s}^2 - \mu\omega^2 R ;$$
$$2) \qquad \dot{s}(\bar{t}) = 0 , \quad \textit{per un } \bar{t} < v_0/(\mu\omega^2 R).$$

5. [15/7/2009 (ex)II] Consideriamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 . \end{aligned}$$

Indichiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$. Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra di raggio R di equazioni

$$y_1^2 + y_2^2 = R^2 , \qquad y_3 = R .$$

La circonferenza è solidale con $\mathcal{S}$.
Il punto P è soggetto alla reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}$, che soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| = \mu \, |[\mathbf{f}_{\text{vin}}]_{\perp}| \ ,$$

ove $\mu > 0$ è costante e $[\mathbf{f}_{\text{vin}}]_{\perp}$ indica la componente di $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ normale alla circonferenza. Inoltre $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ ha componente tangenziale diretta in modo tale da opporsi al moto di P (relativo alla circonferenza).

1. Scrivere l'equazione di moto di P (almeno fino al primo istante in cui ha velocità nulla in $\mathcal{S}$), sapendo che all'istante iniziale

   $$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{u}_2(0) \, , \qquad \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = -v_0 \boldsymbol{u}_1(0) \, ,$$

   con $v_0 > 0$.

2. Dimostrare che in effetti $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(\bar{t}) = 0$ per qualche $\bar{t} > 0$.

R.

$$1) \qquad \ddot{s} = -2\mu\omega\dot{s} - \frac{\mu}{R}\dot{s}^2 - \mu\omega^2 R \, ;$$
$$2) \qquad \dot{s}(\bar{t}) = 0 \, , \quad \textit{per un } \bar{t} < v_0/(\mu\omega^2 R).$$

6. [22/2/2010 (ex)I] Un piano mobile $\Pi(t)$ si muove mantenendosi sovrapposto al piano fisso $y_3 = 0$, con velocità di traslazione data da

$$\alpha t \boldsymbol{e}_2 \, ;$$

qui (y_i) indica la terna delle coordinate nel sistema di riferimento fisso. Un punto materiale P è vincolato a $\Pi(t)$ e sottoposto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + k x_1 \boldsymbol{e}_1 \ ,$$

ove (x_i) indica la terna di coordinate nel sistema solidale con $\Pi(t)$ dato da $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{e}_i)$; si assume che $O(0)$ coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso e che il piano $\Pi(t)$ coincida con $x_3 = 0$. Qui α, μ e k sono costanti positive.
Scrivere le equazioni di moto di P.
Soluzione
Si ha per le ipotesi che

$$\boldsymbol{v}_O(t) = \alpha t \boldsymbol{e}_2 \, .$$

Inoltre è chiaro che la velocità angolare di $\mathcal{S}$ è data da $\boldsymbol{\omega} = 0$. Quindi in $\mathcal{S}$ le forze fittizie sono date da

$$\boldsymbol{F}_T = -m\boldsymbol{a}_T = -m\boldsymbol{a}_O = -m\alpha \boldsymbol{e}_2 \, , \qquad \boldsymbol{F}_C = 0 \, .$$

Le equazioni di moto sono dunque date da

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 &= -\mu\dot{x}_1 + kx_1 \,, \\
m\ddot{x}_2 &= -\mu\dot{x}_2 - m\alpha \,.
\end{aligned}
$$

R.

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 &= -\mu\dot{x}_1 + kx_1 \,, \\
m\ddot{x}_2 &= -\mu\dot{x}_2 - m\alpha \,.
\end{aligned}
$$

7. [22/2/2010 (ex)II] Un piano mobile $\Pi(t)$ si muove mantenendosi sovrapposto al piano fisso $y_3 = 0$, con velocità di traslazione data da

$$
\alpha t \boldsymbol{e}_1 \,;
$$

qui (y_i) indica la terna delle coordinate nel sistema di riferimento fisso. Un punto materiale P è vincolato a $\Pi(t)$ e sottoposto alla forza

$$
\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + k\boldsymbol{e}_2 \,,
$$

ove (x_i) indica la terna di coordinate nel sistema solidale con $\Pi(t)$ dato da $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{e}_i)$; si assume che $O(0)$ coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso e che il piano $\Pi(t)$ coincida con $x_3 = 0$. Qui α, μ e k sono costanti positive.
Scrivere le equazioni di moto di P.
R.

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 &= -\mu\dot{x}_1 - m\alpha \,, \\
m\ddot{x}_2 &= -\mu\dot{x}_2 + k \,.
\end{aligned}
$$

8. [20/1/2014 (ex)I] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}
$$

Se indichiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$, un punto materiale P di massa m è vincolato ad appartenere alla circonferenza solidale con $\mathcal{S}$

$$
(y_1 - L)^2 + y_2^2 = R^2 \,, \qquad y_3 = 0 \,,
$$

ove L, $R > 0$. Il vincolo è con attrito e la reazione vincolare soddisfa

$$
|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| \le \mu \, |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N}\, \boldsymbol{N} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B}\, \boldsymbol{B}| \;,
$$

con $\mu > 0$ assegnato.
Trovare le eventuali posizioni di equilibrio di P relative a $\mathcal{S}$.
SOLUZIONE
In $\mathcal{S}$ agiscono su P, all'equilibrio, la forza d'attrito e quella di trascinamento, che assume la forma

$$\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}) = m\omega^2(y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2)\,.$$

All'equilibrio dunque, proiettando l'equazione di moto sulla terna intrinseca si ottiene il sistema

$$\begin{aligned}
0 &= m\omega^2(y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2) \cdot \boldsymbol{T} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}\,,\\
0 &= m\omega^2(y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2) \cdot \boldsymbol{N} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N}\,,\\
0 &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B}\,,
\end{aligned}$$

ove si è già tenuto conto che $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_3$ è ortogonale a $\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T}$.
Sulla circonferenza introduciamo la parametrizzazione

$$\begin{cases} y_1 = L + R\cos\varphi\,,\\ y_2 = R\sin\varphi\,, \end{cases} \qquad 0 \le \varphi < 2\pi\,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{T} = -\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{u}_2\,, \qquad \boldsymbol{N} = -\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 - \sin\varphi\boldsymbol{u}_2\,.$$

Perciò le equazioni di moto divengono

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} &= m\omega^2 L\sin\varphi = m\omega^2\frac{L}{R}y_2\,,\\
\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N} &= m\omega^2(L\cos\varphi + R) = m\omega^2\frac{L}{R}\Big(y_1 + \frac{R^2 - L^2}{L}\Big)\,.
\end{aligned}$$

R. *I punti di possibile equilibrio sono quelli sulla circonferenza che soddisfano*

$$|y_2| \le \mu\left|y_1 - L + \frac{R^2}{L}\right|\,.$$

9. [20/1/2014 (ex)II] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Se indichiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$, un punto materiale P di massa m è vincolato ad appartenere alla circonferenza solidale con $\mathcal{S}$

$$(y_1 - L)^2 + y_2^2 = R^2\,, \qquad y_3 = 0\,,$$

ove L, $R>0$. Il vincolo è con attrito e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{T}|=\nu\,|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{N}+\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{B}|\;,$$

con $\nu>0$ assegnato.
Scrivere l'equazione del moto di P relativo a $\mathcal{S}$.
R.

$$m\ddot{s}=-m\omega^2L\sin\frac{s}{R}-\operatorname{sign}(\dot{s})\nu\left|m\frac{\dot{s}^2}{R}+2m\omega\dot{s}+m\omega^2\Big(L\cos\frac{s}{R}+R\Big)\right|\,.$$

10. [12/1/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato al piano mobile scabro Π di equazione

$$\alpha\cos(\lambda t)x_1+\alpha\sin(\lambda t)x_2+\beta x_3=0\,,$$

ove $\alpha^2+\beta^2=1$, α, β, $\lambda>0$ sono costanti assegnate.
Sul punto agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$. La forza di attrito statico esercitata dal piano è tale che

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right|\le\mu\,|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\;,$$

con $\mu>0$.
Scrivere la condizione per l'esistenza di punti di equilibrio per P relativo al piano mobile Π, in funzione di due opportune coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
Scriviamo il bilancio delle forze nel sistema mobile solidale con Π, $\mathcal{S}=(O,(\boldsymbol{u}_h))$, con O origine del sistema fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1&=-\sin(\lambda t)\boldsymbol{e}_1+\cos(\lambda t)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2&=\boldsymbol{u}_3\times\boldsymbol{u}_1=-\beta\cos(\lambda t)\boldsymbol{e}_1-\beta\sin(\lambda t)\boldsymbol{e}_2+\alpha\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_3&=\alpha\cos(\lambda t)\boldsymbol{e}_1+\alpha\sin(\lambda t)\boldsymbol{e}_2+\beta\boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Si vede con i calcoli che

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t}=\lambda\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{u}_h\,,\qquad h=1{,}2{,}3\,,$$

e dunque la velocità angolare della terna $(\boldsymbol{u}_h)$ è data da

$$\boldsymbol{\omega}=\lambda\boldsymbol{e}_3=\lambda(\alpha\boldsymbol{u}_2+\beta\boldsymbol{u}_3)\,,$$

poiché $\boldsymbol{\omega}$ è univocamente determinata da tale proprietà. In alternativa si poteva trovare $\boldsymbol{\omega}$ usando la nota espressione delle sue componenti. Scegliamo come coordinate lagrangiane $(x,y)\in\boldsymbol{R}^2$ in modo che

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{u}_1+y\boldsymbol{u}_2\,.$$

All'eventuale equilibrio in $\mathcal{S}$ agiscono su P la forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3=-mg(\alpha\boldsymbol{u}_2+\beta\boldsymbol{u}_3)\,,$$

la reazione vincolare

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = \sum_{h=1}^{3} f_h \boldsymbol{u}_h \,,$$

e la forza di trascinamento

$$\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}) = -m\lambda^2(-x\boldsymbol{u}_1 - \beta^2 y\boldsymbol{u}_2 + \alpha\beta y\boldsymbol{u}_3) \,.$$

Dunque all'equilibrio si deve avere

$$\begin{aligned} f_1 + m\lambda^2 x &= 0 \,, \\ f_2 - mg\alpha + m\lambda^2\beta^2 y &= 0 \,, \\ f_3 - mg\beta - m\lambda^2\alpha\beta y &= 0 \,. \end{aligned}$$

Usando queste equazioni la condizione

$$f_1^2 + f_2^2 \le \mu^2 f_3^2$$

diviene la condizione cercata sulle x, y.
R.

$$\lambda^4 x^2 + \lambda^4\beta^2(\beta^2 - \mu^2\alpha^2)y^2 - 2g\lambda^2\alpha\beta^2(1+\mu^2)y \le g^2(\mu^2\beta^2 - \alpha^2) \,.$$

11. [12/1/2015 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato al piano mobile scabro $\mathit{\Pi}$ di equazione

$$\alpha\cos(\lambda t)x_1 + \alpha\sin(\lambda t)x_2 - \beta x_3 = 0 \,,$$

ove $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, α, β, $\lambda > 0$ sono costanti assegnate.
Sul punto agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$. La forza di attrito statico esercitata dal piano è tale che

$$\left|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}\right| \le \mu \left|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}\right| \,,$$

con $\mu > 0$.
Scrivere la condizione per l'esistenza di punti di equilibrio per P relativo al piano mobile $\mathit{\Pi}$, in funzione di due opportune coordinate lagrangiane.
R.

$$\lambda^4 x^2 + \lambda^4\beta^2(\beta^2 - \mu^2\alpha^2)y^2 + 2g\lambda^2\alpha\beta^2(1+\mu^2)y \le g^2(\mu^2\beta^2 - \alpha^2) \,.$$

450. Corpi rigidi: moti polari

1. [4/7/2005 (ex)I] Un cilindro retto circolare omogeneo di massa m, raggio R e altezza h precede intorno al suo centro di massa G. Al tempo $t = 0$ la sua velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ nel sistema di riferimento fisso è

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{01}\boldsymbol{u}_1 + \omega_{03}\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \omega_{01} \,, \omega_{03} > 0 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ sono i versori del sistema di riferimento solidale con il cilindro, con origine in G. In particolare $\boldsymbol{u}_3$ è diretto come l'asse del cilindro.
Il cilindro è soggetto a un momento delle forze esterne (polo G)

$$\boldsymbol{M} = \lambda \cos(kt)\boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove λ, $k > 0$.
Determinare il valore massimo raggiunto da $|\boldsymbol{\omega}(t)|^2$ durante il moto.
Soluzione
Usiamo le equazioni di Eulero per ricavare $\boldsymbol{\omega}(t)$. Il tensore d'inerzia nel sistema di riferimento solidale indicato vale

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{diag}(I_{11}, I_{11}, I_{33}) \,,$$

per la simmetria del cilindro. Perciò le equazioni di Eulero si scrivono come

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 \,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 \,, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= \lambda \cos(kt) \,. \end{aligned}$$

Dalla terza di queste equazioni si ricava subito

$$\omega_3(t) = \frac{\lambda}{I_{33}k} \sin(kt) + \omega_{03} \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

Dalle prime due si ottiene per ogni t

$$\dot{\omega}_1\omega_1 + \dot{\omega}_2\omega_2 = 0 \,,$$

per cui

$$\omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2 = \omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2 = \omega_{01}^2 \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

Quindi

$$|\boldsymbol{\omega}(t)|^2 = \omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2 + \omega_3(t)^2 = \omega_{01}^2 + \Big(\frac{\lambda}{I_{33}k} \sin(kt) + \omega_{03}\Big)^2 \,.$$

Dato che $\omega_{03} > 0$ il massimo viene raggiunto quando $\sin(kt) = 1$, ossia

$$\max_{t \geq 0} |\boldsymbol{\omega}(t)|^2 = \omega_{01}^2 + \Big(\frac{\lambda}{I_{33}k} + \omega_{03}\Big)^2 \,.$$

2. [4/7/2005 (ex)II] Un cono retto circolare omogeneo di massa m, raggio di base R e altezza h precede intorno al suo centro di massa G. Al tempo $t = 0$ la sua velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ nel sistema di riferimento fisso è

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{02}\boldsymbol{u}_2 + \omega_{03}\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \omega_{02} \,, \omega_{03} > 0 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ sono i versori del sistema di riferimento solidale con il cono, con origine in G. In particolare $\boldsymbol{u}_2$ è diretto come l'asse del cono.
Il cono è soggetto a un momento delle forze esterne (polo G)

$$\boldsymbol{M} = k \sin(\lambda t)\boldsymbol{u}_2 \,,$$

ove λ, $k > 0$.
Determinare il valore massimo raggiunto da $|\boldsymbol{\omega}(t)|^2$ durante il moto.
R.

$$\omega_{03}^2 + \Bigl(\omega_{02} + \frac{2k}{I_{22}\lambda}\Bigr)^2 .$$

3. [18/7/2005 (ex)I] Un cubo omogeneo di massa m e spigolo $2L$ precede intorno al suo centro di massa C. Il cubo è soggetto a una forza $\boldsymbol{F}$ di modulo costante μ, applicata a un suo vertice A; $\boldsymbol{F}$ si mantiene sempre ortogonale a $\overrightarrow{CA}$, e costante nel sistema di riferimento solidale con il cubo.
Sapendo che per $t = 0$ la velocità angolare del cubo nel sistema di riferimento fisso è nulla, dimostrare che il moto è una rotazione e determinare il primo istante $t_1 > 0$ in cui A torna a occupare la sua posizione iniziale.
SOLUZIONE
Scegliamo un sistema di riferimento solidale con il cubo $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, *con* $\boldsymbol{u}_1$ *parallelo a* $\overrightarrow{CA}$ *e* $\boldsymbol{u}_2$ *parallelo a* $\boldsymbol{F}$. *Per motivi di simmetria, in questo sistema di riferimento, come in ogni altro sistema di riferimento solidale con origine in* C,

$$\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{diag}(I, I, I) ,$$

ove I *è il momento d'inerzia centrale. Si ha, scegliendo come polo* C,

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = \overrightarrow{CA} \times \boldsymbol{F} = \sqrt{3}L\mu\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \sqrt{3}L\mu\boldsymbol{u}_3 .$$

Dunque le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I\dot{\omega}_1 &= 0 , \\ I\dot{\omega}_2 &= 0 , \\ I\dot{\omega}_3 &= \sqrt{3}L\mu , \end{aligned}$$

da cui, usando il dato iniziale $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \sqrt{3}\frac{L\mu}{I}t\boldsymbol{u}_3 .$$

Quindi il moto è una rotazione (non uniforme) intorno alla retta fissa per C *con direzione* $\boldsymbol{u}_3$.
Il primo istante $t_1 > 0$ *in cui* A *torna a occupare la sua posizione iniziale sarà perciò quello in cui* A *compie il primo giro nel suo moto circolare; se chiamiamo* θ *la coordinata angolare di* A *nel piano ortogonale a* $\boldsymbol{u}_3$ *cui appartiene, è noto che*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\theta}(t)\boldsymbol{u}_3 , \quad \text{ossia} \quad \theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \omega_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{3}\frac{L\mu}{2I}t^2 .$$

Ne segue che $\theta(t) - \theta(0) = 2\pi$ *quando*

$$t = t_1 = \sqrt{\frac{4\pi I}{\sqrt{3}L\mu}} .$$

4. [18/7/2005 (ex)I] Una lamina quadrata omogenea di lato $2L$ e massa m è vincolata a ruotare intorno all'asse comune di due suoi lati opposti, che coincide con l'asse x_3 del riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3).
Inoltre il centro di massa della lamina è fisso.
I vincoli sono lisci.
Sulla lamina agisce una densità di forza

$$\lambda x_2 \boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \lambda > 0 \text{ costante.}$$

Sapendo che all'istante iniziale la lamina giace sul piano $x_1 = 0$, ed è ferma, determinarne l'energia cinetica nel primo istante positivo $t_1 > 0$ in cui la lamina torna a giacere sul piano $x_1 = 0$.
SOLUZIONE
Scegliamo un sistema di riferimento solidale con la lamina $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, con $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{u}_1$ ortogonale al piano della lamina. In questo sistema di riferimento

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \boldsymbol{u}_3 = \omega_3 \boldsymbol{e}_3 \,,$$

e quindi la terza equazione di Eulero è

$$I_{33}\dot{\omega}_3 = \boldsymbol{M}^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3 \,,$$

se $\boldsymbol{M}^{\text{ext}}$ indica il momento delle forze esterne (con polo in O). D'altronde, il momento delle reazioni vincolari ha componente nulla lungo $\boldsymbol{u}_3$, perché il vincolo è liscio.
Per calcolare $\boldsymbol{M}^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3$ parametrizziamo così la lamina: indicando con θ l'angolo formato dal piano della lamina con il piano fisso $x_2 = 0$, si ha nel sistema di riferimento fisso per il generico punto della lamina

$$P(s, r) = (s\cos\theta, s\sin\theta, r) \,, \qquad -L \le s \,, r \le L \,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{M}^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3 = \int_{-L}^{L} \mathrm{d}s \int_{-L}^{L} \mathrm{d}r (s\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + s\sin\theta \boldsymbol{e}_2 + r\boldsymbol{e}_3) \times \lambda s \sin\theta \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3$$
$$= -\frac{4}{3} L^4 \lambda \sin^2\theta \,.$$

Tenendo presente che $\omega_3 = \dot{\theta}$, la terza equazione di Eulero diviene

$$I_{33}\ddot{\theta} = -\frac{4}{3} L^4 \lambda \sin^2\theta \,, \tag{1}$$

da cui

$$I_{33}\ddot{\theta}\dot{\theta} = -\frac{4}{3} L^4 \lambda \dot{\theta} \sin^2\theta \,,$$

e integrando sull'intervallo $[0, t]$

$$I_{33}\dot{\theta}(t)^2 = I_{33}\dot{\theta}(0)^2 - \frac{4}{3} L^4 \lambda \Big(\theta(t) - \theta(0) - \frac{\sin 2\theta(t) - \sin 2\theta(0)}{2} \Big) \,.$$

Ricordando che all'istante $t = 0$ si ha

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \dot\theta(0) = 0\,,$$

si ottiene nell'istante t_1 in cui $\theta(t_1) = -\pi/2$,

$$I_{33}\dot\theta(t_1)^2 = -\frac{4}{3}L^4\lambda\Big(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{4}{3}\pi L^4\lambda\,,$$

e infine

$$T(t_1) = \frac{1}{2}I_{33}\dot\theta(t_1)^2 = \frac{2}{3}\pi L^4\lambda\,.$$

Si noti che i vincoli permetterebbero alla lamina di giacere di nuovo sul piano $x_1 = 0$ in corrispondenza di uno qualsiasi dei due valori

$$\theta(t_1) = -\frac{\pi}{2} \quad e \quad \theta(t_1) = \frac{3}{2}\pi\,.$$

Il primo è quello corretto secondo l'equazione di moto (1) che in effetti implica subito che durante il moto $\dot\theta$ è sempre non crescente. Se poi si opera la scelta (sbagliata) $\theta(t_1) = 3\pi/2$ si trova $T(t_1) < 0$.

R.

$$\frac{2}{3}\pi L^4\lambda\,.$$

5. [18/7/2005 (ex)II] Una sfera omogenea di massa m e raggio R precede intorno al suo centro di massa. La sfera è soggetta a una forza $\boldsymbol{F}$ di modulo costante λ, applicata a un punto A della sua superficie, solidale con la sfera medesima. La forza $\boldsymbol{F}$ si mantiene sempre tangente a una circonferenza massima della sfera, anch'essa solidale con la sfera medesima.
Sapendo che per $t = 0$ la velocità angolare della sfera nel sistema di riferimento fisso è nulla, dimostrare che il moto è una rotazione e determinare il primo istante $t_1 > 0$ in cui A torna a occupare la sua posizione iniziale.
R. *Se I è il momento d'inerzia centrale,*

$$t_1 = \sqrt{\frac{4\pi I}{R\lambda}}\,.$$

6. [18/7/2005 (ex)II] Una lamina quadrata omogenea di lato $2L$ e massa m è vincolata a ruotare intorno all'asse comune di due suoi lati opposti, che coincide con l'asse x_1 del riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3).
Inoltre il centro di massa della lamina è fisso.
I vincoli sono lisci.
Sulla lamina agisce una densità di forza

$$\mu x_3 \boldsymbol{e}_2\,, \qquad \mu > 0 \text{ costante.}$$

Sapendo che all'istante iniziale la lamina giace sul piano $x_2 = 0$, ed è ferma, determinarne l'energia cinetica nel primo istante positivo $t_1 > 0$ in cui la lamina giace sul piano $x_3 = 0$.
R.

$$T = \frac{1}{2} I_{11} \dot\theta^2 = \frac{1}{3} L^4 \lambda \pi \,.$$

7. [12/9/2005 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di raggio $R > 0$ ha il centro coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3), ed è vincolata a ruotare intorno all'asse verticale x_3. I suoi punti di intersezione $A = (0,0,-R)$ e $B = (0,0,R)$ con tale asse sono fissi.
Ciascuna delle due semicirconferenze γ_1 e γ_2 in cui γ è divisa dai punti A e B è omogenea, di massa rispettivamente m_1 e m_2.
All'istante iniziale γ giace sul piano $x_1 = 0$, con γ_1 nel semipiano $x_2 \geq 0$, e $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{30} \boldsymbol{e}_3$, $\omega_{30} > 0$.
Su γ agiscono il peso e le reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^A$ e $\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^B$.
Si determinino le componenti nella base fissa $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, di

$$\boldsymbol{\mu} = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{f}_{\text{vin}}{}^A + \overrightarrow{OB} \times \mathbf{f}_{\text{vin}}{}^B \,,$$

come funzioni esplicite di m_1, m_2, R, g, ω_{30} e t.
SOLUZIONE
Scegliamo una base solidale con γ, $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ in modo che $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$, e

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{G_2 G_1}}{\left|\overrightarrow{G_2 G_1}\right|} \,,$$

ove G_i è il centro di massa di γ_i, $i = 1, 2$. Questa terna è principale d'inerzia in O. Scegliendo come polo O, per la seconda equazione cardinale si ha

$$d\boldsymbol{u}_1 \times (-m_1 g \boldsymbol{u}_3) + d(-\boldsymbol{u}_1) \times (-m_2 g \boldsymbol{u}_3) + \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega} \,,$$

se denotiamo con $d > 0$ la comune distanza di ciascuno dei G_i dall'asse x_3. Dunque le tre equazioni di Eulero si riducono nell'ordine a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{u}_1 &= 0 \,, \\ \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{u}_2 &= (m_2 - m_1) d g \,, \\ I_{33} \dot\omega_3 &= 0 \,; \end{aligned}$$

infatti $\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0$ perché i vincoli sono lisci.
Si ricava intanto

$$\omega_3(t) = \omega_{30} \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

Dunque l'angolo formato dal piano della circonferenza con il piano fisso $x_1 = 0$ all'istante t sarà $\theta(t) = \omega_{30} t$.
Infine

$$\boldsymbol{\mu} = (m_2 - m_1) d g \boldsymbol{u}_2 = (m_2 - m_1) d g \big[-\cos(\omega_{30} t) \boldsymbol{e}_1 - \sin(\omega_{30} t) \boldsymbol{e}_2 \big] \,.$$

Resta da calcolare d in funzione di R; un calcolo elementare dà $d = 2R/\pi$.

8. [12/9/2005 (ex)II] Una circonferenza materiale γ di raggio $R > 0$ ha il centro coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso

$$(O, x_1, x_2, x_3)\,,$$

ed è vincolata a ruotare intorno all'asse verticale x_2. I suoi punti di intersezione $A = (0, -R, 0)$ e $B = (0, R, 0)$ con tale asse sono fissi.
Ciascuna delle due semicirconferenze γ_1 e γ_2 in cui γ è divisa dai punti A e B è omogenea, di massa rispettivamente m_1 e m_2.
All'istante iniziale γ giace sul piano $x_1 = 0$, con γ_1 nel semipiano $x_3 \geq 0$, e $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{20}\boldsymbol{e}_2$, $\omega_{20} > 0$.
Su γ agiscono il peso e le reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^{A}$ e $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^{B}$.
Si determinino le componenti nella base fissa $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, di

$$\boldsymbol{\mu} = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^{A} + \overrightarrow{OB} \times \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^{B}\,,$$

come funzioni esplicite di m_1, m_2, R, g, ω_{20} e t.
R.

$$\boldsymbol{\mu} = (m_2 - m_1)\frac{2R}{\pi} g\big[\cos(\omega_{20}t)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\omega_{20}t)\boldsymbol{e}_3\big]\,.$$

9. [15/12/2005 (ex)I] Un cilindro retto di massa m, raggio R e altezza H precede intorno al suo centro O, con vincolo liscio. All'istante iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0 \boldsymbol{u}_3(0)\,, \qquad \omega_0 > 0\,,$$

se $\boldsymbol{u}_3$ denota il versore della direzione dell'asse del cilindro.
Il cilindro è soggetto a un momento delle forze esterne (rispetto a O)

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}}(t) = -\mu\sqrt{|\boldsymbol{\omega}(t)|}\boldsymbol{u}_3(t)\,,$$

ove $\mu > 0$ è costante.
Descrivere il moto del cilindro fino all'istante in cui si arresta.
SOLUZIONE
Scegliamo un sistema di riferimento solidale con il cilindro $(O, \boldsymbol{u}_i)$, ove $\boldsymbol{u}_3$ si mantiene allineato con l'asse del cilindro. Le equazioni di Eulero, in questo sistema (che è principale), sono

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3\,,\\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3\,,\\
I_{33}\omega_3 &= -\mu\sqrt[4]{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}\,,
\end{aligned}$$

con le condizioni iniziali

$$\omega_1(0) = 0\,, \qquad \omega_2(0) = 0\,, \qquad \omega_3(0) = \omega_0\,.$$

Moltiplicando la i-esima equazione per ω_i, $i = 1, 2$, e sommando le due equazioni si ha

$$I_{11}(\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2) = 0\,,$$

da cui, integrando in t,

$$\omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2 = \omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2 = 0\,, \qquad \text{per ogni } t \geq 0.$$

Sostituendo nella terza equazione di Eulero, si ha

$$I_{33}\dot{\omega}_3 = -\mu\sqrt[4]{\omega_3^2} = -\mu\sqrt{\omega_3}\,,$$

almeno nell'intervallo massimale $[0, \bar{t})$ ove $\omega_3 > 0$. In tale intervallo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\sqrt{\omega_3}) = \frac{\dot{\omega}_3}{\sqrt{\omega_3}} = -\frac{\mu}{I_{33}}\,,$$

da cui

$$\sqrt{\omega_3(t)} - \sqrt{\omega_0} = -\frac{\mu}{2I_{33}}t\,,$$

e

$$\omega_3(t) = \Big(\sqrt{\omega_0} - \frac{\mu}{2I_{33}}t\Big)^2\,, \qquad 0 \leq t < \bar{t} = \frac{2I_{33}}{\mu}\sqrt{\omega_0}\,.$$

Quindi il cilindro ruota di un angolo

$$\varphi(t) = -\frac{2I_{33}}{3\mu}\Big(\sqrt{\omega_0} - \frac{\mu}{2I_{33}}t\Big)^3\,, \qquad 0 \leq t < \bar{t}\,,$$

ove si è scelto ad arbitrio, come indicato, il valore iniziale $\varphi(0)$.
R.

$$\varphi(t) = -\frac{2I_{33}}{3\mu}\Big(\sqrt{\omega_0} - \frac{\mu}{2I_{33}}t\Big)^3\,, \qquad 0 \leq t < \bar{t} = \frac{2I_{33}}{\mu}\sqrt{\omega_0}\,.$$

10. [7/4/2006 (ex)I] Una circonferenza omogenea γ di massa $m > 0$ e raggio $R > 0$ è vincolata a ruotare intorno a un suo diametro, che giace su una retta fissa r. Il centro C della circonferenza è fisso su r.
La circonferenza è ferma all'istante iniziale $t = 0$ ed è soggetta alla forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{e}\,,$$

ove λ, $\mu > 0$ sono costanti e

- $\boldsymbol{u}$ è il versore normale al piano di γ;
- $\boldsymbol{e}$ è il versore della retta r.

La forza $\boldsymbol{F}$ è applicata in un punto P di γ, e con essa solidale, tale che

$$\boldsymbol{e} \cdot \overrightarrow{CP} = \frac{R}{\sqrt{2}}\,.$$

Si scrivano le equazioni di moto della circonferenza.
SOLUZIONE
Scegliamo un sistema di riferimento solidale con la circonferenza $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$, con

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}\,.$$

Il punto P in questo sistema è individuato da

$$\overrightarrow{CP} = \frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3)\,.$$

Quindi, scegliendo C come polo, e ricordando che il momento risultante delle reazioni vincolari lungo r è nullo, perché i vincoli sono lisci,

$$\boldsymbol{M}^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3 = \overrightarrow{CP} \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_3 = \Big[\frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) \times (\lambda \boldsymbol{u}_1 + \mu \boldsymbol{u}_3)\Big] \cdot \boldsymbol{u}_3 = -\lambda \frac{R}{\sqrt{2}}\,.$$

Perciò, essendo il moto una rotazione intorno alla direzione fissa $\boldsymbol{u}_3$, si ha $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3$ (per un'opportuna scelta dell'angolo φ), e

$$I_{33}\dot{\omega}_3 = I_{33}\ddot{\varphi} = -\lambda\frac{R}{\sqrt{2}}\,, \qquad \omega_3(0) = \dot{\varphi}(0) = 0\,.$$

R.

$$I_{33}\ddot{\varphi}(t) = -\lambda\frac{R}{\sqrt{2}}\,, \quad \dot{\varphi}(0) = 0\,.$$

11. [19/7/2006 (ex)I] Un cilindro retto di raggio R e altezza H, rigido, omogeneo, è vincolato a ruotare intorno all'asse fisso passante per i centri A e B delle sue basi, mantenendo A e B fissi su tale asse.
Denotiamo con $(O, \boldsymbol{e}_i)$ un sistema di riferimento fisso, ove O è il centro del cilindro, e con $(O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con il cilindro, tali che

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3(t) = \frac{\overrightarrow{BA}}{H}\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

Il cilindro è soggetto alle forze (con λ, $\mu > 0$ costanti)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &= \lambda \boldsymbol{e}_1\,, \quad \text{applicata in } P_1\text{, ove } \overrightarrow{AP_1} = R\boldsymbol{u}_1, \\ \boldsymbol{F}_2 &= \mu \boldsymbol{u}_2\,, \quad \text{applicata in } P_2\text{, ove } \overrightarrow{BP_2} = R\boldsymbol{u}_1. \end{aligned}$$

(Ossia P_1 e P_2 sono le intersezioni con le basi di una stessa generatrice del cilindro.)
I momenti delle reazioni vincolari lungo l'asse di rotazione sono nulli.
Il cilindro è fermo all'istante $t = 0$.
Determinare l'equazione di moto.
SOLUZIONE

Visto che il moto è una rotazione è sufficiente considerare per determinarlo quella delle tre equazioni scalari di Eulero che corrisponde alla direzione dell'asse di rotazione, cioè, in questo caso, alla direzione $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3$. Se $\varphi(t)$ indica l'angolo tra $\boldsymbol{u}_1(t)$ e $\boldsymbol{e}_1$ (supponendo $\varphi(0) = 0$), si avrà

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t)\boldsymbol{e}_3\,,$$

e (scegliendo O come polo)

$$I_{33}\ddot{\varphi} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3\,.$$

Resta da calcolare

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} &= \overrightarrow{OP_1} \times (\lambda\boldsymbol{e}_1) + \overrightarrow{OP_2} \times (\mu\boldsymbol{u}_2) \\ &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP_1}) \times (\lambda\boldsymbol{e}_1) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP_2}) \times (\mu\boldsymbol{u}_2) \\ &= \lambda\frac{H}{2}\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 + \lambda R\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{e}_1 - \mu\frac{H}{2}\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{u}_2 + \mu R\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 \\ &= \lambda R\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{e}_1 + \mu R\boldsymbol{u}_3 + \text{un vettore ortogonale a } \boldsymbol{u}_3.\end{aligned}$$

Per calcolare $\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{e}_1$ ricordiamo che per definizione di φ

$$\boldsymbol{u}_1 = \cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,$$

per cui infine

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = (\mu R - \lambda R\sin\varphi)\boldsymbol{u}_3 + \text{un altro vettore ortogonale a } \boldsymbol{u}_3.$$

Il moto è quindi determinato dalla soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned}&I_{33}\ddot{\varphi} = \mu R - \lambda R\sin\varphi\,, \\ &\varphi(0) = 0\,, \\ &\dot{\varphi}(0) = 0\,.\end{aligned}$$

R. *Equazione di moto:*

$$I_{33}\ddot{\varphi} = \mu R - \lambda R\sin\varphi\,.$$

12. [19/7/2006 (ex)II] Un cilindro retto di raggio R e altezza H, rigido, omogeneo, è vincolato a ruotare intorno all'asse fisso passante per i centri A e B delle sue basi, mantenendo A e B fissi su tale asse.
Denotiamo con $(O, \boldsymbol{e}_i)$ un sistema di riferimento fisso, ove O è il centro del cilindro, e con $(O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con il cilindro, tali che

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3(t) = \frac{\overrightarrow{BA}}{H}\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

Il cilindro è soggetto alle forze (con λ, $\mu > 0$ costanti)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_1 &= \lambda\boldsymbol{u}_2\,, \quad \text{applicata in } P_1\text{, ove } \overrightarrow{AP_1} = R\boldsymbol{u}_1, \\ \boldsymbol{F}_2 &= \mu\boldsymbol{e}_1\,, \quad \text{applicata in } P_2\text{, ove } \overrightarrow{BP_2} = R\boldsymbol{u}_1.\end{aligned}$$

(Ossia P_1 e P_2 sono le intersezioni con le basi di una stessa generatrice del cilindro.)
I momenti delle reazioni vincolari lungo l'asse di rotazione sono nulli.
Il cilindro è fermo all'istante $t = 0$.
Determinare l'equazione di moto.
R. *Equazione di moto:*

$$I_{33}\ddot{\varphi} = \lambda R - \mu R \sin\varphi\,.$$

13. [13/12/2006 (ex)I] Un guscio sferico S di raggio R, massa m e centro C è vincolato a precedere intorno a un suo punto O, coincidente con l'origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Sia $(O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con S. In particolare sia $\overrightarrow{CO} = R\boldsymbol{u}_3$. Quindi $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ è una base (solidale con S) del piano tangente a S nei due suoi punti diametralmente opposti O e O', ove appunto $\overrightarrow{CO'} = -R\boldsymbol{u}_3$.
All'istante $t = 0$ il guscio S è fermo.
In O' è applicata una forza

$$\boldsymbol{F} = \mu[\cos(\lambda t)\boldsymbol{u}_1 + \sin(\lambda t)\boldsymbol{u}_2]\,.$$

Qui R, m, λ, μ sono costanti positive.
Si determini l'energia cinetica T di S come funzione del tempo.
Soluzione
Scriviamo le equazioni di Eulero, scegliendo il polo in O:

$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = \overrightarrow{OO'} \times \boldsymbol{F} = -2R\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{F} = 2R\mu[\sin(\lambda t)\boldsymbol{u}_1 - \cos(\lambda t)\boldsymbol{u}_2]\,.$$

Dunque, visto che per simmetria $I_{11} = I_{22}$,

$$\begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1 = (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 + 2R\mu\sin(\lambda t)\,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 = (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - 2R\mu\cos(\lambda t)\,, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 = 0\,, \end{cases}$$

con i dati iniziali

$$\omega_1(0) = 0\,, \qquad \omega_2(0) = 0\,, \qquad \omega_3(0) = 0\,.$$

Dunque

$$\omega_3(t) = 0\,, \qquad t \geq 0\,,$$

e, ponendo $\beta = 2R\mu/I_{11}$,

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \beta\sin(\lambda t)\,, \\ \dot{\omega}_2 = -\beta\cos(\lambda t)\,. \end{cases}$$

Perciò

$$\omega_1(t) = \frac{\beta}{\lambda}[1 - \cos(\lambda t)]\,,$$
$$\omega_2(t) = -\frac{\beta}{\lambda}\sin(\lambda t)\,.$$

L'energia cinetica è

$$
\begin{aligned}
T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2}(I_{11}\omega_1\boldsymbol{u}_1 + I_{11}\omega_2\boldsymbol{u}_2)\cdot(\omega_1\boldsymbol{u}_1 + \omega_2\boldsymbol{u}_2) \\
&= \frac{1}{2}I_{11}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \\
&= \frac{1}{2}I_{11}\frac{\beta^2}{\lambda^2}[1 - 2\cos(\lambda t) + \cos^2(\lambda t) + \sin^2(\lambda t)] \\
&= I_{11}\frac{\beta^2}{\lambda^2}[1 - \cos(\lambda t)]\,.
\end{aligned}
$$

R.

$$
T = I_{11}\frac{\beta^2}{\lambda^2}[1 - \cos(\lambda t)]\,.
$$

14. [26/3/2007 (ex)I] Un sistema rigido è costituito da tre punti materiali, P_1, P_2 e P_3, ciascuno di massa m, posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato L.
Il sistema è vincolato con vincolo liscio a ruotare intorno al lato P_1P_2, mantenuto fisso in posizione verticale.
Il sistema ha all'istante iniziale velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_0$.
Descrivere il moto del sistema e ricavare risultante e momento risultante delle reazioni vincolari.
SOLUZIONE
Scegliamo il sistema solidale principale $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ove O è il punto medio di P_1P_2, e

$$
\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{L}\overrightarrow{P_1P_2}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{2}{\sqrt{3}L}\overrightarrow{OP_3}\,.
$$

Il momento della forza peso è

$$
\overrightarrow{OG} \times (-3mg\boldsymbol{u}_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}mgL\boldsymbol{u}_3\,.
$$

In $\mathcal{S}$ le equazioni di Eulero si scrivono perciò come

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 + \boldsymbol{M}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{u}_1\,, \\
I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \boldsymbol{M}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{u}_2\,, \\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + \boldsymbol{M}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{u}_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}mgL\,.
\end{aligned}
$$

Inoltre si sa che $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{u}_1$ perché il moto è una rotazione, e che $\boldsymbol{M}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{u}_1 = 0$ perché il vincolo è liscio.
Perciò la prima equazione di Eulero dà

$$
\dot{\omega}_1 = 0\,,
$$

ossia $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0$. Il moto è quindi una rotazione costante.
Le altre equazioni di Eulero implicano allora

$$
\boldsymbol{M}_{\mathrm{vin}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}mgL\boldsymbol{u}_3\,,
$$

e infine, per la prima equazione cardinale,

$$3m\boldsymbol{a}_G = \mathbf{f}_{\text{vin}} - 3mg\boldsymbol{u}_1 \,.$$

R.

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0 \,, \quad t > 0 \,; \qquad \boldsymbol{M}_{\text{vin}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} mgL\boldsymbol{u}_3 \,, \quad \mathbf{f}_{\text{vin}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} m\omega^2 L\boldsymbol{u}_2 + 3mg\boldsymbol{u}_1 \,.$$

15. [4/7/2007 (ex)I] Un cono circolare retto di altezza H, raggio di base R, e massa m è vincolato a precedere intorno al suo vertice O.
Introduciamo anche un sistema di riferimento solidale con il cono $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, con $\boldsymbol{u}_3$ diretto come l'altezza $\overrightarrow{OA}$ del cono (A è quindi il centro della base del cono), e $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ normali a $\overrightarrow{OA}$. Il cono è sottoposto a una distribuzione di forze (che agisce solo sulla base)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\text{base}} = \big[(\alpha - \beta x_2)\boldsymbol{u}_1 + (\alpha + \beta x_1)\boldsymbol{u}_2\big]\delta_{\{x_3 = H\}} \,.$$

Qui α, $\beta \in C(\boldsymbol{R})$ sono funzioni del tempo assegnate e positive.

- Scrivere le equazioni di Eulero.
- Determinare le condizioni perché la componente di $\boldsymbol{\omega}$ ortogonale a $\boldsymbol{u}_3$ sia solidale con $\mathcal{S}$, nell'ipotesi che $\boldsymbol{\omega}(0) \cdot \boldsymbol{u}_3(0) = \omega_{30} > 0$ all'istante iniziale.

SOLUZIONE
A) Calcoliamo il momento delle forze (rispetto a O):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}^{\text{ext}} &= \iiint \overrightarrow{OP} \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\text{base}} \\
&= \iint_{x_1^2 + x_2^2 \le R^2} (x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + H\boldsymbol{u}_3) \times \big[(\alpha - \beta x_2)\boldsymbol{u}_1 + (\alpha + \beta x_1)\boldsymbol{u}_2\big] \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \\
&= \iint_{x_1^2 + x_2^2 \le R^2} \Big\{ \big[x_1(\alpha + \beta x_1) - x_2(\alpha - \beta x_2)\big]\boldsymbol{u}_3 \\
&\quad + H(\alpha - \beta x_2)\boldsymbol{u}_2 - H(\alpha + \beta x_1)\boldsymbol{u}_1 \Big\} \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \\
&= -H\pi R^2 \alpha \boldsymbol{u}_1 + H\pi R^2 \alpha \boldsymbol{u}_2 + \frac{\pi}{2} R^4 \beta \boldsymbol{u}_3 \,.
\end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero quindi divengono

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - H\pi R^2 \alpha \,, \\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + H\pi R^2 \alpha \,, \\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= \frac{\pi}{2} R^4 \beta \,,
\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto della simmetria del cono, che implica che le $\boldsymbol{u}_i$ siano direzioni principali in O, e che $I_{11} = I_{22}$.

B) Il vettore

$$\omega_1 \boldsymbol{u}_1 + \omega_2 \boldsymbol{u}_2$$

è solidale se e solo se $\dot{\omega}_1 = 0$, $\dot{\omega}_2 = 0$, *cioè*

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{\pi H R^2 \alpha}{(I_{11} - I_{33})\omega_3} = \textit{costante}\,,\\ \omega_2 &= \frac{\pi H R^2 \alpha}{(I_{11} - I_{33})\omega_3} = \textit{costante}\,.\end{aligned}$$

Dato che

$$\omega_3(t) = \omega_{30} + \frac{\pi R^4}{2I_{33}} \int_0^t \beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

questo è possibile se e solo se $I_{11} \neq I_{33}$ *e*

$$\alpha(t) = C\Big(\omega_{30} + \frac{\pi R^4}{2I_{33}} \int_0^t \beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,,$$

per un'opportuna costante C.
R.

$$\begin{aligned}I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - H\pi R^2 \alpha\,,\\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + H\pi R^2 \alpha\,,\\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= \frac{\pi}{2} R^4 \beta\,.\end{aligned}$$

La condizione richiesta è

$$I_{11} \neq I_{33}\,, \qquad \alpha(t) = C\Big(\omega_{30} + \frac{\pi R^4}{2I_{33}} \int_0^t \beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,, \qquad C \textit{ costante.}$$

16. [4/7/2007 (ex)II] Un cono circolare retto di altezza H, raggio di base R, e massa m è vincolato a precedere intorno al suo vertice O.
Introduciamo anche un sistema di riferimento solidale con il cono $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, con $\boldsymbol{u}_3$ diretto come l'altezza $\overrightarrow{OA}$ del cono (A è quindi il centro della base del cono), e $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ normali a $\overrightarrow{OA}$. Il cono è sottoposto a una distribuzione di forze (che agisce solo sulla base)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{base}} = \big[(\alpha + \beta x_2)\boldsymbol{u}_1 + (\alpha - \beta x_1)\boldsymbol{u}_2\big]\delta_{\{x_3 = H\}}\,.$$

Qui α, $\beta \in C(\boldsymbol{R})$ sono funzioni del tempo assegnate e positive.

- Scrivere le equazioni di Eulero.
- Determinare le condizioni perché la componente di $\boldsymbol{\omega}$ ortogonale a $\boldsymbol{u}_3$ sia solidale con $\mathcal{S}$, nell'ipotesi che $\boldsymbol{\omega}(0) \cdot \boldsymbol{u}_3(0) = \omega_{30} < 0$ all'istante iniziale.

R.

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - H\pi R^2\alpha \,, \\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + H\pi R^2\alpha \,, \\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= -\frac{\pi}{2}R^4\beta \,.
\end{aligned}
$$

La condizione richiesta è

$$
I_{11} \neq I_{33} \,, \qquad \alpha(t) = C\Big(\omega_{30} - \frac{\pi R^4}{2I_{33}}\int_0^t \beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big) \,, \qquad C \text{ costante.}
$$

17. [19/7/2007 (ex)I] Una sfera di raggio R e massa m precede intorno al suo centro O, origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Al punto P tale che

$$
\overrightarrow{OP} = R\boldsymbol{e}_1 \,,
$$

è applicata la forza

$$
\boldsymbol{F} = \lambda\boldsymbol{e}_2 + \mu\boldsymbol{e}_3 \,,
$$

con λ e μ costanti positive.
La sfera ha velocità angolare al tempo $t = 0$

$$
\boldsymbol{\omega}(0) = \sum_{i=1}^{3} \omega_{i0}\boldsymbol{e}_i \,.
$$

Determinare le condizioni sui dati iniziali e gli altri parametri perché esista un istante $\bar{t} > 0$ tale che la sfera si arresti in $\bar{t}$.
Soluzione
Conviene scomporre l'equazione

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\sigma\omega} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}}
$$

lungo la terna $\boldsymbol{e}_i$, perché, pur non essendo questa solidale, per motivi di simmetria si ha, ponendo

$$
\boldsymbol{\omega}(t) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i(t)\boldsymbol{e}_i \,,
$$

che

$$
\boldsymbol{\sigma\omega}(t) = \sum_{i=1}^{3} I\omega_i(t)\boldsymbol{e}_i \,,
$$

ove la costante I è il momento d'inerzia della sfera intorno a un suo diametro. Perciò

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\sigma\omega}(t) = \sum_{i=1}^{3} I\dot{\omega}_i(t)\boldsymbol{e}_i \,.
$$

Inoltre

$$
\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = \overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{F} = -R\mu\boldsymbol{e}_2 + R\lambda\boldsymbol{e}_3 \,.
$$

Perciò le equazioni di moto sono

$$\begin{aligned} I\dot{\omega}_1 &= 0\,, \\ I\dot{\omega}_2 &= -R\mu\,, \\ I\dot{\omega}_3 &= R\lambda\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \Big(\omega_{10}, \omega_{20} - \frac{R\mu}{I}t, \omega_{30} + \frac{R\lambda}{I}t\Big)\,.$$

Le condizioni perché la sfera si arresti per un $\bar{t} > 0$ *sono quindi date da* $\boldsymbol{\omega}(\bar{t}) = 0$, *ossia*

$$\omega_{10} = 0\,, \qquad \bar{t} := \frac{I\omega_{20}}{R\mu} = -\frac{I\omega_{30}}{R\lambda} > 0\,.$$

R.

$$\omega_{10} = 0\,, \qquad \frac{\omega_{20}}{\mu} = -\frac{\omega_{30}}{\lambda} > 0\,.$$

18. [19/7/2007 (ex)I] Un corpo rigido precede intorno a un suo punto O. Le equazioni di Eulero sono

$$I_{11}\dot{\omega}_1 = (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3\,, \tag{1}$$

$$I_{22}\dot{\omega}_2 = (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3\,, \tag{2}$$

$$I_{33}\dot{\omega}_3 = (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\,, \tag{3}$$

ove $f \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$ è una funzione assegnata.
Determinare un integrale primo del moto in ciascuno dei due casi seguenti:

- $I_{11} = I_{22}$.
- $I_{22} = I_{33}$.

SOLUZIONE
A) Moltiplichiamo la (1) *per* ω_1, *la* (2) *per* ω_2, *e sommiamo membro a membro. Si ottiene*

$$I_{11}(\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2) = (I_{11} - I_{33} + I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_2\omega_3 = 0\,,$$

ossia

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \textit{costante}\,.$$

B) Dalla (1),

$$\dot{\omega}_1 = 0\,,$$

che dà subito

$$\omega_1 = \textit{costante}\,.$$

R.

$$\begin{aligned} I_{11} = I_{22}\ &: \qquad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \textit{costante}\,. \\ I_{22} = I_{33}\ &: \qquad \omega_1 = \textit{costante}\,. \end{aligned}$$

19. [19/7/2007 (ex)II] Una sfera di raggio R e massa m precede intorno al suo centro O, origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Al punto P tale che

$$\overrightarrow{OP} = R\boldsymbol{e}_1 ,$$

è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda\boldsymbol{e}_2 + \mu\boldsymbol{e}_3 ,$$

con λ e μ costanti positive.
La sfera ha velocità angolare al tempo $t = 0$

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{20}\boldsymbol{e}_2 + \omega_{30}\boldsymbol{e}_3 .$$

Determinare le condizioni sui dati iniziali e gli altri parametri perché il moto sia una rotazione.
R.

$$\lambda\omega_{20} + \mu\omega_{30} = 0 .$$

20. [19/7/2007 (ex)II] Un corpo rigido precede intorno a un suo punto O.
Le equazioni di Eulero sono

$$I_{11}\dot{\omega}_1 = (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 , \tag{1}$$
$$I_{22}\dot{\omega}_2 = (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) , \tag{2}$$
$$I_{33}\dot{\omega}_3 = (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 , \tag{3}$$

ove $f \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$ è una funzione assegnata.
Determinare un integrale primo del moto in ciascuno dei due casi seguenti:

- $I_{11} = I_{22}$.
- $I_{11} = I_{33}$.

R.

$$I_{11} = I_{22} : \qquad \omega_3 = \mathit{costante} ,$$
$$I_{11} = I_{33} : \qquad \omega_1^2 + \omega_3^2 = \mathit{costante} .$$

21. [13/12/2007 (ex)I] Un disco D di centro C, raggio $R > 0$ e massa $m > 0$, è vincolato

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- a mantenere un punto A del suo bordo, solidale con il disco, fisso nell'origine O del sistema fisso.

Il disco è soggetto alle forze:

- Una coppia di forze applicate nei punti opposti al centro H e K del suo bordo tali che

$$\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{CA}\,, \qquad \overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{CA}\,;$$

  la coppia è data da

$$\boldsymbol{F}_H = \lambda \overrightarrow{AC}\,, \qquad \boldsymbol{F}_K = -\lambda \overrightarrow{AC}\,,$$

  con λ costante positiva.

- Una forza applicata nel punto B

$$\boldsymbol{F}_B = \mu \boldsymbol{e}_1\,,$$

  con $\mu > 0$ costante, e B punto opposto al centro di A.

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio del disco.
SOLUZIONE
Il moto è una precessione intorno all'origine O (coincidente con il punto solidale A). Inoltre, visto che il disco deve restare nel piano $x_3 = 0$, si deve avere

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \boldsymbol{e}_3\,,$$

ove φ sia scelto come l'angolo tra $\boldsymbol{e}_1$ e $\overrightarrow{AC}$.
Scegliamo come sistema di riferimento solidale con D $\mathcal{S} = (A, \boldsymbol{u}_i)$, con

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{R}\overrightarrow{AC}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{R}\overrightarrow{CH}\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

Il momento delle forze esterne rispetto al polo A è:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}^{\text{ext}} = \overrightarrow{AH} \times \boldsymbol{F}_H + \overrightarrow{AK} \times \boldsymbol{F}_K + \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{F}_B &= 2\overrightarrow{CH} \times \boldsymbol{F}_H + 2R\boldsymbol{u}_1 \times \mu \boldsymbol{e}_1 \\ &= -2\lambda R^2 \boldsymbol{e}_3 - 2\mu R \sin\varphi \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero dunque sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3\,, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3\,, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 - 2\lambda R^2 - 2\mu R \sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Le prime due sono identità in cui entrambi i membri si annullano. L'ultima dà all'equilibrio,

$$0 = I_{33}\ddot{\varphi} = -2\lambda R^2 - 2\mu R \sin\varphi\,,$$

ossia

$$\sin\varphi = -\frac{\lambda}{\mu} R\,.$$

R.

$$\textit{Se} \quad \lambda R \leq \mu\,, \qquad \textit{la posizione di equilibrio è:} \quad \sin\varphi = -\frac{\lambda}{\mu}R\,.$$

22. [13/12/2007 (ex)II] Un disco D di centro C, raggio $R > 0$ e massa $m > 0$, è vincolato

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- a mantenere un punto A del suo bordo, solidale con il disco, fisso nell'origine O del sistema fisso.

Il disco è soggetto alle forze:

- Una coppia di forze applicate nei punti opposti al centro H e K del suo bordo tali che

  $$\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{CA}\,, \qquad \overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{CA}\,;$$

  la coppia è data da

  $$\boldsymbol{F}_H = \lambda\overrightarrow{AC}\,, \qquad \boldsymbol{F}_K = -\lambda\overrightarrow{AC}\,,$$

  con λ costante positiva.
- Una forza applicata nel punto B

  $$\boldsymbol{F}_B = -\mu\boldsymbol{e}_1\,,$$

  con $\mu > 0$ costante, e B punto opposto al centro di A.

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio del disco.
R.

$$\textit{Se} \quad \lambda R \leq \mu\,, \qquad \textit{la posizione di equilibrio è:} \quad \sin\varphi = \frac{\lambda}{\mu}R\,.$$

23. [1/4/2008 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato $2L$ è vincolata ad avere il punto medio del lato AB nell'origine.
È soggetta alla forza, applicata nel vertice B, data da

$$\boldsymbol{F} = \frac{k}{4L^2}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\,,$$

ove AB e BC sono due lati consecutivi, e $k > 0$ è costante.

1. Scrivere le equazioni di moto.
2. Trovare i moti in cui l'energia cinetica rimane costante.

SOLUZIONE
Il moto è una precessione.
A) Introduciamo il sistema solidale con il rigido $(O, \boldsymbol{u}_i)$, ove O è scelto coincidente con il punto medio di AB, e dunque fisso, e

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2L}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{BC}}{2L}\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2\,.$$

In questo sistema si ha

$$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{u}_3\,,$$

e quindi rispetto al polo O

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = \overrightarrow{OB} \times k\boldsymbol{u}_3 = -Lk\boldsymbol{u}_2\,.$$

Perciò, ricordando che

$$I_{33} = I_{11} + I_{22}\,,$$

le equazioni di Eulero si scrivono come

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 = -I_{11}\omega_2\omega_3\,,\\
I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - Lk = I_{22}\omega_1\omega_3 - Lk\,,\\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2\,.
\end{aligned}$$

B) Si ha come in tutte le precessioni

$$T = \frac{1}{2}\Big\{I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 + I_{33}\omega_3^2\Big\}\,,$$

e dunque

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = I_{11}\omega_1\dot{\omega}_1 + I_{22}\omega_2\dot{\omega}_2 + I_{33}\omega_3\dot{\omega}_3 = -Lk\omega_2\,.$$

Quindi se

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0\,, \qquad \alpha < t < \beta\,,$$

si deve avere

$$\omega_2(t) = 0\,, \qquad \alpha < t < \beta\,,$$

da cui segue per la prima equazione di Eulero che anche ω_1 è costante. Dalla terza equazione segue poi che anche ω_3 è costante. Quindi $\boldsymbol{\omega}$ deve essere costante con

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_{10}, 0, \omega_{30})$$

e

$$\omega_{10}\omega_{30} = \frac{Lk}{I_{11}}\,,$$

per la seconda equazione di Eulero.
R. *Le equazioni di moto sono:*

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= -I_{11}\omega_2\omega_3\,,\\
I_{22}\dot{\omega}_2 &= I_{22}\omega_1\omega_3 - Lk\,,\\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2\,.
\end{aligned}$$

I moti in cui si conserva l'energia cinetica sono quelli con

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_{10}, 0, \omega_{30}) \,, \qquad \omega_{10}\omega_{30} = \frac{Lk}{I_{11}} \,.$$

24. [1/7/2008 (ex)I] Una lamina quadrata omogenea di lato $2L$ e massa m precede intorno al proprio centro O.
Sia $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con la lamina, tale che $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ siano paralleli ai lati della lamina, e indichiamo con (x_1, x_2, x_3) le coordinate in $\mathcal{S}$.
La lamina è soggetta a una distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \big(\alpha x_1^2 x_2 \boldsymbol{u}_1 + \beta x_1 x_2^2 \boldsymbol{u}_3\big) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \,,$$

ove α, $\beta \in \boldsymbol{R}$.
La lamina all'istante iniziale è ferma.
Determinare i valori di α e β in corrispondenza dei quali il moto è una rotazione intorno a uno degli assi di $\mathcal{S}$, e risolvere le equazioni di Eulero in questi casi.
SOLUZIONE
Per usare le equazioni di Eulero, dobbiamo calcolare il momento delle forze esterne (di polo O), che secondo la definizione è dato da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} &= \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} \big[(x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2) \times (\alpha x_1^2 x_2 \boldsymbol{u}_1 + \beta x_1 x_2^2 \boldsymbol{u}_3)\big] \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} \big[\beta x_1 x_2^3 \boldsymbol{u}_1 - \beta x_1^2 x_2^2 \boldsymbol{u}_2 - \alpha x_1^2 x_2^2 \boldsymbol{u}_3\big] \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \\
&= -\beta\Big(\frac{2}{3}L^3\Big)^2 \boldsymbol{u}_2 - \alpha\Big(\frac{2}{3}L^3\Big)^2 \boldsymbol{u}_3 \,.
\end{aligned}$$

Dunque, tenuto presente che nel caso della lamina si ha in O

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} \,, \qquad I_{11} = I_{22} \,,$$

le equazioni di Eulero divengono

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= -I_{11}\omega_2\omega_3 \,, \\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= I_{11}\omega_1\omega_3 - \frac{4}{9}\beta L^6 \,, \\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= -\frac{4}{9}\alpha L^6 \,.
\end{aligned}$$

Si hanno come è ovvio tre casi, in corrispondenza delle tre rotazioni possibili:
A) $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \boldsymbol{u}_1$: in questo caso ω_2 e ω_3 si annullano identicamente. La prima equazione di Eulero implica che allora ω_1 è costante, ossia nulla, per le condizioni iniziali. La seconda e la terza equazione, per essere soddisfatte, richiedono che $\alpha = \beta = 0$. La rotazione quindi si riduce alla quiete.

B) $\boldsymbol{\omega} = \omega_2 \boldsymbol{u}_2$: in questo caso ω_1 e ω_3 si annullano identicamente. La prima equazione di Eulero implica che allora ω_1 è costante, ossia nulla, per le condizioni iniziali. La terza equazione, per essere soddisfatta, richiede che $\alpha = 0$. La rotazione quindi si ottiene risolvendo la seconda equazione.
C) $\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \boldsymbol{u}_3$: in questo caso ω_1 e ω_2 si annullano identicamente. La prima equazione di Eulero implica che allora ω_1 è costante, ossia nulla, per le condizioni iniziali. La seconda equazione, per essere soddisfatta, richiede che $\beta = 0$. La rotazione quindi si ottiene risolvendo la terza equazione.
R. *Per ogni $t > 0$:*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}(t) &= 0\,, && \text{se } \alpha = \beta = 0;\\
\boldsymbol{\omega}(t) &= -\frac{4}{9}\frac{\beta L^6}{I_{11}} t \boldsymbol{u}_2\,, && \text{se } \alpha = 0;\\
\boldsymbol{\omega}(t) &= -\frac{4}{9}\frac{\alpha L^6}{I_{33}} t \boldsymbol{u}_3\,, && \text{se } \beta = 0.
\end{aligned}
$$

25. [1/7/2008 (ex)II] Una lamina quadrata omogenea di lato $2L$ e massa m precede intorno al proprio centro O.
Sia $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con la lamina, tale che $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ siano paralleli ai lati della lamina, e indichiamo con (x_1, x_2, x_3) le coordinate in $\mathcal{S}$.
La lamina è soggetta a una distribuzione di forze

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \bigl(\alpha x_1 x_2^2 \boldsymbol{u}_2 + \beta x_1^2 x_2 \boldsymbol{u}_3\bigr)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,,
$$

ove α, $\beta \in \boldsymbol{R}$.
La lamina all'istante iniziale è ferma.
Determinare i valori di α e β in corrispondenza dei quali il moto è una rotazione intorno a uno degli assi di $\mathcal{S}$, e risolvere le equazioni di Eulero in questi casi.
R. *Per ogni $t > 0$:*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}(t) &= 0\,, && \text{se } \alpha = \beta = 0;\\
\boldsymbol{\omega}(t) &= \frac{4}{9}\frac{\beta L^6}{I_{11}} t \boldsymbol{u}_1\,, && \text{se } \alpha = 0;\\
\boldsymbol{\omega}(t) &= \frac{4}{9}\frac{\alpha L^6}{I_{33}} t \boldsymbol{u}_3\,, && \text{se } \beta = 0.
\end{aligned}
$$

26. [18/7/2008 (ex)I] Si consideri un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove O è fisso, e le coordinate in $\mathcal{S}$ sono indicate da (λ_i). Un corpo rigido è dato da

$$
C = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \le R^2\}\,,
$$

con densità
$$\rho(\lambda) = \left[\rho_0 + m\delta_{\{P\}}(\lambda)\right] \mathrm{d}\lambda\,,$$
ove ρ_0, $m > 0$ sono costanti e
$$P = \Big(0, \frac{1}{4}R, \frac{\sqrt{15}}{4}R\Big)\,.$$
Si tratta dunque di una sfera omogenea con un punto fissato alla sua superficie.
C è vincolato a precedere intorno al punto fisso O, ed è soggetto a due forze $\boldsymbol{F}_A$ e $\boldsymbol{F}_B$ applicate rispettivamente nei punti A e B tali che
$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_3\,, \qquad \overrightarrow{OB} = -R\boldsymbol{u}_3\,.$$
Le due forze possono venire scelte ad arbitrio, con la sola restrizione che
$$|\boldsymbol{F}_A| \le \mu\,, \qquad |\boldsymbol{F}_B| \le \mu\,,$$
con $\mu > 0$ costante.
Determinare i valori di ω_3 per cui è possibile che il moto sia una rotazione uniforme con velocità angolare
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_3\boldsymbol{u}_3\,.$$
Soluzione
Scriviamo la matrice $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{M}}$ del tensore d'inerzia rispetto alla terna $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$. Questa terna è principale per la sfera omogenea, mentre i momenti di P sono
$$I_{11}^P = mR^2\,, \qquad I_{22}^P = \frac{15}{16}mR^2\,, \qquad I_{33}^P = \frac{1}{16}mR^2\,,$$
$$I_{12}^P = 0\,, \qquad I_{13}^P = 0\,, \qquad I_{23}^P = -\frac{\sqrt{15}}{16}mR^2\,.$$
Dunque se I è il momento d'inerzia diametrale della sfera,
$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} I + I_{11}^P & 0 & 0 \\ 0 & I + I_{22}^P & I_{23}^P \\ 0 & I_{23}^P & I + I_{33}^P \end{pmatrix}\,.$$
Le equazioni di Eulero sono date da
$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}^{\text{ext}}\,,$$
ossia, nell'ipotesi che si abbia un moto di rotazione come richiesto, da
$$0 = I_{23}^P\omega_3^2 + (\boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{M}_B) \cdot \boldsymbol{u}_1\,,$$
$$0 = I_{23}^P\dot{\omega}_3 = (\boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{M}_B) \cdot \boldsymbol{u}_2\,,$$
$$0 = (I + I_{23}^P)\dot{\omega}_3 = (\boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{M}_B) \cdot \boldsymbol{u}_3\,.$$

Qui

$$M_A = \overrightarrow{OA} \times F_A \,, \qquad M_B = \overrightarrow{OB} \times F_B \,.$$

Si deve avere quindi

$$|I_{23}^P|\omega_3^2 = (M_A + M_B) \cdot u_1 = |M_A + M_B| =: M \,,$$

e M può assumere qualunque valore in $[0,2R\mu]$.
R.

$$|\omega_3| \le \sqrt{\frac{32\mu}{\sqrt{15}mR}} \,.$$

27. [18/7/2008 (ex)II] Si consideri un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, u_i)$ ove O è fisso, e le coordinate in $\mathcal{S}$ sono indicate da (λ_i). Un corpo rigido è dato da

$$C = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \le R^2\} \,,$$

con densità

$$\rho(\lambda) = \big[\rho_0 + m\delta_{\{P\}}(\lambda)\big] \,\mathrm{d}\lambda \,,$$

ove ρ_0, $m > 0$ sono costanti e

$$P = \Big(0, \frac{3}{4}R, \frac{\sqrt{7}}{4}R\Big) \,.$$

Si tratta dunque di una sfera omogenea con un punto fissato alla sua superficie.
C è vincolato a precedere intorno al punto fisso O, ed è soggetto a due forze F_A e F_B applicate rispettivamente nei punti A e B tali che

$$\overrightarrow{OA} = Ru_3 \,, \qquad \overrightarrow{OB} = -Ru_3 \,.$$

Le due forze possono venire scelte ad arbitrio, con la sola restrizione che

$$|F_A| \le \mu \,, \qquad |F_B| \le \mu \,,$$

con $\mu > 0$ costante.
Determinare i valori di ω_3 per cui è possibile che il moto sia una rotazione uniforme con velocità angolare

$$\omega = \omega_3 u_3 \,.$$

R.

$$|\omega_3| \le \sqrt{\frac{32\mu}{3\sqrt{7}mR}} \,.$$

28. [12/9/2008 (ex)I] Un cilindro retto circolare rigido di massa m, altezza H e raggio R è vincolato a precedere intorno al suo centro O.
Su due punti A e B diametralmente opposti di una delle circonferenze di base sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = a\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{u} \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -b\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{u} \,,$$

con a, $b > 0$ costanti, e $\boldsymbol{u}$ versore solidale con il cilindro, diretto come il suo asse (nel verso tale che $\overrightarrow{AO} \cdot \boldsymbol{u} > 0$).
Il cilindro è fermo al tempo iniziale.

- Determinare una condizione su a e b che rende il moto una rotazione.
- Nell'ipotesi che l'ellissoide d'inerzia in O sia una sfera, determinare T per ogni valore di a, $b > 0$.

Soluzione
A) Scegliamo come sistema di riferimento solidale $(O, \boldsymbol{u}_i)$, *ove*

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2R} \,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 \,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u} \,.$$

Perciò

$$\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{u} = 2R\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_3 = -2R\boldsymbol{u}_2 \,.$$

Il momento delle forze esterne quindi è

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}^{\text{ext}} &= \overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F}_A + \overrightarrow{OB} \times \boldsymbol{F}_B \\ &= \Big(-\frac{H}{2}\boldsymbol{u}_3 - R\boldsymbol{u}_1 \Big) \times (-2Ra\boldsymbol{u}_2) + \Big(-\frac{H}{2}\boldsymbol{u}_3 + R\boldsymbol{u}_1 \Big) \times (2Rb\boldsymbol{u}_2) \\ &= \frac{H}{2} 2R(-a+b)\boldsymbol{u}_1 + 2R^2(a+b)\boldsymbol{u}_3 \,. \end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero sono perciò

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 + HR(b-a) \,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 \,, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= 2R^2(a+b) \,. \end{aligned}$$

Si ha perciò una rotazione, intorno all'asse $\boldsymbol{u}_3$, *se* $a = b$, *caso in cui la soluzione del sistema è*

$$\omega_1(t) = 0 \,, \qquad \omega_2(t) = 0 \,, \qquad \omega_3(t) = 2\frac{R^2}{I_{33}}(a+b)t \,, \qquad t > 0 \,.$$

B) Nel caso $I_{11} = I_{33}$, *le equazioni di Eulero diventano*

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= HR(b-a) \,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= 0 \,, \\ I_{11}\dot{\omega}_3 &= 2R^2(a+b) \,. \end{aligned}$$

Dunque
$$T = \frac{1}{2} I_{11} |\boldsymbol{\omega}|^2 = \frac{1}{2} I_{11} \Big[\frac{H^2 R^2}{I_{11}^2} (b-a)^2 + \frac{4R^4}{I_{11}^2} (a+b)^2 \Big] t^2 \,.$$
R. *Si ha una rotazione se $a = b$. Se l'ellissoide è sferico*
$$T = \frac{R^2}{2I_{11}} \big[H^2 (b-a)^2 + 4R^2 (a+b)^2 \big] t^2 \,.$$

29. [12/9/2008 (ex)I] Un parallelepipedo di massa m e di spigoli $a < b < c$ precede per inerzia intorno al suo centro O.
All'istante iniziale
$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \boldsymbol{u}_1(0) + \beta \boldsymbol{u}_2(0) + \gamma \boldsymbol{u}_3(0) \,,$$
ove $(O, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con il parallelepipedo, con versori $\boldsymbol{u}_i$ ortogonali alle facce del solido, e coincidente al tempo $t = 0$ con il sistema di riferimento fisso. Qui a, b, c, α, β, γ sono costanti positive.

- Si determini il piano fisso su cui rotola l'ellissoide d'inerzia.
- Si determini la condizione su α, β, γ per cui tale piano ha normale parallela a
$$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Soluzione
A) È noto che, fissata ad arbitrio la costante di scala $c > 0$ dell'ellissoide d'inerzia, tale piano ha equazione
$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{L}_O = \mu = 2c\sqrt{T(0)} \,,$$
ove l'energia cinetica T, costante lungo il moto, è data da
$$T(0) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma\omega}(0) \cdot \boldsymbol{\omega}(0) = \frac{1}{2} (I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2) \,.$$
Invece il vettore $\boldsymbol{L}_O$, costante lungo il moto, è dato da
$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma\omega}(0) = I_{11}\alpha \boldsymbol{u}_1(0) + I_{22}\beta \boldsymbol{u}_2(0) + I_{33}\gamma \boldsymbol{u}_3(0) = I_{11}\alpha \boldsymbol{e}_1 + I_{22}\beta \boldsymbol{e}_2 + I_{33}\gamma \boldsymbol{e}_3 \,.$$
B) Dunque la normale del piano, ossia $\boldsymbol{L}_O$, è parallela a
$$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \,.$$
se e solo se
$$I_{11}\alpha = I_{22}\beta = I_{33}\gamma \,.$$
R.
$$I_{11}\alpha x_1 + I_{22}\beta x_2 + I_{33}\gamma x_3 = 2c\sqrt{\frac{1}{2}(I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2)} \,.$$
$$I_{11}\alpha = I_{22}\beta = I_{33}\gamma \,.$$

30. [12/9/2008 (ex)II] Un cilindro retto circolare rigido di massa m, altezza H e raggio R è vincolato a precedere intorno al suo centro O.
Su due punti A e B diametralmente opposti di una delle circonferenze di base sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = a\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -b\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{u}\,,$$

con a, $b \in \boldsymbol{R}$ costanti, e $\boldsymbol{u}$ versore solidale con il cilindro, diretto come il suo asse (nel verso tale che $\overrightarrow{AO} \cdot \boldsymbol{u} > 0$).
Il cilindro è fermo al tempo iniziale.

- Riconoscere che sono possibili due distinti moti di rotazione (non banale), in corrispondenza di particolari condizioni soddisfatte da a e b, e determinare tali condizioni.
- Nell'ipotesi che l'ellissoide d'inerzia in O sia una sfera, determinare T per ogni valore di a, b.

R. *Si ha una rotazione se $a = b$, o se $a = -b$. Se l'ellissoide è sferico*

$$T = \frac{R^2}{2I_{11}}\big[H^2(b-a)^2 + 4R^2(a+b)^2\big]t^2\,.$$

31. [12/9/2008 (ex)II] Un parallelepipedo di massa m e di spigoli $a > b > c > 0$ precede per inerzia intorno al suo centro O.
All'istante iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha\boldsymbol{u}_1(0) + \beta\boldsymbol{u}_2(0) + \gamma\boldsymbol{u}_3(0)\,,$$

ove $(O, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con il parallelepipedo, con versori $\boldsymbol{u}_i$ ortogonali alle facce del solido, e coincidente al tempo $t = 0$ con il sistema di riferimento fisso. Qui a, b, c, α, β, γ sono costanti.

- Si determini il piano fisso su cui rotola l'ellissoide d'inerzia.
- Si determini la condizione su α, β, γ per cui tale piano ha normale parallela a
$$\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3\,.$$

R.

$$I_{11}\alpha x_1 + I_{22}\beta x_2 + I_{33}\gamma x_3 = 2c\sqrt{\frac{1}{2}(I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2)}\,.$$
$$I_{11}\alpha = -I_{22}\beta = -I_{33}\gamma\,.$$

32. [12/1/2009 (ex)I] Un disco di raggio R e massa m è vincolato a ruotare intorno alla direzione fissa $\boldsymbol{e}_3$, ortogonale al disco stesso, mantenendo il suo centro C fisso nell'origine del sistema di riferimento fisso. Consideriamo anche un sistema di riferimento solidale con il disco, $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$, con $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$; denotiamo con (x_1, x_2, x_3) le coordinate in $\mathcal{S}$.
Sul disco agiscono:

- la distribuzione di forze
$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = \alpha x_1 \boldsymbol{u}_2 ;$$
- la forza elastica applicata in P
$$\boldsymbol{F}_e = -k\overrightarrow{P_0P} ,$$
ove $\overrightarrow{CP_0} = L\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{CP} = R\boldsymbol{u}_1$.

Qui α, k, L sono costanti positive.
All'istante iniziale il disco è fermo, e $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$.

- Si determini l'equazione di moto del disco.
- Supponendo che il disco compia un giro completo, si determini la sua energia cinetica nell'istante in cui completa il primo giro.

SOLUZIONE
Usiamo le equazioni di Eulero

$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_e + \boldsymbol{M}_{\mathrm{vin}} ,$$

ove il polo è C, $\boldsymbol{M}_1$ [$\boldsymbol{M}_e$] denota il momento di $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1$ [$\boldsymbol{F}_e$], e $\boldsymbol{M}_{\mathrm{vin}}$ quello delle reazioni vincolari.
In questo caso

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3 ,$$

se φ denota l'angolo tra $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{u}_1$, cosicché

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2 . \end{aligned}$$

Inoltre con i calcoli si ha

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1 = & \iint_{\{\lambda_1^2+\lambda_2^2 \le R^2\}} (\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2) \times \alpha\lambda_1 \boldsymbol{u}_2 \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2 \\ & = \alpha \iint_{\{\lambda_1^2+\lambda_2^2 \le R^2\}} \lambda_1^2 \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2 \boldsymbol{u}_3 = \frac{\alpha\pi}{4} R^4 \boldsymbol{u}_3 . \end{aligned}$$

Invece

$$\boldsymbol{M}_e = \overrightarrow{CP} \times \boldsymbol{F}_e = -k\overrightarrow{CP} \times \overrightarrow{P_0P} = -k\overrightarrow{CP} \times [\overrightarrow{P_0C} + \overrightarrow{CP}] \\ = kRL\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = -kRL\sin\varphi\boldsymbol{u}_3\,,$$

perché

$$\boldsymbol{e}_1 = \cos\varphi\boldsymbol{u}_1 - \sin\varphi\boldsymbol{u}_2\,.$$

Per determinare il moto è sufficiente la terza equazione di Eulero, ove ricordiamo che, essendo il vincolo liscio,

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0\,.$$

Dunque l'equazione di moto è

$$I_{33}\ddot{\varphi} = \frac{\alpha\pi}{4}R^4 - kRL\sin\varphi\,,$$

cui vanno aggiunte le condizioni iniziali

$$\varphi(0) = 0\,, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0\,.$$

Moltiplicando l'equazione di moto per $\dot{\varphi}$ e integrando su $(0,t)$ si ha

$$\frac{I_{33}}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{\alpha\pi}{4}R^4\varphi(t) + kRL(\cos\varphi - 1)\,.$$

Supponendo che in $\bar{t}$ valga $\varphi(\bar{t}) = 2\pi$, si ha

$$T(\bar{t}) = \frac{I_{33}}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{\alpha\pi^2}{2}R^4\,.$$

Il fatto che il disco faccia un giro completo è garantito per esempio se vale la prima delle disuguaglianze seguenti:

$$\frac{\alpha\pi}{4}R^4 > kLR > kLR\frac{1-\cos\varphi}{\varphi}\,,$$

ove la seconda disuguaglianza vale per ogni $\varphi > 0$, perché $1 - \cos\varphi < \varphi$.
R. *L'equazione di moto è*

$$I_{33}\ddot{\varphi} = \frac{\alpha\pi}{4}R^4 - kRL\sin\varphi\,.$$

L'energia cinetica quando $\varphi(\bar{t}) = 2\pi$ vale

$$T(\bar{t}) = \frac{I_{33}}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{\alpha\pi^2}{2}R^4\,.$$

33. [12/1/2009 (ex)II] Un disco di raggio R e massa m è vincolato a ruotare intorno alla direzione fissa $\boldsymbol{e}_3$, ortogonale al disco stesso, mantenendo il suo centro C fisso nell'origine del sistema di riferimento fisso. Consideriamo anche un sistema di riferimento solidale con il disco, $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$, con $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$; denotiamo con (x_1, x_2, x_3) le coordinate in $\mathcal{S}$.
Sul disco agiscono:

- la distribuzione di forze
$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = \alpha x_1 \boldsymbol{u}_2 \,;$$
- la forza elastica applicata in P
$$\boldsymbol{F}_e = -k\overrightarrow{P_0P}\,,$$
ove $\overrightarrow{CP_0} = L\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{CP} = R\boldsymbol{u}_2$.

Qui α, k, L sono costanti positive.
All'istante iniziale il disco è fermo, e $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$.

- Si determini l'equazione di moto del disco.
- Supponendo che il disco compia un giro completo, si determini la sua energia cinetica nell'istante in cui completa il primo giro.

R. *L'equazione di moto è*
$$I_{33}\ddot{\varphi} = \frac{\alpha\pi}{2}R^4 - kRL\cos\varphi\,.$$
L'energia cinetica quando $\varphi(\bar{t}) = 2\pi$ *vale*
$$T(\bar{t}) = \frac{I_{33}}{2}\dot{\varphi}^2 = \alpha\pi^2 R^4\,.$$

34. [12/2/2009 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di lato $2L$, non omogenea, ha densità dipendente dalla distanza dal lato AB:
$$\rho(P) = \begin{cases} \rho_1\,, & \text{se } \operatorname{dist}(P, AB) \le L,\\ \rho_2\,, & \text{se } \operatorname{dist}(P, AB) > L. \end{cases}$$
Qui $\rho_1 > \rho_2 > 0$ sono costanti.
La lamina è vincolata a precedere intorno al suo centro geometrico O, che si mantiene fisso.
Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_3$. Alla lamina è applicata anche la distribuzione di forze
$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{u}\chi_{AB}\,\mathrm{d}s + \beta\boldsymbol{u}\chi_{BC}\,\mathrm{d}s$$
che è diversa da zero appunto solo sui lati AB e BC. Qui $\mathrm{d}s$ è l'elemento di lunghezza su tali lati, e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale alla lamina, ad essa ortogonale.
Qui α e β sono costanti.
All'istante iniziale la lamina è ferma in posizione orizzontale, con $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Eulero.

- Trovare una condizione su α e β perché la lamina resti in equilibrio nella posizione iniziale.

Soluzione

Scriveremo le equazioni di Eulero rispetto al polo O. Scegliamo un sistema solidale con la lamina, con $\boldsymbol{u}_1$ diretto come $\overrightarrow{CB}$, e $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}$. L'origine viene presa in O.
Il momento delle forze esterne è dato da

$$\boldsymbol{M}^{\text{ext}} = \boldsymbol{M}_{\text{peso}} + \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{F}}\,,$$

ove come è noto

$$\boldsymbol{M}_{\text{peso}} = \overrightarrow{OG} \times (-mg\boldsymbol{e}_3)\,.$$

Qui la massa è data da

$$m = \rho_1 \frac{4L^2}{2} + \rho_2 \frac{4L^2}{2} = 2L^2(\rho_1 + \rho_2)\,,$$

e il centro di massa G, definendo G_i come il centro di massa della metà con densità ρ_i, da

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\Big(\rho_1 \frac{4L^2}{2}\overrightarrow{OG_1} + \rho_2 \frac{4L^2}{2}\overrightarrow{OG_2}\Big) = \frac{2L^2}{m}(\rho_1 - \rho_2)\overrightarrow{OG_1} = \frac{L}{2}\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

Il momento del peso è dunque

$$\boldsymbol{M}_{\text{peso}} = -mg\frac{L}{2}\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = \mu_2\boldsymbol{u}_2 + \mu_3\boldsymbol{u}_3\,,$$

ove le componenti μ_i dipenderanno dalla posizione della terna mobile, ossia dagli angoli di Eulero.
Si ha poi

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{F}} = \int_{-L}^{L} (L\boldsymbol{u}_1 + s\boldsymbol{u}_2) \times \alpha\boldsymbol{u}_3 \,\mathrm{d}s + \int_{-L}^{L} (s\boldsymbol{u}_1 + L\boldsymbol{u}_2) \times \beta\boldsymbol{u}_3 \,\mathrm{d}s$$
$$= 2\beta L^2\boldsymbol{u}_1 - 2\alpha L^2\boldsymbol{u}_2\,.$$

Dunque le equazioni di Eulero sono, visto che $(\boldsymbol{u}_i)$ è una terna principale d'inerzia,

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot\omega_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 + 2\beta L^2\,,\\
I_{22}\dot\omega_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \mu_2 - 2\alpha L^2\,,\\
I_{33}\dot\omega_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + \mu_3\,.
\end{aligned}$$

La lamina rimane in equilibrio se e solo se

$$\boldsymbol{\omega}(t) = 0\,, \qquad t > 0\,,$$

il che, per le condizioni iniziali, è garantito dall'annullarsi di $\boldsymbol{M}^{\text{ext}}$. Si noti anche che, per le condizioni iniziali, per $t = 0$ si ha $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$, e quindi

$$\boldsymbol{M}_{\text{peso}} = mg\frac{L}{2}\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\boldsymbol{u}_2\,.$$

R.

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 + 2\beta L^2\,, \\
I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \mu_2 - 2\alpha L^2\,, \\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + \mu_3\,.
\end{aligned}
$$

$$
\beta = 0\,, \qquad \alpha = \frac{mg}{4L}\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\,.
$$

35. [12/2/2009 (ex)I] Un cono circolare retto di altezza h e raggio di base R precede per inerzia intorno al suo vertice O, che rimane fisso.
All'istante iniziale la sua velocità angolare è

$$
\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_3\,,
$$

ove $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con il cono, con $\boldsymbol{u}_3$ parallelo all'asse del cono. Qui h, R, α, β sono costanti positive.
Determinare $\boldsymbol{\omega}(t)$ per ogni $t > 0$.
Soluzione
Scriviamo le equazioni di Eulero:

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3\,, \\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3\,, \\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= 0\,,
\end{aligned}
$$

ove si è tenuto conto che $I_{11} = I_{22}$, per simmetria. Se $I_{11} = I_{33}$ la soluzione è banale.
In caso contrario,

$$
\omega_3 = \beta\,, \qquad \text{per ogni } t,
$$

e

$$
\ddot{\omega}_1 = (1 - I_{33}I_{11}^{-1})\dot{\omega}_2\beta = -c^2\omega_1\,,
$$

ove

$$
c = (1 - I_{33}I_{11}^{-1})\beta\,.
$$

Perciò

$$
\omega_1(t) = k_1 \cos ct + k_2 \sin ct\,.
$$

Imponendo le condizioni iniziali

$$
\omega_1(0) = \alpha\,, \qquad \dot{\omega}_1(0) = 0\,,
$$

quest'ultima ricavata dal sistema di Eulero, si ha

$$
\omega_1(t) = \alpha \cos ct\,,
$$

da cui, per la prima equazione del sistema,

$$
\omega_2(t) = c^{-1}\dot{\omega}_1(t) = -\alpha \sin ct\,.
$$

R. *Se* $I_{11} \neq I_{33}$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha \cos ct \boldsymbol{u}_1 - \alpha \sin ct \boldsymbol{u}_2 + \beta \boldsymbol{u}_3 \,, \qquad c = (1 - I_{33} I_{11}^{-1})\beta \,.$$

Se $I_{11} = I_{33}$,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_3 \,.$$

36. [12/2/2009 (ex)II] Una lamina quadrata $ABCD$ di lato $2L$, non omogenea, ha densità dipendente dalla distanza dal lato AB:

$$\rho(P) = \begin{cases} \rho_1 \,, & \text{se } \operatorname{dist}(P, AB) \leq L, \\ \rho_2 \,, & \text{se } \operatorname{dist}(P, AB) > L. \end{cases}$$

Qui $\rho_2 > \rho_1 > 0$ sono costanti.
La lamina è vincolata a precedere intorno al suo centro geometrico O, che si mantiene fisso.
Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_3$. Alla lamina è applicata anche la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{u} \chi_{AB} \,\mathrm{d}s + \beta \boldsymbol{u} \chi_{AD} \,\mathrm{d}s$$

che è diversa da zero appunto solo sui lati AB e AD. Qui $\mathrm{d}s$ è l'elemento di lunghezza su tali lati, e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale alla lamina, ad essa ortogonale. Qui α e β sono costanti.
All'istante iniziale la lamina è ferma in posizione orizzontale, con $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Eulero.
- Trovare una condizione su α e β perché la lamina resti in equilibrio nella posizione iniziale.

R.

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 - 2\beta L^2 \,, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \mu_2 - 2\alpha L^2 \,, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + \mu_3 \,. \end{aligned}$$

$$\beta = 0 \,, \qquad \alpha = \frac{mg}{4L} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \,.$$

37. [12/2/2009 (ex)II] Un cilindro circolare retto di altezza h e raggio di base R precede per inerzia intorno al suo centro O, che rimane fisso.
All'istante iniziale la sua velocità angolare è

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con il cilindro, con $\boldsymbol{u}_1$ parallelo all'asse del cilindro. Qui h, R, α, β sono costanti positive.
Determinare $\boldsymbol{\omega}(t)$ per ogni $t > 0$.
R. *Se* $I_{11} \neq I_{22}$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha \boldsymbol{u}_1 - \beta \sin ct \boldsymbol{u}_2 + \beta \cos ct \boldsymbol{u}_3 \,, \qquad c = (I_{11} I_{22}^{-1} - 1)\alpha \,.$$

Se $I_{11} = I_{22}$,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_3 \,.$$

38. [11/9/2009 (ex)I] Un cilindro di altezza $2H$, raggio R, massa M, è vincolato a precedere intorno al suo centro C.
Introduciamo il sistema solidale con il cilindro $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$, ove $\boldsymbol{u}_3$ è diretto come l'asse del cilindro.
Sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}_1 \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{u}_1 \,,$$

nei punti A e B rispettivamente dati da

$$\overrightarrow{CA} = R\boldsymbol{u}_2 + H\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \overrightarrow{CB} = -R\boldsymbol{u}_2 - H\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Agisce anche un momento d'attrito di polo C pari a

$$\boldsymbol{M}_{\text{attrito}} = -\mu \boldsymbol{\omega} \,.$$

Qui k, $\mu > 0$ sono costanti.

- Scrivere le equazioni di Eulero del cilindro.
- Determinare l'unico valore di $\boldsymbol{\omega}(0)$ che rende $\boldsymbol{\omega}$ costante durante il moto.

Soluzione
1) Scriviamo le equazioni di Eulero del cilindro, con polo in C. Il momento di $\boldsymbol{F}_A$ e $\boldsymbol{F}_B$ è dato da

$$\overrightarrow{CA} \times \boldsymbol{F}_A + \overrightarrow{CB} \times \boldsymbol{F}_B = 2\overrightarrow{CA} \times \boldsymbol{F}_A = 2k(H\boldsymbol{u}_2 - R\boldsymbol{u}_3) \,.,$$

Perciò le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - \mu\omega_1 \,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - \mu\omega_2 + 2kH \,, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= -\mu\omega_3 - 2kR \,. \end{aligned}$$

B) Se deve essere $\boldsymbol{\omega}$ costante, ossia $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$, dalla terza delle equazioni di Eulero si ha subito

$$\omega_3 = -\frac{2kR}{\mu} \,.$$

Sostituendo nelle prime due equazioni si ottiene il sistema non singolare

$$\begin{aligned}\mu\omega_1 + \alpha\omega_2 &= 0\,,\\ \alpha\omega_1 - \mu\omega_2 &= -2kH\,,\end{aligned}$$

ove si è posto

$$\alpha = \frac{2kR}{\mu}(I_{11} - I_{33})\,.$$

R.

$$\begin{aligned}I_{11}\dot\omega_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - \mu\omega_1\,,\\ I_{11}\dot\omega_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - \mu\omega_2 + 2kH\,,\\ I_{33}\dot\omega_3 &= -\mu\omega_3 - 2kR\,.\end{aligned}$$

$$\omega_1 = -\frac{2kH\alpha}{\mu^2+\alpha^2}\,, \quad \omega_2 = \frac{2kH\mu}{\mu^2+\alpha^2}\,, \quad \omega_3 = -\frac{2kR}{\mu}\,; \qquad \alpha := \frac{2kR}{\mu}(I_{11} - I_{33})\,.$$

39. [11/9/2009 (ex)II] Un parallelepipedo con sezione quadrata, di altezza $2H$, lato della base $2R$, massa M, è vincolato a precedere intorno al suo centro C.
Introduciamo il sistema solidale con il parallelepipedo $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$, ove $\boldsymbol{u}_3$ è diretto come l'asse del parallelepipedo, e $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ sono ortogonali alle facce laterali del solido.
Sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}_1\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{u}_1\,,$$

nei punti A e B rispettivamente dati da

$$\overrightarrow{CA} = R\boldsymbol{u}_2 + H\boldsymbol{u}_3\,, \qquad \overrightarrow{CB} = -R\boldsymbol{u}_2 - H\boldsymbol{u}_3\,.$$

Agisce anche un momento d'attrito di polo C pari a

$$\boldsymbol{M}_{\text{attrito}} = -\mu\boldsymbol{\omega}\,.$$

Qui k, $\mu > 0$ sono costanti.

- Scrivere le equazioni di Eulero del rigido.
- Determinare l'unico valore di $\boldsymbol{\omega}(0)$ che rende $\boldsymbol{\omega}$ costante durante il moto.

R.

$$\begin{aligned}I_{11}\dot\omega_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - \mu\omega_1\,,\\ I_{11}\dot\omega_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - \mu\omega_2 + 2kH\,,\\ I_{33}\dot\omega_3 &= -\mu\omega_3 - 2kR\,.\end{aligned}$$

$$\omega_1 = -\frac{2kH\alpha}{\mu^2+\alpha^2}\,,\quad \omega_2 = \frac{2kH\mu}{\mu^2+\alpha^2}\,,\quad \omega_3 = -\frac{2kR}{\mu}\,;\qquad \alpha := \frac{2kR}{\mu}(I_{11}-I_{33})\,.$$

40. [20/11/2009 (ex)I] Un disco rigido di massa M e raggio R precede intorno al suo centro O.
Il sistema $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ è solidale con il disco, e il versore $\boldsymbol{u}_3$ è ad esso ortogonale.
Al disco sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = -\lambda\boldsymbol{u}_1\,,\qquad \text{nel punto } A\text{, tale che } \overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_2;$$
$$\boldsymbol{F}_B = \mu\boldsymbol{e}_1\,,\qquad \text{nel punto } B\text{, tale che } \overrightarrow{OB} = R\boldsymbol{u}_1.$$

Qui λ e μ sono costanti positive.
Determinare le eventuali posizioni di equilibrio del disco.
Sotto l'ulteriore vincolo

$$\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3\,,\qquad t \geq 0\,,$$

scrivere le equazioni di moto del disco.
Soluzione
A) Dobbiamo imporre che $\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = 0$, ossia

$$\overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F}_A + \overrightarrow{OB} \times \boldsymbol{F}_B = 0\,,$$

che equivale a

$$\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = -\frac{\lambda}{\mu}\boldsymbol{u}_3\,.$$

Se scriviamo

$$\boldsymbol{e}_1 = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\boldsymbol{u}_i$$

all'equilibrio, si ha

$$\alpha_2\boldsymbol{u}_3 - \alpha_3\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = -\frac{\lambda}{\mu}\boldsymbol{u}_3\,,$$

da cui

$$\alpha_3 = 0\,,\qquad \alpha_2 = -\frac{\lambda}{\mu}\,,\qquad \alpha_1 = \pm\sqrt{1-\Big(\frac{\lambda}{\mu}\Big)^2}\,.$$

Bisogna di necessità assumere $\lambda \leq \mu$.
B) Visto che il rigido in questo caso è vincolato a ruotare intorno a un asse fisso, ha un solo grado di libertà. Introduciamo come coordinata lagrangiana l'angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ formato da $\boldsymbol{u}_1$ con $\boldsymbol{e}_1$, cosicché

$$\boldsymbol{u}_1 = \cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

In questo modo

$$\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = -\sin\varphi\boldsymbol{e}_3 = -\sin\varphi\boldsymbol{u}_3\,.$$

La terza equazione di Eulero quindi dà

$$I\ddot{\varphi} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3 = R\lambda - R\mu \sin\varphi \,.$$

R. *A) Posizioni di equilibrio si hanno solo se $\lambda \leq \mu$; in questo caso si ha equilibrio se e solo se si ha*

$$\boldsymbol{e}_1 = \pm\sqrt{1 - \Big(\frac{\lambda}{\mu}\Big)^2}\boldsymbol{u}_1 - \frac{\lambda}{\mu}\boldsymbol{u}_2 \,.$$

B)

$$I\ddot{\varphi} = R\lambda - R\mu \sin\varphi \,.$$

41. [25/1/2010 (ex)I] Un cilindro di altezza H, raggio R e massa M precede per inerzia intorno al suo centro C.
Il moto è tale che in un certo istante $\bar{t}$ si ha

$$\boldsymbol{\omega}(\bar{t}) = \beta\overrightarrow{CA}(\bar{t}) + \alpha\overrightarrow{CE}(\bar{t}) \,,$$
$$\overrightarrow{CA}(\bar{t}) = \frac{H}{2}\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \overrightarrow{CE}(\bar{t}) = R\boldsymbol{e}_1 \,,$$

ove A è il centro di una delle basi del cilindro, ed E appartiene alla circonferenza direttrice di centro C. Inoltre α, $\beta > 0$ sono costanti.
Determinare il momento della quantità di moto $\boldsymbol{L}_C(t)$ per ogni t, in termini della base fissa $(\boldsymbol{e}_i)$ e dei parametri del problema.
Soluzione
Scegliamo un sistema di riferimento $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ solidale con il cilindro, con

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{CE}}{\big|\overrightarrow{CE}\big|} \,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{CA}}{\big|\overrightarrow{CA}\big|} \,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Allora

$$\boldsymbol{\omega}(\bar{t}) = \alpha R\boldsymbol{u}_1(\bar{t}) + \beta\frac{H}{2}\boldsymbol{u}_3(\bar{t}) \,.$$

In $\mathcal{S}$ la matrice $\boldsymbol{\sigma}$ è

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{diag}(I_{11}, I_{11}, I_{33}) \,,$$

per motivi di simmetria. Dunque per i noti teoremi sulle precessioni per inerzia

$$\boldsymbol{L}_C(t) = \boldsymbol{L}_C(\bar{t}) = \boldsymbol{\sigma\omega}(\bar{t}) = I_{11}\alpha R\boldsymbol{u}_1(\bar{t}) + I_{33}\beta\frac{H}{2}\boldsymbol{u}_3(\bar{t}) = I_{11}\alpha R\boldsymbol{e}_1 + I_{33}\beta\frac{H}{2}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

R.

$$\boldsymbol{L}_C(t) = I_{11}\alpha R\boldsymbol{e}_1 + I_{33}\beta\frac{H}{2}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

42. [25/1/2010 (ex)II] Un cono di altezza H, raggio R e massa M precede per inerzia intorno al centro della sua base C.

Il moto è tale che in un certo istante $\bar{t}$ si ha

$$\boldsymbol{\omega}(\bar{t}) = \beta\overrightarrow{CA}(\bar{t}) + \alpha\overrightarrow{CE}(\bar{t})\,,$$
$$\overrightarrow{CA}(\bar{t}) = H\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \overrightarrow{CE}(\bar{t}) = R\boldsymbol{e}_1\,,$$

ove A è il vertice del cono, ed E appartiene alla circonferenza di base. Inoltre α, $\beta > 0$ sono costanti.
Determinare il momento della quantità di moto $\boldsymbol{L}_C(t)$ per ogni t, in termini della base fissa $(\boldsymbol{e}_i)$ e dei parametri del problema.
R.

$$\boldsymbol{L}_C(t) = I_{11}\alpha R\boldsymbol{e}_1 + I_{33}\beta H\boldsymbol{e}_3\,.$$

43. [22/2/2010 (ex)I] Un cubo omogeneo di spigolo $2L$, centro C e massa M è vincolato a precedere intorno a un suo vertice A, che rimane fisso.
Il cubo è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}_C = \lambda e^{-\beta t}\boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale con il cubo e ortogonale a $\overrightarrow{CA}$; inoltre λ, $\beta > 0$ sono costanti.
Il cubo è fermo all'istante iniziale $t = 0$.
Determinare una costante che limiti l'energia cinetica del cubo per tutti i tempi positivi.
SOLUZIONE
Scegliamo una terna principale $(\boldsymbol{u}_i)$ in C in modo che

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2\,.$$

Per un noto teorema, la $(\boldsymbol{u}_i)$ è principale anche in A.
Scriviamo le equazioni di Eulero di polo A rispetto a questa terna. Troviamo i momenti d'inerzia I_{kk}. Se I denota il valore comune a tutti i momenti d'inerzia in C, per il teorema di Huygens si ha in A

$$I_{11} = I\,, \qquad I_{22} = I_{33} = I + M\,|AC|^2 = I + 3ML^2\,.$$

Il momento di $\boldsymbol{F}$ è

$$\overrightarrow{AC} \times \boldsymbol{F} = -L\sqrt{3}\boldsymbol{u}_1 \times (\lambda e^{-\beta t}\boldsymbol{u}_2) = -\sqrt{3}\lambda L e^{-\beta t}\boldsymbol{u}_3\,.$$

Dunque si ottiene

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= 0\,,\\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_3 0\,,\\ I_{22}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 - \sqrt{3}\lambda L e^{-\beta t}\,. \end{aligned}$$

Dato che $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$, segue subito che per ogni $t > 0$

$$\omega_1(t) = 0\,, \quad \omega_2(t) = 0\,, \quad \omega_3(t) = -\frac{\sqrt{3}\lambda L}{\beta I_{22}}(1 - e^{-\beta t})\,.$$

Dunque

$$T(t) = \frac{1}{2} I_{22}^{-1} \frac{3\lambda^2 L^2}{\beta^2} (1 - e^{-\beta t})^2\,,$$

e

$$\sup_{t \geq 0} T(t) = \frac{1}{2} I_{22}^{-1} \frac{3\lambda^2 L^2}{\beta^2}\,.$$

R.

$$\frac{3}{2}(I + 3ML^2)^{-1} \frac{\lambda^2 L^2}{\beta^2}\,.$$

44. [22/2/2010 (ex)II] Un cubo omogeneo di spigolo $2L$, centro C e massa M è vincolato a precedere intorno a un suo vertice A, che rimane fisso.
Il cubo è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}_C = \frac{\lambda}{1 + \beta^2 t^2} \boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale con il cubo e ortogonale a $\overrightarrow{CA}$; inoltre λ, $\beta > 0$ sono costanti.
Il cubo è fermo all'istante iniziale $t = 0$.
Determinare una costante che limiti l'energia cinetica del cubo per tutti i tempi positivi.
R.

$$\frac{3\pi^2}{8\beta^2}(I + 3ML^2)^{-1} L^2 \lambda^2\,.$$

45. [8/7/2010 (ex)I] Una sfera di raggio R, massa M e centro C precede per inerzia intorno a un punto fisso O sulla sua superficie.
All'istante iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \frac{\overrightarrow{OC}}{R} + \beta \boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore tale che $\boldsymbol{u} \perp \overrightarrow{OC}$. Qui α, β sono costanti positive.
Determinare $\boldsymbol{\omega}(t)$.
Soluzione
Scegliamo come sistema di riferimento solidale con il rigido $(O, \boldsymbol{u}_i)$, con

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{OC}}{R}\,.$$

Si noti che questo sistema è principale d'inerzia, perché traslato di un sistema principale centrale lungo uno dei suoi assi. Per il teorema di Huygens si ha nella base $(\boldsymbol{u}_i)$

$$\boldsymbol{\sigma}_O = \operatorname{diag}\big(I + MR^2, I + MR^2, I\big)\,.$$

Dunque le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned}(I + MR^2)\dot\omega_1 &= MR^2\omega_2\omega_3\,,\\ (I + MR^2)\dot\omega_2 &= -MR^2\omega_1\omega_3\,,\\ I\dot\omega_3 &= 0\,.\end{aligned}$$

Le condizioni iniziali sono

$$\omega_1(0) = \beta\,, \qquad \omega_2(0) = 0\,, \qquad \omega_3(0) = \alpha\,.$$

Quindi dalla terza equazione

$$\omega_3(t) = \alpha\,, \qquad t \ge 0\,.$$

A questo punto le altre due equazioni danno

$$\ddot\omega_1 + \lambda^2\omega_1 = 0\,, \qquad \lambda := \frac{MR^2\alpha}{I + MR^2}\,.$$

R.

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \big(\beta\cos\lambda t, -\beta\sin\lambda t, \alpha\big)\,, \qquad \lambda := \frac{MR^2\alpha}{I + MR^2}\,.$$

46. [7/9/2010 (ex)I] Un cubo di massa m e spigolo $2L$ è vincolato a precedere intorno al suo centro C.
Sul cubo agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda\boldsymbol{u}\,,$$

applicata in un suo vertice A, ove il versore solidale con il cubo

$$\boldsymbol{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2L}$$

è diretto come lo spigolo AB.
Scrivere le equazioni di moto del cubo.
SOLUZIONE
Scegliamo il sistema principale in C *dato da:* $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}$; $\boldsymbol{u}_2$ *normale a una faccia fissata tra le due che contengono sia* A *che* B; $\boldsymbol{u}_3$ *di conseguenza.*
Quindi in particolare

$$\overrightarrow{CA} = L\boldsymbol{u}_2 - L\boldsymbol{u}_1 - L\boldsymbol{u}_3\,.$$

Il momento della forza dunque risulta

$$\overrightarrow{CA} \times \boldsymbol{F}_A = -\lambda L(\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3)\,.$$

Perciò le equazioni di Eulero, stante la simmetria dei momenti d'inerzia centrali, risultano

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= 0\,,\\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= -\lambda L\,,.\\
I_{11}\dot{\omega}_3 &= -\lambda L
\end{aligned}
$$

R.

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= 0\,,\\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= -\lambda L\,,.\\
I_{11}\dot{\omega}_3 &= -\lambda L
\end{aligned}
$$

47. [20/1/2014 (ex)I] Un cilindro di altezza $2H$, raggio R e massa M è vincolato a mantenere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Se (x_i) denota le coordinate in tale sistema, si assume che all'istante iniziale il cilindro sia fermo con l'asse giacente sull'asse x_3.
Al cilindro è applicata la forza

$$
\boldsymbol{F}_A = \lambda \boldsymbol{u}_2 + \mu\Big(1 - \frac{x_{3A}}{H}\Big)\boldsymbol{e}_3\,,
$$

nel punto solidale A centro della base che all'istante iniziale si trova a quota $x_3 = H$. Qui λ e μ sono costanti positive, e $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ è un sistema di riferimento solidale con il cilindro, ove si assume che all'istante iniziale $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Si determini una condizione su λ e μ che garantisca che la quota x_{3A} di A si annulli in un tempo finito.
Soluzione
Vogliamo usare le equazioni di Eulero. Per calcolare il momento delle forze applicate dobbiamo introdurre la scomposizione

$$
\boldsymbol{e}_3 = \sum_{h=1}^{3} \alpha_h(t)\boldsymbol{u}_h(t)\,.
$$

Le funzioni α_h verranno precisate poi per quanto necessario. Quindi abbiamo

$$
\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = H\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{F}_A = -\lambda H \boldsymbol{u}_1 + \mu(H - x_{3A})(\alpha_1\boldsymbol{u}_2 - \alpha_2\boldsymbol{u}_1)\,.
$$

Le equazioni di Eulero sono perciò (essendo $I_{11} = I_{22}$)

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - \lambda H - \mu(H - x_{3A})\alpha_2\,,\\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \mu(H - x_{3A})\alpha_1\,,\\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Segue che $\omega_3(t)$ essendo nulla a $t = 0$ si mantiene costantemente nulla. Le equazioni di Eulero divengono perciò

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= -\lambda H - \mu(H - x_{3A})\alpha_2\,,\\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= \mu(H - x_{3A})\alpha_1\,.
\end{aligned}
$$

Guidati dall'intuizione fisica possiamo supporre che l'asse del cilindro, cioè il versore solidale $\boldsymbol{u}_3$, e anche il versore solidale $\boldsymbol{u}_2$ si mantengano sempre nel piano $x_1 = 0$. Questo implica che $\alpha_1(t) = 0$ per ogni t e quindi per la seconda equazione di Eulero che anche ω_2 si annulli identicamente. Pertanto il moto si riduce a una rotazione non costante intorno alla direzione $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{u}_1$. Introduciamo l'angolo di rotazione $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{e}_3 = \sin\varphi \boldsymbol{u}_2 + \cos\varphi \boldsymbol{u}_3 ,$$

il che definisce le funzioni α_2, α_3 e sostituito nella prima equazione di Eulero fornisce

$$I_{11}\ddot{\varphi} = -\lambda H - \mu H(1 - \cos\varphi)\sin\varphi .$$

Si noti che all'istante iniziale si ha $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, e quindi per l'equazione differenziale si ha $\varphi(t) < 0$ almeno in qualche intervallo $(0, t_1)$. Viene richiesto di garantire che $\varphi(\bar{t}) = -\pi/2$ per qualche $0 < \bar{t} < t_1$.
Questo si ottiene senz'altro se $\ddot{\varphi}$ si mantiene uniformemente negativa, ossia se per esempio

$$\lambda H > \mu H \geq \mu H(1 - \cos\varphi) \left|\sin\varphi\right| .$$

R.

$$\lambda > \mu .$$

48. [20/1/2014 (ex)II] Un cono di altezza H, raggio R e massa M è vincolato a mantenere il vertice nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Se (x_i) denota le coordinate in tale sistema, si assume che all'istante iniziale il cono sia fermo con l'asse giacente sull'asse x_3.
Al cono è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = \mu \boldsymbol{u}_1 + \lambda\Big(1 - \frac{x_{3A}}{H}\Big)\boldsymbol{e}_3 ,$$

nel punto solidale A centro della base, che all'istante iniziale si trova a quota $x_3 = H$. Qui λ e μ sono costanti positive, e $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ è un sistema di riferimento solidale con il cono, ove si assume che all'istante iniziale $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Si determini una condizione su λ e μ che garantisca che la quota x_{3A} di A si annulli in un tempo finito.
R.

$$\lambda < \mu .$$

49. [19/6/2014 (ex)I] Un disco D di massa M e raggio R è vincolato ad avere il centro O coincidente con l'origine del sistema di riferimento fisso. Sia $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_i))$ un sistema solidale con il disco tale che $\boldsymbol{u}_3$ si mantenga ortogonale al piano del disco.
Sulla circonferenza bordo del disco agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = \lambda \boldsymbol{T} ,$$

dove $\boldsymbol{T}$ è il versore tangente alla circonferenza e $\lambda > 0$ è costante. Inoltre sul punto B del disco dato da

$$\overrightarrow{OB} = R\boldsymbol{u}_1 ,$$

è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_2 = -k\overrightarrow{AB} ,$$

ove

$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_1 .$$

Qui $(O, (\boldsymbol{e}_i))$ denota il sistema di riferimento fisso.
All'istante iniziale il disco giace sul piano ortogonale a $\boldsymbol{e}_3$ ed è fermo, con $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$.
Scrivere le equazioni di moto, dare una condizione su λ, k, R che garantisca che il disco faccia un giro completo intorno a $\boldsymbol{u}_3$, e determinare la sua velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ nell'istante in cui completa il primo giro.
SOLUZIONE
Si tratta di un moto polare di centro O.
Nella terna $(\boldsymbol{u}_i)$ il tensore d'inerzia ha la scomposizione

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{diag}(I, I, 2I) ,$$

ove I indica il momento d'inerzia di D rispetto a un suo diametro. Il momento delle forza applicate a D è

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 ,$$

con

$$\boldsymbol{M}_1 = \int_{\partial D} \overrightarrow{OP}(s) \times \lambda \boldsymbol{T} \, \mathrm{d}s = 2\pi R^2 \lambda \boldsymbol{u}_3 ,$$

e

$$\boldsymbol{M}_2 = \overrightarrow{OB} \times (-k\overrightarrow{AB}) = -kR\boldsymbol{u}_1 \times \overrightarrow{AB} .$$

Le equazioni di Eulero quindi sono

$$\begin{aligned} I\dot{\omega}_1 &= -I\omega_2\omega_3 , \\ I\dot{\omega}_2 &= I\omega_1\omega_3 + \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 , \\ 2I\dot{\omega}_3 &= 2\pi R^2 \lambda + \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 . \end{aligned}$$

Date le condizioni iniziali, e quindi il fatto che $\boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2$ si mantiene nullo fintanto che il disco giace sul piano ortogonale a $\boldsymbol{e}_3$, l'intuizione fisica suggerisce che accada questo per ogni tempo. Verifichiamolo. Poniamo dunque

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi \, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 , \end{aligned}$$

cosicché

$$\overrightarrow{AB} = R(\cos\varphi - 1)\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 ,$$

e si ha

$$M_2 = -kR^2 \sin\varphi e_3 \,.$$

Perciò la terza equazione di Eulero dà

$$2I\ddot{\varphi} = 2\pi R^2\lambda - kR^2 \sin\varphi \,,$$

con condizioni iniziali

$$\varphi(0) = 0 \,, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0 \,.$$

Se supponiamo

$$2\pi R^2\lambda > kR^2 \,,$$

certo $\ddot{\varphi}$ si mantiene strettamente positiva, dunque $\dot{\varphi}$ è strettamente crescente e D fa un giro completo.
Moltiplicando l'equazione di moto per $\dot{\varphi}$ e integrando si ottiene con l'aiuto delle condizioni iniziali

$$I\dot{\varphi}^2 = 2\pi R^2\lambda\varphi + kR^2(\cos\varphi - 1) \,.$$

Per $\varphi = 2\pi$ si ottiene

$$I\dot{\varphi}^2 = 4\pi^2 R^2\lambda \,.$$

R. *Una condizione sufficiente è*

$$2\pi\lambda > k \,.$$

La velocità angolare dopo un giro è

$$\boldsymbol{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2\lambda}{I}}\, \boldsymbol{u}_3 \,.$$

50. [13/1/2015 (ex)I] Un corpo rigido si muove di moto polare intorno a un suo punto O, ove il tensore di inerzia nella base solidale $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ è dato da

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{M}} = \operatorname{diag}(I_{11}, I_{11}, I_{33}) \,, \qquad I_{11} \neq I_{33} \,.$$

Inoltre il corpo è soggetto a forze esterne di momento risultante

$$\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = -\alpha\omega_2\boldsymbol{u}_1 + \alpha\omega_1\boldsymbol{u}_2 + \beta(\omega_1^2 + \omega_2^2)\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Qui α, β sono costanti positive e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare del corpo.
All'istante iniziale si ha

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{01}\boldsymbol{u}_1(0) + \omega_{02}\boldsymbol{u}_2(0) + \omega_{03}\boldsymbol{u}_3(0) \,, \qquad \omega_{01}\omega_{02} \neq 0 \,, \quad \omega_{03} < 0 \,.$$

Scrivere le equazioni di moto e determinare l'unico istante $\bar{t} > 0$ tale che $\boldsymbol{\omega}(\bar{t})$ è ortogonale a $\boldsymbol{u}_3(\bar{t})$.
Soluzione
Si hanno le equazioni di Eulero

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - \alpha\omega_2 \,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \alpha\omega_1 \,, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= \beta(\omega_1^2 + \omega_2^2) \,. \end{aligned}$$

Quindi moltiplicando la prima equazione per ω_1, la seconda per ω_2 e sommando si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[I_{11}\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}\Big]=0\,.$$

Perciò

$$\omega_1(t)^2+\omega_2(t)^2=\omega_{01}^2+\omega_{02}^2\,,\qquad t>0\,,$$

e dalla terza equazione si ottiene perciò

$$\omega_3(t)=\frac{\beta(\omega_{01}^2+\omega_{02}^2)}{I_{33}}\,t+\omega_{03}\,.$$

Pertanto l'istante richiesto, in cui $\omega_3(\bar t)=0$, è

$$\bar t=-\frac{\omega_{03}I_{33}}{\beta(\omega_{01}^2+\omega_{02}^2)}\,.$$

R.

$$\begin{aligned}I_{11}\dot\omega_1&=(I_{11}-I_{33})\omega_2\omega_3-\alpha\omega_2\,,\\ I_{11}\dot\omega_2&=(I_{33}-I_{11})\omega_1\omega_3+\alpha\omega_1\,,\\ I_{33}\dot\omega_3&=\beta(\omega_1^2+\omega_2^2)\,.\end{aligned}$$

$$\bar t=-\frac{\omega_{03}I_{33}}{\beta(\omega_{01}^2+\omega_{02}^2)}\,.$$

51. [13/1/2015 (ex)II] Un corpo rigido si muove di moto polare intorno a un suo punto O, ove il tensore di inerzia nella base solidale $\mathcal{M}=(\boldsymbol{u}_h)$ è dato da

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{M}}=\mathrm{diag}(I_{11},I_{22},I_{11})\,,\qquad I_{11}\neq I_{22}\,.$$

Inoltre il corpo è soggetto a forze esterne di momento risultante

$$\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}=\alpha\omega_3\boldsymbol{u}_1-\beta\cosh\big(\lambda(\omega_1^2+\omega_3^2)\big)\boldsymbol{u}_2-\alpha\omega_1\boldsymbol{u}_3\,.$$

Qui α, β, λ sono costanti positive e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare del corpo. All'istante iniziale si ha

$$\boldsymbol{\omega}(0)=\omega_{01}\boldsymbol{u}_1(0)+\omega_{02}\boldsymbol{u}_2(0)+\omega_{03}\boldsymbol{u}_3(0)\,,\qquad \omega_{01}\omega_{03}\neq 0\,,\quad \omega_{02}>0\,.$$

Scrivere le equazioni di moto e determinare l'unico istante $\bar t>0$ tale che $\boldsymbol{\omega}(\bar t)$ è ortogonale a $\boldsymbol{u}_2(\bar t)$.
R.

$$\begin{aligned}I_{11}\dot\omega_1&=(I_{22}-I_{11})\omega_2\omega_3+\alpha\omega_3\,,\\ I_{22}\dot\omega_2&=-\beta\cosh\big(\lambda(\omega_1^2+\omega_3^2)\big)\,,\\ I_{11}\dot\omega_3&=(I_{11}-I_{22})\omega_1\omega_2-\alpha\omega_1\,.\end{aligned}$$

$$\bar t=\frac{\omega_{02}I_{22}}{\beta\cosh\big(\lambda(\omega_{01}^2+\omega_{03}^2)\big)}\,.$$

52. [10/2/2015 (ex)I] Un corpo rigido è formato da un cubo omogeneo di spigolo L e massa M, e da un'asta rigida di lunghezza L e massa m. L'asta è solidale con il cubo e si mantiene sovrapposta al suo spigolo AB.
Il corpo è vincolato a mantenere il centro C del cubo nell'origine del sistema di riferimento fisso.
Nel vertice A è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda \overrightarrow{AB} .$$

Sul corpo agisce anche il momento rispetto a C

$$\boldsymbol{M} = -\alpha \boldsymbol{\omega} .$$

Qui λ e α sono costanti positive.
Il cubo è fermo all'istante iniziale.
Scrivere le equazioni di moto e dimostrare che se $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ allora

$$\lim_{t \to +\infty} \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0 ,$$

per un opportuno $\boldsymbol{\omega}_0 \in \boldsymbol{R}^3$.
Soluzione
Scegliamo come sistema di riferimento solidale con il rigido il sistema $\mathcal{S} = (C, (\boldsymbol{u}_h))$, ove, se D denota il punto medio di AB, e

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\sqrt{2}\overrightarrow{CD}}{L} , \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 , \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{AB}}{L} .$$

La terna $(\boldsymbol{u}_h)$ è principale d'inerzia in C perché $\boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{u}_3$ sono normali in C a piani di simmetria materiale ortogonale passanti per C.
Il momento di $\boldsymbol{F}$ è

$$\overrightarrow{CA} \times \boldsymbol{F} = \Big(\frac{L}{\sqrt{2}} \boldsymbol{u}_1 - \frac{L}{2} \boldsymbol{u}_3) \times (\lambda L \boldsymbol{u}_3) = -\lambda \frac{L^2}{\sqrt{2}} \boldsymbol{u}_2 .$$

Le equazioni di Eulero sono dunque

$$\begin{aligned} I_{11} \dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33}) \omega_2 \omega_3 - \alpha \omega_1 , \\ I_{22} \dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11}) \omega_1 \omega_3 - \lambda \frac{L^2}{\sqrt{2}} - \alpha \omega_2 , . \\ I_{33} \dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22}) \omega_1 \omega_2 - \alpha \omega_3 \end{aligned}$$

Si vede che la soluzione sarà nella forma con ω_1 e ω_3 identicamente nulli. Pertanto si avrà

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \boldsymbol{u}_2 ,$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$ angolo di rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_2$ (che sarà perciò fisso). Possiamo assumere $\varphi(0) = 0$; per ipotesi si ha anche $\dot{\varphi}(0) = 0$.

L'equazione soddisfatta da φ sarà pertanto

$$\ddot{\varphi} + \frac{\alpha}{I_{22}}\dot{\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{2}I_{22}}\lambda L^2 \,.$$

Si ottiene da tale equazione (lineare non omogenea a coefficienti costanti)

$$\varphi(t) = k_1 e^{-\frac{\alpha}{I_{22}}t} + k_2 - \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\lambda L^2 t \,,$$

e poi imponendo i dati iniziali

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha^2}\lambda L^2 I_{22}(e^{-\frac{\alpha}{I_{22}}t} - 1) - \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\lambda L^2 t \,.$$

R.

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 - \alpha\omega_1 \,, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - \lambda\frac{L^2}{\sqrt{2}} - \alpha\omega_2 \,, . \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 - \alpha\omega_3 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\lambda L^2 \boldsymbol{e}_2 \,.$$

53. [10/2/2015 (ex)II] Un corpo rigido è formato da un cubo omogeneo di spigolo L e massa M, e da un'asta rigida di lunghezza L e massa m. L'asta è solidale con il cubo e si mantiene sovrapposta al suo spigolo AB.
Il corpo è vincolato a mantenere il centro C del cubo nell'origine del sistema di riferimento fisso.
Nel punto medio D di AB è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{AB} \,.$$

Sul corpo agisce anche il momento rispetto a C

$$\boldsymbol{M} = -\alpha\boldsymbol{\omega} \,.$$

Qui λ e α sono costanti positive.
Il cubo è fermo all'istante iniziale.
Scrivere le equazioni di moto e dimostrare che se $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ allora

$$\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0 \,,$$

per un opportuno $\boldsymbol{\omega}_0 \in \boldsymbol{R}^3$.
R.

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 - \alpha\omega_1 \,, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - \alpha\omega_2 \,, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 - \lambda\frac{L^3}{2} - \alpha\omega_3 \end{aligned} \,.$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = -\frac{1}{2\alpha}\lambda L^3 \boldsymbol{e}_3 \,.$$

54. [4/6/2015 (ex)I] Un cono di massa M, altezza H e raggio R è vincolato a muoversi di moto polare con il vertice A coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso.
Su di esso agisce la forza applicata nel centro C della base

$$\boldsymbol{F}_C = \lambda \cos(\alpha t) \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ed è applicato anche il momento di polo A

$$\boldsymbol{M}_1 = \mu \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_3 + \lambda \cos(\alpha t) \boldsymbol{\omega} \,.$$

Qui α, λ, μ sono costanti positive, e $(\boldsymbol{u}_i)$ è una base solidale con il cono, tale che

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{AC}}{H} \,.$$

Trovare il massimo dell'energia cinetica durante il moto, per il moto generico.
SOLUZIONE
Calcoliamo il momento delle forze esterne rispetto al polo A:

$$\boldsymbol{M}^{\text{ext}} = \boldsymbol{M}_1 + \overrightarrow{AC} \times \boldsymbol{F}_C = \boldsymbol{M}_1 \,.$$

Usando la simmetria di rotazione del corpo rigido, si ha che $I_{11} = I_{22}$, e dunque le equazioni di Eulero si scrivono come

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 + \mu\omega_2 + \lambda\cos(\alpha t)\omega_1 \,, \\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - \mu\omega_1 + \lambda\cos(\alpha t)\omega_2 \,, \\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= \lambda\cos(\alpha t)\omega_3 \,.
\end{aligned}$$

Moltiplicando per ω_i la i-esima equazione, $i = 1, 2$, e sommando si ottiene

$$\frac{1}{2} I_{11} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = \lambda\cos(\alpha t)(\omega_1^2 + \omega_2^2) \,.$$

Perciò con una semplice integrazione

$$\omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2 = (\omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2) \exp\Big\{\frac{2\lambda}{\alpha I_{11}} \sin(\alpha t)\Big\} \,.$$

In modo analogo dalla terza equazione di Eulero si ha

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega_3^2 = \lambda\cos(\alpha t)\omega_3^2 \,,$$

da cui

$$\omega_3(t)^2 = \omega_3(0)^2 \exp\Big\{\frac{2\lambda}{\alpha I_{33}} \sin(\alpha t)\Big\} \,.$$

Quindi

$$T(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} I_{ii}\omega_i(t)^2 = \frac{1}{2}I_{11}(\omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2)\exp\Big\{\frac{2\lambda}{\alpha I_{11}}\sin(\alpha t)\Big\}$$
$$+ \frac{1}{2}I_{33}\omega_3(0)^2\exp\Big\{\frac{2\lambda}{\alpha I_{33}}\sin(\alpha t)\Big\}.$$

Ovviamente T *è massima per* $\sin(\alpha t) = 1$ *e minima per* $\sin(\alpha t) = -1$.
R.

$$\min T = \frac{1}{2}I_{11}(\omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2)\exp\Big\{-\frac{2\lambda}{\alpha I_{11}}\Big\} + \frac{1}{2}I_{33}\omega_3(0)^2\exp\Big\{-\frac{2\lambda}{\alpha I_{33}}\Big\},$$
$$\max T = \frac{1}{2}I_{11}(\omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2)\exp\Big\{\frac{2\lambda}{\alpha I_{11}}\Big\} + \frac{1}{2}I_{33}\omega_3(0)^2\exp\Big\{\frac{2\lambda}{\alpha I_{33}}\Big\}.$$

55. [4/6/2015 (ex)II] Un cilindro di massa M, altezza H e raggio R è vincolato a muoversi di moto polare con il centro di una base A coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso.
Su di esso agisce la forza applicata nel centro C dell'altra base

$$\boldsymbol{F}_C = \mu e^{-\alpha t}\boldsymbol{u}_3\,,$$

ed è applicato anche il momento di polo A

$$\boldsymbol{M}_1 = \lambda\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}_3 + \mu e^{-\alpha t}\boldsymbol{\omega}\,.$$

Qui α, λ, μ sono costanti positive, e $(\boldsymbol{u}_i)$ è una base solidale con il cilindro, tale che

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{AC}}{H}\,.$$

Trovare il limite dell'energia cinetica per $t \to +\infty$, per il moto generico.
R.

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = \frac{1}{2}I_{11}(\omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2)\exp\Big\{\frac{2\mu}{\alpha I_{11}}\Big\} + \frac{1}{2}I_{33}\omega_3(0)^2\exp\Big\{\frac{2\mu}{\alpha I_{33}}\Big\}.$$

56. [2/7/2015 (ex)I] Un cilindro di massa M raggio R e altezza $2H$ è vincolato ad avere il centro C nell'origine del sistema fisso O.
Al cilindro è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{e}_1\,,$$

nel punto solidale A di una delle due circonferenze di base. Qui λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$ sono costanti non nulle e il versore $\boldsymbol{u}$ è dato da

$$\boldsymbol{u} = \frac{\overrightarrow{CB}}{H}\,,$$

ove B è il centro della circonferenza di base cui appartiene A.
All'istante iniziale il cilindro è fermo con l'asse coincidente con l'asse fisso x_3 e

$$\overrightarrow{OA} = H\boldsymbol{e}_3 + R\boldsymbol{e}_1 .$$

- Si scrivano le equazioni di Eulero del corpo nelle opportune coordinate lagrangiane.
- Se $\lambda > 0$, $\mu < 0$ si scriva il valore dell'energia cinetica nel primo istante $\bar{t} > 0$ in cui l'asse del cilindro diviene ortogonale a $\boldsymbol{e}_3$.

Soluzione

Scriviamo le equazioni di Eulero nel polo C. Scegliamo allo scopo la terna principale centrale

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{R} , \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 , \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{CB}}{H} .$$

Supponiamo poi che

$$\boldsymbol{e}_1 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(t)\boldsymbol{u}_i(t) ,$$

cosicché

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = \overrightarrow{CA} \times \boldsymbol{F}_A &= (H\boldsymbol{u}_3 + R\boldsymbol{u}_1) \times \big(\lambda\boldsymbol{u}_3 + \mu\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\boldsymbol{u}_i\big) \\ &= -\lambda R\boldsymbol{u}_2 + H\mu(\alpha_1\boldsymbol{u}_2 - \alpha_2\boldsymbol{u}_1) + R\mu(\alpha_2\boldsymbol{u}_3 - \alpha_3\boldsymbol{u}_2) . \end{aligned}$$

Dunque le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - H\mu\alpha_2 , \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - R\lambda + \mu(H\alpha_1 - R\alpha_3) , . \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= R\mu\alpha_2 \end{aligned}$$

L'intuizione fisica suggerisce che il moto sia una rotazione intorno a $\boldsymbol{e}_2$, che quindi coinciderebbe in ogni istante con $\boldsymbol{u}_2$. Pertanto ipotizziamo che esista un angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_3 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_3 , \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2 .$$

Nella notazione già introdotta quindi

$$\alpha_1(t) = \cos\varphi , \qquad \alpha_2(t) = 0 , \qquad \alpha_3(t) = -\sin\varphi .$$

In quest'ipotesi la prima e la terza equazione di Eulero sono banalmente soddisfatte e la seconda diviene

$$-I_{11}\ddot{\varphi} = -R\lambda + \mu(H\cos\varphi + R\sin\varphi) . \tag{1}$$

Dunque abbiamo in tal senso determinata la soluzione delle equazioni di moto; le altre due coordinate lagrangiane sono due angoli di Eulero che rimangono costanti durante il moto.
Moltiplichiamo la (1) *per* $\dot\varphi$ *e integriamo ottenendo*

$$\frac{1}{2}I_{11}\dot\varphi(t)^2 = R\lambda\varphi(t) - \mu(H\sin\varphi(t) - R\cos\varphi(t) + R)\,,$$

ove abbiamo usato anche le condizioni iniziali $\varphi(0) = 0$, $\dot\varphi(0) = 0$. *Se* $\lambda > 0$ *e* $\mu < 0$ *si vede che* $\ddot\varphi > 0$ *finché* $\varphi \in [0, \pi/2]$, *dunque* $\varphi(\bar t) = \pi/2$ *per* $\bar t > 0$ *opportuno.*
R.

$$\begin{aligned} I_{11}\ddot\varphi &= R\lambda - \mu(H\cos\varphi + R\sin\varphi)\,; \\ T(\bar t) &= R\lambda\frac{\pi}{2} - \mu(H + R)\,. \end{aligned}$$

57. [3/9/2015 (ex)I] Un disco di raggio R e massa M è vincolato ad avere il centro nell'origine del sistema di riferimento fisso O. Consideriamo anche il sistema di riferimento solidale con il disco $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ ove $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al disco.
Sul disco agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}_3\,,$$

ove A è un punto solidale con il disco appartenente al suo bordo, dato da $\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_1$, e $k > 0$.
All'istante iniziale si ha per $\omega_{30} > 0$ assegnato

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{u}_3(0) = \boldsymbol{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{30}\boldsymbol{u}_3(0)\,.$$

- Scrivere le equazioni di Eulero del disco e determinarne la velocità angolare in funzione dei parametri e dati assegnati, nella base $(\boldsymbol{u}_h)$.
- Dare una condizione sufficiente perché l'asse del disco non divenga ortogonale a $\boldsymbol{u}_3(0) = \boldsymbol{e}_2$ nell'intervallo di tempo $(0, \bar t)$, ove $\bar t > 0$ è assegnato.

Soluzione
A) Il momento delle forze esterne rispetto a O *è dato da*

$$\boldsymbol{M}^{\text{ext}} = \overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F}_A = R\boldsymbol{u}_1 \times k\boldsymbol{u}_3 = -Rk\boldsymbol{u}_2\,.$$

Scriviamo dunque le equazioni di Eulero del disco nella terna principale $(\boldsymbol{u}_h)$ *in* O

$$\begin{aligned} I_{11}\dot\omega_1 &= -I_{11}\omega_2\omega_3\,, \\ I_{11}\dot\omega_2 &= I_{11}\omega_1\omega_3 - Rk\,, \\ 2I_{11}\dot\omega_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

ove si sono usati i fatti

$$I_{11} = I_{22}\,, \qquad I_{33} = I_{11} + I_{22}\,.$$

Si ottiene subito dalla terza equazione che

$$\omega_3(t) = \omega_{30}\,, \qquad t > 0\,.$$

Perciò dalla prima equazione combinata con la seconda si ha

$$-\frac{\ddot\omega_1}{\omega_{30}} = \omega_1\omega_{30} - \frac{Rk}{I_{11}}\,,$$

ossia

$$\ddot\omega_1 + \omega_{30}^2\omega_1 = \frac{Rk}{I_{11}}\omega_{30}\,.$$

Quest'equazione si integra facilmente e usando le condizioni iniziali

$$\omega_1(0) = 0\,, \qquad \dot\omega_1(0) = -\omega_2(0)\omega_{30} = 0\,,$$

si ottiene

$$\omega_1(t) = \frac{Rk}{I_{11}\omega_{30}}(1 - \cos(\omega_{30}t))\,,$$

da cui subito

$$\omega_2(t) = -\frac{\dot\omega_1(t)}{\omega_{30}} = -\frac{Rk}{I_{11}\omega_{30}}\sin(\omega_{30}t)\,.$$

B) Si sa che

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_3}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}_3 &= [\omega_1(t)\boldsymbol{u}_1(t) + \omega_2(t)\boldsymbol{u}_2(t)]\times\boldsymbol{u}_3(t)\\ &= -\omega_1(t)\boldsymbol{u}_2(t) + \omega_2(t)\boldsymbol{u}_1(t)\,,\end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{e}_2\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_3}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{e}_2\right| \le \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_3}{\mathrm{d}t}\right| &\le |\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}_3|\\ &= (\omega_1^2+\omega_2^2)^{\frac12} = \sqrt2\frac{Rk}{I_{11}\omega_{30}}(1-\cos(\omega_{30}t))^{\frac12}\,.\end{aligned}$$

Vogliamo imporre che

$$\boldsymbol{u}_3(t)\cdot\boldsymbol{e}_2 > 0\,, \qquad 0 < t \le \bar t\,.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_3(t)\cdot\boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{u}_3(0)\cdot\boldsymbol{e}_2 + \int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{u}_3(\tau)\cdot\boldsymbol{e}_2\,\mathrm{d}\tau\\ &\ge 1 - \sqrt2\frac{Rk}{I_{11}\omega_{30}}\int_0^t(1-\cos(\omega_{30}\tau))^{\frac12}\,\mathrm{d}\tau\\ &> 1 - 2\frac{Rk}{I_{11}\omega_{30}}t\,.\end{aligned}$$

R.

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{Rk}{I_{11}\omega_{30}}(1-\cos(\omega_{30}t))\boldsymbol{u}_1(t) - \frac{Rk}{I_{11}\omega_{30}}\sin(\omega_{30}t)\boldsymbol{u}_2(t) + \omega_{30}\boldsymbol{u}_3(t)\,;$$

$$1 \ge 2\frac{Rk}{I_{11}\omega_{30}}\bar t\,.$$

58. [12/1/2015 (ex)I] Un rigido è costituito da un cilindro omogeneo di massa M, raggio R, altezza H e da 4 punti materiali P_1, P_2, P_3, P_4, ciascuno di massa m, solidali al cilindro.
Si consideri un sistema di riferimento solidale con il rigido $\mathcal{S} = (C, (\boldsymbol{u}_h))$, ove C è il centro del cilindro e $\boldsymbol{u}_3$ è parallelo all'asse del cilindro. Si assuma che

$$I_{33}^{\mathrm{cil}} > I_{11}^{\mathrm{cil}} = I_{22}^{\mathrm{cil}} \,,$$

ove I_{jj}^{cil} indica il momento di inerzia del cilindro, senza i punti P_i.
I punti P_i devono essere fissati a distanza R dall'asse del cilindro, ma in posizioni altrimenti libere. Si trovino per essi posizioni tali che valgano entrambe le condizioni:

- la terna (u_h) sia principale per il rigido in C;
- tutti i momenti del rigido rispetto a tale terna in C siano uguali:

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} \,.$$

Soluzione
Guidati dalla simmetria del problema tentiamo per esempio con le posizioni

$$\overrightarrow{CP_1} = R\boldsymbol{u}_1 + s\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \overrightarrow{CP_2} = -R\boldsymbol{u}_1 + s\boldsymbol{u}_3 \,,$$
$$\overrightarrow{CP_3} = R\boldsymbol{u}_2 + s\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \overrightarrow{CP_4} = -R\boldsymbol{u}_2 + s\boldsymbol{u}_3 \,,$$

con $s \in \boldsymbol{R}$ da scegliere.
I piani per C ortogonali a $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ sono di simmetria materiale ortogonale per il rigido così ottenuto e dunque $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ sono principali; perciò anche $\boldsymbol{u}_3$ lo è.
Resta da imporre che tutti i momenti I_{jj} siano uguali; si ha

$$I_{11} = I_{11}^{\mathrm{cil}} + 2ms^2 + 2m(R^2 + s^2) \,,$$
$$I_{22} = I_{11}^{\mathrm{cil}} + 2m(R^2 + s^2) + 2ms^2 \,,$$
$$I_{33} = I_{33}^{\mathrm{cil}} + 4mR^2 \,.$$

È ovvio che per ogni s si ha $I_{11} = I_{22}$. Basta quindi scegliere s in modo che $I_{11} = I_{33}$, ossia

$$I_{33}^{\mathrm{cil}} + 2mR^2 = I_{11}^{\mathrm{cil}} + 4ms^2 \,,$$

che può essere certo soddisfatta in vista dell'ipotesi $I_{33}^{\mathrm{cil}} > I_{11}^{\mathrm{cil}}$.
R.

$$\overrightarrow{CP_1} = R\boldsymbol{u}_1 + s\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \overrightarrow{CP_2} = -R\boldsymbol{u}_1 + s\boldsymbol{u}_3 \,,$$
$$\overrightarrow{CP_3} = R\boldsymbol{u}_2 + s\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \overrightarrow{CP_4} = -R\boldsymbol{u}_2 + s\boldsymbol{u}_3 \,,$$

con

$$s = \Big(\frac{I_{33}^{\mathrm{cil}} - I_{11}^{\mathrm{cil}} + 2mR^2}{4m} \Big)^{\frac{1}{2}} \,.$$

59. [12/1/2015 (ex)II] Un rigido è costituito da un cono omogeneo di massa M, raggio R, altezza H e da 4 punti materiali P_1, P_2, P_3, P_4, ciascuno di massa m, solidali al cono.
Si consideri un sistema di riferimento solidale con il rigido $\mathcal{S} = (C, (\boldsymbol{u}_h))$, ove C è il vertice del cono e $\boldsymbol{u}_3$ è parallelo all'asse del cono. Si assuma che

$$I_{33}^{\text{cono}} > I_{11}^{\text{cono}} = I_{22}^{\text{cono}} ,$$

ove I_{jj}^{cono} indica il momento di inerzia del cono, senza i punti P_i.
I punti P_i devono essere fissati a distanza R dall'asse del cono, ma in posizioni altrimenti libere. Si trovino per essi posizioni tali che valgano entrambe le condizioni:

- la terna (u_h) sia principale per il rigido in C;
- tutti i momenti del rigido rispetto a tale terna in C siano uguali:

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} .$$

R.

$$\overrightarrow{CP_1} = R\boldsymbol{u}_1 + s\boldsymbol{u}_3 , \qquad \overrightarrow{CP_2} = -R\boldsymbol{u}_1 + s\boldsymbol{u}_3 ,$$
$$\overrightarrow{CP_3} = R\boldsymbol{u}_2 + s\boldsymbol{u}_3 , \qquad \overrightarrow{CP_4} = -R\boldsymbol{u}_2 + s\boldsymbol{u}_3 ,$$

con

$$s = \Big(\frac{I_{33}^{\text{cono}} - I_{11}^{\text{cono}} + 2mR^2}{4m} \Big)^{\frac{1}{2}} .$$

60. [9/2/2016 (ex)I] Una lamina ABC a forma di triangolo equilatero di lato L e massa M è vincolata a mantenere il centro di massa G nell'origine del sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$.
Nel vertice A è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{P_0A} + h\boldsymbol{u} ,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore normale alla lamina e k, $h > 0$. Qui $\overrightarrow{OP_0} = (L/\sqrt{3})\boldsymbol{e}_1$.
La lamina all'istante iniziale è ferma, con ABC nel piano $x_3 = 0$, e A coincidente con P_0.

- Si scrivano le equazioni di moto.
- Se ne ricavi un integrale primo del moto.

Soluzione

A) Scegliamo come sistema principale

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{GA}}{\left|\overrightarrow{GA}\right|}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 , \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u} .$$

Guidati dall'intuizione fisica, supponiamo che il moto sia una rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_2$*, e chiamiamo* φ *l'angolo di rotazione relativo. Pertanto*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 ,\\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 ,\\
\boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_2 ,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot\varphi \boldsymbol{u}_2 = -\dot\varphi \boldsymbol{e}_2 .$$

Dunque

$$\boldsymbol{F}_A = -k\Big(\frac{L}{\sqrt{3}}\boldsymbol{u}_1 - \frac{L}{\sqrt{3}}(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 - \sin\varphi \boldsymbol{u}_3)\Big) + h\boldsymbol{u}_3 ,$$

e perciò

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = \frac{L}{\sqrt{3}}\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{F}_A = \frac{L^2}{3}k\sin\varphi \boldsymbol{u}_2 - \frac{L}{\sqrt{3}}h\boldsymbol{u}_2 .$$

Le equazioni di moto dunque sono

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot\omega_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 ,\\
I_{22}\dot\omega_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \frac{L^2}{3}k\sin\varphi - \frac{L}{\sqrt{3}}h ,\\
I_{33}\dot\omega_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 ,
\end{aligned}$$

che sono soddisfatte da $\boldsymbol{\omega} = (0, -\dot\varphi, 0)$ *se e solo se*

$$-I_{22}\ddot\varphi = \frac{L^2k}{3}\sin\varphi - \frac{L}{\sqrt{3}}h .$$

Si noti che è importante che sia verificato tutto il sistema delle equazioni di moto, per confermare l'ipotesi fatta sopra.

B) Moltiplicando l'equazione di moto per $\dot\varphi$ *e integrando si ha*

$$\frac{1}{2}I_{22}\dot\varphi^2 = \frac{L^2k}{3}\cos\varphi + \frac{Lh}{\sqrt{3}}\varphi - \frac{L^2k}{3} .$$

R.

$$\begin{aligned}
-I_{22}\ddot\varphi &= \frac{L^2k}{3}\sin\varphi - \frac{L}{\sqrt{3}}h ;\\
\frac{1}{2}I_{22}\dot\varphi^2 &= \frac{L^2k}{3}\cos\varphi + \frac{Lh}{\sqrt{3}}\varphi - \frac{L^2k}{3} .
\end{aligned}$$

61. [9/2/2016 (ex)II] Una lamina $ABCD$ a forma di quadrato di lato L e massa M è vincolata a mantenere il vertice A nell'origine del sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$.
Nel centro di massa G è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_G = k\overrightarrow{P_0G} + h\boldsymbol{u} \,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore normale alla lamina e k, $h > 0$. Qui $\overrightarrow{OP_0} = (L/\sqrt{2})\boldsymbol{e}_1$.
La lamina all'istante iniziale è ferma, con $ABCD$ nel piano $x_3 = 0$, e G coincidente con P_0.

- Si scrivano le equazioni di moto.
- Se ne ricavi un integrale primo del moto.

R.

$$\begin{aligned} I_{22}\ddot{\varphi} &= \frac{L^2k}{2}\sin\varphi + \frac{L}{\sqrt{2}}h \,; \\ \frac{1}{2}I_{22}\dot{\varphi}^2 &= -\frac{L^2k}{2}\cos\varphi + \frac{Lh}{\sqrt{2}}\varphi + \frac{L^2k}{2} \,. \end{aligned}$$

62. [19/3/2016 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e massa M è vincolata ad avere il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Sia $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale con la lamina, ove $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale alla lamina, e

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{L} \,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{BC}}{L} \,.$$

La lamina è sottoposta alle forze

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda\sin(\mu t)\boldsymbol{u}_1 \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = \lambda\sin(\mu t)\boldsymbol{u}_2 \,,$$

applicate come indicato nei vertici consecutivi A e B, ove λ, $\mu > 0$ sono assegnati.
Si determinino massimo e minimo dell'energia cinetica nel corso del moto, in funzione dei parametri e delle condizioni iniziali del moto.
SOLUZIONE
Calcoliamo il momento delle forze esterne:

$$\boldsymbol{M}^{\text{ext}} = \overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{F}_A + \overrightarrow{BC}\times\boldsymbol{F}_B = \lambda\sin(\mu t)[-\frac{L}{2}\boldsymbol{u}_2\times\boldsymbol{u}_1 + \frac{L}{2}\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2] = \lambda\sin(\mu t)L\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Dunque le equazioni di Eulero sono date da

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 \,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 \,, . \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= \lambda L\sin(\mu t) \end{aligned}$$

Moltiplicando la i-esima equazione per ω_i e sommando su $i = 1, 2$ si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0\,.$$

Infine la terza equazione dà per integrazione diretta

$$\omega_3(t) = \omega_3(0) + \frac{\lambda L}{I_{33}\mu}(1 - \cos(\mu t))\,.$$

Dunque l'energia cinetica è data da (ricordando $I_{33} = 2I_{11} = 2I_{22}$)

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} I_{ii}\omega_i(t)^2 = \frac{I_{11}}{2}(\omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2) + I_{11}\Big[\omega_3(0) + \frac{\lambda L}{I_{33}\mu}(1 - \cos(\mu t))\Big]^2\,.$$

Pertanto il massimo e il minimo dell'energia cinetica coincidono con il massimo e il minimo del valore assoluto di $\omega_3(t)$.
R.

$$\omega_3(0) \geq -\frac{\lambda L}{2I_{33}\mu} \;: \qquad \begin{aligned} \min_{t\geq 0} T(t) &= \frac{I_{11}}{2}(\omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2) + I_{11}\omega_3(0)^2\,,\\ \max_{t\geq 0} T(t) &= \frac{I_{11}}{2}(\omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2) + I_{11}\Big(\omega_3(0) + \frac{\lambda L}{I_{33}\mu}\Big)^2\,; \end{aligned}$$

$$\omega_3(0) < -\frac{\lambda L}{2I_{33}\mu} \;: \qquad \begin{aligned} \min_{t\geq 0} T(t) &= \frac{I_{11}}{2}(\omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2) + I_{11}\Big(\omega_3(0) + \frac{\lambda L}{I_{33}\mu}\Big)^2\,,\\ \max_{t\geq 0} T(t) &= \frac{I_{11}}{2}(\omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2) + I_{11}\omega_3(0)^2\,. \end{aligned}$$

63. [12/7/2016 (ex)I] Un cono di raggio R, altezza H e massa M è vincolato a precedere intorno a un punto fisso e solidale A del suo asse.
Sul cono agiscono un momento, rispetto ad A,

$$\boldsymbol{M}_a = -\lambda\boldsymbol{\omega}\,,$$

e una distribuzione di forze applicata solo sulla base del cono, data da

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(P) = ke^{-\mu t}\overrightarrow{VC} \times \overrightarrow{CP}\,,$$

ove V è il vertice del cono, C il centro della base, P il generico punto della base. Qui k, λ, $\mu > 0$ sono costanti assegnate.

- Si scrivano le equazioni di Eulero.
- Assumendo che il momento assiale I_{33} del cono soddisfi $\mu I_{33} > \lambda$, si dimostri che si può scegliere A in modo che se $\boldsymbol{\omega}(0)$ non è parallelo all'asse del cono, allora $\boldsymbol{\omega}(t)$ tende a disporsi ortogonalmente all'asse per $t \to +\infty$.

Soluzione

A) Scriviamo le equazioni di Eulero del moto rispetto ad A (che è ora un qualunque punto fissato sull'asse del cono). Scegliamo il sistema di riferimento solidale $\mathcal{S} = (A, (\boldsymbol{u}_h))$ in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia diretto come $\overrightarrow{VC}$. Resta da calcolare il momento di $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$. Per far questo parametrizziamo

$$\overrightarrow{CP} = r(\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + \sin\theta\boldsymbol{u}_2)\,, \qquad r \in (0, R)\,, \theta \in (-\pi, \pi)\,.$$

Inoltre abbiamo $\overrightarrow{AC} = h\boldsymbol{u}_3$ per un $h \in \boldsymbol{R}$ fissato opportunamente. Allora

$$\overrightarrow{VC} \times \overrightarrow{CP} = H\boldsymbol{u}_3 \times r(\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + \sin\theta\boldsymbol{u}_2) = Hr(\cos\theta\boldsymbol{u}_2 - \sin\theta\boldsymbol{u}_1)\,.$$

Dunque

$$\begin{aligned} k^{-1}e^{\mu t}\boldsymbol{M}_a = \iint_{\text{base}} \overrightarrow{AP} \times \mathrm{d}\boldsymbol{F} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^R &[h\boldsymbol{u}_3 + r\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + r\sin\theta\boldsymbol{u}_2] \\ &\times Hr(\cos\theta\boldsymbol{u}_2 - \sin\theta\boldsymbol{u}_1)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi H\frac{R^4}{2}\boldsymbol{u}_3\,. \end{aligned}$$

Pertanto le equazioni di moto sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - \lambda\omega_1\,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - \lambda\omega_2\,, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= -\lambda\omega_3 + Ke^{-\mu t}\,, \end{aligned}$$

ove si è posto $K = k\pi HR^4/2 > 0$.
B) Determiniamo la componente assiale di $\boldsymbol{\omega}$; da

$$\dot{\omega}_3 = -\frac{\lambda}{I_{33}}\omega_3 + \frac{K}{I_{33}}e^{-\mu t}\,,$$

si ottiene

$$\omega_3(t) = \Big(\omega_3(0) - \frac{I_{33}}{\lambda - \mu I_{33}}\Big)e^{-\frac{\lambda}{I_{33}}t} + \frac{I_{33}}{\lambda - \mu I_{33}}e^{-\mu t}\,.$$

La componente trasversale di $\boldsymbol{\omega}$ si ottiene da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = -2\frac{\lambda}{I_{11}}(\omega_1^2 + \omega_2^2)\,,$$

che dà

$$\omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2 = e^{-2\frac{\lambda}{I_{11}}t}(\omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2)\,.$$

Dunque la tangente dell'angolo formato da $\boldsymbol{\omega}(t)$ con $\boldsymbol{u}_3$ è data da

$$\frac{\sqrt{\omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2}}{|\omega_3(t)|} = \frac{e^{-\frac{\lambda}{I_{11}}t + \frac{\lambda}{I_{33}}t}\sqrt{\omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2}}{\Big|\Big(\omega_3(0) - \frac{I_{33}}{\lambda - \mu I_{33}}\Big) + \frac{I_{33}}{\lambda - \mu I_{33}}e^{-\left(\mu - \frac{\lambda}{I_{33}}\right)t}\Big|}\,.$$

Se $I_{11} > I_{33}$ dunque la tangente diverge a $+\infty$ e pertanto l'angolo tende a $\pi/2$ per ogni scelta di $\boldsymbol{\omega}(0)$ non assiale. D'altra parte mentre I_{33} rimane costante al variare di A, si ha

$$I_{11}(A) = I_{11}(G) + M|GA|^2\,.$$

Basterà infine scegliere A in modo che

$$I_{11}(G) + M|\overrightarrow{GA}|^2 > I_{33} \,.$$

R.

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot\omega_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - \lambda\omega_1 \,, \\
I_{11}\dot\omega_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 - \lambda\omega_2 \,, \\
I_{33}\dot\omega_3 &= -\lambda\omega_3 + Ke^{-\mu t} \,,
\end{aligned}$$

ove $K = k\pi H R^4/2 > 0$.
La condizione da imporre è

$$I_{11}(G) + M|\overrightarrow{GA}|^2 > I_{33} \,.$$

64. [6/9/2016 (ex)I] Un cubo di massa M e spigolo $2L$ è vincolato ad avere il centro C coincidente con l'origine del sistema fisso O.
Sul cubo agiscono le due forze, applicate nei punti indicati,

$$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{P_A A} \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k\overrightarrow{P_B B} \,.$$

Qui A e B sono due vertici adiacenti (ossia estremi dello stesso spigolo), P_A, P_B ne indicano le rispettive proiezioni ortogonali sul piano $x_3 = 0$, e $k > 0$ è costante.
All'istante iniziale il cubo ha le facce ortogonali agli assi coordinati, in modo che

$$\overrightarrow{OA}(0) = -L\boldsymbol{e}_1 + L\boldsymbol{e}_2 - L\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \overrightarrow{OB}(0) = L\boldsymbol{e}_1 + L\boldsymbol{e}_2 - L\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Inoltre vale per $\omega_0 > 0$

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0 \boldsymbol{e}_1 \,.$$

Scrivere le equazioni di moto e dare una condizione sui parametri per cui durante il moto si abbia $x_{2A}(t) = 0$ per qualche $t > 0$.
Soluzione
A) L'intuizione fisica e la situazione geometrica del rigido suggeriscono che il cubo si muova di una rotazione intorno all'asse $\boldsymbol{e}_1$.
Introduciamo dunque l'angolo di rotazione $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *formato da* $\overrightarrow{OD}$ *con* $\boldsymbol{e}_2$, *ove* D *è il punto medio di* AB. *Dunque* $\varphi(0) = -\pi/4$ *e* $\boldsymbol{\omega}(t) = \dot\varphi(t)\boldsymbol{e}_1$. *Inoltre*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} &= -L\boldsymbol{e}_1 + \sqrt{2}L\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{2}L\sin\varphi\boldsymbol{e}_3 \,, \\
\overrightarrow{OB} &= L\boldsymbol{e}_1 + \sqrt{2}L\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{2}L\sin\varphi\boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Il momento delle forze esterne si calcola come

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F}_A + \overrightarrow{OB} \times \boldsymbol{F}_B = \\
&\quad (-L\boldsymbol{e}_1 + \sqrt{2}L\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{2}L\sin\varphi\boldsymbol{e}_3) \times k(-\sqrt{2}L\sin\varphi\boldsymbol{e}_3) + \\
&\quad (L\boldsymbol{e}_1 + \sqrt{2}L\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{2}L\sin\varphi\boldsymbol{e}_3) \times k(-\sqrt{2}L\sin\varphi\boldsymbol{e}_3) = \\
&\quad 4kL^2(-\cos\varphi\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 = -2kL^2\sin(2\varphi)\boldsymbol{e}_1 \,.
\end{aligned}$$

Dunque le equazioni di moto, scritte come equazioni di Eulero, sono date da

$$I\ddot{\varphi} = -2kL^2 \sin(2\varphi)\,,$$

e da due uguaglianze banali del tipo $0 = 0$. *Poiché questo sistema con le condizioni iniziali date sopra ha unica soluzione, resta dimostrato che l'ipotesi fatta (che il moto fosse una rotazione) è corretta.*
B) Moltiplicando l'equazione di moto per $\dot{\varphi}$ *e integrando si ha*

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = kL^2\cos(2\varphi)\,,$$

perché $\cos(2\varphi(0)) = 0$. *Pertanto*

$$\dot{\varphi}(t)^2 = \omega_0^2 + \frac{2kL^2}{I}\cos(2\varphi(t))\,.$$

Si ha che $x_{2A}(\bar{t}) = 0$ *se e solo se* $\varphi(\bar{t}) \in \{-\pi/2, \pi/2\}$. *In entrambi i casi si ha* $\cos(2\varphi(\bar{t})) = -1$, *che è possibile solo se*

$$\dot{\varphi}(\bar{t})^2 = \omega_0^2 - \frac{2kL^2}{I} \geq 0\,.$$

In effetti si può vedere che $\bar{t} < +\infty$ *richiede che valga la disuguaglianza stretta, perché la posizione indicata è un punto di equilibrio.*
R.

$$I\ddot{\varphi} = -2kL^2\sin(2\varphi)\,; \qquad \frac{1}{2}I\omega_0^2 > kL^2\,.$$

65. [17/01/2017 (ex)I] Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati $|\overrightarrow{AB}| = a$, $|\overrightarrow{BC}| = b$, $b > a$, e di massa M, è vincolata a ruotare intorno alla diagonale $\overrightarrow{AC}$ che si mantiene fissa; anche A e C sono fissi.
Sulla lamina agisce la forza applicata nel punto D

$$\boldsymbol{F}_D = \lambda\frac{\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{DC}}{\left|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{DC}\right|}\,,$$

con $\lambda > 0$ costante.
La lamina all'istante iniziale è ferma.
Scrivere le equazioni di moto e trovare il momento $\boldsymbol{\mu}$ delle reazioni vincolari nell'istante in cui la lamina compie il primo giro.
[Note: Il vincolo è liscio, quindi la componente di $\boldsymbol{\mu}$ lungo l'asse di rotazione è nulla.
Si possono lasciare indicate le coordinate dei vertici della lamina nel sistema solidale scelto.]
Soluzione
Scriviamo le equazioni di Eulero; scegliamo il sistema solidale $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, *ove* O *è il centro di massa della lamina, e*

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2\times\boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{DC}}{\left|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{DC}\right|}\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\,.$$

In questo modo $\boldsymbol{u}_2$ *è ortogonale alla lamina e diretto come* $\boldsymbol{F}_D$*. Si noti che* $\boldsymbol{u}_1$ *e* $\boldsymbol{u}_3$ *non sono principali. Indichiamo con* $(\alpha,0,\beta)$ *le coordinate di* D *in* $\mathcal{S}$*, cosicché*

$$\overrightarrow{OD} = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_3 .$$

Indichiamo anche con φ *l'angolo di rotazione intorno alla direzione fissa* $\boldsymbol{u}_3$*, cosicché* $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3$*.*
Le equazioni di Eulero in forma vettoriale sono date da

$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = (\alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_3) \times \lambda \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{\mu} = \alpha\lambda \boldsymbol{u}_3 - \beta\lambda \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{\mu} .$$

D'altronde se $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & I_{13} \\ 0 & I_{22} & 0 \\ I_{13} & 0 & I_{33} \end{pmatrix} .$$

Quindi in coordinate

$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = I_{13}\ddot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 + I_{13}\dot{\varphi}^2\boldsymbol{u}_2 + I_{33}\ddot{\varphi}\boldsymbol{u}_3 .$$

Perciò le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I_{13}\ddot{\varphi} &= -\beta\lambda + \mu_1 , \\ I_{13}\dot{\varphi}^2 &= \mu_2 , \\ I_{33}\ddot{\varphi} &= \alpha\lambda . \end{aligned}$$

Dunque usando $\dot{\varphi}(0) = 0$ *che segue dalle condizioni iniziali assegnate, si ha dalla III*

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\alpha\lambda}{2I_{33}} t^2 .$$

Si noti che dalla definizione di α *segue che* $\alpha < 0$*. L'istante cercato quindi è dato da*

$$-2\pi = \varphi(t) - \varphi(0) = \frac{\alpha\lambda}{2I_{33}} t^2 ,$$

ossia da

$$t = \sqrt{\frac{4\pi I_{33}}{|\alpha|\lambda}} .$$

Infine

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{I_{13}}{I_{33}}\alpha\lambda + \beta\lambda , \\ \mu_2 &= I_{13}\Big(\frac{\alpha\lambda}{I_{33}} t\Big)^2 = 4\pi \frac{I_{13}}{I_{33}} |\alpha|\lambda . \end{aligned}$$

R.

$$I_{33}\ddot{\varphi} = \alpha\lambda ,$$

ove $(\alpha,0,\beta)$ *sono le coordinate di* D *nel sistema solidale. Il momento delle reazioni vincolari ha componenti*

$$\mu_1 = \frac{I_{13}}{I_{33}}\alpha\lambda + \beta\lambda , \qquad \mu_2 = 4\pi \frac{I_{13}}{I_{33}} |\alpha|\lambda .$$

66. [17/01/2017 (ex)II] Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati $|\overrightarrow{AB}| = a$, $|\overrightarrow{BC}| = b$, $b > a$, e di massa M, è vincolata a ruotare intorno alla diagonale $\overrightarrow{AC}$ che si mantiene fissa; anche A e C sono fissi.
Sulla lamina agisce la forza applicata nel punto B

$$\boldsymbol{F}_B = -\lambda \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right|} \,,$$

con $\lambda > 0$ costante.
La lamina all'istante iniziale è ferma.
Scrivere le equazioni di moto e trovare il momento $\boldsymbol{\mu}$ delle reazioni vincolari nell'istante in cui la lamina compie il primo giro.
[Note: Il vincolo è liscio, quindi la componente di $\boldsymbol{\mu}$ lungo l'asse di rotazione è nulla.
Si possono lasciare indicate le coordinate dei vertici della lamina nel sistema solidale scelto.]
R.

$$I_{33}\ddot{\varphi} = -\alpha\lambda \,,$$

ove $(\alpha, 0, \beta)$ sono le coordinate di B nel sistema solidale. Il momento delle reazioni vincolari ha componenti

$$\mu_1 = -\frac{I_{13}}{I_{33}}\alpha\lambda - \beta\lambda \,, \qquad \mu_2 = 4\pi \frac{I_{13}}{I_{33}}|\alpha|\lambda \,.$$

67. [8/02/2017 (ex)I] Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia con polo O. Si sa che i suoi momenti d'inerzia nella terna principale in O, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, soddisfano

$$0 < I_{11} = I_{22} < I_{33} \,.$$

Vale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \lambda \boldsymbol{u}_1(0) + \mu \boldsymbol{u}_3(0) \,,$$

con λ, μ costanti positive.

- Si determini la scomposizione di $\boldsymbol{\omega}(t)$ nella terna $(\boldsymbol{u}_h)$.
- Si provi che $\boldsymbol{\omega}(t)$ è periodico e il periodo può essere fissato ad arbitrio pur di scegliere μ in modo opportuno.

SOLUZIONE
Si sa che, per le equazioni di Eulero,

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 \,, \\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 \,, \\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= 0 \,.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\omega_3(t) = \omega_3(0) = \mu \, .$$

Dalle prime due equazioni si ha

$$I_{11}\ddot{\omega}_1 = (I_{11} - I_{33})\mu\dot{\omega}_2 = -(I_{11} - I_{33})^2 I_{11}^{-1}\mu^2\omega_1 \, .$$

Perciò

$$\ddot{\omega}_1 + \alpha^2\omega_1 = 0 \, ,$$

ove si è posto

$$\alpha = \left|(I_{11} - I_{33})I_{11}^{-1}\mu\right| \, .$$

Usando le condizioni iniziali e il sistema per ricavare $\dot{\omega}_1(0)$ *si ha*

$$\omega_1(t) = \lambda\cos(\alpha t) \, .$$

Da qui e dalla I equazione di Eulero si ricava $\omega_2(t)$.
Il moto dunque ha periodo

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} \, .$$

R.

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \lambda\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \lambda\sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t) + \mu\boldsymbol{u}_3(t) \, , \qquad \alpha = \left|(I_{11} - I_{33})I_{11}^{-1}\mu\right| \, .$$

68. [8/02/2017 (ex)II] Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia con polo O. Si sa che i suoi momenti d'inerzia nella terna principale in O, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, soddisfano

$$0 < I_{11} < I_{22} = I_{33} \, .$$

Vale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \lambda\boldsymbol{u}_1(0) + \mu\boldsymbol{u}_3(0) \, ,$$

con λ, μ costanti positive.

- Si determini la scomposizione di $\boldsymbol{\omega}(t)$ nella terna $(\boldsymbol{u}_h)$.
- Si provi che $\boldsymbol{\omega}(t)$ è periodico e il periodo può essere fissato ad arbitrio pur di scegliere λ in modo opportuno.

R.

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \lambda\boldsymbol{u}_1(t) + \mu\sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t) + \mu\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_3(t) \, , \qquad \alpha = \left|(I_{11} - I_{33})I_{33}^{-1}\lambda\right| \, .$$

69. [06/06/2017 (ex)I] Un cubo di spigolo $2L$ e massa M è vincolato a muoversi di moto polare con polo nel centro di una delle facce.
Il moto polare è per inerzia.

- Si dimostri che il moto è periodico.
- Conoscendo la lunghezza della velocità angolare

$$|\boldsymbol{\omega}(\bar{t})|^2 = \mu^2 > 0 \,,$$

si diano due limitazioni per l'energia cinetica $T(\bar{t})$ del cubo, superiore e inferiore, in funzione di μ, L, M e dei momenti di inerzia nel centro di massa G del cubo.

SOLUZIONE

A) Scriviamo le equazioni di Eulero del rigido: scegliamo allo scopo una terna solidale principale di inerzia nel polo C, data da

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{GC}}{L} \,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{CH}}{L} \,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 \,,$$

ove H è il punto medio di uno spigolo fissato della faccia cui appartiene C. Che la terna sia principale segue per esempio dal teorema di Huygens.

Dunque le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I\dot{\omega}_1 &= 0 \,, \\ (I + ML^2)\dot{\omega}_2 &= ML^2\omega_1\omega_3 \,, \\ (I + ML^2)\dot{\omega}_2 &= -ML^2\omega_2\omega_3 \,, \end{aligned}$$

ove I è il momento di inerzia in G e abbiamo applicato ancora il teorema di Huygens.

Dalla I si ha

$$\omega_1(t) = \omega_1(0) = \omega_{10} \,,$$

e dalla II e III

$$(I + ML^2)\ddot{\omega}_2 = ML^2\dot{\omega}_3\omega_{10} = -\frac{M^2L^4\omega_{10}}{I + ML^2}\omega_2 \,.$$

Pertanto ω_2 in quanto soluzione dell'equazione dei moti armonici è periodica; similmente si dimostra che anche ω_3 lo è.

B) È noto che in un moto polare per inerzia l'energia cinetica T è costante e vale nel nostro caso

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^C\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}(I + ML^2)(\omega_2^2 + \omega_3^2) \,.$$

Quindi

$$T_{\min} = \frac{1}{2}I\mu^2 \,, \qquad T_{\max} = \frac{1}{2}(I + ML^2)\mu^2 \,.$$

R.

$$T_{\min}(\bar{t}) = \frac{1}{2}I\mu^2 \,, \qquad T_{\max}(\bar{t}) = \frac{1}{2}(I + ML^2)\mu^2 \,.$$

70. [11/07/2017 (ex)I] Un cono di raggio R, altezza H e massa M è vincolato a muoversi di moto polare intorno al suo vertice V, che coincide con l'origine del sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$.
Sul cono agiscono le forze, applicate nei punti indicati,

$$\boldsymbol{F}_A = k\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{F}_B = -k\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{F}_C = \lambda \boldsymbol{e}_1\,.$$

Qui C è il centro della base del cono, A e B sono gli estremi di uno stesso diametro della base, e

$$\boldsymbol{u} = \frac{\overrightarrow{VC} \times \overrightarrow{CA}}{RH}$$

è (come si vede) un versore tangente alla circonferenza di base in A. Le costanti α, λ, $k > 0$ sono assegnate.
Il cono parte da fermo nella posizione

$$\overrightarrow{VC} = H\boldsymbol{e}_1\,, \quad \overrightarrow{CA} = -R\boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{CB} = R\boldsymbol{e}_2\,.$$

- Scrivere le equazioni di moto.
- Determinare l'energia cinetica del cono per ogni istante t.

SOLUZIONE
A) Introduciamo il sistema di riferimento solidale $(V, (\boldsymbol{u}_h))$ con

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{VC}}{H}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = -\frac{\overrightarrow{CA}}{R}\,.$$

Allora il momento delle forze esterne, rispetto al polo V, è dato da

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} &= \overrightarrow{VC} \times \lambda\boldsymbol{e}_1 + (\overrightarrow{VC} + \overrightarrow{CA}) \times \boldsymbol{F}_A + (\overrightarrow{VC} + \overrightarrow{CB}) \times \boldsymbol{F}_B \\ &= \lambda H\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{e}_1 - 2R\boldsymbol{u}_3 \times k\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_2 = \lambda H\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{e}_1 + 2Rk\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1\,.\end{aligned}$$

Occorre quindi introdurre la scomposizione

$$\boldsymbol{e}_1 = \sum_{h=1}^{3} \mu_h \boldsymbol{u}_h\,.$$

Si noti che

$$\mu_1(0) = 1\,, \qquad \mu_2(0) = 0\,, \qquad \mu_3(0) = 0\,.$$

Dunque le equazioni di moto (di Eulero) tenendo conto della simmetria del cono sono

$$\begin{aligned}I_{11}\dot\omega_1 &= 2R\cos(\alpha t)\,, \\ I_{22}\dot\omega_2 &= (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_3 - \lambda H\mu_3\,, \\ I_{22}\dot\omega_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + \lambda H\mu_2\,.\end{aligned}$$

B) Dalla I si ha, tenendo conto della condizione iniziale $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$,

$$I_{11}\omega_1(t) = \frac{2Rk}{\alpha}\sin(\alpha t)\,.$$

Dalla II e dalla III si ottiene

$$I_{22}(\omega_2\dot\omega_2 + \omega_3\dot\omega_3) = -\lambda H \mu_3 \omega_2 + \lambda H \mu_2 \omega_3 \,.$$

L'intuizione fisica suggerisce che $\boldsymbol{u}_1(t) = \boldsymbol{e}_1$ per ogni t, ossia che

$$\mu_1(t) = 1\,, \qquad \mu_2(t) = 0\,, \qquad \mu_3(t) = 0\,, \qquad t > 0\,.$$

Se questo è vero per quanto sopra si ha

$$\omega_2(t)^2 + \omega_3(t)^2 = \omega_2(0)^2 + \omega_3(0)^2 = 0\,, \qquad t > 0\,,$$

ossia

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{2Rk}{I_{11}\alpha}\sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_1\,, \qquad t > 0\,.$$

Il moto è pertanto una rotazione intorno all'asse fisso $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1$ e l'ipotesi fatta risulta soddisfatta.
Quindi

$$T = \frac{1}{2}I_{11}\omega_1(t)^2\,.$$

R.

$$T = \frac{1}{2}I_{11}\omega_1(t)^2 = \frac{2R^2k^2}{I_{11}\alpha^2}\sin^2(\alpha t)\,.\,.$$

71. [15/01/2018 (ex)I] Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati $L = |\overrightarrow{AB}|$, $R = |\overrightarrow{BC}|$, con $L > R$, e massa M è vincolata a muoversi di moto polare intorno al suo centro G.
La lamina è soggetta alla distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha(\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{AC})\overrightarrow{AC}\,\mathrm{d}\mu\,,$$

ove $\alpha > 0$ è una costante assegnata, P è il generico punto della lamina e $\mathrm{d}\mu$ è la misura di area.
Dire se e quali moti di rotazione intorno alla diagonale $\overrightarrow{AC}$ sono possibili.
Soluzione
Scegliamo come sistema di riferimento solidale $(G, \mathcal{M})$ con $\mathcal{M}$ data da

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 \text{ ortogonale alla lamina.}$$

Questa terna non è principale in G. Infatti

$$\boldsymbol{\sigma}_G^{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$

con $I_{12} \neq 0$. Un semplice argomento basato sulla simmetria della lamina mostra infatti che $I_{12} > 0$.

Poniamo $H = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{L^2 + R^2}$. *Calcoliamo il momento delle forze esterne:*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}} &= \alpha \int_{ABCD} \overrightarrow{GP} \times (\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AC} \, \mathrm{d}\lambda_1 \, \mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \alpha \int_{ABCD} [(\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2) \times H\boldsymbol{u}_1] H\lambda_1 \, \mathrm{d}\lambda_1 \, \mathrm{d}\lambda_2 \\
&= -\alpha H^2 \int_{ABCD} \lambda_1 \lambda_2 \, \mathrm{d}\lambda_1 \, \mathrm{d}\lambda_2 \, \boldsymbol{u}_3 = \frac{\alpha H^2 LR}{M} I_{12} \boldsymbol{u}_3 =: \beta \boldsymbol{u}_3 \, .
\end{aligned}
$$

Dunque se il moto è la rotazione richiesta e quindi $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \boldsymbol{u}_1$ *si dovrà avere da*

$$
\boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}} \, ,
$$

svolgendo i calcoli, che

$$
I_{11} \ddot{\varphi} \boldsymbol{u}_1 + I_{12} \ddot{\varphi} \boldsymbol{u}_2 + I_{12} \dot{\varphi}^2 \boldsymbol{u}_3 = \beta \boldsymbol{u}_3 \, .
$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
I_{11} \ddot{\varphi} &= 0 \, , \\
I_{12} \ddot{\varphi} &= 0 \, , \\
I_{12} \dot{\varphi}^2 &= \beta = \frac{\alpha H^2 LR}{M} I_{12} \, .
\end{aligned}
$$

Perciò

$$
|\dot{\varphi}| = \sqrt{\frac{\alpha LR}{M}} \, H \, .
$$

Sono pertanto possibili solo le corrispondenti rotazioni costanti.
R.

$$
|\dot{\varphi}| = \sqrt{\frac{\alpha LR(L^2 + R^2)}{M}} \, .
$$

72. [15/01/2018 (ex)II] Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati $L = |\overrightarrow{AB}|$, $R = |\overrightarrow{BC}|$, con $L < R$, e massa m è vincolata a muoversi di moto polare intorno al suo centro G.
La lamina è soggetta alla distribuzione di forze

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -\beta (\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{CA} \, \mathrm{d}\mu \, ,
$$

ove $\beta > 0$ è una costante assegnata, P è il generico punto della lamina e $\mathrm{d}\mu$ è la misura di area.
Dire se e quali moti di rotazione intorno alla diagonale $\overrightarrow{AC}$ sono possibili.
R.

$$
|\dot{\varphi}| = \sqrt{\frac{\beta LR(L^2 + R^2)}{M}} \, .
$$

73. [13/02/2018 (ex)I] Una sfera di raggio R e massa M è vincolata ad avere il centro C nell'origine O del sistema di riferimento fisso.

Alla sfera sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda \boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -\lambda \boldsymbol{u}\,,$$

con $\lambda > 0$ costante, A, B punti solidali sulla superficie della sfera, opposti rispetto a C, e $\boldsymbol{u}$ versore solidale tangente alla sfera in A e quindi anche in B.
La sfera è ferma all'istante iniziale.
Scrivere e risolvere le equazioni di moto.
SOLUZIONE
Si tratta di un moto polare; vogliamo scrivere le equazioni di Eulero. Scegliamo il sistema di riferimento solidale $(O, (\boldsymbol{u}_h))$ *con*

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{CA}}{R}\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2\,.$$

Come è noto $(\boldsymbol{u}_h)$ *è principale d'inerzia in* C *per simmetria e* $I_{11} = I_{22} = I_{33} =: I$.
Calcoliamo il momento delle forze

$$\boldsymbol{M}_C^{\mathrm{ext}} = \overrightarrow{CA} \times \boldsymbol{F}_A + \overrightarrow{CB} \times \boldsymbol{F}_B = -2R\lambda \boldsymbol{u}_3\,.$$

Dunque le equazioni di Eulero sono

$$I\dot{\omega}_1 = 0\,, \quad I\dot{\omega}_2 = 0\,, \quad I\dot{\omega}_3 = -2R\lambda\,,$$

con dati iniziali

$$\omega_1(0) = 0\,, \quad \omega_2(0) = 0\,, \quad \omega_3(0) = 0\,.$$

La soluzione è

$$\boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{2R\lambda}{I} t \boldsymbol{u}_3(t)\,.$$

Si tratta di una rotazione con angolo

$$\varphi(t) = -\frac{R\lambda}{I} t^2\,, \qquad t > 0\,.$$

R.

$$\varphi(t) = -\frac{R\lambda}{I} t^2\,, \qquad t > 0\,.$$

74. [13/02/2018 (ex)II] Un cubo di spigolo $2L$ e massa M è vincolato ad avere il centro C nell'origine O del sistema di riferimento fisso.
Al cubo sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda t \boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -\lambda t \boldsymbol{u}\,,$$

con $\lambda > 0$ costante, A, B vertici opposti del cubo, e $\boldsymbol{u}$ versore solidale al cubo ortogonale a $\overrightarrow{CA}$.
Il cubo è fermo all'istante iniziale.
Scrivere e risolvere le equazioni di moto.

R.

$$\varphi(t) = -\frac{L\lambda}{\sqrt{3}I} t^3 , \qquad t > 0 .$$

75. [27/06/2018 (ex)I] Un disco di centro C, raggio R e massa M è vincolato ad avere C nell'origine del sistema di riferimento fisso. Sul disco sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}_3 , \qquad \boldsymbol{F}_B = \lambda\boldsymbol{\tau} ,$$

ove A e B sono punti solidali sul bordo del disco, $\boldsymbol{\tau}$ è il versore tangente in B alla circonferenza bordo del disco. Inoltre $(C, (\boldsymbol{u}_i))$ è il sistema di riferimento solidale con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al disco e

$$\overrightarrow{CA} = R\boldsymbol{u}_1 .$$

Qui k, λ sono costanti assegnate.

- Scrivere le equazioni di Eulero del moto.
- Determinare il moto nel caso $\lambda = 0$, $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$.

SOLUZIONE

A) Per un $\varphi \in [0,2\pi)$ opportuno scriviamo

$$\overrightarrow{OB} = R\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{u}_2 .$$

Allora

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_C^{\mathrm{ext}} = R\boldsymbol{u}_1 \times k\boldsymbol{u}_3 + (R\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{u}_2) \times \lambda(-\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{u}_2) \\ = -Rk\boldsymbol{u}_2 + R\lambda\boldsymbol{u}_3 . \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= -I_{11}\omega_2\omega_3 , \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= I_{11}\omega_1\omega_3 - Rk , \\ 2I_{11}\dot{\omega}_3 &= R\lambda . \end{aligned}$$

Qui I_{11} è il momento diametrale del disco.

B) Nel caso $\lambda = 0$, ω_3 è costante, e perciò si annulla per ogni t. Quindi anche ω_1 rimane costante e nulla. Infine la II si integra elementarmente e si ottiene una rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_2$.

R.

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= -I_{11}\omega_2\omega_3 , \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= I_{11}\omega_1\omega_3 - Rk , \\ 2I_{11}\dot{\omega}_3 &= R\lambda . \end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$, $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{Rk}{I_{11}} t \boldsymbol{u}_2 \,, \qquad \varphi(t) = -\frac{Rk}{2I_{11}} t^2 \,.$$

76. [27/06/2018 (ex)I] Un corpo rigido C è costituito da un cubo solido omogeneo K di massa M e spigolo L, e da quattro punti materiali P_1, P_2, P_3, P_4 tutti di massa m, la cui posizione può essere scelta ad arbitrio. Dimostrare che tale posizione può essere scelta in modo che tutti i moti polari per inerzia di C, con polo in un fissato vertice A del cubo, siano rotazioni.

Soluzione

È noto che la proprietà richiesta equivale a quella che tutti i momenti principali d'inerzia di C *in* A *siano uguali. Useremo anche la proprietà che i momenti d'inerzia e deviatori sono quantità additive.*

Iniziamo pertanto a considerare i momenti di K *in* A*. Si sa che tutte le terne solidali nel centro di massa* P_0 *di* K *sono principali per* K*, per motivi di simmetria. Scegliamo, secondo il teorema di Huygens, il sistema principale in* A *ottenuto traslando un sistema in* P_0 *che abbia un asse diretto come* $\overrightarrow{P_0A}$*, lungo tale asse. La direzione degli altri due assi è irrilevante. Sia* $\mathcal{S} = (A, (\boldsymbol{u}_i))$ *il sistema ottenuto, e sia* $\boldsymbol{u}_1$ *diretto come* $\overrightarrow{P_0A}$*.*

Per il cubo K *vale in tale sistema*

$$I^K_{11} = I \,, \quad I^K_{22} = I^K_{33} = I + \frac{3}{4} ML^2 \,, \quad I^K_{hk} = 0 \,, h \neq k \,.$$

Poi disponiamo i punti sugli assi $\boldsymbol{u}_2$*,* $\boldsymbol{u}_3$ *di* $\mathcal{S}$*, due per asse tutti a uguale distanza* R *da* A*. Con i semplici calcoli diretti si ha per il sistema* P *dei 4 punti*

$$I^P_{11} = 4mR^2 \,, \quad I^P_{22} = I^P_{33} = 2mR^2 \,, \quad I^P_{hk} = 0 \,, h \neq k \,.$$

Sommando si ottiene per il corpo rigido complessivo

$$I_{11} = I + 4mR^2 \,, \quad I_{22} = I_{33} = I + \frac{3}{4} ML^2 + 2mR^2 \,, \quad I_{hk} = 0 \,, h \neq k \,.$$

Basta infine imporre $I_{11} = I_{22} = I_{33}$*, ossia*

$$2mR^2 = \frac{3}{4} ML^2 \,.$$

R. *Si possono disporre i punti nei vertici di un qualunque quadrato con il centro in* A *e ortogonale alla diagonale del cubo che passa per* A*, in modo che la distanza di ciascuno da* A *sia*

$$\sqrt{\frac{3M}{8m}} L \,.$$

77. [23/07/2018 (ex)I] Un cubo di spigolo $2L$ e massa M è vincolato ad avere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_i))$. Siano A e B due vertici opposti del cubo, tali che all'istante iniziale

$$\overrightarrow{OA}(0) = -\overrightarrow{OB}(0) = L(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \,.$$

Su A e B sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale al cubo e ortogonale a $\overrightarrow{OA}$. Sul cubo agisce anche il momento

$$\boldsymbol{M}_O = -\mu\boldsymbol{\omega}\,.$$

Qui μ, k sono costanti positive assegnate.
Il cubo ha velocità angolare iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0\boldsymbol{u}\,, \qquad \omega_0 > 0\,.$$

- Scrivere le equazioni di moto.
- Determinare $\boldsymbol{\omega}(t)$ (in funzione di una base solidale).
- Trovare
$$\lim_{t\to+\infty} T(t)\,.$$

Soluzione
A) Introduciamo il sistema solidale $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_i))$ tale che

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{OA}}{L\sqrt{3}}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2\,.$$

Calcoliamo

$$\overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F}_A + \overrightarrow{OB} \times \boldsymbol{F}_B = 2Lk\sqrt{3}\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = 2Lk\sqrt{3}\boldsymbol{u}_3\,.$$

Dunque le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= -\mu\omega_1\,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= -\mu\omega_2\,, \\ I_{11}\dot{\omega}_3 &= -\mu\omega_3 + 2Lk\sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

B) La I dà $\omega_1(t) = 0$ per ogni t; la II dà

$$\omega_2(t) = \omega_0 e^{-\frac{\mu}{I_{11}}t}\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,.$$

Infine la III dà

$$\omega_3(t) = \frac{2Lk\sqrt{3}}{\mu}(1 - e^{-\frac{\mu}{I_{11}}t})\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,.$$

C) L'energia cinetica è

$$T(t) = \frac{I_{11}}{2}|\boldsymbol{\omega}(t)|^2\,.$$

Dunque

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = \frac{6I_{11}L^2k^2}{\mu^2}\,.$$

R.

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= -\mu\omega_1 \,, \\
I_{11}\dot{\omega}_2 &= -\mu\omega_2 \,, \\
I_{11}\dot{\omega}_3 &= -\mu\omega_3 + 2Lk\sqrt{3} \,.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_0 e^{-\frac{\mu}{I_{11}}t}\boldsymbol{u}_2 + \frac{2Lk\sqrt{3}}{\mu}(1 - e^{-\frac{\mu}{I_{11}}t})\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad t \in \boldsymbol{R} \,.
$$

$$
\lim_{t\to+\infty} T(t) = \frac{6I_{11}L^2k^2}{\mu^2} \,.
$$

78. [15/01/2019 (ex)I] Si consideri il sistema $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ solidale con il rigido C. Il corpo rigido è formato da 4 elementi materiali P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, in posizioni

$$
\overrightarrow{OP_1} = -L\boldsymbol{u}_1 \,, \qquad \overrightarrow{OP_2} = L\boldsymbol{u}_1 \,,
$$
$$
\overrightarrow{OP_3} = -L\boldsymbol{u}_1 + H\boldsymbol{u}_3 \,, \overrightarrow{OP_4} = s\boldsymbol{u}_1 + H\boldsymbol{u}_3 \,.
$$

P_1, P_2, P_3 hanno massa m, P_4 ha massa $2m$. I parametri $L > 0$, $H > 0$, $s \in \boldsymbol{R}$ sono costanti.
Il rigido è vincolato a muoversi di moto polare di polo O, che coincide con l'origine del sistema di riferimento fisso.
Sul rigido agisce la forza

$$
\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}_1 \,,
$$

con $k \in \boldsymbol{R}$ assegnato, applicata nel punto A, ove $\overrightarrow{OA} = H\boldsymbol{u}_3$.
All'istante iniziale $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$, e $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega\boldsymbol{e}_3 = \omega\boldsymbol{u}_3(0)$, con $\omega > 0$.
Determinare la relazione tra i parametri che fa sì che il moto sia una rotazione uniforme.
Soluzione
Dunque dovremo avere

$$
\boldsymbol{\omega}(t) = \omega\boldsymbol{e}_3 = \omega\boldsymbol{u}_3(t) \,,
$$

per ogni $t > 0$, cosicché

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}
$$

Scriviamo le equazioni di Eulero rispetto a $(\boldsymbol{u}_h)$; dobbiamo calcolare i momenti di inerzia e deviatori relativi. Si ha direttamente dalle definizioni

$$
I_{11} = 3mH^2 \,, \quad I_{22} = 3m(H^2 + L^2) + 2ms^2 \quad I_{33} = 3mL^2 + 2ms^2 \,,
$$
$$
I_{12} = 0 \,, \quad I_{13} = mH(L - 2s) \,, \quad I_{23} = 0 \,.
$$

Inoltre

$$\boldsymbol{M}_O^{\rm ext} = \overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F}_A = H\boldsymbol{u}_3 \times k\boldsymbol{u}_1 = Hk\boldsymbol{u}_2 \,.$$

Si ha dunque

$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = Hk\boldsymbol{u}_2 \,.$$

Si ha con calcoli immediati, dato che vogliamo $\boldsymbol{\omega}$ come sopra

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = \omega(I_{13}\boldsymbol{u}_1 + I_{33}\boldsymbol{u}_3) \,, \quad \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = I_{13}\omega^2\boldsymbol{u}_2 \,.$$

Perciò deve valere, tenendo anche conto di $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$,

$$I_{13}\omega^2 = Hk \,.$$

R.

$$m(L-2s)\omega^2 = k \,.$$

79. [15/01/2019 (ex)II] Si consideri il sistema $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ solidale con il rigido C. Il corpo rigido è formato da 4 elementi materiali P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, in posizioni

$$\overrightarrow{OP_1} = -H\boldsymbol{u}_2 \,, \qquad \overrightarrow{OP_2} = H\boldsymbol{u}_2 \,,$$
$$\overrightarrow{OP_3} = -H\boldsymbol{u}_2 + R\boldsymbol{u}_3 \,, \overrightarrow{OP_4} = s\boldsymbol{u}_2 + R\boldsymbol{u}_3 \,.$$

P_1, P_2, P_3 hanno massa m, P_4 ha massa $2m$. I parametri $R > 0$, $H > 0$, $s \in \boldsymbol{R}$ sono costanti.
Il rigido è vincolato a muoversi di moto polare di polo O, che coincide con l'origine del sistema di riferimento fisso.
Sul rigido agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}_2 \,,$$

con $k \in \boldsymbol{R}$ assegnato, applicata nel punto A, ove $\overrightarrow{OA} = -R\boldsymbol{u}_3$.
All'istante iniziale $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$, e $\boldsymbol{\omega}(0) = -\omega\boldsymbol{e}_3 = -\omega\boldsymbol{u}_3(0)$, con $\omega > 0$.
Determinare la relazione tra i parametri che fa sì che il moto sia una rotazione uniforme.

80. [11/02/2019 (ex)I] Un cubo C di spigolo $2R$ e massa m è vincolato a mantenere il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Indichiamo con A, B i centri di due facce opposte, e con D, E i centri di altre due facce opposte. Sia $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ una terna solidale tale che

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2R} \,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{DE}}{2R} \,.$$

Sul cubo agiscono, sui punti indicati, le forze

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -\lambda\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui $\lambda > 0$ è costante.
All'istante iniziale il cubo è fermo con $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Si determini l'energia cinetica del cubo nel primo istante in cui $\overrightarrow{AB}$ è parallelo a $\boldsymbol{e}_2$.
[Suggerimento: per scrivere le equazioni di moto è utile comprendere intuitivamente che tipo di moto sia quello del cubo.]
SOLUZIONE
Poiché il moto è polare, possiamo usare la formula

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \,.$$

Per trovare $\boldsymbol{\omega}$ usiamo le equazioni di Eulero. L'intuizione fisica suggerisce che il moto avvenga in modo tale che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

per un opportuno angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$, cosicché

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda(\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 - \cos\varphi\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{F}_B \,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}} = \overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F}_A + \overrightarrow{OB} \times \boldsymbol{F}_B = 2\lambda R\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Pertanto le equazioni di Eulero si riducono alla

$$I_{11}\ddot{\varphi} = 2\lambda R \,,$$

che integrata con le condizioni iniziali

$$\varphi(0) = 0 \,, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0 \,,$$

dà

$$\varphi(t) = \frac{\lambda R}{I_{11}} t^2 \,.$$

Si noti che la risolubilità del sistema delle equazioni di Eulero conferma la nostra intuizione.
L'istante $\bar{t}$ che ci interessa è quello per cui

$$\varphi(\bar{t}) = \frac{\lambda R}{I_{11}} \bar{t}^2 = \frac{\pi}{2} \,,$$

ossia

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{\pi I_{11}}{2\lambda R}} \,.$$

Infine

$$T(\bar{t}) = \frac{1}{2} I_{11} \dot{\varphi}(\bar{t})^2 \,.$$

R.
$$T(\bar{t}) = \pi\lambda R\,.$$

81. [11/02/2019 (ex)I] Un corpo rigido non degenere si muove di moto polare di polo O. Di fatto tuttavia il suo moto è una rotazione intorno al versore $\boldsymbol{u}_1$ della terna solidale $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$. Denotiamo con φ l'angolo di rotazione. Si noti che $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ non sono principali di inerzia in O, mentre $\boldsymbol{u}_3$ lo è.
Il momento delle forze esterne in O soddisfa
$$\frac{\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_1}{I_{11}} = \frac{\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_2}{I_{12}}\,, \qquad \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_2 = -\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3\,.$$
Determinare il moto una volta assegnate le condizioni iniziali $\varphi(0)$, $\dot{\varphi}(0)$.
SOLUZIONE
Scriviamo le equazioni di Eulero; si ha come indicato
$$\boldsymbol{\sigma}_O^{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}\,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1\,.$$
Pertanto
$$\boldsymbol{\sigma\omega} = I_{11}\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 + I_{12}\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2\,, \qquad \boldsymbol{\sigma\dot{\omega}} = I_{11}\ddot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 + I_{12}\ddot{\varphi}\boldsymbol{u}_2\,.$$
Dunque l'equazione di Eulero in forma vettoriale
$$\boldsymbol{\sigma\dot{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma\omega} = \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$$
conduce a
$$\begin{aligned} I_{11}\ddot{\varphi} &= \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_1\,, \\ I_{12}\ddot{\varphi} &= \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_2\,, \\ I_{12}\dot{\varphi}^2 &= \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3\,. \end{aligned}$$
Si noti che la I e la II sono compatibili per la prima delle condizioni date su $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$.
La seconda di tali condizioni sostituita nella II e nella III conduce a
$$\ddot{\varphi} = -\dot{\varphi}^2\,,$$
che si integra esplicitamente per separazione delle variabili.
R.
$$\varphi(t) = \varphi(0) + \ln(1 + t\dot{\varphi}(0))\,, \qquad t\dot{\varphi}(0) > -1\,.$$

82. [11/02/2019 (ex)II] Un cubo C di spigolo $2R$ e massa m è vincolato a mantenere il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Indichiamo con A, B i centri di due facce opposte, e con D, E i centri di altre due facce opposte. Sia $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ una terna solidale tale che
$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2R}\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{DE}}{2R}\,.$$

Sul cubo agiscono, sui punti indicati, le forze

$$\boldsymbol{F}_A = \mu \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -\mu \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui $\mu > 0$ è costante.
All'istante iniziale il cubo è fermo con $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Si determini l'energia cinetica del cubo nel primo istante in cui $\overrightarrow{AB}$ ha compiuto un mezzo giro.
[Suggerimento: per scrivere le equazioni di moto è utile comprendere intuitivamente che tipo di moto sia quello del cubo.]
R.

$$T(\bar{t}) = 2\pi\mu R \,.$$

83. [11/02/2019 (ex)II] Un corpo rigido non degenere si muove di moto polare di polo O. Di fatto tuttavia il suo moto è una rotazione intorno al versore $\boldsymbol{u}_3$ della terna solidale $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$. Denotiamo con φ l'angolo di rotazione.
Si noti che $\boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{u}_3$ non sono principali di inerzia in O, mentre $\boldsymbol{u}_1$ lo è.
Il momento delle forze esterne in O soddisfa

$$\frac{\boldsymbol{M}_O^{\rm ext} \cdot \boldsymbol{u}_2}{I_{23}} = \frac{\boldsymbol{M}_O^{\rm ext} \cdot \boldsymbol{u}_3}{I_{33}} \,, \qquad \boldsymbol{M}_O^{\rm ext} \cdot \boldsymbol{u}_2 = -\boldsymbol{M}_O^{\rm ext} \cdot \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Determinare il moto una volta assegnate le condizioni iniziali $\varphi(0)$, $\dot{\varphi}(0)$.
R.

$$\varphi(t) = \varphi(0) - \ln(1 - t\dot{\varphi}(0)) \,, \qquad t\dot{\varphi}(0) < 1 \,.$$

84. [06/02/2020 (ex)I] Un corpo rigido ha supporto

$$C = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid -L \le \lambda_h \le L \,, h = 1{,}2{,}3\} \,,$$

con densità non omogenea

$$\rho(\boldsymbol{\lambda}) \,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{M}{8L^3} \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} + m \,\mathrm{d}\delta_{(L,L,L)}(\boldsymbol{\lambda}) \,,$$

ossia è un cubo omogeneo di massa M e spigolo $2L$, con un punto materiale P di massa m fissato nel vertice $\boldsymbol{\lambda}_A = (L, L, L)$.
Il corpo è vincolato a muoversi di moto polare di polo l'origine O del sistema di riferimento fisso, coincidente con il punto solidale $\boldsymbol{\lambda} = 0$, ossia con l'origine del sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, di cui $\boldsymbol{\lambda}$ rappresenta le coordinate.
Sul corpo agiscono la forza $\boldsymbol{F}_B = \alpha \boldsymbol{u}_1$ applicata nel punto di coordinate solidali $\boldsymbol{\lambda}_B = (L, L, 0)$, e una forza da determinare $\boldsymbol{F}_D$ applicata nel punto di coordinate solidali $\boldsymbol{\lambda}_D = (0, 0, -L)$, della forma

$$\boldsymbol{F}_D = \beta(t) \boldsymbol{u}_1 + \gamma(t) \boldsymbol{u}_2 \,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante assegnata e β, $\gamma \in C(\boldsymbol{R})$ sono funzioni del tempo a priori incognite.
Il corpo parte da fermo nella posizione tale che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Determinare $\boldsymbol{F}_D$ in modo che il moto sia una rotazione intorno all'asse λ_3.
SOLUZIONE
Vogliamo scrivere le equazioni di Eulero. Iniziamo con il determinare la matrice d'inerzia $\boldsymbol{\sigma}$ in O rispetto alla terna solidale $(\boldsymbol{u}_h)$. Si ha

$$I_{hk} = I_{hk}^{\text{cubo omogeneo}} + I_{hk}^{P} = I\delta_{hk} + I_{hk}^{P} ,$$

ove δ_{hk} è il simbolo di Kronecker, e I è il momento del cubo omogeneo rispetto a un qualunque asse centrale.
Poi si ha

$$I_{hh}^{P} = 2mL^2 , \qquad I_{hk}^{P} = -mL^2 , \qquad h\,,k = 1\,,2\,,3\,, \quad h \neq k\,.$$

Quindi

$$I_{hh} = I + 2mL^2 , \qquad I_{hk} = -mL^2 , \qquad h\,,k = 1\,,2\,,3\,, \quad h \neq k\,.$$

Inoltre

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \overrightarrow{OB} \times \boldsymbol{F}_B + \overrightarrow{OD} \times \boldsymbol{F}_D = -L\alpha\boldsymbol{u}_3 - L\beta\boldsymbol{u}_2 + L\gamma\boldsymbol{u}_1\,.$$

D'altra parte sappiamo che dobbiamo avere $\boldsymbol{\omega}(t) = \dot\varphi(t)\boldsymbol{u}_3$ per un opportuno angolo di rotazione φ. Dunque

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma\omega} &= \dot\varphi(I_{12}\boldsymbol{u}_1 + I_{12}\boldsymbol{u}_2 + I_{11}\boldsymbol{u}_3)\,,\\
\boldsymbol{\sigma\dot\omega} &= \ddot\varphi(I_{12}\boldsymbol{u}_1 + I_{12}\boldsymbol{u}_2 + I_{11}\boldsymbol{u}_3)\,,\\
\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma\omega} &= \dot\varphi^2(I_{12}\boldsymbol{u}_2 - I_{12}\boldsymbol{u}_1)\,.
\end{aligned}$$

Quindi le equazioni di Eulero prendono la forma

$$\begin{aligned}
I_{12}\ddot\varphi &= I_{12}\dot\varphi^2 + L\gamma\,,\\
I_{12}\ddot\varphi &= -I_{12}\dot\varphi^2 - L\beta\,,\\
I_{11}\ddot\varphi &= -L\alpha\,.
\end{aligned}$$

Dunque dalla terza equazione si ha

$$\varphi(t) = -\frac{L\alpha}{2I_{11}}t^2\,.$$

Dalle prime due equazioni perciò si ricavano β e γ.
R.

$$\beta(t) = I_{12}\Big(\frac{\alpha}{I_{11}} - \frac{L\alpha^2}{I_{11}^2}t^2\Big)\,, \qquad \gamma(t) = I_{12}\Big(-\frac{\alpha}{I_{11}} - \frac{L\alpha^2}{I_{11}^2}t^2\Big)\,.$$

85. [06/02/2020 (ex)II] Un corpo rigido ha supporto

$$C = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid -L \leq \lambda_h \leq L\,, h = 1,2,3\}\,,$$

con densità non omogenea

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{M}{8L^3}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} + m\,\mathrm{d}\delta_{(L,L,L)}(\boldsymbol{\lambda})\,,$$

ossia è un cubo omogeneo di massa M e spigolo $2L$, con un punto materiale P di massa m fissato nel vertice $\boldsymbol{\lambda}_A = (L, L, L)$.
Il corpo è vincolato a muoversi di moto polare di polo l'origine O del sistema di riferimento fisso, coincidente con il punto solidale $\boldsymbol{\lambda} = 0$, ossia con l'origine del sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, di cui $\boldsymbol{\lambda}$ rappresenta le coordinate.
Sul corpo agiscono la forza $\boldsymbol{F}_B = \alpha t \boldsymbol{u}_1$ applicata nel punto di coordinate solidali $\boldsymbol{\lambda}_B = (L, L, 0)$, e una forza da determinare $\boldsymbol{F}_D$ applicata nel punto di coordinate solidali $\boldsymbol{\lambda}_D = (0, 0, L)$, della forma

$$\boldsymbol{F}_D = \beta(t)\boldsymbol{u}_1 + \gamma(t)\boldsymbol{u}_2\,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante assegnata e β, $\gamma \in C(\boldsymbol{R})$ sono funzioni del tempo a priori incognite.
Il corpo parte da fermo nella posizione tale che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Determinare $\boldsymbol{F}_D$ in modo che il moto sia una rotazione intorno all'asse λ_3.
R.

$$\beta(t) = I_{12}\Big(-\frac{\alpha}{I_{11}} t + \frac{L\alpha^2}{4I_{11}^2} t^4 \Big)\,, \qquad \gamma(t) = I_{12}\Big(\frac{\alpha}{I_{11}} t + \frac{L\alpha^2}{4I_{11}^2} t^4 \Big)\,.$$

86. [09/06/2023 (ex)I] Un cono circolare retto C di altezza H, raggio di base R e massa m è vincolato a muoversi di moto polare, con il vertice V nell'origine O del sistema di riferimento fisso.
Si consideri il sistema di riferimento solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, con

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{VA}}{H}\,,$$

ove A è il centro della base di C.
Sul cono sono applicate, nei punti indicati, le forze

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda \boldsymbol{u}_1\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = \mu \boldsymbol{u}_2\,,$$

ove $\overrightarrow{AB} = R\boldsymbol{u}_1$. Qui λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$.
1) Si scriva il momento delle forze rispetto a V (scomposto nella terna solidale).
2) Assumendo $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$, $\mu = 0$, si scrivano le equazioni di Eulero del rigido e si determini $\boldsymbol{\omega}(t)$ (scomposta nella terna solidale).
3) Assumendo $\mu = 0$, si scriva la derivata $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ come funzione delle componenti di $\boldsymbol{\omega}$.
4) Si assuma $\mu = 0$, $\lambda = 0$ e, per ω_{10}, $\omega_{30} > 0$,

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{10}\boldsymbol{u}_1(0) + \omega_{30}\boldsymbol{u}_3(0)\,, \qquad \boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h\,, \quad h = 1\,,2\,,3\,.$$

Si determini $\boldsymbol{L}_V(t)$ per ogni t, scomposto nella terna fissa $(\boldsymbol{e}_h)$.
5) Nelle ipotesi del quesito 4), si determini una relazione tra ω_{10} e ω_{30} che garantisca che

$$\boldsymbol{\omega}(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(0) \geq \frac{1}{4}|\boldsymbol{\omega}(0)|^2\,, \quad \text{per ogni } t>0.$$

6) Supponiamo che

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha\boldsymbol{u}_2(t)\,,$$

con $\alpha > 0$ costante. Si determini il primo istante $\bar{t} > 0$ in cui $\boldsymbol{u}_3(\bar{t}) = \boldsymbol{u}_3(0)$.
Soluzione
1) Dato che il momento delle reazioni vincolari rispetto a V è zero per l'ipotesi dei lavori virtuali, si ha dalla definizione

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_V^{\mathrm{ext}} &= \overrightarrow{VA}\times\boldsymbol{F}_A + \overrightarrow{VB}\times\boldsymbol{F}_B\\ &= (H\boldsymbol{u}_3)\times(\lambda\boldsymbol{u}_1) + (H\boldsymbol{u}_3 + R\boldsymbol{u}_1)\times(\mu\boldsymbol{u}_2)\\ &= H\lambda\boldsymbol{u}_2 - H\mu\boldsymbol{u}_1 + R\mu\boldsymbol{u}_3\,.\end{aligned}$$

2) In V la terna indicata è principale, e $I_{11} = I_{22}$. Dunque le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned}I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - H\mu\,,\\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + H\lambda\,,\\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= R\mu\,.\end{aligned}$$

Se $\mu = 0$ e $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$, allora $\omega_3(t) = 0$ per ogni t; ne segue, per la prima equazione, che anche $\omega_1(t) = 0$ per ogni t e, dalla seconda, $\omega_2(t) = H\lambda t/I_{11}$.
3) Usiamo il risultato noto dalla teoria:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_V^{\mathrm{ext}}\cdot\boldsymbol{\omega} = H\lambda\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{\omega} = H\lambda\omega_2\,.$$

4) Il moto è polare per inerzia, quindi $\boldsymbol{L}_V(t) = \boldsymbol{L}_V(0)$ per ogni t. D'altronde

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_V(0) &= \boldsymbol{\sigma}_V(0)\boldsymbol{\omega}(0)\\ &= I_{11}\omega_{10}\boldsymbol{u}_1(0) + I_{33}\omega_{30}\boldsymbol{u}_3(0)\\ &= I_{11}\omega_{10}\boldsymbol{e}_1 + I_{33}\omega_{30}\boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

5) Il moto è polare per inerzia, e l'ellissoide è di rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_3$. Quindi la poloide descritta da $\boldsymbol{\omega}(t)$ è una circonferenza su un piano ortogonale a $\boldsymbol{u}_3$, con centro sull'asse $\boldsymbol{u}_3$. Più precisamente vale

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2 = \omega_{10}^2\,, \qquad \omega_3 = \omega_3(0) = \omega_{30}\,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{\omega}(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_1(t)\omega_{10} + \omega_3(t)\omega_{30} = \omega_1(t)\omega_{10} + \omega_{30}^2 \geq -\omega_{10}^2 + \omega_{30}^2\,,$$

valore minimo raggiunto quando $\omega_1(t) = -\omega_{10}$, $\omega_2(t) = 0$. *Si deve quindi imporre*

$$\omega_{30}^2 - \omega_{10}^2 \geq \frac{1}{4}(\omega_{10}^2 + \omega_{30}^2) .$$

6) Dalla teoria, il moto è una rotazione con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(-\alpha t)\, \boldsymbol{u}_1(0) + \sin(-\alpha t)\, \boldsymbol{u}_3(0) , \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin(-\alpha t)\, \boldsymbol{u}_1(0) + \cos(-\alpha t)\, \boldsymbol{u}_3(0) , \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{u}_2(0) . \end{aligned}$$

Dunque si ha $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{u}_3(0)$ *se* $t = -2n\pi/\alpha$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
R. *1)*

$$\boldsymbol{M}_V^{\mathrm{ext}} = -H\mu \boldsymbol{u}_1 + H\lambda \boldsymbol{u}_2 + R\mu \boldsymbol{u}_3 .$$

2)

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{H\lambda}{I_{11}} t \boldsymbol{u}_2(t) , \qquad t > 0 .$$

3)

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = H\lambda\omega_2 .$$

4)

$$\boldsymbol{L}_V = I_{11}\omega_{10}\boldsymbol{e}_1 + I_{33}\omega_{30}\boldsymbol{e}_3 .$$

5)

$$\omega_{30}^2 \geq \frac{5}{3}\omega_{10}^2 .$$

6)

$$\bar{t} = \frac{2\pi}{\alpha} .$$

87. [08/09/2023 (ex)I] Un corpo rigido C è costituito da un disco omogeneo D di raggio R, massa M, raggio R e centro $\boldsymbol{X}_O$, cui è fissato solidalmente un punto materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$. Nel sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ di coordinate $(\boldsymbol{\lambda})$, il disco è

$$\{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leq R^2 , \lambda_3 = 0\} ,$$

e le coordinate di P sono

$$\Big(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, 0\Big) .$$

Il corpo è vincolato a ruotare intorno all'asse fisso x_1, che coincide con l'asse solidale λ_1; $\boldsymbol{X}_O$ coincide con l'origine del sistema fisso.
Sul sistema agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica applicata in P

$$\boldsymbol{F}_P = -k(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_A) ,$$

con $k > 0$ costante e $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_3$.
Si assuma come coordinata lagrangiana l'angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 \,.
\end{aligned}$$

1) Si trovino esplicitamente i 6 momenti I^O_{hk}, rispetto agli assi di $\mathcal{S}$, in funzione di M, m, R.
2) Si calcoli il momento delle forze direttamente applicate $\boldsymbol{M}^{\text{ext}}_O$ scomponendolo nella terna $(\boldsymbol{u}_h)$, in funzione di φ.
3) Si scriva il sistema delle 3 equazioni di Eulero rispetto agli assi di $\mathcal{S}$.
4) Si calcoli il momento delle reazioni vincolari $\boldsymbol{M}^{\text{vin}}$ (rispetto a O) nell'istante $t = 0$, se le condizioni iniziali sono $\varphi(0) = 0$, $\dot\varphi(0) = \dot\varphi_0 > 0$.
5) Si determinino le posizioni di equilibrio per C e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
6) Si scriva la legge di conservazione dell'energia, e la si usi per determinare $\omega_0 \geq 0$ tale che se $|\dot\varphi(0)| > \omega_0$ allora $\dot\varphi(t) \neq 0$ per ogni t.
SOLUZIONE
1) Calcoliamo il momento del disco omogeneo I rispetto all'asse λ_3:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{M}{\pi R^2} r^2 r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\frac{M}{\pi R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}\,.$$

Quindi, considerando l'usuale proprietà delle lamine e anche la simmetria del rigido:

$$I^O_{33} = \frac{MR^2}{2} + mR^2\,, \qquad I^O_{11} = I^O_{22} = \frac{MR^2}{4} + \frac{mR^2}{2}\,.$$

Infine $I^O_{13} = I^O_{23} = 0$ perché λ_3 è principale, e

$$I^O_{12} = I^{O,D}_{12} + I^{O,P}_{12} = 0 - m\lambda_{1P}\lambda_{2P} = -\frac{mR^2}{2}\,.$$

2) Osserviamo che

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_P(\varphi) = \frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_1(\varphi) + \boldsymbol{u}_2(\varphi))\,, \quad \boldsymbol{X}_A(\varphi) = R\boldsymbol{e}_3 = R(\sin\varphi\boldsymbol{u}_2(\varphi) + \cos\varphi\boldsymbol{u}_3(\varphi))\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}^{\text{ext}}_O(\varphi) &= \boldsymbol{X}^{\text{L}}_P \times [-k(\boldsymbol{X}^{\text{L}}_P - \boldsymbol{X}_A)] + \boldsymbol{X}^{\text{L}}_P \times (-mg\boldsymbol{e}_3) \\
&= \boldsymbol{X}^{\text{L}}_P \times [(kR - mg)\boldsymbol{e}_3] = (kR - mg)\frac{R}{\sqrt{2}}[\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 - \cos\varphi\boldsymbol{u}_2 + \sin\varphi\boldsymbol{u}_3]\,.
\end{aligned}$$

3) Poiché $\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\boldsymbol{u}_1$ e la matrice di $\boldsymbol{\sigma}$ nella base $(\boldsymbol{u}_h)$ è già stata calcolata come

$$\begin{pmatrix} I^O_{11} & I^O_{12} & 0 \\ I^O_{12} & I^O_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I^O_{33} \end{pmatrix}\,,$$

si ha

$$\boldsymbol{\sigma\omega} = \dot\varphi(I^O_{11}\boldsymbol{u}_1 + I^O_{12}\boldsymbol{u}_2)\,, \quad \boldsymbol{\sigma\dot\omega} = \ddot\varphi(I^O_{11}\boldsymbol{u}_1 + I^O_{12}\boldsymbol{u}_2)\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma\omega} = I^O_{12}\dot\varphi^2\boldsymbol{u}_3\,,$$

e le equazioni sono

$$\begin{aligned} I^O_{11}\ddot\varphi &= M^{\mathrm{ext}}_1\,, \\ I^O_{12}\ddot\varphi &= M^{\mathrm{ext}}_2 + M^{\mathrm{vin}}_2\,, \\ 0 &= -I^O_{12}\dot\varphi^2 + M^{\mathrm{ext}}_3 + M^{\mathrm{vin}}_3\,, \end{aligned}$$

ove le M^{ext}_h *sono le componenti di* $\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}}_O$ *e le* M^{vin}_h *quelle del momento delle reazioni vincolari.*
4) Si ha $M^{\mathrm{vin}}_1 = 0$ *perché il vincolo è liscio, e poi dalle equazioni di Eulero all'istante* $t = 0$ *si ha*

$$\begin{aligned} M^{\mathrm{vin}}_2(0) = I^O_{12}\ddot\varphi(0) - M^{\mathrm{ext}}_2(\varphi(0)) &= \frac{I^O_{12}}{I^O_{11}}M^{\mathrm{ext}}_1(\varphi(0)) - M^{\mathrm{ext}}_2(\varphi(0)) \\ &= (kR - mg)\frac{R}{\sqrt2}\Big[\frac{I^O_{12}}{I^O_{11}} + 1\Big]\,. \end{aligned}$$

e

$$M^{\mathrm{vin}}_3(0) = I^O_{12}\dot\varphi(0)^2 - M^{\mathrm{ext}}_3(\varphi(0)) = I^O_{12}\dot\varphi_0^2\,.$$

5) Scriviamo il potenziale lagrangiano a partire da quello conservativo

$$U = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_A|^2 - mgx_{3P}\,.$$

Si calcola

$$|\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_A|^2 = R^2[2 - \sqrt2\sin\varphi]\,.$$

Inoltre dalle formule di trasformazione delle basi,

$$x_{3P} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_P \cdot \boldsymbol{e}_3 = \frac{R}{\sqrt2}\sin\varphi\,.$$

Dunque si può prendere

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = (kR - mg)\frac{R}{\sqrt2}\sin\varphi\,,$$

e

$$(U^{\mathrm{L}})'(\varphi) = (kR - mg)\frac{R}{\sqrt2}\cos\varphi\,, \quad (U^{\mathrm{L}})''(\varphi) = -(kR - mg)\frac{R}{\sqrt2}\sin\varphi\,.$$

Se $kR = mg$ *tutte le posizioni sono di equilibrio instabile. Altrimenti i punti di equilibrio sono 2 e sono dati da* $\varphi = \pm\pi/2$. *Poiché*

$$(U^{\mathrm{L}})''\Big(\pm\frac{\pi}{2}\Big) = \mp(kR - mg)\frac{R}{\sqrt2}\,,$$

la stabilità è determinata dal segno di $kR - mg$.
6) L'energia cinetica del corpo rigido è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac12\boldsymbol{\sigma\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac12 I^O_{11}\dot\varphi^2\,.$$

Quindi la legge di conservazione dell'energia è data da

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{L}} - U^{\mathrm{L}} &= \frac{1}{2} I_{11}^{O} \dot{\varphi}^2 - (kR - mg) \frac{R}{\sqrt{2}} \sin\varphi \\ &= \frac{1}{2} I_{11}^{O} \dot{\varphi}(0)^2 - (kR - mg) \frac{R}{\sqrt{2}} \sin\varphi(0) \\ &\geq \frac{1}{2} I_{11}^{O} \dot{\varphi}(0)^2 - |kR - mg| \frac{R}{\sqrt{2}} \,. \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I_{11}^{O} \dot{\varphi}^2 \geq (kR - mg) \frac{R}{\sqrt{2}} \sin\varphi + \frac{1}{2} I_{11}^{O} \dot{\varphi}(0)^2 - |kR - mg| \frac{R}{\sqrt{2}} \\ \geq \frac{1}{2} I_{11}^{O} \dot{\varphi}(0)^2 - |kR - mg| R\sqrt{2} \,. \end{aligned}$$

Basta quindi scegliere

$$\dot{\varphi}(0)^2 > 2\sqrt{2} |kR - mg| R (I_{11}^{O})^{-1} \,.$$

R. *1)*

$$I_{33}^{O} = \frac{MR^2}{2} + mR^2 = 2I_{11}^{O} = 2I_{22}^{O} \,, \quad I_{13}^{O} = I_{23}^{O} = 0 \,, \quad I_{12}^{O} = -\frac{mR^2}{2} \,.$$

2)

$$\boldsymbol{M}_{O}^{\mathrm{ext}}(\varphi) = (kR - mg) \frac{R}{\sqrt{2}} [\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 - \cos\varphi \boldsymbol{u}_2 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_3] \,.$$

3)

$$\begin{aligned} I_{11}^{O} \ddot{\varphi} &= M_1^{\mathrm{ext}} \,, \\ I_{12}^{O} \ddot{\varphi} &= M_2^{\mathrm{ext}} + M_2^{\mathrm{vin}} \,, \\ 0 &= -I_{12}^{O} \dot{\varphi}^2 + M_3^{\mathrm{ext}} + M_3^{\mathrm{vin}} \,. \end{aligned}$$

4)

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{vin}}(0) = (kR - mg) \frac{R}{\sqrt{2}} \Big[\frac{I_{12}^{O}}{I_{11}^{O}} + 1 \Big] \boldsymbol{u}_2(0) + I_{12}^{O} \dot{\varphi}_0^2 \boldsymbol{u}_3(0) \,.$$

5)

$$\begin{array}{lcll} kR - mg = 0 & : & \multicolumn{2}{l}{\textit{tutte le posizioni sono di equilibrio instabile;}} \\ kR - mg > 0 & : & \frac{\pi}{2} \ \textit{stabile;} & -\frac{\pi}{2} \ \textit{instabile;} \\ kR - mg < 0 & : & \frac{\pi}{2} \ \textit{instabile;} & -\frac{\pi}{2} \ \textit{stabile.} \end{array}$$

6)

$$\omega_0 = \sqrt{2\sqrt{2} |kR - mg| R (I_{11}^{O})^{-1}} \,.$$

88. [12/06/2024 (ex)I] Si consideri il corpo rigido dato dal cono circolare retto omogeneo C di raggio di base R, altezza H e massa M. Il cono è vincolato a mantenere il vertice O nell'origine del sistema di riferimento fisso. Si assume per il vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali.
Consideriamo il sistema di riferimento solidale con il rigido $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{OA}}{H}\,, \qquad A \text{ centro della base del cono.}$$

Denotiamo con (x_h) le coordinate nel sistema di riferimento fisso e con (λ_h) le coordinate nel sistema di riferimento solidale.
Il rigido è soggetto alla distribuzione di forze direttamente applicate

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -k\lambda_1 \boldsymbol{u}_3 \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con $k > 0$ costante, applicata solo sul cerchio di base che denotiamo con D.
1) Determinare la risultante $\boldsymbol{F}$ di $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$, esprimendola nella base $(\boldsymbol{u}_h)$.
2) Determinare il momento risultante $\boldsymbol{M}_O$ di $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$, rispetto al polo O, esprimendolo nella base $(\boldsymbol{u}_h)$.
3) Scrivere le equazioni scalari di Eulero per il moto; si determini quindi $\boldsymbol{\omega}(t)$ nella base $(\boldsymbol{u}_h)$ se il dato iniziale è $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$.
4) Usando la prima equazione cardinale, determinare la risultante delle reazioni vincolari al tempo $t = 0$, nella base $(\boldsymbol{u}_h)$, assumendo $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$. Si denoti con $\boldsymbol{X}_G = L\boldsymbol{u}_3$ il moto del centro di massa; non occorre calcolare la costante $L > 0$.
5) Supponiamo che $k = 0$, cioè che il moto sia polare per inerzia. Determinare la normale al piano su cui rotola senza strisciare l'ellissoide d'inerzia (secondo il teorema sul moto alla Poinsot), sapendo che

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{01}\boldsymbol{u}_1(0) + \omega_{03}\boldsymbol{u}_3(0)\,, \qquad \boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h\,, \quad h = 1{,}2{,}3\,,$$

con ω_{01}, $\omega_{03} > 0$ costanti. Si scomponga la normale nella base fissa.
6) Si scelgano per il corpo le coordinate locali

$$x_{1O}\,, x_{2O}\,, x_{3O}\,, x_{1A}\,, x_{2A}\,, x_{1B}\,,$$

ove B è il punto tale che $\overrightarrow{OB} = H\boldsymbol{u}_3 + R\boldsymbol{u}_1$. Si esprima in queste coordinate il vincolo che l'asse $\overrightarrow{OA}$ giaccia sul cono Γ dato da

$$x_3^2 = x_1^2 + x_2^2\,.$$

Si assuma valido il vincolo già presente nel testo, che diviene in questo caso

$$x_{1O} = 0\,, \quad x_{2O} = 0\,, \quad x_{3O} = 0\,.$$

Soluzione

1) Si ha

$$\boldsymbol{F} = \int_D \mathrm{d}\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{u}_3 \int_D \lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2 = -k\boldsymbol{u}_3 \int_{\lambda_1^2+\lambda_2^2 \le R^2} \lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2 = 0 \,,$$

per motivi di simmetria.
2) Calcoliamo dalla definizione

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_O &= \int_D \boldsymbol{\lambda} \times \,\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \int_D \boldsymbol{\lambda} \times (-k\lambda_1 \boldsymbol{u}_3) \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \int_D (k\lambda_1^2 \boldsymbol{u}_2 - k\lambda_1\lambda_2 \boldsymbol{u}_1) \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2 = k\boldsymbol{u}_2 \int_D \lambda_1^2 \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \frac{k}{2}\boldsymbol{u}_2 \int_D (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2 = \frac{k}{2} 2\pi \boldsymbol{u}_2 \int_0^R r^2 r \,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4} k R^4 \boldsymbol{u}_2 \,,
\end{aligned}$$

dove nella quarta e quinta uguaglianza si è usata la simmetria di D e degli integrandi.
3) La terna $(\boldsymbol{u}_h)$ è principale d'inerzia il O, con $I_{11} = I_{22}$ per simmetria di rotazione. Inoltre il momento delle reazioni vincolari rispetto a O è nullo per l'ipotesi che il vincolo sia liscio. Quindi le equazioni di Eulero (tenuto conto del punto 2)) sono

$$\begin{aligned}
&I_{11}\dot{\omega}_1 = (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 \,, \\
&I_{11}\dot{\omega}_2 = (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + M_2 \,, \\
&I_{33}\dot{\omega}_3 = 0 \,.
\end{aligned}$$

La terza equazione di Eulero dà subito

$$\omega_3(t) = \omega_3(0) = 0 \,, \qquad \textit{per ogni } t.$$

Dunque la prima equazione diviene $\dot{\omega}_1 = 0$ e si ha anche

$$\omega_1(t) = \omega_1(0) = 0 \,, \qquad \textit{per ogni } t.$$

La seconda equazione dà invece

$$\dot{\omega}_2 = \frac{\pi}{4I_{11}} k R^4 \,,$$

da cui

$$\omega_2 = \frac{\pi}{4I_{11}} k R^4 t \,, \qquad \textit{per ogni } t.$$

4) Iniziamo con il calcolare $\boldsymbol{a}_G$. Derivando si ha

$$\boldsymbol{v}_G = L\dot{\boldsymbol{u}}_3 = L\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_3 \,, \quad \boldsymbol{a}_G = L\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{u}_3 + L\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_3) \,.$$

Quindi, dato che $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$, usando le equazioni di Eulero,

$$\boldsymbol{a}_G(0) = L\dot{\boldsymbol{\omega}}(0) \times \boldsymbol{u}_3(0) = L\frac{\pi}{4I_{11}} k R^4 \boldsymbol{u}_2(0) \times \boldsymbol{u}_3(0) = L\frac{\pi}{4I_{11}} k R^4 \boldsymbol{u}_1(0) \,.$$

Dunque la prima equazione globale dà

$$M\boldsymbol{a}_G(0) = \boldsymbol{F}_{|t=0} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(0) = \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(0) \,.$$

5) È noto dalla teoria che la normale al piano è data da

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega} \,,$$

che rimane costante durante il moto. In particolare, confondendo vettore e sue componenti in $(\boldsymbol{u}_h(0))$,

$$\boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega}(0) = \operatorname{diag}(I_{11}, I_{11}, I_{33})(\omega_{01}, 0, \omega_{03})^{\mathrm{t}} = I_{11}\omega_{01}\boldsymbol{u}_1(0) + I_{33}\omega_{03}\boldsymbol{u}_3(0) \,.$$

6) Il vincolo equivale a imporre che A appartenga al cono Γ assegnato, poiché O coincide con il vertice di Γ. Ossia dobbiamo imporre

$$x_{3A}^2 = x_{1A}^2 + x_{2A}^2 \,.$$

Ma x_{3A} non compare tra le coordinate assegnate. La ricaviamo perciò da

$$x_{1A}^2 + x_{2A}^2 + x_{3A}^2 = H^2 \,.$$

R.

1) $\boldsymbol{F} = 0 \,.$
2) $\boldsymbol{M}_O = \dfrac{\pi}{4} k R^4 \boldsymbol{u}_2 \,.$
3) $\boldsymbol{\omega}(t) = \dfrac{\pi}{4 I_{11}} k R^4 t \boldsymbol{u}_2(t) \,.$
4) $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(0) = ML \dfrac{\pi}{4 I_{11}} k R^4 \boldsymbol{u}_1(0) \,.$
5) $I_{11}\omega_{01}\boldsymbol{e}_1 + I_{33}\omega_{03}\boldsymbol{e}_3 \,.$
6) $H^2 - 2x_{1A}^2 - 2x_{2A}^2 = 0 \,.$

470. Corpi rigidi: equazioni cardinali

1. [7/7/2006 (ex)I] Denotiamo con $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ il sistema di riferimento fisso. Un parallelepipedo omogeneo di spigoli a, b, $c > 0$ e di massa $m > 0$ è soggetto a due forze

$$\boldsymbol{F}_1 = k\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = -k\boldsymbol{e}_1 \,,$$

con $k > 0$ costante, applicate rispettivamente nei centri di due facce opposte A_1 e A_2.
All'istante iniziale il parallelepipedo è fermo, con le facce A_1 e A_2 parallele al piano $x_3 = 0$, e le altre facce perpendicolari agli assi fissi.
Si determini il massimo raggiunto dall'energia cinetica durante il moto.
Soluzione
Per la prima equazione cardinale

$$m\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0 \,,$$

per cui

$$v_G(t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t > 0.$$

Quindi il centro di massa del corpo resta fermo durante il moto.
Scegliamo una terna solidale $(\boldsymbol{u}_i)$ *con* $\boldsymbol{u}_3$ *ortogonale ad* A_1, A_2, *e tale che*

$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{e}_i\,, \qquad i = 1{,}2{,}3\,.$$

Denotiamo

$$\boldsymbol{e}_1 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t)\boldsymbol{u}_i(t)\,,$$

cosicché il momento delle forze esterne è (chiamando a *proprio la lunghezza dello spigolo normale ad* A_i*)*

$$\boldsymbol{M}^{\text{ext}} = 2\frac{a}{2}\boldsymbol{u}_3(t) \times k\boldsymbol{e}_1 = ak[\lambda_1(t)\boldsymbol{u}_2(t) - \lambda_2(t)\boldsymbol{u}_1(t)]\,.$$

Proiettando la seconda equazione cardinale lungo gli assi solidali corrispondenti si trovano dunque le

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 - ak\lambda_2(t)\,,\\
I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + ak\lambda_1(t)\,,\\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2\,,
\end{aligned}$$

che vanno unite alle condizioni iniziali

$$\omega_i(0) = 0\,, \qquad i = 1{,}2{,}3\,.$$

Il moto sarà dunque una rotazione non uniforme intorno all'asse $\boldsymbol{u}_2$, *e di conseguenza*

$$\lambda_1(t) = \boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{e}_1 = \cos\theta(t)\,, \quad \lambda_2(t) = \boldsymbol{u}_2(t) \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0\,,$$

ove θ *rappresenta l'angolo di rotazione di* $\boldsymbol{u}_1$ *nel piano fisso ortogonale a* $\boldsymbol{u}_2$. *Inoltre*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (0, \dot{\theta}(t), 0)\,,$$

e $\theta(t)$ *risolve*

$$I_{22}\ddot{\theta} = ak\cos\theta\,.$$

Moltiplicando questa equazione per $\dot{\theta}$ *e integrando si ha*

$$\frac{1}{2}I_{22}\dot{\theta}(t)^2 = ak\sin\theta(t)\,.$$

Dunque

$$\max T = \max\frac{1}{2}I_{22}\dot{\theta}(t)^2 = ak\,.$$

R.

$$\max T = ak\,.$$

2. [7/7/2006 (ex)I] Una lamina quadrata di lato $2L$ e massa m è vincolata ad avere un lato sull'asse verticale fisso x_3. Il vincolo è tale che la risultante

delle reazioni vincolari, e il loro momento risultante (rispetto al centro di massa), hanno componente nulla lungo x_3.
Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_3. La lamina è anche soggetta a una forza $\boldsymbol{F}$ ad essa ortogonale, applicata nel suo centro di massa G, e di modulo

$$k|x_{3G}|\,,$$

con $k > 0$ costante. Determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ della lamina sapendo che questa è ferma all'istante iniziale con $G = (0, L, 0)$.
[Suggerimento: iniziare determinando la $x_{3G}(t)$ usando la prima equazione cardinale.]
Soluzione
Per la prima equazione cardinale

$$m\boldsymbol{a}_G = -mg\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\text{vin}}\,.$$

Dato che $\boldsymbol{F}$ *e* $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ *non hanno componenti lungo* $\boldsymbol{e}_3$*, ne segue che*

$$m\ddot{x}_{3G} = -mg\,,$$

ossia che

$$x_{3G}(t) = -g\frac{t^2}{2}\,.$$

Quindi la seconda equazione cardinale dà

$$I_{33}\dot{\omega}_3 = (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + Lkg\frac{t^2}{2}\,.$$

Poiché la lamina ruota intorno all'asse x_3*, si avrà* $\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\theta}(t)\boldsymbol{e}_3$ *per un opportuno angolo di rotazione* θ*, il che conduce a*

$$\ddot{\theta} = \frac{Lkg}{2I_{33}}t^2\,,$$

ossia a (tenuto conto delle condizioni iniziali)

$$\theta(t) = \frac{Lkg}{24I_{33}}t^4\,.$$

R.

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{Lkg}{6I_{33}}t^3\boldsymbol{e}_3\,.$$

3. [7/7/2006 (ex)II] Denotiamo con $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ il sistema di riferimento fisso. Un parallelepipedo omogeneo di spigoli a, b, $c > 0$ e di massa $m > 0$ è soggetto a due forze

$$\boldsymbol{F}_1 = -2k\boldsymbol{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = 2k\boldsymbol{e}_2\,,$$

con $k > 0$ costante, applicate rispettivamente nei centri di due facce opposte A_1 e A_2.

All'istante iniziale il parallelepipedo è fermo, con le facce A_1 e A_2 parallele al piano $x_3 = 0$, e le altre facce perpendicolari agli assi fissi.
Si determini il massimo raggiunto dall'energia cinetica durante il moto.
R.

$$\max T = 2ak\,.$$

4. [7/7/2006 (ex)II] Una lamina quadrata di lato L e massa m è vincolata ad avere un lato sull'asse verticale fisso x_1. Il vincolo è tale che la risultante delle reazioni vincolari, e il loro momento risultante, hanno componente nulla lungo x_1.
Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_1. La lamina è anche soggetta a una forza $\boldsymbol{F}$ ad essa ortogonale, applicata nel suo centro di massa G, e di modulo

$$k|x_{1G}|\,,$$

con $k > 0$ costante. Determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ della lamina sapendo che questa è ferma all'istante iniziale con $G = (0, L/2, 0)$.
[Suggerimento: iniziare determinando la $x_{1G}(t)$ usando la prima equazione cardinale.]
R.

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{Lkg}{12 I_{11}} t^3 \boldsymbol{e}_1\,.$$

5. [22/9/2006 (ex)I] Una lamina materiale a forma di disco è poggiata su un piano Π inclinato sull'orizzontale con un angolo $\alpha \in (0, \pi/2)$. Il coefficiente di attrito statico tra la lamina e il piano è $\mu > 0$. Si assuma $\mu \cos\alpha > \sin\alpha$. Il piano Π è mobile, con equazione

$$x_2 \sin\alpha - x_3 \cos\alpha = -\frac{ct^2}{2} \sin\alpha\,,$$

ove $c > 0$; i punti solidali con il piano abbiano velocità parallela all'asse x_2. Il peso quindi risulta diretto nel verso negativo dell'asse x_3.
Si determini il valore massimo del modulo c dell'accelerazione del piano che permette al disco di restare in equilibrio relativo al piano, partendo da condizioni iniziali compatibili con l'equilibrio stesso.
SOLUZIONE
Imponiamo che le forze esterne che agiscono sulla lamina in un sistema di riferimento $\mathcal{S}$ solidale con il piano mobile Π abbiano risultante nulla.
Scegliamo $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, con O coincidente con la posizione del centro del disco all'istante iniziale, $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al piano Π , $\boldsymbol{u}_1$ orizzontale e tangente a Π, e quindi $\boldsymbol{u}_2$ tangente al medesimo piano, con $\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \sin\alpha > 0$.
Scriviamo dunque

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{peso}} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} + \boldsymbol{F}_{T} = 0\,.$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\text{peso}} &= -mg\sin\alpha\boldsymbol{u}_2 - mg\cos\alpha\boldsymbol{u}_3\,,\\
\mathbf{f}_{\text{vin}} &= \mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}} + \mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}\,,\\
\boldsymbol{F}_{T} &= -m\boldsymbol{a}_O = mc\boldsymbol{e}_2 = mc\cos\alpha\boldsymbol{u}_2 - mc\sin\alpha\boldsymbol{u}_3\,.
\end{aligned}
$$

Proiettando lungo $\boldsymbol{u}_2$ *e lungo* $\boldsymbol{u}_3$*:*

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}\right| &= \left|mg\sin\alpha - mc\cos\alpha\right|\,,\\
\left|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}\right| &= mg\cos\alpha + mc\sin\alpha\,.
\end{aligned}
$$

Dato che deve essere

$$
\left|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}\right| \le \mu\left|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}\right|\,,
$$

si hanno (discutendo i valori assoluti) i due sistemi

$$
\begin{aligned}
g\sin\alpha - c\cos\alpha &\ge 0\,,\\
-c(\mu\sin\alpha + \cos\alpha) &\le g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)\,,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
g\sin\alpha - c\cos\alpha &< 0\,,\\
c(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) &\le g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)\,.
\end{aligned}
$$

La prima equazione del primo sistema dà

$$
c \le g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,,
$$

mentre la prima equazione del secondo sistema dà

$$
c > g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.
$$

È chiaro dunque che nei casi in cui il secondo sistema ha soluzioni, sarà tra queste ultime che si troverà il massimo cercato di c*.*
Se

$$
\cos\alpha - \mu\sin\alpha \le 0\,,
$$

il secondo sistema è soddisfatto per ogni

$$
c > g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.
$$

Se invece

$$
\cos\alpha - \mu\sin\alpha > 0\,,
$$

il secondo sistema è soddisfatto per ogni

$$
g\frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \ge c > g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.
$$

Si vede subito che nelle ipotesi fatte questo intervallo non è vuoto.

R.

$$\begin{aligned} & c \leq g\frac{\mu\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\,, && \textit{se } \cos\alpha > \mu\sin\alpha, \\ & \textit{nessuna limitazione per } c, && \textit{se } \cos\alpha \leq \mu\sin\alpha. \end{aligned}$$

6. [12/6/2009 (ex)I] Una sfera omogenea di raggio R e massa M ha il centro C mobile con legge assegnata

$$\overrightarrow{OC} = L\cos\alpha t\boldsymbol{e}_1 + L\sin\alpha t\boldsymbol{e}_2\,.$$

Nel punto che occupa la posizione

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + R\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|} = (R+L)\cos\alpha t\boldsymbol{e}_1 + (R+L)\sin\alpha t\boldsymbol{e}_2$$

è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda\boldsymbol{e}_1\,.$$

Qui α, λ, L, M, $R > 0$ sono costanti.
All'istante iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{10}\boldsymbol{e}_1\,,$$

con $\omega_{10} > 0$.

1. Determinare la velocità angolare della sfera nel sistema fisso in funzione di α, λ, L, M, R, ω_{10} e t.
2. Dimostrare che il punto P solidale con la sfera tale che $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}$ all'istante $t = 0$ *non* si mantiene a quota $\xi_3 = 0$ durante il moto (qui (ξ_i) indica le coordinate nel sistema di riferimento fisso).

Soluzione

I metodo (uso della terna fissa)

1) Scriveremo le equazioni di Eulero rispetto al polo C, e alla terna fissa $(\boldsymbol{e}_i)$. Si noti che C è il centro di massa della sfera; inoltre la terna fissa è principale in ogni istante, con momenti d'inerzia costanti nel tempo, e tutti uguali al momento diametrale I_{11}, per le proprietà di simmetria della sfera.

Il momento delle forze esterne è dato da

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = \overrightarrow{CA} \times \boldsymbol{F}_A = R(\cos\alpha t\boldsymbol{e}_1 + \sin\alpha t\boldsymbol{e}_2) \times \lambda\boldsymbol{e}_1 = -R\lambda\sin\alpha t\boldsymbol{e}_3\,.$$

Dunque le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot\omega_1 &= 0\,, \\ I_{11}\dot\omega_2 &= 0\,, \\ I_{11}\dot\omega_3 &= -R\lambda\sin\alpha t\,. \end{aligned}$$

Dunque per ogni $t > 0$

$$\omega_1(t) = \omega_{10}\,, \quad \omega_2(t) = 0\,, \quad \omega_3(t) = -\frac{R\lambda}{I_{11}\alpha}(1 - \cos\alpha t)\,.$$

Qui I_{11} *è il momento diametrale della sfera* S*, che si calcola essere*

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_S \frac{M}{\mathrm{vol}(S)}(z_2^2 + z_3^2)\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2\,\mathrm{d}z_3 = \frac{2}{3}\frac{M}{\mathrm{vol}(S)}\int_S (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2\,\mathrm{d}z_3 \\ &= \frac{M}{2\pi R^3}\int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} r^4 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{5}MR^2\,. \end{aligned}$$

2) La derivata del vettore $\overrightarrow{CP}$*, che è solidale con la sfera, è data da*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{CP} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CP} &= (\omega_{10}\boldsymbol{e}_1 + \omega_3(t)\boldsymbol{e}_3) \times (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= -\omega_3(t)x_2\boldsymbol{e}_1 + (\omega_3(t)x_1 - \omega_{10}x_3)\boldsymbol{e}_2 + \omega_{10}x_2\boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Qui le x_i *sono le componenti nella terna fissa del vettore* $\overrightarrow{CP}$.
Dunque

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_3(t)x_2\,, & x_1(0) &= R\,, \qquad (1) \\ \dot{x}_2 &= \omega_3(t)x_1 - \omega_{10}x_3\,, & x_2(0) &= 0\,, \qquad (2) \\ \dot{x}_3 &= \omega_{10}x_2\,, & x_3(0) &= 0\,. \qquad (3) \end{aligned}$$

Dobbiamo dimostrare che la soluzione di questo problema di Cauchy non ha terza *componente* x_3 *identicamente nulla. Se così fosse, per la (3) si avrebbe anche* $x_2 \equiv 0$*, e quindi dalla (1) anche* $x_1 \equiv R$*; la (2) condurrebbe infine all'assurdo*

$$0 = \dot{x}_2(t) = \omega_3(t)x_1(t) - \omega_{10}x_3(t) = \omega_3(t)R \neq 0\,, \qquad \text{per qualche } t > 0.$$

II metodo (uso della terna mobile)
A) Scegliamo come sistema mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$*, ove*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\alpha t\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\alpha t\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\alpha t\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\alpha t\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Denotiamo con x_i *le coordinate in* $\mathcal{S}$*, e con* y_i *le coordinate riferite a* C*, ossia*

$$x_1 = y_1 + L\,, \qquad x_2 = y_2\,, \qquad x_3 = y_3\,.$$

In $\mathcal{S}$ *agiscono le forze* $\boldsymbol{F}_A$*, e quelle di trascinamento* $\boldsymbol{F}_T$*, e di Coriolis* $\boldsymbol{F}_C$*. Denotiamo con* $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}$ *la velocità angolare della sfera in* $\mathcal{S}$*. Le distribuzioni delle forze fittizie sono dunque*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_T &= -\frac{M}{\mathrm{vol}(S)}(\alpha\boldsymbol{e}_3) \times [(\alpha\boldsymbol{e}_3) \times \overrightarrow{OP}] = \frac{M}{\mathrm{vol}(S)}\alpha^2\left[\overrightarrow{OP}\right]_\perp\,, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{F}_C &= -2\frac{M}{\mathrm{vol}(S)}(\alpha\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = -2\frac{M}{\mathrm{vol}(S)}(\alpha\boldsymbol{e}_3) \times [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}} \times \overrightarrow{CP}]\,, \end{aligned}$$

dove il simbolo $[\boldsymbol{x}]_\perp$ indica la componente perpendicolare a $\boldsymbol{e}_3$.
Con i calcoli si ottengono i rispettivi momenti (relativi a C): per $\boldsymbol{F}_T$ si ha:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_T &= \frac{M}{\mathrm{vol}(S)}\alpha^2 \int_S \overrightarrow{CP}\times\Big[\overrightarrow{OP}\Big]_\perp = \frac{M}{\mathrm{vol}(S)}\alpha^2 \int_S (y_3\boldsymbol{u}_3 - L\boldsymbol{u}_1)\times[(L+y_1)\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2]\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{M}{\mathrm{vol}(S)}\alpha^2 \int_S [Ly_3\boldsymbol{u}_2 + y_1y_3\boldsymbol{u}_2 - y_2y_3\boldsymbol{u}_1 - Ly_2\boldsymbol{u}_3]\,\mathrm{d}y = 0\,,\end{aligned}$$

per motivi di simmetria: gli integrali dei monomi y_iy_j, $i \neq j$, e y_i, si annullano.
Poi si ha per $\boldsymbol{F}_C$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_C &= -2\frac{M}{\mathrm{vol}(S)}\alpha \int_S \overrightarrow{CP}\times[\boldsymbol{e}_3\times(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}\times\overrightarrow{CP})]\,\mathrm{d}y \\ &= -2\frac{M}{\mathrm{vol}(S)}\alpha \int_S [\omega_{\mathcal{S}1}\boldsymbol{u}_2 - \omega_{\mathcal{S}2}\boldsymbol{u}_1]y_3^2\,\mathrm{d}y = I_{11}\alpha[\omega_{\mathcal{S}2}\boldsymbol{u}_1 - \omega_{\mathcal{S}1}\boldsymbol{u}_2]\,,\end{aligned}$$

ove si sono usati di nuovo i motivi di simmetria, e I_{11} ha lo stesso significato che sopra.
Infine

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{F}_A} = \overrightarrow{CA}\times(\lambda\boldsymbol{e}_1) = -\lambda R\sin\alpha t\boldsymbol{u}_3\,.$$

B) Si ricordi che, in $\mathcal{S}$, prendendo C come origine del sistema di riferimento solidale con la sfera, di cui C è anche il centro di massa,

$$\boldsymbol{L}_C^{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\sigma}_C^{\mathcal{S}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}\,.$$

Dunque per la seconda equazione cardinale, denotando $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$, e con $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{S}}$ la derivata relativa a $\mathcal{M}$ di $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}$, si ha

$$\boldsymbol{M}_C^{\mathrm{ext}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C^{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \boldsymbol{\sigma}_C^{\mathcal{S}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}\times\boldsymbol{\sigma}_C\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}\,.$$

Perciò le equazioni di Eulero in $\mathcal{S}$ sono

$$\begin{aligned}I_{11}\dot{\omega}_{\mathcal{S}1} &= I_{11}\alpha\omega_{\mathcal{S}2}\,,\\ I_{11}\dot{\omega}_{\mathcal{S}2} &= -I_{11}\alpha\omega_{\mathcal{S}1}\,,\\ I_{11}\dot{\omega}_{\mathcal{S}3} &= -\lambda R\sin\alpha t\,.\end{aligned}$$

Quindi, ricordando

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}(0) = \omega_{10}\boldsymbol{u}_1(0) - \alpha\boldsymbol{u}_3(0)\,,$$

si ottiene la soluzione

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}(t) = \omega_{10}\cos\alpha t\boldsymbol{u}_1 - \omega_{10}\sin\alpha t\boldsymbol{u}_2 - \left[\frac{R\lambda}{I_{11}\alpha}(1-\cos\alpha t) + \alpha\right]\boldsymbol{u}_3\,.$$

Infatti i due vettori $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}$ sono collegati dalla formula di composizione delle velocità angolari

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}} + \alpha\boldsymbol{e}_3\,,$$

ove il termine $\alpha\boldsymbol{e}_3$ rappresenta la velocità angolare di $\mathcal{M}$ rispetto alla terna fissa.

R.
$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_{10}\boldsymbol{e}_1 - \frac{R\lambda}{I_{11}\alpha}(1-\cos\alpha t)\boldsymbol{e}_3\,, \qquad I_{11} = \frac{2}{5}MR^2\,.$$

7. [12/6/2009 (ex)II] Una sfera omogenea di raggio R e massa M ha il centro C mobile con legge assegnata
$$\overrightarrow{OC} = L\sin\alpha t\boldsymbol{e}_1 + L\cos\alpha t\boldsymbol{e}_2\,.$$
Nel punto che occupa la posizione
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + R\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|} = (R+L)\sin\alpha t\boldsymbol{e}_1 + (R+L)\cos\alpha t\boldsymbol{e}_2$$
è applicata la forza
$$\boldsymbol{F}_A = \lambda\boldsymbol{e}_2\,.$$
Qui α, λ, L, M, $R > 0$ sono costanti.
All'istante iniziale
$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{20}\boldsymbol{e}_2\,,$$
con $\omega_{20} > 0$.

1. Determinare la velocità angolare della sfera nel sistema fisso in funzione di α, λ, L, M, R, ω_{20} e t.
2. Dimostrare che il punto P solidale con la sfera tale che $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}$ all'istante $t = 0$ *non* si mantiene a quota $\xi_3 = 0$ durante il moto (qui (ξ_i) indica le coordinate nel sistema di riferimento fisso).

R.
$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_{20}\boldsymbol{e}_2 - \frac{R\lambda}{I_{11}\alpha}(1-\cos\alpha t)\boldsymbol{e}_3\,, \qquad I_{11} = \frac{2}{5}MR^2\,.$$

8. [15/7/2009 (ex)I] Un disco rigido di raggio L, massa M e centro C è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$.
All'istante iniziale $t = 0$ valgono:
$$\overrightarrow{OC} = 0\,, \qquad \boldsymbol{v}_C(0) = 0\,, \qquad \boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0\boldsymbol{e}_3\,.$$
Qui O denota l'origine del sistema di riferimento fisso, $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del disco, e $\omega_0 > 0$ è una costante.
Si determinino $\overrightarrow{OC}(t)$ e $\boldsymbol{\omega}(t)$ per ogni $t > 0$.
Soluzione
Per la prima equazione cardinale
$$M\boldsymbol{a}_C\cdot\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{F}^{\text{ext}}\cdot\boldsymbol{e}_i = 0\,, \qquad i = 1\,,2\,.$$

Quindi C si muove di moto rettilineo uniforme. Dato che all'istante iniziale è fermo, si ha

$$\overrightarrow{OC}(t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t > 0.$$

Quindi il moto è una precessione. Per la seconda equazione cardinale, indicando $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_C$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_C = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}} = 0\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}(0) = I_{33}\omega_0\boldsymbol{e}_3 = I_{33}\omega_0\boldsymbol{u}_3\,, \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$ fa parte di una terna $(\boldsymbol{u}_i)$ solidale con il disco. Possiamo scomporre $\boldsymbol{\sigma}$ rispetto a $(\boldsymbol{u}_i)$, in modo che la (1) e la non singolarità di $\boldsymbol{\sigma}$ implicano

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_0\boldsymbol{u}_3 = \omega_0\boldsymbol{e}_3\,.$$

R.

$$\overrightarrow{OC}(t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{\omega}(t) = \omega_0\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \text{per ogni } t > 0.$$

9. [15/7/2009 (ex)II] Una lamina rigida quadrata di lato L, massa M e centro C è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$.
All'istante iniziale $t = 0$ valgono:

$$\overrightarrow{OC} = 0\,, \qquad \boldsymbol{v}_C(0) = 0\,, \qquad \boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0\boldsymbol{e}_3\,.$$

Qui O denota l'origine del sistema di riferimento fisso, $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare della lamina, e $\omega_0 > 0$ è una costante.
Si determinino $\overrightarrow{OC}(t)$ e $\boldsymbol{\omega}(t)$ per ogni $t > 0$.
R.

$$\overrightarrow{OC}(t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{\omega}(t) = \omega_0\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \text{per ogni } t > 0.$$

10. [09/01/2020 (ex)I] Un disco C di massa m e raggio R è vincolato ad avere il centro di massa G sul piano $x_3 = 0$.
Sul punto A solidale a C e appartenente alla circonferenza bordo del disco, è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \mu\boldsymbol{u}\,,$$

con $\mu > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ solidale e ortogonale al piano di C.
Il disco parte da fermo con

$$\boldsymbol{X}_G(0) = 0\,, \qquad \boldsymbol{X}_A(0) = R\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{e}_3\,.$$

- Determinare il moto del disco con le equazioni globali (o cardinali).

Si noti che il moto del centro di massa conterrà un integrale nel tempo impossibile da esprimere in termini di funzioni elementari che dovrà essere lasciato indicato.
[Suggerimento: la reazione vincolare si può rappresentare solo con una forza $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ applicata in G e parallela a $\boldsymbol{e}_3$; si usi la seconda equazione (con polo in G) per risolvere la prima.]

SOLUZIONE

Scegliamo come base solidale al disco

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{GA}}{R}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}\,.$$

Si noti che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$.
Usiamo come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane di G x_{1G}, x_{2G} e i 3 angoli di Eulero.
La prima equazione globale

$$m\boldsymbol{a}_G = \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} + \boldsymbol{F}$$

proiettata su $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ dà subito

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{1G} &= \mu \boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1\,, \\ m\ddot{x}_{2G} &= \mu \boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2\,. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}} = R\boldsymbol{u}_1 \times \mu \boldsymbol{u}_3 = -R\mu \boldsymbol{u}_2\,.$$

Poi le equazioni di Eulero scritte in G danno

$$\begin{aligned} I\dot{\omega}_1 &= -I\omega_2\omega_3\,, \\ I\dot{\omega}_2 &= I\omega_1\omega_3 - R\mu\,, \\ 2I\dot{\omega}_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Qui I è il momento diametrale del disco. Dalla terza equazione si ottiene $\omega_3(t) = 0$ per ogni t e quindi dalla prima anche $\omega_1(t) = 0$ per ogni t. La seconda dà invece

$$\omega_2(t) = -\frac{R\mu}{I}t\,.$$

Il moto del disco perciò, nel sistema $(\boldsymbol{X}_G, (\boldsymbol{e}_h)$, è una rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_2$, ossia ponendo (con il cambiamento di segno tipico delle rotazioni intorno al secondo asse)

$$\varphi(t) = \frac{R\mu}{2I}t^2\,,$$

si ha

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1(t) &= \cos\varphi(t)\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(t)\boldsymbol{e}_3\,, \\ \boldsymbol{u}_2(t) &= \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi(t)\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi(t)\boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Quindi le equazioni per il moto di G diventano

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{1G} &= -\mu\sin\varphi(t)\,, \\ m\ddot{x}_{2G} &= 0\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$x_{1G}(t) = -\frac{\mu}{m}\int_0^t \int_0^\tau \sin\Big(\frac{R\mu}{2I}s^2\Big)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad x_{2G}(t) = 0\,, \qquad t \geq 0\,.$$

R. *Moto del centro di massa:*

$$x_{1G}(t) = -\frac{\mu}{m}\int_0^t \int_0^\tau \sin\Big(\frac{R\mu}{2I}s^2\Big)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad x_{2G}(t) = 0\,, \qquad t \geq 0\,.$$

Rotazione intorno al centro di massa:

$$\varphi(t) = \frac{R\mu}{2I}t^2\,.$$

11. [09/01/2020 (ex)II] Una lamina quadrata C di massa m e lato $2L$ è vincolata ad avere il centro di massa G sul piano $x_3 = 0$.
Sul punto A solidale a C dato dal punto medio di uno dei lati, è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \mu\boldsymbol{u}\,,$$

con $\mu > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ solidale e ortogonale al piano di C.
Il disco parte da fermo con

$$\boldsymbol{X}_G(0) = 0\,, \qquad \boldsymbol{X}_A(0) = L\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{e}_3\,.$$

- Determinare il moto della lamina con le equazioni globali (o cardinali).

Si noti che il moto del centro di massa conterrà un integrale nel tempo impossibile da esprimere in termini di funzioni elementari che dovrà essere lasciato indicato.
[Suggerimento: la reazione vincolare si può rappresentare solo con una forza $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ applicata in G e parallela a $\boldsymbol{e}_3$; si usi la seconda equazione (con polo in G) per risolvere la prima.]
R. *Moto del centro di massa:*

$$x_{1G}(t) = -\frac{\mu}{m}\int_0^t \int_0^\tau \sin\Big(\frac{L\mu}{2I}s^2\Big)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad x_{2G}(t) = 0\,, \qquad t \geq 0\,.$$

Rotazione intorno al centro di massa:

$$\varphi(t) = \frac{L\mu}{2I}t^2\,.$$

520. Statica per sistemi vincolati: vincoli fissi

1. [12/7/2016 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

ed è soggetto alla forza peso diretta come

$$-\frac{\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} \,.$$

La reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

ove $\mu > 0$.
Determinare le possibili posizioni di equilibrio del punto.
SOLUZIONE
Introduciamo l'ascissa curvilinea $s \in (0,2\pi R)$ tale che

$$\overrightarrow{OP} = R \cos \frac{s}{R} \boldsymbol{e}_1 + R \sin \frac{s}{R} \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} - mg \frac{\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} \cdot \boldsymbol{T} \,, \\ m\frac{\dot{s}^2}{R} &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N} - mg \frac{\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} \cdot \boldsymbol{N} \,, \\ 0 &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} - mg \frac{\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} \cdot \boldsymbol{B} \,. \end{aligned}$$

Si ha poi

$$\boldsymbol{T} = -\sin \frac{s}{R} \boldsymbol{e}_1 + \cos \frac{s}{R} \boldsymbol{e}_2 \,, \quad \boldsymbol{N} = -\cos \frac{s}{R} \boldsymbol{e}_1 - \sin \frac{s}{R} \boldsymbol{e}_2 \,, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Dunque alla quiete si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} - \frac{mg}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{R} \,, \\ 0 &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N} + \frac{mg}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{R} \,, \\ 0 &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} - \frac{mg}{\sqrt{2}} \,. \end{aligned}$$

Deve essere d'altronde

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}|^2 \leq \mu^2 \{ |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N}|^2 + |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B}|^2 \} \,,$$

ossia usando le equazioni dell'equilibrio

$$\frac{1}{2} m^2 g^2 \cos^2 \frac{s}{R} \leq \mu^2 \Big\{ \frac{1}{2} m^2 g^2 \sin^2 \frac{s}{R} + \frac{1}{2} m^2 g^2 \Big\} \,.$$

R.

$$\cos^2 \frac{s}{R} \leq \mu^2 \Big\{ 1 + \sin^2 \frac{s}{R} \Big\} , \qquad s \in (0{,}2\pi R) .$$

2. [8/02/2017 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato all'ellisse

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 , \qquad x_1 - x_3 = 0 .$$

Il vincolo è scabro, e la reazione vincolare soddisfa

$$\left| \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}} \right| \leq \mu \left| \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}} \right| .$$

Qui R, μ sono costanti positive.
Inoltre sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.
Trovare le posizioni di equilibrio del punto.
[Parametrizzazione dell'ellisse con $\theta \in [0{,}2\pi]$:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\Psi}(\theta) = R\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta \boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta \boldsymbol{e}_3 ; \\ \boldsymbol{T}(\theta) = \frac{-\sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \boldsymbol{e}_2 - \sin\theta \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{1+\sin^2\theta}} , \\ \boldsymbol{N}(\theta) = \frac{-\cos\theta \boldsymbol{e}_1 - 2\sin\theta \boldsymbol{e}_2 - \cos\theta \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2(1+\sin^2\theta)}} , \quad \boldsymbol{B}(\theta) = \frac{-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} . \,] \end{gathered}$$

Soluzione

Si deve avere all'equilibrio:

$$\begin{aligned} 0 = m\ddot{s} &= -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{T} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} , \\ 0 = m\dot{s}^2 k &= -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{N} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N} , \\ 0 &= -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{B} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} . \end{aligned}$$

Dunque

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| = \sqrt{(\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N})^2 + (\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B})^2} = \frac{mg}{\sqrt{1+\sin^2\theta}} .$$

Deve quindi essere

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| = mg \frac{|\sin\theta|}{\sqrt{1+\sin^2\theta}} \leq \mu \frac{mg}{\sqrt{1+\sin^2\theta}} .$$

R.

$$|\sin\theta| \leq \mu .$$

3. [8/02/2017 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato all'ellisse

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 , \qquad x_2 - x_3 = 0 .$$

Il vincolo è scabro, e la reazione vincolare soddisfa
$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| \leq \mu \left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right| .$$
Qui R, μ sono costanti positive.
Inoltre sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.
Trovare le posizioni di equilibrio del punto.
[Parametrizzazione dell'ellisse con $\theta \in [0,2\pi]$:
$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\Psi}(\theta) = R\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3 ; \\
\boldsymbol{T}(\theta) = \frac{\cos\theta\boldsymbol{e}_1 - \sin\theta\boldsymbol{e}_2 - \sin\theta\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{1+\sin^2\theta}} , \\
\boldsymbol{N}(\theta) = \frac{-2\sin\theta\boldsymbol{e}_1 - \cos\theta\boldsymbol{e}_2 - \cos\theta\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2(1+\sin^2\theta)}} , \quad \boldsymbol{B}(\theta) = \frac{\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} . \,]
\end{gathered}$$
R.
$$|\sin\theta| \leq \mu .$$

4. [27/06/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza
$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 , \qquad x_3 = 0 .$$
Su di esso agiscono le forze elastiche
$$\boldsymbol{F}_1 = -k_1\overrightarrow{A_1P} , \qquad \boldsymbol{F}_2 = -k_2\overrightarrow{A_2P} ,$$
ove
$$\overrightarrow{OA_1} = -R\boldsymbol{e}_2 , \qquad \overrightarrow{OA_2} = R\boldsymbol{e}_1 .$$
Qui k_1, k_2 sono costanti positive assegnate.
Determinare i punti di equilibrio.
SOLUZIONE
Scegliamo $s \in (0,2\pi)$ come coordinata lagrangiana, in modo che
$$\overrightarrow{OP} = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2 .$$
Allora
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= -\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + \cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{N} &= -\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 - \sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{e}_3 ,
\end{aligned}$$
e $k(s) = 1/R$.
Le equazioni dell'equilibrio devono essere, dato che il vincolo è liscio,
$$\begin{aligned}
0 = m\ddot{s} &= (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2)\cdot\boldsymbol{T} , \\
0 = m\frac{\dot{s}^2}{R} &= (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2)\cdot\boldsymbol{N} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{N} , \\
0 &= (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2)\cdot\boldsymbol{B} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{B} .
\end{aligned}$$

Si ottiene subito dalla III

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0\,,$$

e dalla I svolgendo i calcoli si ottiene

$$k_2 R \sin\frac{s}{R} + k_1 R \cos\frac{s}{R} = 0\,.$$

Dunque l'equilibrio si ha per

$$\operatorname{tg}\frac{s}{R} = -\frac{k_1}{k_2}\,.$$

Cioè si ha equilibrio nei punti

$$s_0 = 2\pi R - R \operatorname{arctg}\frac{k_1}{k_2}\,, \qquad s_1 = s_0 - \pi R\,.$$

R.

$$s_0 = 2\pi R - R \operatorname{arctg}\frac{k_1}{k_2}\,, \qquad s_1 = s_0 - \pi R\,.$$

5. [23/07/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva piana

$$x_2 = \frac{d}{x_1}\,, \quad x_3 = 0\,, \qquad x_1 > 0\,.$$

È soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2\,.$$

Il vincolo è scabro e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| \le \mu |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}|\,.$$

Qui d, α, β, μ sono costanti positive assegnate.
Determinare le posizioni di equilibrio possibili.
Soluzione
A) All'equilibrio deve valere

$$\begin{aligned} 0 = m\ddot{s} &= \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} + \mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}\,,\\ 0 = m\dot{s}^2 k(s) &= \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N},;\\ 0 &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Dunque $|\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| = |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N}|$. *Si ha*

$$\boldsymbol{T} = \frac{(1, -dx_1^{-2})}{\sqrt{1 + d^2 x_1^{-4}}}\,, \quad \boldsymbol{N} = \frac{(dx_1^{-2}, 1)}{\sqrt{1 + d^2 x_1^{-4}}}\,,$$

da cui discende la condizione cercata nella forma

$$\left|\alpha - \frac{\beta d}{x_1^2}\right| \le \mu \left|\frac{\alpha d}{x_1^2} + \beta\right|\,.$$

R.
$$\left|\alpha-\frac{\beta d}{x_1^2}\right|\le\mu\left|\frac{\alpha d}{x_1^2}+\beta\right|\,.$$

6. [10/02/2020 (ex)I] Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie
$$x_3=\alpha x_1x_2\,,\qquad (x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2\,,$$
ove $\alpha>0$ è costante.
Sul punto agiscono la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$ e la reazione vincolare di vincolo scabro, tale che alla quiete
$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}|\le\mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$
con $\mu>0$ costante.
Si trovino le posizioni in cui è possibile l'equilibrio.
Soluzione
Deve valere all'equilibrio
$$0=m\boldsymbol{a}=-mg\boldsymbol{e}_3+\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\,.$$
Usiamo la parametrizzazione lagrangiana data dalle coordinate cartesiane
$$\boldsymbol{r}(x_1,x_2)=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\alpha x_1x_2\boldsymbol{e}_3\,,$$
e proiettiamo questa equazione sulla base costituita dai vettori coordinati tangenti e da quello normale
$$\boldsymbol{r}_{x_1}=\boldsymbol{e}_1+\alpha x_2\boldsymbol{e}_3\,,\qquad \boldsymbol{r}_{x_2}=\boldsymbol{e}_2+\alpha x_1\boldsymbol{e}_3\,,$$
$$\boldsymbol{\nu}=\frac{\boldsymbol{r}_{x_1}\times\boldsymbol{r}_{x_2}}{|\boldsymbol{r}_{x_1}\times\boldsymbol{r}_{x_2}|}=\frac{-\alpha x_2\boldsymbol{e}_1-\alpha x_1\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{1+\alpha^2(x_1^2+x_2^2)}}\,.$$
Si ottiene il sistema scalare
$$\begin{aligned}-mg\alpha x_2+\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{r}_{x_1}&=0\,,\\ -mg\alpha x_1+\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{r}_{x_2}&=0\,,\\ -\frac{mg}{\sqrt{1+\alpha^2(x_1^2+x_2^2)}}+\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{\nu}&=0\,.\end{aligned}$$
Dunque deve essere
$$\begin{aligned}|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}|^2=|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}|^2-|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|^2&=|-mg\boldsymbol{e}_3|^2-|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{\nu}|^2\\ &=m^2g^2\Big(1-\frac{1}{1+\alpha^2r^2}\Big)=\frac{m^2g^2\alpha^2r^2}{1+\alpha^2r^2}\,,\end{aligned}$$
ove abbiamo posto $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$.
Dunque la disuguaglianza da imporre è
$$\frac{mg\alpha r}{\sqrt{1+\alpha^2r^2}}=|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}|\le\mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|=\frac{\mu mg}{\sqrt{1+\alpha^2r^2}}\,.$$

R. *Tutte le posizioni per cui, se* $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

$$r \le \frac{\mu}{\alpha}\,.$$

7. [10/02/2020 (ex)II] Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie

$$x_3 = -\alpha x_1 x_2\,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2\,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante.
Sul punto agiscono la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$ e la reazione vincolare di vincolo scabro, tale che alla quiete

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \le \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante.
Si trovino le posizioni in cui è possibile l'equilibrio.
R. *Tutte le posizioni per cui, se* $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

$$r \le \frac{\mu}{\alpha}\,.$$

560. Dinamica per sistemi vincolati: vincoli fissi

1. [18/7/2005 (ex)I] Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza $2L$ e massa m è soggetta ai seguenti vincoli:

- il suo centro di massa appartiene all'elica cilindrica γ

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha\zeta\,, \\ y = R\sin\alpha\zeta\,, \qquad\qquad -\infty < \zeta < \infty\,; \\ z = \zeta\,, \end{cases}$$

  qui $\alpha > 0$ è costante;

- l'asta è parallela alla tangente a γ.

I vincoli sono lisci.
Sull'asta agisce la forza peso, diretta secondo il verso negativo dell'asse z.
Il centro di massa dell'asta all'istante iniziale è a quota $z = h > 0$, con velocità nulla.
Determinare la velocità del centro di massa quando esso raggiunge la quota $z = 0$.
Soluzione

Le forze che compiono lavoro (cioè il peso) sono conservative, con potenziale

$$U = -mgz_C \,,$$

ove indichiamo con C il centro di massa dell'asta. Per trovare l'energia cinetica dell'asta parametrizziamola così: indicando con P il generico punto dell'asta,

$$P(s) = C + s\boldsymbol{T} \,, \qquad -L \le s \le L \,,$$

ove $\boldsymbol{T}$ indica il versore tangente all'elica nel punto occupato da C. Dato che

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{1+R^2\alpha^2}}(-R\alpha \sin\alpha\zeta, R\alpha\cos\alpha\zeta, 1) \,,$$

si ha, ponendo

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1+R^2\alpha^2}}$$

che

$$P(s) = \Big(R\cos\alpha z_C - R\alpha\beta s \sin\alpha z_C, R\sin\alpha z_C + R\alpha\beta s\cos\alpha z_C, z_C + \beta s\Big) \,.$$

Quindi la velocità di $P(s)$ è

$$\boldsymbol{v}(s) = \Big(-R\alpha\dot z_C \sin\alpha z_C - R\alpha^2\beta s\dot z_C\cos\alpha z_C, R\alpha\dot z_C\cos\alpha z_C - R\alpha^2\beta s\dot z_C \sin\alpha z_C, \dot z_C\Big),$$

e

$$|\boldsymbol{v}(s)|^2 = (R\alpha\dot z_C)^2 + (R\alpha^2\beta s\dot z_C)^2 + \dot z_C^2 \,,$$

per cui l'energia cinetica dell'asta sarà

$$\begin{aligned} T &= \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}\frac{m}{2L}|\boldsymbol{v}(s)|^2 \,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}m(R^2\alpha^2+1)\dot z_C^2 + \frac{1}{2}(R\alpha^2\beta\dot z_C)^2 \int_{-L}^{L}\frac{m}{2L}s^2\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}m(R^2\alpha^2+1)\dot z_C^2 + \frac{1}{2}(R\alpha^2\beta\dot z_C)^2 I = \frac{1}{2}m\Big(R^2\alpha^2+1+\frac{1}{3}L^2R^2\alpha^4\beta^2\Big)\dot z_C^2 \,, \end{aligned}$$

ove I è il momento centrale d'inerzia dell'asta rispetto a un asse a essa ortogonale. Per la conservazione dell'energia si ottiene dunque a ogni istante

$$T - U = \frac{1}{2}m\Big(R^2\alpha^2+1+\frac{1}{3}L^2R^2\alpha^4\beta^2\Big)\dot z_C^2 + mgz_C = mgh \,,$$

e quindi nell'istante in cui $z_C = 0$,

$$\boldsymbol{v}_C = (0, \alpha R\dot z_C, \dot z_C) \,, \quad \dot z_C = -\sqrt{\frac{2gh}{R^2\alpha^2+1+\frac{1}{3}\alpha^4\beta^2R^2L^2}} \,.$$

2. [18/7/2005 (ex)II] Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza $2L$ e massa m è soggetta ai seguenti vincoli:

- il suo centro di massa appartiene all'elica cilindrica γ

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha\zeta\,, \\ y = R\sin\alpha\zeta\,, \qquad\qquad -\infty < \zeta < \infty\,; \\ z = \zeta\,, \end{cases}$$

  qui $\alpha > 0$ è costante;

- l'asta è parallela alla tangente a γ.

I vincoli sono lisci.
Sull'asta agisce la forza peso, diretta secondo il verso negativo dell'asse z.
Il centro di massa dell'asta all'istante iniziale è a quota $z = 0$, con velocità corrispondente a $\dot z(0) = v_0 > 0$.
Determinare la quota massima raggiunta dal centro di massa nel moto successivo.
R.

$$z_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}\{R^2\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^4\beta^2R^2L^2 + 1\}\,, \qquad \beta^2 = (1+\alpha^2R^2)^{-1}\,.$$

3. [19/7/2006 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza

$$\begin{cases} x_1 = R\cos\varphi\,, \\ x_2 = R\sin\varphi\,, \qquad -\pi \le \varphi \le \pi\,. \\ x_3 = 0\,, \end{cases}$$

Su di esso agiscono la forza peso, nella direzione negativa dell'asse x_2, e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$, la cui componente tangente si oppone al moto ed è tale che

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| = \mu\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right|\,.$$

Scrivere l'equazione del moto di P nella forma di un'equazione differenziale scalare per la coordinata lagrangiana.
Soluzione
Osserviamo anzitutto che un'ascissa curvilinea s è data da $s = R\varphi$, e che

$$\boldsymbol{T} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\,, \qquad \boldsymbol{N} = -(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,, \qquad \boldsymbol{B} = (0,0,1)\,.$$

Inoltre le equazioni di moto $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ danno, proiettate lungo la terna intrinseca

$$\begin{aligned} m\ddot s &= -mg\cos\varphi + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{T}\,, \\ m\dot s^2 k &= mg\sin\varphi + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{N}\,, \\ 0 &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Sostituendo la seconda e la terza di queste nella prima,

$$m\ddot s = -mg\cos\varphi - \operatorname{sign}(\dot s)\mu m\left|\frac{\dot s^2}{R} - g\sin\varphi\right|\,.$$

Usando la relazione $s = R\varphi$ si ha infine l'equazione cercata.
R.
$$R\ddot{\varphi} = -g\cos\varphi - \operatorname{sign}(\dot{\varphi})\mu\left|R\dot{\varphi}^2 - g\sin\varphi\right| .$$

4. [19/7/2006 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza

$$\begin{cases} x_1 = R\cos\varphi\,, \\ x_2 = 0\,, & \qquad -\pi \le \varphi \le \pi\,. \\ x_3 = R\sin\varphi\,, \end{cases}$$

Su di esso agiscono la forza peso, nella direzione negativa dell'asse x_1, e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$, la cui componente tangente si oppone al moto ed è tale che
$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| = \mu\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right| .$$
Scrivere l'equazione del moto di P nella forma di un'equazione differenziale scalare per la coordinata lagrangiana.
R.
$$R\ddot{\varphi} = g\sin\varphi - \operatorname{sign}(\dot{\varphi})\mu\left|R\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi\right| .$$

5. [17/9/2007 (ex)I] Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2L > 0\,, \qquad \left|\overrightarrow{AD}\right| = H > 0\,,$$

è vincolata a ruotare intorno al lato $\overrightarrow{AD}$ che giace sull'asse fisso x_3. I punti A e D sono fissi.
Sulla lamina agisce il campo di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha\Big(r - \frac{3}{2}L\cos\varphi\Big)\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}S\,,$$

ove P indica il generico punto sulla lamina, $\alpha > 0$ è costante, O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e $\mathrm{d}S$ è la misura di superficie sulla lamina. Inoltre r e φ sono le usuali coordinate cilindriche tali che

$$\overrightarrow{OP} = r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad r \ge 0\,, \varphi \in [-\pi, \pi)\,.$$

Determinare le posizioni di equilibrio della lamina.
Soluzione
Possiamo assumere che $A = O$.
Dobbiamo trovare le posizioni ove si annulla la componente lungo $\boldsymbol{e}_3$ del momento delle forze applicate.

Questo momento si calcola come

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}^{\text{ext}} &= \iint_{ABCD} \overrightarrow{OP} \times \mathrm{d}\boldsymbol{F} \\
&= \int_0^H \mathrm{d}x_3 \int_0^{2L} \overrightarrow{OP}(\varphi; r, x_3) \times \Big[\alpha\Big(r - \frac{3}{2}L\cos\varphi\Big)\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{OP}(\varphi; r, x_3)\Big]\,\mathrm{d}r\,,
\end{aligned}
$$

ove φ *è la coordinata lagrangiana, e* r, x_3 *i due parametri che descrivono la superficie.*
Con i calcoli si ottiene

$$
\boldsymbol{M}^{\text{ext}} = \alpha \int_0^H \mathrm{d}x_3 \int_0^{2L} \Big(r - \frac{3}{2}L\cos\varphi\Big)[-rx_3\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 - rx_3\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + r^2\boldsymbol{e}_3]\,\mathrm{d}r\,,
$$

cosicché l'equazione cercata è

$$
\boldsymbol{M}^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{e}_3 = \alpha \int_0^H \mathrm{d}x_3 \int_0^{2L} \Big(r - \frac{3}{2}L\cos\varphi\Big) r^2\,\mathrm{d}r = 4\alpha H L^4 (1 - \cos\varphi) = 0\,,
$$

che è verificata solo per $\varphi = 0$.
R.

$$
\varphi = 0\,.
$$

6. [17/9/2007 (ex)II] Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati

$$
\Big|\overrightarrow{AB}\Big| = 2L > 0\,, \qquad \Big|\overrightarrow{AD}\Big| = H > 0\,,
$$

è vincolata a ruotare intorno al lato $\overrightarrow{AD}$ che giace sull'asse fisso x_3. I punti A e D sono fissi.
Sulla lamina agisce il campo di forze

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -\beta\Big(2r - 3L\cos\varphi\Big)\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{AP}\,\mathrm{d}S\,,
$$

ove P indica il generico punto sulla lamina, $\beta > 0$ è costante, e $\mathrm{d}S$ è la misura di superficie sulla lamina. Inoltre r e φ sono le usuali coordinate cilindriche tali che

$$
\overrightarrow{OP} = r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad r \geq 0\,, \varphi \in [-\pi, \pi)\,,
$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso. Determinare le posizioni di equilibrio della lamina.
R.

$$
\varphi = 0\,.
$$

7. [13/12/2007 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato con attrito alla circonferenza

$$
\gamma = \{(R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0) \mid -\pi < \varphi < \pi\}\,.
$$

La reazione vincolare ha la forma

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\,, \quad \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}} := \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{T}\,, \quad |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con μ costante positiva.
Su P agiscono

- La forza elastica
$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{AP}\,,$$
con $k > 0$ costante e $A = (R,0,0)$.
- La forza peso
$$-mg\boldsymbol{e}_2\,.$$

Determinare l'equazione di moto.
Soluzione
Scomponiamo

$$m\boldsymbol{a} = -k\overrightarrow{AP} - mg\boldsymbol{e}_2 + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\,,$$

nella terna intrinseca, supponendo che $\dot{s} > 0$*:*

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= -k\overrightarrow{AP} \cdot \boldsymbol{T} - mg\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{T} - |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}|\,, \\ m\frac{\dot{s}^2}{R} &= -k\overrightarrow{AP} \cdot \boldsymbol{N} - mg\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{N} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}} \cdot \boldsymbol{N}\,, \\ 0 &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}} \cdot \boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Calcoliamo, per $s/R = \varphi$*,*

$$\overrightarrow{AP}(s) = \Big(R\cos\frac{s}{R} - R\Big)\boldsymbol{e}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2\,,$$
$$\boldsymbol{T}(s) = -\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + \cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{N}(s) = -\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 - \sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{e}_3\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \boldsymbol{T}(s) &= R\sin\frac{s}{R}\,, \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{T}(s) &= \cos\frac{s}{R}\,, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \boldsymbol{N}(s) &= -R + R\cos\frac{s}{R}\,, \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{N}(s) &= -\sin\frac{s}{R}\,. \end{aligned}$$

Dunque le equazioni sopra danno

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= -kR\sin\frac{s}{R} - mg\cos\frac{s}{R} - |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}|\,, \\ m\frac{\dot{s}^2}{R} &= k\Big(R - R\cos\frac{s}{R}\Big) + mg\sin\frac{s}{R} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}} \cdot \boldsymbol{N}\,, \\ 0 &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}} \cdot \boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Da queste, insieme con la legge di attrito, si ricava

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu \left| m\frac{\dot{s}^2}{R} - k\Big(R - R\cos\frac{s}{R}\Big) - mg\sin\frac{s}{R} \right| .$$

R.

$$m\ddot{s} = -kR\sin\frac{s}{R} - mg\cos\frac{s}{R} - \mu \left| m\frac{\dot{s}^2}{R} - k\Big(R - R\cos\frac{s}{R}\Big) - mg\sin\frac{s}{R} \right| .$$

8. [13/12/2007 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato con attrito alla circonferenza

$$\gamma = \{(R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0) \mid -\pi < \varphi < \pi\} .$$

La reazione vincolare ha la forma

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}} , \quad \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}} := \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{T} , \quad |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| ,$$

con μ costante positiva.
Su P agiscono

- La forza elastica
$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{AP} ,$$
con $k > 0$ costante e $A = (0, R, 0)$.
- La forza peso
$$-mg\boldsymbol{e}_1 .$$

Determinare l'equazione di moto.
R.

$$m\ddot{s} = kR\cos\frac{s}{R} + mg\sin\frac{s}{R} - \mu \left| m\frac{\dot{s}^2}{R} - k\Big(R - R\sin\frac{s}{R}\Big) - mg\cos\frac{s}{R} \right| .$$

9. [12/1/2009 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos\lambda s , \\ x_2 &= R\sin\lambda s , \qquad -\infty < s < \infty , \\ x_3 &= h\lambda s , \end{aligned}$$

ove R, $h > 0$ sono costanti, e $\lambda = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$. Si noti che s è la lunghezza d'arco.
Il punto è soggetto alla forza peso

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3 .$$

Il punto parte da fermo a quota $x_3 = 0$.
Trovare la reazione vincolare che agisce su P quando esso raggiunge quota $x_3 = -2\pi h$, in funzione di R, h, λ, m, g, e dei vettori $\boldsymbol{e}_i$.
SOLUZIONE
L'equazione di moto, scomposta nella terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$, *dà, visto che il vincolo è liscio,*

$$
\begin{aligned}
m\ddot{s} &= \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{F}\,, \\
mk\dot{s}^2 &= \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\,, \\
0 &= \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\,.
\end{aligned}
$$

Dalla parametrizzazione della curva si ha subito

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= \lambda(-R\sin\lambda s, R\cos\lambda s, h)\,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos\lambda s, \sin\lambda s, 0)\,, \\
\boldsymbol{B}(s) &= \boldsymbol{T}(s) \times \boldsymbol{N}(s) = \lambda(h\sin\lambda s, -h\cos\lambda s, R)\,, \qquad k(s) = \lambda^2 R\,.
\end{aligned}
$$

Dunque

$$
\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{F} = -mgh\lambda\,, \qquad \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{F} = 0\,, \qquad \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{F} = -mgR\lambda\,.
$$

Perciò il moto è determinato dal problema

$$
m\ddot{s} = -mgh\lambda\,, \qquad s(0) = 0\,, \quad \dot{s}(0) = 0\,,
$$

che ha per soluzione

$$
s(t) = -\frac{gh\lambda}{2}t^2\,, \quad t \in \boldsymbol{R}\,.
$$

Perciò nell'istante $\bar{t}$ *in cui*

$$
-2\pi h = x_3(\bar{t}) = h\lambda s(\bar{t}) = -\frac{gh^2\lambda^2}{2}t^2\,,
$$

deve essere

$$
\bar{t} = \frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{gh}}\,.
$$

Dunque

$$
\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(\bar{t}) = 4\pi mg\lambda^2 Rh\boldsymbol{N}(s(\bar{t})) + mgR\lambda\boldsymbol{B}(s(\bar{t}))\,.
$$

R.

$$
\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(\bar{t}) = mgR\lambda^2(-4\pi h, -h, R)\,.
$$

10. [12/1/2009 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$
\begin{aligned}
x_1 &= R\sin\lambda s\,, \\
x_2 &= R\cos\lambda s\,, \qquad -\infty < s < \infty\,, \\
x_3 &= h\lambda s\,,
\end{aligned}
$$

ove R, $h > 0$ sono costanti, e $\lambda = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$. Si noti che s è la lunghezza d'arco.

Il punto è soggetto alla forza peso

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Il punto parte da fermo a quota $x_3 = 2\pi h$.
Trovare la reazione vincolare che agisce su P quando esso raggiunge quota $x_3 = 0$, in funzione di R, h, λ, m, g, e dei vettori $\boldsymbol{e}_i$.
R.

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(\bar{t}) = mgR\lambda^2(h, -4\pi h, R) \,.$$

11. [11/9/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \,, \qquad x_2 = x_3 \,.$$

Il punto è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Il punto parte da fermo nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Determinare la reazione vincolare quando P raggiunge la posizione

$$\overrightarrow{OP} = -\frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \,.$$

Soluzione
Scomponendo l'equazione di moto sulla terna intrinseca si ha

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{T} \,, \\ m\frac{\dot{s}^2}{R} &= -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{N} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N} \,, \\ 0 &= -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{B} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} \,. \end{aligned}$$

Ci occorre dunque, oltre alla terna $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$, anche il valore di $\dot{s}^2$ nella posizione indicata.
Quest'ultimo si determina subito con argomenti energetici: per la conservazione dell'energia, vale

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 - U_{\mathrm{peso}} = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mgx_3(s) = \text{ costante } = 0 \,,$$

ove l'ultima uguaglianza segue dalle condizioni iniziali. Dunque nell'istante desiderato

$$\dot{s}^2 = 2g\frac{R}{\sqrt{2}} \,.$$

Nella posizione $(0, -R/\sqrt{2}, -R/\sqrt{2})$ *si ha per ovvie considerazioni geometriche*

$$\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} \,, \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} \,.$$

Dunque

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} = \frac{m}{R}\sqrt{2}gR + mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} \,,$$
$$\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} \,.$$

R.

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = \frac{3}{\sqrt{2}} mg\boldsymbol{N} - \frac{mg}{\sqrt{2}}\boldsymbol{B} = mg[\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3] \,.$$

12. [11/9/2009 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \,, \qquad x_2 = x_3 \,.$$

Il punto è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Il punto parte da fermo nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Determinare la reazione vincolare quando P raggiunge la posizione

$$\overrightarrow{OP} = -\frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \,.$$

R.

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = \frac{mg}{\sqrt{2}}(3\boldsymbol{N} + \boldsymbol{B}) = mg(2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \,.$$

13. [20/11/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato a muoversi sull'iperbole

$$x_2 = \frac{\alpha}{x_1} \,, \qquad \alpha > 0 \,,$$

sotto l'azione del peso

$$-mg\boldsymbol{e}_2 \,.$$

All'istante iniziale

$$x_1(0) = \beta \in (0, \sqrt{\alpha}) \,, \qquad \dot{x}_1(0) = 0 \,.$$

Calcolare la reazione vincolare all'istante in cui

$$x_1 = x_2 = \sqrt{\alpha} \,.$$

(Si dia come noto che in questo punto la curva ha curvatura $k = 1/\sqrt{2\alpha}$.)

Soluzione

Proiettiamo le equazioni di moto sulla terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$, *ottenendo*

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= -mg\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{T}\,, \\ mk\dot{s}^2 &= -mg\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{N} + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N}\,, \\ 0 &= -mg\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{B} + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Si è usato qui che $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_3$.
All'istante in cui $x_2 = \sqrt{\alpha}$, *per l'integrale dell'energia, si ha*

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mg\sqrt{\alpha} = mg\frac{\alpha}{\beta}\,,$$

ossia

$$m\dot{s}^2 = 2mg\Big(\frac{\alpha}{\beta} - \sqrt{\alpha}\Big)\,.$$

Inoltre

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{x_1^4}}}\Big(1, -\frac{\alpha}{x_1^2}\Big)\,, \qquad \boldsymbol{N} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{x_1^4}}}\Big(\frac{\alpha}{x_1^2}, 1\Big)\,.$$

Perciò

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = \Big[mk\dot{s}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}mg\Big]\boldsymbol{N}\,.$$

R.

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = mg\Big[\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} - \frac{1}{2}\Big](\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)\,.$$

14. [9/4/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra

$$x_3 = 0\,, \qquad x_1^2 + x_2^2 = R^2\,,$$

e su di esso agiscono il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_2, e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}$, che soddisfa (finché il punto ha velocità non nulla)

$$\left|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}\right| = \mu \left|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}\right|\,, \qquad \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{v} \le 0\,.$$

Scrivere l'equazione differenziale (scalare) di moto del punto, assumendo che la velocità non sia nulla.

Soluzione

Le equazioni di moto, proiettate lungo la terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$, *sono*

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} - mg\cos\frac{s}{R}\,, \\ m\frac{\dot{s}^2}{R} &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} + mg\sin\frac{s}{R}\,, \\ 0 &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Dunque, nell'ipotesi che $\dot{s} > 0$,

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = -\mu \left| \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} \right| = -\mu \left| m \frac{\dot{s}^2}{R} - mg \sin \frac{s}{R} \right| .$$

Dunque si ha

$$\ddot{s} = -\mu \left| \frac{\dot{s}^2}{R} - g \sin \frac{s}{R} \right| - g \cos \frac{s}{R} .$$

R.

$$\ddot{s} = -\mu \left| \frac{\dot{s}^2}{R} - g \sin \frac{s}{R} \right| - g \cos \frac{s}{R} .$$

15. [8/7/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra γ che nel sistema di riferimento fisso ha equazioni

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 , \qquad x_3 = 0 .$$

All'istante iniziale P occupa la posizione

$$P(0) = (-R, 0, 0) ,$$

con velocità

$$\boldsymbol{v}_0 = (0, v_0, 0) .$$

La reazione vincolare, che si oppone al moto, soddisfa (se P ha velocità non nulla)

$$\left| \mathbf{f}_{\text{vin}}^{\tan} \right| = \mu \left| \mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}} \right| .$$

Qui R, v_0, μ sono costanti positive.
Scrivere le equazioni di moto e dire se il punto si arresti o meno in un tempo finito.

Soluzione

Secondo la scomposizione della accelerazione nella terna intrinseca, si deve avere

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} , \\ m\frac{\dot{s}^2}{R} &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} , \\ 0 &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} . \end{aligned}$$

Si noti che, parametrizzando γ *come*

$$x_1 = -R \cos \frac{s}{R} , \quad x_2 = R \sin \frac{s}{R} , \quad x_3 = 0 ,$$

si ha

$$s(0) = 0 , \qquad \dot{s}(0) = v_0 .$$

Dunque l'equazione di moto è

$$m\ddot{s} = -\mu m \frac{\dot{s}^2}{R} ,$$

da cui
$$s(t) = \frac{R}{\mu} \ln \Big(1 + \frac{\mu}{R} v_0 t \Big) , \qquad t \geq 0 .$$
R.
$$\ddot{s} = -\mu \frac{\dot{s}^2}{R} ,$$
da cui
$$s(t) = \frac{R}{\mu} \ln \Big(1 + \frac{\mu}{R} v_0 t \Big) , \qquad t \geq 0 .$$
Quindi il moto non si arresta.

16. [7/9/2010 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato all'arco di parabola
$$x_2 = a x_1^2 , \qquad x_3 = 0 , \qquad x_1 > 0 .$$
Sul punto agiscono la forza peso
$$-mg\boldsymbol{e}_2$$
e la forza
$$\boldsymbol{F} = b\boldsymbol{T} ,$$
ove $\boldsymbol{T}$ è il versore tangente alla parabola (tale che $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_1 > 0$). Qui a, $b > 0$ sono costanti.
Trovare le eventuali posizioni di equilibrio.
Soluzione
Si ha
$$\boldsymbol{T} = \frac{(1, 2ax_1, 0)}{\sqrt{1 + 4a^2 x_1^2}} .$$
All'equilibrio deve essere
$$(-mg\boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{T} + b\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T} = 0 ,$$
ossia
$$b = mg \frac{2ax_1}{\sqrt{1 + 4a^2 x_1^2}} .$$
R. *Caso $b \geq mg$: nessuna soluzione.*
Caso $b < mg$: si ha la soluzione
$$x_1 = \frac{b}{2a} \frac{1}{\sqrt{m^2 g^2 - b^2}} .$$

17. [19/6/2014 (ex)I] Due aste AB e CD di uguale lunghezza $2L$ sono vincolate ad avere un estremo, rispettivamente A e C, sulla sfera
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 , \qquad R > 0 .$$

Qui $\mathcal{S} = (O, x_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Inoltre entrambe le aste si mantengono ortogonali alla sfera.
Sulle aste agiscono le distribuzioni di forze

$$\text{su } AB\text{:} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = \lambda \boldsymbol{e}_1 \,\mathrm{d}s\,; \qquad \text{su } CD\text{:} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{F}_2 = \mu \boldsymbol{e}_2 \,\mathrm{d}s\,.$$

Inoltre gli estremi B e D si attraggono con forza elastica

$$\boldsymbol{F}_B = -\boldsymbol{F}_D = -k\overrightarrow{DB}\,.$$

Qui λ, μ, k sono costanti positive.
Scrivere il potenziale del sistema di forze in coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE
Usiamo come coordinate lagrangiane i quattro angoli

$$\varphi_1\,, \varphi_2 \in (0{,}2\pi)\,, \qquad \theta_1\,, \theta_2 \in (0, \pi)$$

tali che

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} &= R(\cos\varphi_1 \sin\theta_1 \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi_1 \sin\theta_1 \boldsymbol{e}_2 + \cos\theta_1 \boldsymbol{e}_3)\,,\\
\overrightarrow{OC} &= R(\cos\varphi_2 \sin\theta_2 \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi_2 \sin\theta_2 \boldsymbol{e}_2 + \cos\theta_2 \boldsymbol{e}_3)\,.
\end{aligned}$$

La distribuzione di potenziale corrispondente a $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_i$ *sulla rispettiva asta è*

$$\mathrm{d}U_1 = \lambda x_1 \,\mathrm{d}s\,, \qquad \mathrm{d}U_2 = \mu x_2 \,\mathrm{d}s\,.$$

Pertanto

$$U_{AB} = \int_{AB} \mathrm{d}U_1 = 2L\lambda x_{1P_1}\,, \qquad U_{CD} = \int_{CD} \mathrm{d}U_2 = 2L\mu x_{2P_2}\,,$$

ove P_1 *[rispettivamente* P_2*] è il punto medio di* AB *[rispettivamente* CD*]. Il potenziale elastico sarà infine*

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}|\overrightarrow{BD}|^2\,.$$

R.

$$\begin{aligned}
U^{\mathrm{L}} = 2L(R+L)(\lambda\cos\varphi_1 \sin\theta_1 + \mu \sin\varphi_2 \sin\theta_2)&\\
- k(R+2L)^2(1 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos\theta_1 \cos\theta_2)\,.&
\end{aligned}$$

18. [4/6/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove con velocità non nulla sulla circonferenza orizzontale di raggio $R > 0$

$$(x_1, x_2, x_3) = R\Big(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}, 0\Big)\,,$$

ove $s \in (0{,}2\pi R)$ è l'ascissa curvilinea e si assume che $\dot{s} < 0$. Qui $(O, (x_i))$ è il sistema di riferimento fisso.
Sul punto agiscono:

- il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$;
- la forza $\boldsymbol{F}_{\text{el}} = k\overrightarrow{OP}$, $k \in (0, +\infty)$;
- la forza d'attrito, tale che per $\mu > 0$ costante

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,.$$

Scrivere l'equazione di moto del punto.
R.

$$m\ddot{s} = \mu \sqrt{\Big(m\frac{\dot{s}^2}{R} + kR\Big)^2 + (mg)^2} \,.$$

19. [4/6/2015 (ex)II] Un punto materiale P di massa m si muove con velocità non nulla sulla circonferenza orizzontale di raggio $R > 0$

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,; \qquad x_3 = 0 \,.$$

qui $(O, (x_i))$ è il sistema di riferimento fisso.
Su di esso agiscono:

- il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$;
- la forza elastica $\boldsymbol{F}_{\text{el}} = -k\overrightarrow{OP}$, $k \in (0, +\infty)$;
- la forza d'attrito, tale che per $\mu > 0$ costante

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,.$$

Scrivere l'equazione di moto del punto.
Soluzione
Occorre proiettare sulla terna intrinseca la

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{\text{el}} + \mathbf{f}_{\text{vin}} - mg\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Visto che $\boldsymbol{v} \neq 0$ possiamo supporre scegliendo opportunamente l'ascissa curvilinea s che $\dot{s} > 0$. Quindi si ha

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}} = -|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| \,, \\ m\frac{\dot{s}^2}{R} &= kR + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} \,, \\ 0 &= -mg + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} \,. \end{aligned}$$

Dunque l'equazione cercata è

$$m\ddot{s} = -\mu\sqrt{(\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N})^2 + (\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B})^2} = -\mu\sqrt{\Big(m\frac{\dot{s}^2}{R} - kR\Big)^2 + (mg)^2} \,.$$

R.

$$m\ddot{s} = -\mu\sqrt{\Big(m\frac{\dot{s}^2}{R} - kR\Big)^2 + (mg)^2}\,, \qquad \textit{se } \dot{s} > 0.$$

20. [9/2/2016 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Su P agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_2$ e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ tale che

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| = \mu\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right|\,.$$

All'istante iniziale il moto soddisfa

$$\boldsymbol{X}(0) = R\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = -v_0\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui v_0, $\mu > 0$ sono costanti assegnate.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Dare una condizione sui parametri che garantisca che il moto di P si arresti prima di raggiungere l'asse x_2.

Soluzione

A) Scegliamo come coordinata lagrangiana l'ascissa curvilinea $s \in (-\pi R, \pi R)$ tale che

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2\,.$$

Si ha

$$\boldsymbol{T} = -\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + \cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{N} = -\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 - \sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_3\,.$$

Le equazioni di moto sono

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= -mg\cos\frac{s}{R} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{T}\,,\\ m\frac{\dot{s}^2}{R} &= mg\sin\frac{s}{R} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{N}\,,\\ 0 &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Dunque

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{N} = m\frac{\dot{s}^2}{R} - mg\sin\frac{s}{R}\,,$$

e quindi

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{T}| = \mu|(\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{N})\boldsymbol{N} + (\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}| = \mu\left|m\frac{\dot{s}^2}{R} - mg\sin\frac{s}{R}\right|$$

Si noti che

$$s(0) = 0\,, \qquad \dot{s}(0) = -v_0 < 0\,.$$

Nell'intervallo massimale in cui $\dot{s} < 0$ (e quindi $s < 0$) pertanto si deve avere

$$m\ddot{s} = -mg\cos\frac{s}{R} + \mu m\frac{\dot{s}^2}{R} - \mu mg\sin\frac{s}{R}\,.$$

B) Moltiplicando l'equazione di moto per $\dot{s}$ e integrando si ottiene l'integrale primo

$$\frac{1}{2}\dot{s}(t)^2 = \frac{1}{2}v_0^2 - gR\sin\frac{s(t)}{R} + \int_0^t \mu\frac{\dot{s}(\tau)^3}{R}\,\mathrm{d}\tau + \mu gR\Big(\cos\frac{s(t)}{R} - 1\Big)\,.$$

Quindi

$$0 \le \dot{s}(t)^2 \le v_0^2 - 2gR\sin\frac{s(t)}{R} + 2\mu gR\Big(\cos\frac{s(t)}{R} - 1\Big)\,.$$

Basterà pertanto imporre che il membro di destra sia negativo per $s = -\pi R/2$.
R.

$$m\ddot{s} = -mg\cos\frac{s}{R} + \mu m\frac{\dot{s}^2}{R} - \mu mg\sin\frac{s}{R}\,, \qquad \dot{s} < 0\,.$$
$$\mu > 1 + \frac{v_0^2}{2gR}\,.$$

21. [9/2/2016 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Su P agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_2$ e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ tale che

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| = \mu\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right|\,.$$

All'istante iniziale il moto soddisfa

$$\boldsymbol{X}(0) = R\frac{\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2}{\sqrt{2}}\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = -v_0\frac{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2}{\sqrt{2}}\,.$$

Qui v_0, $\mu > 0$ sono costanti assegnate.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Dare una condizione sui parametri che garantisca che il moto di P si arresti prima di raggiungere l'asse x_2.

R.

$$m\ddot{s} = -mg\cos\frac{s}{R} + \mu m\frac{\dot{s}^2}{R} - \mu mg\sin\frac{s}{R}\,, \qquad \dot{s} < 0\,.$$
$$\mu > \sqrt{2} + \frac{v_0^2}{\sqrt{2}gR}\,.$$

22. [6/9/2016 (ex)I] Un punto materiale P di massa M si muove sulla circonferenza γ

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Qui $(O, (x_h))$ è il sistema di riferimento fisso.
Il punto è soggetto alla forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_2$ e alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{v} \,,$$

ove $\boldsymbol{v}$ è la velocità del punto e $k > 0$ è costante.
Il punto parte da fermo nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Scrivere le equazioni di moto e dedurne che il punto resta sempre nel semipiano $x_2 < 0$ per $t > 0$.
Soluzione
Scriviamo le equazioni di moto tenendo presente che

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad s \in (-\pi R, \pi R) \,.$$

Proiettando sulla direzione tangente si ottiene

$$M\ddot{s} = -Mg\cos\frac{s}{R} - k\dot{s} \,,$$

che da sola basta a determinare il moto.
B) Moltiplicando l'equazione di moto per $\dot{s}$ si ha

$$M\dot{s}\ddot{s} + Mg\dot{s}\cos\frac{s}{R} + k\dot{s}^2 = 0 \,.$$

Visto dunque che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$, integrando si ha

$$\frac{M}{2}\dot{s}(t)^2 + MgR\sin\frac{s(t)}{R} + \int_0^t k\dot{s}(\tau)^2 \,\mathrm{d}\tau = 0 \,.$$

Da qui segue che $\sin(s/R) < 0$ e perciò $s \in (-\pi R, 0)$.
R.

$$M\ddot{s} = -Mg\cos\frac{s}{R} - k\dot{s} \,.$$

23. [06/06/2017 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza verticale

$$x_2^2 + x_3^2 = R^2 \,, \qquad x_1 = 0 \,,$$

Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_3$. Sul punto agisce anche la forza

$$\boldsymbol{F} = -kx_3^2\boldsymbol{T} \,,$$

ove $\boldsymbol{T}$ è il campo vettoriale tangente che in $(0,R,0)$ vale $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}_3$.
Il punto P parte da fermo nella posizione

$$\boldsymbol{X}(0)=R\boldsymbol{e}_2\,.$$

Trovare la reazione vincolare nel primo istante in cui P occupa la posizione $-R\boldsymbol{e}_3$.
Soluzione
Parametrizziamo il moto mediante l'ascissa curvilinea s sulla circonferenza, come

$$\overrightarrow{OP}=R\Big(\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2+\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_3\Big)\,.$$

Scomponendo le equazioni di moto nella terna intrinseca si ottiene

$$\begin{aligned}
m\ddot{s}&=-kR^2\sin^2\frac{s}{R}-mg\cos\frac{s}{R}\,,\\
m\frac{\dot{s}^2}{R}&=mg\sin\frac{s}{R}+\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{N}\,,\\
0&=\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{B}\,.
\end{aligned}$$

La prima equazione è sufficiente a determinare il moto. Moltiplichiamola per $\dot{s}$ e otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(m\frac{\dot{s}^2}{2}\Big)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(-kR^2\int_0^{s(t)}\sin^2\frac{\sigma}{R}\,\mathrm{d}\sigma-mgR\sin\frac{s}{R}\Big)\,.$$

Quindi usando anche le condizioni iniziali e svolgendo l'integrale

$$m\frac{\dot{s}(t)^2}{2}=-\frac{kR^2}{2}s(t)+\frac{kR^3}{4}\sin\Big(2\frac{s(t)}{R}\Big)-mgR\sin\frac{s(t)}{R}\,.$$

Dunque quando P è in $(0,0,-R)$ ossia $s(t)=-\pi R/2$, si ha

$$m\frac{\dot{s}(t)^2}{2}=\frac{k\pi R^3}{4}+mgR\,.$$

Pertanto la reazione vincolare in quell'istante è

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}=\Big(-mg\sin\frac{s(t)}{R}+m\frac{\dot{s}(t)^2}{R}\Big)\boldsymbol{N}=\Big(mg+\frac{k\pi R^2}{2}+2mg\Big)\boldsymbol{e}_3\,.$$

R.

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}=\Big(3mg+\frac{k\pi R^2}{2}\Big)\boldsymbol{e}_3\,.$$

24. [13/02/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\begin{aligned}
x_1&=R\cos(\lambda s)\,,\\
x_2&=R\sin(\lambda s)\,,\\
x_3&=hs\,,
\end{aligned}$$

con R, h, $\lambda > 0$ e $R^2\lambda^2 + h^2 = 1$ in modo che $s \in \boldsymbol{R}$ sia l'ascissa curvilinea. Sul punto agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -\alpha \overrightarrow{P'P} ,$$

ove $\alpha > 0$ è costante e P' è la proiezione ortogonale di P sull'asse x_3.
Scrivere l'equazione di moto scomposta nella terna intrinseca della curva.
SOLUZIONE
Sia O l'origine del sistema di riferimento. Scegliamo come coordinata lagrangiana $\sigma \in \boldsymbol{R}$ tale che

$$\overrightarrow{OP} = R\cos(\lambda\sigma)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\lambda\sigma)\boldsymbol{e}_2 + h\sigma\boldsymbol{e}_3 .$$

La terna intrinseca è, secondo le definizioni,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= -\lambda R\sin(\lambda\sigma)\boldsymbol{e}_1 + \lambda R\cos(\lambda\sigma)\boldsymbol{e}_2 + h\boldsymbol{e}_3 ,\\
\boldsymbol{N} &= -\cos(\lambda\sigma)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\lambda\sigma)\boldsymbol{e}_2 ,\\
\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N} = h\sin(\lambda\sigma)\boldsymbol{e}_1 - h\cos(\lambda\sigma)\boldsymbol{e}_2 + \lambda R\boldsymbol{e}_3 ,
\end{aligned}$$

con $k(\sigma) = \lambda^2 R$. Quindi essendo

$$\overrightarrow{OP'} = h\sigma\boldsymbol{e}_3 ,$$

si ha

$$\overrightarrow{P'P} = R\cos(\lambda\sigma)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\lambda\sigma)\boldsymbol{e}_2 = -R\boldsymbol{N}(\sigma) ,$$

per cui

$$\boldsymbol{F} = \alpha R\boldsymbol{N}(\sigma) .$$

Dunque poiché il vincolo è liscio e perciò $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
m\ddot{\sigma} &= 0 ,\\
m\dot{\sigma}^2\lambda^2 R &= \alpha R + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} ,\\
0 &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} .
\end{aligned}$$

R.

$$\begin{aligned}
m\ddot{\sigma} &= 0 ,\\
m\dot{\sigma}^2\lambda^2 R &= \alpha R + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} ,\\
0 &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} .
\end{aligned}$$

25. [13/02/2018 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\begin{aligned}
x_1 &= R\cos(\lambda s) ,\\
x_2 &= R\sin(\lambda s) ,\\
x_3 &= hs ,
\end{aligned}$$

con R, h, $\lambda > 0$ e $R^2\lambda^2 + h^2 = 1$ in modo che $s \in \boldsymbol{R}$ sia l'ascissa curvilinea.
Sul punto agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = \beta \overrightarrow{P'P} \,,$$

ove $\beta > 0$ è costante e P' è la proiezione ortogonale di P sull'asse x_3.
Scrivere l'equazione di moto scomposta nella terna intrinseca della curva.
R.

$$\begin{aligned} m\ddot{\sigma} &= 0 \,, \\ m\dot{\sigma}^2\lambda^2 R &= -\beta R + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} \,, \\ 0 &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} \,. \end{aligned}$$

26. [09/01/2020 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove sulla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 x_2 \,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,.$$

Il vincolo è scabro, e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

almeno se la velocità non si annulla, il che si deve assumere.
Qui α, $\mu > 0$ sono costanti.
Sul punto agisce la forza costante $k\boldsymbol{e}_3$, $k \neq 0$.

- Scrivere le equazioni di moto.

R.

$$\begin{aligned} m[\ddot{x} + \alpha^2 y(\ddot{x}y + 2\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y})] &= k\alpha y - \frac{\mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \alpha^2(\dot{x}y + x\dot{y})^2}} [\dot{x} + \alpha^2 y(\dot{x}y + x\dot{y})] \,, \\ m[\ddot{y} + \alpha^2 x(\ddot{x}y + 2\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y})] &= k\alpha x - \frac{\mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \alpha^2(\dot{x}y + x\dot{y})^2}} [\dot{y} + \alpha^2 x(\dot{x}y + x\dot{y})] \,, \end{aligned}$$

ove

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| = \frac{|2m\alpha\dot{x}\dot{y} - k|}{\sqrt{1 + \alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}} \,.$$

27. [09/01/2020 (ex)II] Un punto materiale P di massa m si muove sulla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 x_2 \,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,.$$

Il vincolo è scabro, e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

almeno se la velocità non si annulla, il che si deve assumere.
Qui α, $\mu > 0$ sono costanti.
Sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di moto.

SOLUZIONE
Scegliamo come coordinate lagrangiane le prime due coordinate cartesiane $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ di P. Allora

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(x, y) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + \alpha xy\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = \dot{x}\boldsymbol{e}_1 + \dot{y}\boldsymbol{e}_2 + \alpha(\dot{x}y + x\dot{y})\boldsymbol{e}_3 \,,$$
$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{L}} = \ddot{x}\boldsymbol{e}_1 + \ddot{y}\boldsymbol{e}_2 + \alpha(\ddot{x}y + 2\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y})\boldsymbol{e}_3 \,.$$

L'equazione della dinamica è

$$m\boldsymbol{a}^{\mathrm{L}} = -mg\boldsymbol{e}_3 + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = -mg\boldsymbol{e}_3 + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}} - \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \frac{\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}}{|\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}|} \,.$$

Scomponiamola nella terna formata da vettori coordinati tangenti e vettore normale alla superficie

$$\boldsymbol{r}(x_1, x_2) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha x_1 x_2 \boldsymbol{e}_3 \,,$$

ossia

$$\boldsymbol{r}_{x_1} = \boldsymbol{e}_1 + \alpha x_2 \boldsymbol{e}_3 \,, \quad \boldsymbol{r}_{x_2} = \boldsymbol{e}_2 + \alpha x_1 \boldsymbol{e}_3 \,, \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{-\alpha x_2 \boldsymbol{e}_1 - \alpha x_1 \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{1 + \alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}} \,.$$

Iniziamo con la componente normale:

$$\frac{2m\alpha\dot{x}\dot{y}}{\sqrt{1 + \alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}} = -\frac{mg}{\sqrt{1 + \alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}} \cdot \boldsymbol{\nu} \,.$$

Se ne deduce che

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| = \frac{|2m\alpha\dot{x}\dot{y} + mg|}{\sqrt{1 + \alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}} \,.$$

Infine per moltiplicazione scalare per $\boldsymbol{r}_{x_1}$, $\boldsymbol{r}_{x_2}$, si ottengono le due componenti tangenti che costituiscono il sistema delle equazioni di moto.
R.

$$m[\ddot{x} + \alpha^2 y(\ddot{x}y + 2\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y})] = -mg\alpha y - \frac{\mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \alpha^2(\dot{x}y + x\dot{y})^2}}[\dot{x} + \alpha^2 y(\dot{x}y + x\dot{y})] \,,$$
$$m[\ddot{y} + \alpha^2 x(\ddot{x}y + 2\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y})] = -mg\alpha x - \frac{\mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \alpha^2(\dot{x}y + x\dot{y})^2}}[\dot{y} + \alpha^2 x(\dot{x}y + x\dot{y})] \,,$$

ove

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| = \frac{|2m\alpha\dot{x}\dot{y} + mg|}{\sqrt{1 + \alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}} \,.$$

28. [13/01/2020 (ex)I] Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato al cilindro K di equazione

$$x_2^2 + x_3^2 = L^2 \,.$$

Il vincolo è scabro e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$, almeno se la velocità non si annulla, il che supponiamo.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -kx_1\boldsymbol{e}_1 \,,$$

con $k > 0$.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Dare un esempio di condizioni iniziali $\boldsymbol{X}(0) \in K$, $\boldsymbol{v}(0) \neq 0$ in modo che lungo il moto corrispondente si abbia conservazione dell'energia

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 + \frac{k}{2}x_1(t)^2 \,.$$

R.

$$m\ddot{x} = -kx - \mu m R\dot{\varphi}^2 \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + R^2\dot{\varphi}^2}} \,,$$
$$mR^2\ddot{\varphi} = -\mu m R\dot{\varphi}^2 \frac{R^2\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{x}^2 + R^2\dot{\varphi}^2}} \,.$$

Condizioni iniziali: $\boldsymbol{X}(0) \in K$ *arbitrario e* $\boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_1$, *con* $v_0 \neq 0$.

29. [13/01/2020 (ex)II] Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato al cilindro K di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,.$$

Il vincolo è scabro e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$, almeno se la velocità non si annulla, il che supponiamo.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = kx_3\boldsymbol{e}_3 \,,$$

con $k > 0$.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Dare un esempio di condizioni iniziali $\boldsymbol{X}(0) \in K$, $\boldsymbol{v}(0) \neq 0$ in modo che lungo il moto corrispondente si abbia conservazione dell'energia

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 - \frac{k}{2}x_3(t)^2 \,.$$

Soluzione

A) Dobbiamo proiettare sul piano tangente l'equazione di moto

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \,.$$

Usiamo la parametrizzazione del cilindro

$$\boldsymbol{r}(z,\varphi) = R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\,,$$

con $z \in \boldsymbol{R}$, $\varphi \in (-\pi,\pi)$.
Quindi

$$\boldsymbol{r}_\varphi(z,\varphi) = -R\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\cos\varphi \boldsymbol{e}_2\,,$$
$$\boldsymbol{r}_z(z,\varphi) = \boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{\nu}(z,\varphi) = -\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,.$$

Allora $\boldsymbol{F}$ *è tangente al cilindro e*

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| = |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{\nu}| = m|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}|\,.$$

Calcoliamo espicitamente:

$$\boldsymbol{v} = \dot z\boldsymbol{r}_z + \dot\varphi\boldsymbol{r}_\varphi\,, \qquad \boldsymbol{a} = \ddot z\boldsymbol{r}_z + \ddot\varphi\boldsymbol{r}_\varphi + R\dot\varphi^2\boldsymbol{\nu}\,.$$

Perciò

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu} = R\dot\varphi^2\,,$$

e l'equazione di moto diviene

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} - \mu mR\dot\varphi^2\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\,.$$

Moltiplicandola scalarmente per i vettori $\boldsymbol{r}_z$, $\boldsymbol{r}_\varphi$ *della base dello spazio tangente si ottengono*

$$m\ddot z = kz - \mu mR\dot\varphi^2\frac{\dot z}{\sqrt{\dot z^2 + R^2\dot\varphi^2}}\,,$$
$$mR^2\ddot\varphi = -\mu mR\dot\varphi^2\frac{R^2\dot\varphi}{\sqrt{\dot z^2 + R^2\dot\varphi^2}}\,.$$

B) Se $\boldsymbol{X}(0) \in K$ *è arbitrario, e* $\boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_3$, *con* $v_0 \neq 0$, *allora* $\dot\varphi(0) = 0$, *e dalla seconda equazione di moto si vede che* $\varphi(t) = 0$ *per ogni* t, *purché si scelga* z *come soluzione di*

$$m\ddot z = kz\,, \qquad z(0) = X_3(0)\,, \quad \dot z(0) = v_0\,.$$

Dunque

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = m\dot z\ddot z - k\dot z z = 0\,.$$

R.

$$m\ddot z = kz - \mu mR\dot\varphi^2\frac{\dot z}{\sqrt{\dot z^2 + R^2\dot\varphi^2}}\,,$$
$$mR^2\ddot\varphi = -\mu mR\dot\varphi^2\frac{R^2\dot\varphi}{\sqrt{\dot z^2 + R^2\dot\varphi^2}}\,.$$

Condizioni iniziali: $\boldsymbol{X}(0) \in K$ *arbitrario e* $\boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_3$, *con* $v_0 \neq 0$.

580. Dinamica per sistemi vincolati: vincoli mobili

1. [7/7/2006 (ex)I] Un'ellisse scabra E di semiassi $a > b > 0$ può esercitare una reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ con

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| \leq \mu \left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right| ,$$

ove μ è una costante positiva, e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca di E. L'ellisse giace su un piano ortogonale all'asse fisso x_3, e ruota con velocità angolare costante

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_3 , \qquad \omega > 0 ,$$

mantenendo il suo centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Trovare tutte le possibili posizioni di equilibrio relative all'ellisse di un punto materiale P di massa $m > 0$ vincolato ad essa.

Soluzione

In un sistema di riferimento mobile solidale con l'ellisse, di origine O, su P agisce la forza di trascinamento

$$\boldsymbol{F}_T = m\omega^2 \overrightarrow{OP} .$$

La proiezione di $\boldsymbol{F}_T$ lungo la tangente è

$$\boldsymbol{F}_T \cdot \boldsymbol{T} = m\omega^2 \overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{T} .$$

Per avere l'equilibrio occorre e basta

$$\boldsymbol{F}_T + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = 0 ,$$

cioè

$$|\boldsymbol{F}_T \cdot \boldsymbol{T}| \leq \mu |\boldsymbol{F}_T \cdot \boldsymbol{N}| .$$

Parametrizziamo E come

$$\xi_1 = a\cos\theta , \quad \xi_2 = b\sin\theta , \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi .$$

Un semplice calcolo dà allora:

$$\boldsymbol{T} = \frac{(-a\sin\theta, b\cos\theta, 0)}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}} ,$$
$$\boldsymbol{N} = \frac{(-b\cos\theta, -a\sin\theta, 0)}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}} .$$

Perciò la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio si scrive come

$$m\omega^2 \left|(a\cos\theta, b\sin\theta) \cdot (-a\sin\theta, b\cos\theta)\right| \leq \mu m\omega^2 \left|(a\cos\theta, b\sin\theta) \cdot (-b\cos\theta, -a\sin\theta)\right| .$$

R. *Se E è parametrizzata da*

$$\xi_1 = a\cos\theta , \quad \xi_2 = b\sin\theta , \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi ,$$

i punti di equilibrio corrispondono ai valori di θ per i quali

$$\mu ab \geq |a^2 - b^2| \, |\sin\theta \, \cos\theta| .$$

2. [7/7/2006 (ex)II] Un'ellisse scabra E di semiassi $0 < a < b$ può esercitare una reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ con

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| \leq \lambda \left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right| ,$$

ove λ è una costante positiva, e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca di E. L'ellisse giace su un piano ortogonale all'asse fisso x_1, e ruota con velocità angolare costante

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_1 , \qquad \omega > 0 ,$$

mantenendo il suo centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Trovare tutte le possibili posizioni di equilibrio relative all'ellisse di un punto materiale P di massa $m > 0$ vincolato ad essa.
R. *Se E è parametrizzata da*

$$\xi_2 = a \cos\theta , \quad \xi_3 = b \sin\theta , \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi ,$$

i punti di equilibrio corrispondono ai valori di θ per i quali

$$\lambda ab \geq |a^2 - b^2| \, |\sin\theta \, \cos\theta| .$$

3. [19/6/2014 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato all'asse x_1 del sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (A, (\boldsymbol{e}_i))$, ove

$$\overrightarrow{OA} = ct\boldsymbol{e}_1 ,$$

ove $c > 0$ costante, e $\mathcal{S}_0 = (O, (\boldsymbol{e}_i))$ è il sistema di riferimento fisso. Qui le x_i indicano le coordinate in $\mathcal{S}$.
Su P agiscono il peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 ,$$

e la forza di reazione vincolare, con attrito, data da

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| = \mu \left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right| ,$$

$\mu > 0$. Le condizioni iniziali sono

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0 ,$$
$$\dot{x}_1(0) = v_0 > 0 , \qquad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0 .$$

Determinare la posizione, sia rispetto a $\mathcal{S}$ che a $\mathcal{S}_0$, assunta da P nell'istante $\bar{t}$ in cui la sua velocità $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ rispetto a $\mathcal{S}$ si annulla.
SOLUZIONE

Scriviamo le equazioni di moto in $\mathcal{S}$. Indichiamo con $x = x_1$ l'ascissa di P. Si ha, osservando che le forze fittizie sono nulle,

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| , \\
0 &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_2 , \\
0 &= -mg + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_3 ,
\end{aligned}
$$

da cui

$$
m\ddot{x} = -\mu m g .
$$

Insieme con le condizioni iniziali prescritte questo implica subito

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= v_0 - \mu g t , \\
x(t) &= v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2 .
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\bar{t} = \frac{v_0}{\mu g} , \quad x(\bar{t}) = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu g} .
$$

Infine in $\mathcal{S}_0$

$$
\overrightarrow{OP}(\bar{t}) = \overrightarrow{OA}(\bar{t}) + \overrightarrow{AP}(\bar{t}) = \Big(\frac{c v_0}{\mu g} + \frac{v_0^2}{2\mu g}\Big)\boldsymbol{e}_1 .
$$

R.

$$
\overrightarrow{OP}(\bar{t}) = \Big(\frac{c v_0}{\mu g} + \frac{v_0^2}{2\mu g}\Big)\boldsymbol{e}_1 , \qquad \overrightarrow{AP}(\bar{t}) = \frac{v_0^2}{2\mu g}\boldsymbol{e}_1 .
$$

4. [17/7/2014 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una curva γ di parametrizzazione

$$
\boldsymbol{\psi}(s,t) = \psi_1(s)\boldsymbol{u}_1(t) + \psi_2(s)\boldsymbol{u}_2(t) , \qquad s \in I ,
$$

ove $I \subset \boldsymbol{R}$ è un intervallo aperto, s è l'ascissa curvilinea, e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 .
\end{aligned}
$$

Il punto è soggetto alla forza

$$
\boldsymbol{F} = \lambda \boldsymbol{u}_1 ,
$$

con $\lambda > 0$ costante.
Si scriva l'equazione di moto e si trovi un integrale primo del moto.
SOLUZIONE
È noto che ci si può mettere nel contesto delle forze conservative. Prendiamo però la via del calcolo diretto.

Scegliamo come coordinata lagrangiana $\sigma \in I$ in modo che, denominando con O l'origine del sistema fisso,

$$\overrightarrow{OP}(t) = \boldsymbol{\psi}(\sigma, t)\,.$$

Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ il punto è soggetto alla forza $\boldsymbol{F}$ e a quelle fittizie. Tuttavia è noto che la forza di Coriolis in questo caso ha componente lagrangiana nulla. Consideriamo perciò nel seguito solo la forza di trascinamento

$$\boldsymbol{F}_T = m\omega^2 \boldsymbol{\psi}(\sigma, t)\,.$$

L'equazione di Lagrange è pertanto

$$(\boldsymbol{F}_T + \boldsymbol{F}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \sigma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{\sigma}) = m\ddot{\sigma}\,,$$

da cui si ottiene subito

$$m\omega^2 \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}' + \lambda \psi_1' = m\ddot{\sigma}\,.$$

Per trovare l'integrale primo, moltiplichiamo l'equazione di moto per $\dot{\sigma}$ e integriamo nel tempo, ottenendo

$$\frac{1}{2} m\omega^2 |\boldsymbol{\psi}|^2 + \lambda \psi_1 = \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 + \mathit{costante}.$$

R.

$$m\omega^2 \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}' + \lambda \psi_1' = m\ddot{\sigma}\,,$$
$$\frac{1}{2} m\omega^2 |\boldsymbol{\psi}|^2 + \lambda \psi_1 = \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 + \mathit{costante}.$$

5. [13/1/2015 (ex)I] Un punto materiale P è vincolato a una retta scabra r che si muove mantenendosi sovrapposta all'asse x_1, con velocità

$$\boldsymbol{v}_r(t) = \lambda \operatorname{arctg}(\beta t)\boldsymbol{e}_1\,.$$

Sul punto agiscono la forza

$$\boldsymbol{F} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2\,,$$

e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ soggetta alla restrizione

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_1| = \mu \left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_2\, \boldsymbol{e}_2 + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_3\, \boldsymbol{e}_3\right|\,.$$

Qui a, b, β, λ e μ sono costanti positive.
Il punto parte con velocità relativa a r data da

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_1\,, \qquad v_0 \in \boldsymbol{R}, v_0 \neq 0\,.$$

Determinare se, assegnato $v_0 \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, sia possibile scegliere gli altri parametri in modo che la velocità di P relativa a r non si annulli mai per $t > 0$.

Soluzione

Introduciamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{e}_h))$, ove O è un punto solidale con r coincidente con la posizione iniziale di P, cosicché

$$\boldsymbol{v}_O(t) = \lambda \operatorname{arctg}(\beta t) \boldsymbol{e}_1 .$$

Scriviamo le equazioni di moto di P denotando con $x \in \boldsymbol{R}$ l'ascissa di P in $\mathcal{S}$; sia

$$\bar{t} := \sup\{t > 0 \mid \dot{x}(\tau) \neq 0 \,, 0 < \tau < t\} .$$

Per tutti i $t < \bar{t}$ vale

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= a - \operatorname{sign}(v_0) \left|\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_1\right| - \frac{m\lambda\beta}{1 + \beta^2 t^2} \,, \\ 0 &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_2 + b \,, \\ 0 &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Dunque si ha

$$m\ddot{x} = a - \operatorname{sign}(v_0)\mu b - \frac{m\lambda\beta}{1 + \beta^2 t^2} \,, \qquad 0 < t < \bar{t} .$$

A) Se $v_0 > 0$ per avere $\dot{x}(t) > 0$ per ogni $t > 0$ basterà garantire $\ddot{x} \geq 0$, il che per esempio segue da

$$a \geq \mu b + m\lambda\beta .$$

B) Se $v_0 < 0$ viceversa si ha integrando l'equazione di moto

$$m\dot{x}(t) = mv_0 + (a + \mu b)t - m\lambda \operatorname{arctg}(\beta t) \,, \qquad 0 < t < \bar{t} .$$

Poiché se si potesse scegliere $\bar{t} = +\infty$ si avrebbe da questa relazione

$$\dot{x}(t) \to +\infty \,, \qquad t \to +\infty \,,$$

assurdo, si deve avere $\bar{t} < +\infty$ in ogni caso.

R.

$$\begin{aligned} v_0 > 0 : &\qquad \text{vero se } a \geq \mu b + m\lambda\beta; \\ v_0 < 0 : &\qquad \text{impossibile.} \end{aligned}$$

6. [13/1/2015 (ex)II] Un punto materiale P è vincolato a una retta scabra r che si muove mantenendosi sovrapposta all'asse x_1, con velocità

$$\boldsymbol{v}_r(t) = \lambda(1 + e^{-\beta t})\boldsymbol{e}_1 .$$

Sul punto agiscono la forza

$$\boldsymbol{F} = -b\boldsymbol{e}_1 + a\boldsymbol{e}_3 \,,$$

e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ soggetta alla restrizione

$$\left|\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_1\right| = \mu \left|\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_2 \, \boldsymbol{e}_2 + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_3 \, \boldsymbol{e}_3\right| .$$

Qui a, b, β, λ e μ sono costanti positive.
Il punto parte con velocità relativa a r data da

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_1 \,, \qquad v_0 \in \boldsymbol{R} \,, v_0 \neq 0 \,.$$

Determinare se, assegnato $v_0 \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, sia possibile scegliere gli altri parametri in modo che la velocità di P relativa a r non si annulli mai per $t > 0$.
R.

$$\begin{aligned} v_0 < 0 : &\qquad \textit{vero se } b \geq \mu a + m\lambda\beta; \\ v_0 > 0 : &\qquad \textit{impossibile.} \end{aligned}$$

7. [3/9/2015 (ex)I] Si consideri l'asse mobile r di equazioni

$$x_1 \cos(\lambda t) + x_2 \sin(\lambda t) = R \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

ossia la retta tangente alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

nel punto A dato da

$$\overrightarrow{OA} = R \cos(\lambda t) \boldsymbol{e}_1 + R \sin(\lambda t) \boldsymbol{e}_2 \,,$$

ove λ, $R > 0$.
Il punto materiale P di massa m è vincolato con vincolo scabro a muoversi su r.
P è soggetto a una reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ tale che

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| = \mu \, |\mathbf{f}_{\text{vin}} - (\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T})\boldsymbol{T}| \,,$$

ove $\boldsymbol{T}$ denota il versore tangente a r.
Si scrivano le equazioni di moto del punto in un sistema di riferimento solidale con l'asse r.
SOLUZIONE
Consideriamo il sistema mobile $\mathcal{S} = (A, \mathcal{M})$ solidale con r, ove $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ è data da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\lambda t) \, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\lambda t) \, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\lambda t) \, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\lambda t) \, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Risulta essere $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{T}$ e scriveremo

$$\overrightarrow{AP} = s \boldsymbol{u}_2 \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,.$$

La velocità angolare di $\mathcal{M}$ come è noto è data da

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{u}_3 \,.$$

In $\mathcal{S}$ agiscono su P oltre alla reazione vincolare le forze apparenti

$$\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = -m\big(\boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AP})\big) \,, \qquad \boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C} = -m(2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}) \,.$$

Si ha con calcoli immediati

$$\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = -m(-R\lambda^2 \boldsymbol{u}_1 - s\lambda^2 \boldsymbol{u}_2) \,.$$

Poi, la velocità e l'accelerazione relative di P in $\mathcal{S}$ sono date da

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{AP}\right]_{\mathcal{M}} = \dot{s}\boldsymbol{u}_2 \,, \qquad \boldsymbol{a}_{\mathcal{S}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \ddot{s}\boldsymbol{u}_2 \,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C} = -2m\dot{s}\lambda \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_2 = 2m\lambda\dot{s}\boldsymbol{u}_1 \,.$$

Scomponendo pertanto l'equazione di moto nella terna $\mathcal{M}$, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{u}_1 + mR\lambda^2 + 2m\lambda\dot{s} \,, \\ m\ddot{s} &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{u}_2 + m\lambda^2 s \,, \\ 0 &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{u}_3 \,. \end{aligned}$$

Dunque, ricordando che la reazione vincolare si oppone al moto in un vincolo scabro, l'equazione scalare di moto è data da

$$m\ddot{s} = -\mu \,\mathrm{sign}(\dot{s}) \left| mR\lambda^2 + 2m\lambda\dot{s} \right| + m\lambda^2 s \,.$$

R.

$$m\ddot{s} = -\mu \,\mathrm{sign}(\dot{s}) \left| mR\lambda^2 + 2m\lambda\dot{s} \right| + m\lambda^2 s \,.$$

8. [15/01/2018 (ex)I] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Qui $\omega > 0$ è una costante.
Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza γ solidale con $\mathcal{S}$ data da

$$\gamma = \Big\{ R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1 + R\sin\frac{s}{R}\Big(\frac{\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3}{\sqrt{2}}\Big) \mid 0 \le s < 2\pi R \Big\} \,.$$

Il vincolo è scabro e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\tan}| \le \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$. Sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di moto del punto all'equilibrio relativo a $\mathcal{S}$.
- Mostrare che se $\mu = 1$ e $\omega > 0$ è abbastanza grande, tutte le posizioni su γ sono di equilibrio relativo.

SOLUZIONE
Scriviamo l'equazione di moto di P in $\mathcal{S}$:

$$m\boldsymbol{a}_{\mathcal{S}} = -mg\boldsymbol{u}_3 + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} + \boldsymbol{F}_{T} + \boldsymbol{F}_{C}\,.$$

All'equilibrio relativo $\boldsymbol{a}_{\mathcal{S}} = 0$ e $\boldsymbol{F}_{C} = 0$. Dunque occorre calcolare $\boldsymbol{F}_{T}$. Come è noto in questo caso

$$\boldsymbol{F}_{T} = m\omega^2\overrightarrow{OP}_{\perp} = m\omega^2 R\Big(\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_2\Big)\,.$$

D'altra parte la terna intrinseca di γ è data da:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= -\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1 + \cos\frac{s}{R}\Big(\frac{\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3}{\sqrt{2}}\Big)\,,\\
\boldsymbol{N} &= -\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1 - \sin\frac{s}{R}\Big(\frac{\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3}{\sqrt{2}}\Big)\,,\\
\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

Dunque scomponendo l'equazione di moto in $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{T} - \frac{1}{2}m\omega^2 R\sin\frac{s}{R}\cos\frac{s}{R} - \frac{mg}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{R} &= 0\,,\\
\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{N} - m\omega^2 R\Big(\cos^2\frac{s}{R} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{s}{R}\Big) + \frac{mg}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{R} &= 0\,,\\
\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{B} - \frac{1}{2}m\omega^2 R\sin\frac{s}{R} - \frac{mg}{\sqrt{2}} &= 0\,.
\end{aligned}$$

La condizione su $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ quindi diviene

$$(\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{T})^2 \le \mu^2[(\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{N})^2 + (\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{B})^2]\,,$$

con i prodotti scalari dati dalle equazioni di moto. Questa condizione si può scrivere come

$$\frac{1}{16}\omega^4 R^2\sin^2\frac{2s}{R} + Q_1(\omega) \le \mu\frac{\omega^4 R^2}{4}\Big(2 + \cos^2\frac{s}{R} + \cos^4\frac{s}{R}\Big) + \mu Q_2(\omega)\,,$$

ove Q_1 e Q_2 sono polinomi in ω di grado 2. Dunque per $\mu \ge 1$ fissato si ha certamente la tesi per ω abbastanza grande.
R.

$$\Big(\frac{\omega^2 R}{4}\sin\frac{2s}{R} + \frac{g}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{R}\Big)^2 \le \mu\Big\{\Big[\frac{\omega^2 R}{2}\Big(1 + \cos^2\frac{s}{R}\Big) - \frac{g}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{R}\Big]^2 + \Big[\frac{\omega^2 R}{2}\sin\frac{s}{R} + \frac{g}{\sqrt{2}}\Big]^2\Big\}\,.$$

9. [15/01/2018 (ex)II] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Qui $\omega > 0$ è una costante.
Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza γ solidale con $\mathcal{S}$ data da

$$\gamma = \Big\{ R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1 + R\sin\frac{s}{R}\Big(\frac{\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3}{\sqrt{2}}\Big) \mid 0 \leq s < 2\pi R \Big\}\,.$$

Il vincolo è scabro e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$. Sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_2$.

- Scrivere le equazioni di moto del punto all'equilibrio relativo a $\mathcal{S}$.
- Mostrare che se $\mu = 1$ e $\omega > 0$ è abbastanza grande, tutte le posizioni su γ sono di equilibrio relativo.

10. [27/06/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla retta mobile

$$x_1 \sin(\omega t) - x_2 \cos(\omega t) = 0\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Sul punto agisce la forza peso diretta come $\boldsymbol{e}_2$, e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ tale che

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,.$$

Il moto ha dati iniziali

$$\overrightarrow{OP}(0) = d\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = \omega d\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui ω, μ, d sono costanti positive assegnate e $(O, (x_i))$ è il sistema di riferimento fisso.
Trovare la condizione su ω, μ, d perché $|\overrightarrow{OP}| = d$ in un opportuno intervallo $(0, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$ e dimostrare che in ogni caso $\bar{t} < \pi/2\omega$.
Soluzione
Scomponiamo le equazioni di moto nella terna

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Dunque la tangente alla retta è $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ sono normali ad essa; si ha

$$
\begin{aligned}
m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_1 &= mg\sin(\omega t) + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\cdot\boldsymbol{u}_1\,,\\
m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_2 &= mg\cos(\omega t) + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\cdot\boldsymbol{u}_2\,,\\
m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_3 &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\cdot\boldsymbol{u}_3\,.
\end{aligned}
$$

Dato che $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_3 = 0$ si ha $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\cdot\boldsymbol{u}_3 = 0$.
Nel moto prescritto che è circolare uniforme deve essere

$$
\boldsymbol{a} = -\omega^2 d\boldsymbol{u}_1\,.
$$

Dunque

$$
|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| = mg|\cos(\omega t)|\,,
$$

e

$$
\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\cdot\boldsymbol{u}_1 = -mg\sin(\omega t) - m\omega^2 d\,,
$$

che è possibile se e solo se per ogni t (nell'intervallo ammissibile)

$$
|mg\sin(\omega t) + m\omega^2 d| \le \mu mg|\cos(\omega t)|\,,
$$

ossia per $\beta = \omega^2 d/g$,

$$
|\beta + \sin(\omega t)| \le \mu|\cos(\omega t)|\,,
$$

che è impossibile se $t = \pi/2\omega$.
R.

$$
\frac{\omega^2 d}{g} < \mu\,.
$$

11. [15/01/2019 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva scabra γ data da

$$
y_3 = \alpha\sin(\beta y_1)\,,\qquad y_1\in\boldsymbol{R}\,;\qquad y_2 = 0\,.
$$

Qui (y_i) denota le coordinate del sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}
$$

La reazione vincolare soddisfa la relazione

$$
|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \le \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,.
$$

Qui α, β, ω, μ sono costanti positive assegnate.
Trovare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$, ignorando le posizioni ove si annulla la curvatura di γ.
Soluzione

Scriviamo l'equazione di moto in $\mathcal{S}$, ossia

$$0 = m\boldsymbol{a}_{\mathcal{S}} = \mathbf{f}_{\text{vin}} + \boldsymbol{F}_{T} + \boldsymbol{F}_{C} = \mathbf{f}_{\text{vin}} + \boldsymbol{F}_{T} \,,$$

essendo nulla all'equilibrio relativo la forza di Coriolis. Inoltre

$$\boldsymbol{F}_{T} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}) = m\omega^2 y_1 \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Troviamo la terna intrinseca della curva (scomposta nella base $(\boldsymbol{u}_h)$)

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \alpha\beta\cos(\beta y_1)\boldsymbol{u}_3}{R(y_1)} \,, \qquad R(y_1) = \sqrt{1 + \alpha^2\beta^2(\cos(\beta y_1))^2} \,,$$
$$\boldsymbol{N} = \pm \frac{-\alpha\beta\cos(\beta y_1)\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3}{R(y_1)} \,, \qquad \boldsymbol{B} = \mp \boldsymbol{u}_2 \,.$$

Naturalmente questo vale nei punti ove $k \neq 0$, che poi sono i punti ove $\sin(\beta y_1) \neq 0$, e i segni vanno scelti opportunamente in dipendenza da y_1.
Dunque le equazioni di moto scalari sono

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} + \frac{m\omega^2 y_1}{R(y_1)} \,, \\
0 &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} \pm \frac{m\omega^2 y_1 \alpha\beta\cos(\beta y_1)}{R(y_1)} \,, \\
0 &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} \,.
\end{aligned}$$

In realtà la base $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ data sopra, pur non potendosi identificare con la terna intrinseca di γ nei punti ove $k = 0$, è una base ben definita perfino in questi punti e perciò questa scomposizione delle equazioni di moto è comunque legittima. Nel seguito perciò comprenderemo nell'analisi tutti i punti della curva.
Si deve dunque avere

$$|m\omega^2 y_1| = |R(y_1)\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| \leq \mu R(y_1)|\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N}| = \mu|\alpha\beta m\omega^2 y_1 \cos(\beta y_1)| \,.$$

Questo è vero se $y_1 = 0$ e altrimenti nell'ipotesi che $\mu\alpha\beta \geq 1$ nei punti ove

$$1 \leq \mu\alpha\beta|\cos(\beta y_1)| \,.$$

Si tratta pertanto dell'unione degli intervalli disgiunti

$$\Big[-\varphi_0 + n\frac{\pi}{\beta}, \varphi_0 + n\frac{\pi}{\beta} \Big] \,, \qquad n \in \boldsymbol{Z} \,,$$

ove

$$\varphi_0 = \frac{1}{\beta} \arccos \frac{1}{\mu\alpha\beta} \,,$$

cosicché $\varphi_0\beta \in [0, \pi/2)$.
R. *L'insieme delle posizioni di equilibrio relative è dato da:*

1. *se $\mu\alpha\beta < 1$: $\{y_1 = 0\}$;*
2. *se $\mu\alpha\beta \geq 1$:*
$$y_1 \in \{0\} \cup \bigcup_{n \in \boldsymbol{Z}} \Big[-\varphi_0 + n\frac{\pi}{\beta}, \varphi_0 + n\frac{\pi}{\beta} \Big] \,,$$
   ove
$$\varphi_0 = \frac{1}{\beta} \arccos \frac{1}{\mu\alpha\beta} \,.$$

12. [15/01/2019 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva scabra γ data da

$$y_3 = \beta \cos(\alpha y_1) , \qquad y_1 \in \boldsymbol{R} ; \qquad y_2 = 0 .$$

Qui (y_i) denota le coordinate del sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t) \, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t) \, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t) \, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t) \, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 . \end{aligned}$$

La reazione vincolare soddisfa la relazione

$$|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| \leq \mu |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| .$$

Qui α, β, ω, μ sono costanti positive assegnate.
Trovare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$, ignorando le posizioni ove si annulla la curvatura di γ.

620. Equazioni di Lagrange per vincoli fissi

1. [12/9/2005 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie liscia

$$z = f\big(\sqrt{x^2 + y^2}\,\big) , \qquad f \in C^3([0, \infty)) .$$

Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse z.
Dimostrare che un moto circolare (che non sia la quiete) su $x^2 + y^2 = \bar{r}^2 > 0$ è possibile se e solo se $f'(\bar{r}) > 0$.
Soluzione
Scegliamo come coordinate lagrangiane r, θ, con $r > 0$ e $\theta \in (0,2\pi)$. La velocità di P è

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{u} + r\dot{\theta}\boldsymbol{\tau} + f'(r)\dot{r}\boldsymbol{e}_3 ,$$

per cui l'energia cinetica risulta

$$T = \frac{1}{2} m \big[\dot{r}^2 (1 + f'(r)^2) + r^2 \dot{\theta}^2 \big] .$$

Il potenziale della forza peso è

$$U = -mgz = -mgf(r) ,$$

per cui la lagrangiana vale

$$\mathcal{L}(r, \theta) = T + U = \frac{1}{2} m \big[\dot{r}^2 (1 + f'(r)^2) + r^2 \dot{\theta}^2 \big] - mgf(r) .$$

Le equazioni di moto sono quindi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m\dot{r}(1+f'(r)^2)\big]-\big[m\dot{r}^2f'(r)f''(r)+mr\dot{\theta}^2-mgf'(r)\big]=0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[mr^2\dot{\theta}\big]=0\,.$$

Una soluzione $(r(t),\theta(t))$ con $r(t)\equiv\bar{r}$ (e quindi $\theta(t)=\theta_0+\dot{\theta}_0t$ con θ_0, $\dot{\theta}_0$ costanti), è possibile se e solo se

$$\bar{r}\dot{\theta}_0^2=gf'(\bar{r})\,.$$

2. [12/9/2005 (ex)I] Una circonferenza γ di raggio R, centro C e massa m è vincolata a muoversi su un piano verticale fisso π. Inoltre il punto medio Q del raggio $\overrightarrow{CA}$ ove A è un punto di γ (solidale con essa) è fisso su π. Si noti che Q è solidale con la circonferenza, la quale perciò ruota intorno all'asse ortogonale a π in Q.
Un punto materiale P di massa M è vincolato a muoversi su γ.
Si scriva la lagrangiana del sistema, scegliendo come coordinate lagrangiane: l'angolo θ formato da $\overrightarrow{CA}$ con la verticale ascendente; l'angolo φ formato da $\overrightarrow{CP}$ con la verticale ascendente.
SOLUZIONE
Si ha, scegliendo l'origine del sistema fisso in Q, e prendendo l'asse x_1 come verticale ascendente e $\pi=\{x_3=0\}$, che

$$C=\frac{R}{2}(-\cos\theta,-\sin\theta,0)\,,$$
$$P=\frac{R}{2}(-\cos\theta,-\sin\theta,0)+R(\cos\varphi,\sin\varphi,0)\,.$$

Allora

$$T_{\mathrm{crf}}=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2\,,\qquad U_{\mathrm{crf}}=-mgx_{1C}=mg\frac{R}{2}\cos\theta$$

(qui I è il momento d'inerzia di γ rispetto all'asse di rotazione x_3). Inoltre

$$\boldsymbol{v}_P=\frac{R}{2}\dot{\theta}(\sin\theta,-\cos\theta,0)+R\dot{\varphi}(-\sin\varphi,\cos\varphi,0)\,,$$

cosicché

$$T_P=\frac{1}{2}MR^2\big[\frac{\dot{\theta}^2}{4}+\dot{\varphi}^2-\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)\big]\,.$$

Infine

$$U_P=-Mgx_{1P}=MgR(\frac{1}{2}\cos\theta-\cos\varphi)\,.$$

R.

$$\mathcal{L}(\varphi,\theta)=\frac{1}{2}\Big[\Big(I+\frac{MR^2}{4}\Big)\dot{\theta}^2+MR^2\dot{\varphi}^2-MR^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)\Big]$$
$$+mg\frac{R}{2}\cos\theta+MgR(\frac{1}{2}\cos\theta-\cos\varphi)\,.$$

3. [12/9/2005 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie liscia di equazione

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\,, \qquad x_1^2 + x_2^2 > 0\,,$$

e soggetto a una forza

$$\boldsymbol{F} = -\frac{k}{x_3^\alpha}\boldsymbol{e}_3\,,$$

con $1 > \alpha > 0$, $k > 0$ costanti.
Dimostrare che non sono possibili moti nei quali x_3 diviene illimitata.
SOLUZIONE
Scegliamo come coordinate lagrangiane le coordinate polari $r > 0$ e $\theta \in (0,2\pi)$. Allora, in coordinate lagrangiane,

$$\overrightarrow{OP} = \Big(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{1}{r}\Big)\,,$$

$$\boldsymbol{v}_P = \dot r\boldsymbol{u} + r\dot\theta\boldsymbol{\tau} - \frac{\dot r}{r^2}\boldsymbol{e}_3\,.$$

Quindi

$$T = \frac{1}{2}m\Big(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + \frac{\dot r^2}{r^4}\Big)\,,$$

mentre il potenziale di $\boldsymbol{F}$ è

$$U = \frac{k}{\alpha-1}x_3^{1-\alpha} = \frac{k}{\alpha-1}r^{\alpha-1}\,.$$

La conservazione dell'energia dunque equivale a

$$T - U = \frac{1}{2}m\Big(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + \frac{\dot r^2}{r^4}\Big) + \frac{k}{1-\alpha}r^{\alpha-1} = E\,,$$

ove E è una costante determinata dalle condizioni iniziali. Si noti che $E > 0$ nelle ipotesi fatte sopra. Inoltre, poiché $T \geq 0$,

$$\frac{k}{1-\alpha}r^{\alpha-1} \leq E\,,$$

ossia

$$r \geq \Big(\frac{E(1-\alpha)}{k}\Big)^{\frac{1}{\alpha-1}} > 0\,,$$

il che significa

$$x_3 \leq \Big(\frac{E(1-\alpha)}{k}\Big)^{\frac{1}{1-\alpha}} < \infty\,.$$

4. [12/9/2005 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie liscia

$$z = f\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)\,, \qquad f \in C^3([0,\infty))\,.$$

Il peso è diretto nel verso positivo dell'asse z.
Dimostrare che un moto circolare (che non sia la quiete) su $x^2 + y^2 = \bar{r}^2 > 0$ è possibile se e solo se $f'(\bar{r}) < 0$.

5. [12/9/2005 (ex)II] Una circonferenza γ di raggio $2L$, centro C e massa M è vincolata a muoversi su un piano verticale fisso π. Inoltre il punto medio Q del raggio $\overrightarrow{CA}$ ove A è un punto di γ (solidale con essa) è fisso su π. Si noti che Q è solidale con la circonferenza, la quale perciò ruota intorno all'asse ortogonale a π in Q.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su γ.
Si scriva la lagrangiana del sistema, scegliendo come coordinate lagrangiane: l'angolo θ formato da $\overrightarrow{CA}$ con la verticale ascendente; l'angolo φ formato da $\overrightarrow{CP}$ con la verticale ascendente.
R.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\varphi, \theta) = \frac{1}{2}\Big[\Big(I + mL^2\Big)\dot{\theta}^2 + 4mL^2\dot{\varphi}^2 - 4mL^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi)\Big] \\
+ MgL\cos\theta + mgL(\cos\theta - 2\cos\varphi)\,.
\end{aligned}
$$

6. [12/9/2005 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie liscia di equazione

$$
x_3 = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\,, \qquad x_1^2 + x_2^2 > 0\,,
$$

e soggetto a una forza

$$
\boldsymbol{F} = -\frac{k}{x_3^\alpha}\boldsymbol{e}_3\,,
$$

con $1 > \alpha > 0$, $k > 0$ costanti.
Dimostrare che non sono possibili moti nei quali x_3 diviene illimitata.

7. [15/12/2005 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie liscia

$$
z = x + y^2\,,
$$

ed è soggetto alla forza peso diretta nel verso negativo dell'asse z. All'istante iniziale il punto è fermo nella posizione (1,0,1).
Trovare il moto del punto.
SOLUZIONE
Usiamo come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane (x, y). Quindi, se O denota l'origine del sistema di riferimento,

$$
\overrightarrow{OP} = (x, y, x + y^2)\,,
$$

e

$$
\boldsymbol{v}_P = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{x} + 2y\dot{y})\,.
$$

Pertanto

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2}m\Big[2\dot{x}^2 + (1+4y^2)\dot{y}^2 + 4y\dot{x}\dot{y}\Big] - mg(x+y^2)\,,$$

e le equazioni di Lagrange sono

$$2\ddot{x} + 2y\ddot{y} + 2\dot{y}^2 + g = 0\,,$$
$$(1+4y^2)\ddot{y} + 4y\dot{y}^2 + 2y\ddot{x} + 2gy = 0\,,$$

con le condizioni iniziali

$$x(0) = 1\,, \quad y(0) = 0\,; \qquad \dot{x}(0) = 0\,, \quad \dot{y}(0) = 0\,.$$

Non occorre risolvere il sistema in generale. Basta osservare che esiste la soluzione

$$\big(x(t), y(t)\big) = \Big(1 - \frac{g}{4}t^2, 0\Big)\,.$$

R.

$$\big(x(t), y(t), z(t)\big) = \Big(1 - \frac{g}{4}t^2, 0, 1 - \frac{g}{4}t^2\Big)\,.$$

8. [15/12/2005 (ex)I] Calcolare la lagrangiana di un punto materiale di massa m che si muove sulla superficie

$$z = xy\,,$$

soggetto alla forza peso diretta nel verso negativo dell'asse z, e a una forza costante

$$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{e}_1\,, \qquad k > 0\,.$$

SOLUZIONE

Usiamo come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane (x, y). *Quindi, se* O *denota l'origine del sistema di riferimento,*

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, xy)\,,$$

e

$$\boldsymbol{v}_P = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{x}y + x\dot{y})\,.$$

Pertanto

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\Big[(1+y^2)\dot{x}^2 + (1+x^2)\dot{y}^2 + 2xy\dot{x}\dot{y}\Big] - mgxy + kx\,,$$

R.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\Big[(1+y^2)\dot{x}^2 + (1+x^2)\dot{y}^2 + 2xy\dot{x}\dot{y}\Big] - mgxy + kx\,,$$

9. [7/4/2006 (ex)I] Si scrivano le equazioni di Lagrange del sistema formato da due punti materiali P_1, P_2, entrambi di massa $m > 0$, e vincolati alla parabola liscia

$$y = ax^2\,, \qquad z = 0\,,$$

con $a > 0$. Su P_1, P_2 agiscono le forze

$$\text{su } P_1\colon \qquad \boldsymbol{F}_1 = k\overrightarrow{P_1P_2} - \lambda \boldsymbol{e}_1 \,,$$
$$\text{su } P_2\colon \qquad \boldsymbol{F}_2 = k\overrightarrow{P_2P_1} - \mu \boldsymbol{e}_2 \,,$$

ove k, λ, $\mu > 0$ sono costanti.

Soluzione

Usiamo come coordinate lagrangiane le ascisse dei due punti P_j, in modo che

$$P_j = (x_j, a x_j^2, 0) \,, \qquad j = 1\,,2 \,.$$

Con questa scelta, il potenziale delle forze è

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2) &= -\frac{k}{2} \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2 - \lambda x_1 - \mu y_2 \\ &= -\frac{k}{2}\{(x_1 - x_2)^2 + (a x_1^2 - a x_2^2)^2\} - \lambda x_1 - \mu a x_2^2 \,. \end{aligned}$$

Inoltre l'energia cinetica è data da

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) &= \frac{1}{2} m\{\dot{x}_1^2 + (2 a x_1 \dot{x}_1)^2\} + \frac{1}{2} m\{\dot{x}_2^2 + (2 a x_2 \dot{x}_2)^2\} \\ &= \frac{1}{2} m\{\dot{x}_1^2(1 + 4a^2 x_1^2) + \dot{x}_2^2(1 + 4a^2 x_2^2)\} \,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) &= \frac{1}{2} m\{\dot{x}_1^2(1 + 4a^2 x_1^2) + \dot{x}_2^2(1 + 4a^2 x_2^2)\} \\ &\quad - \frac{k}{2}\{(x_1 - x_2)^2 + (a x_1^2 - a x_2^2)^2\} - \lambda x_1 - \mu a x_2^2 \,. \end{aligned}$$

R.

$$m\ddot{x}_1(1 + 4a^2 x_1^2) + 4 m a^2 x_1 \dot{x}_1^2 + k\{(x_1 - x_2) + 2(a x_1^2 - a x_2^2) a x_1\} + \lambda = 0 \,,$$
$$m\ddot{x}_2(1 + 4a^2 x_2^2) + 4 m a^2 x_2 \dot{x}_2^2 + k\{(x_2 - x_1) + 2(a x_2^2 - a x_1^2) a x_2\} + 2 a \mu x_2 = 0 \,.$$

10. [22/9/2006 (ex)I] Scrivere la funzione lagrangiana del sistema formato da due punti materiali P_1 e P_2 di massa m vincolati a una circonferenza fissa di raggio R, che si attraggono a vicenda con una forza elastica di costante $k > 0$.

Soluzione

Usiamo come coordinate lagrangiane le due anomalie polari φ_i dei P_i nel sistema $(O, \boldsymbol{e}_i)$, che ha origine O nel centro della circonferenza, in modo che

$$\overrightarrow{OP_i} = R\cos\varphi_i \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi_i \boldsymbol{e}_2 \,,$$

e

$$|\boldsymbol{v}_{P_i}|^2 = R^2 \dot{\varphi}_i^2 \,.$$

Il potenziale della forza elastica è

$$U = -\frac{k}{2} \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2 = -kR^2\big[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\big] .$$

R.

$$\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dot\varphi_1, \dot\varphi_2) = \frac{1}{2} mR^2(\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2) - kR^2\big[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\big] .$$

11. [26/3/2007 (ex)I] Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza R e massa M è vincolata ad avere l'estremo A sull'asse fisso x_3, e B sull'elica circolare

$$x_1 = R\cos u , \quad x_2 = R\sin u , \quad x_3 = hu , \qquad -\infty < u < \infty .$$

Qui $h > 0$ è costante, e (O, x_i) denota il sistema di riferimento fisso.
Oltre al peso, diretto nel verso negativo dell'asse x_3, l'asta è soggetta alla forza elastica applicata in A

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OA} ,$$

con k costante positiva.
Scrivere le equazioni di moto dell'asta.
[*Sugg.* L'asta ha un solo grado di libertà.]
SOLUZIONE
Troviamo la lagrangiana. Sia $y \in \boldsymbol{R}$ *la coordinata tale che*

$$\overrightarrow{OB} = (R\cos y, R\sin y, hy) .$$

Si noti che

$$R^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = R^2\cos^2 y + R^2\sin^2 y + (hy - x_{3A})^2 = R^2 + (hy - x_{3A})^2 ,$$

che implica

$$x_{3A}(t) = hy(t) , \qquad \text{per ogni } t$$

(ossia l'asta si mantiene orizzontale).
Dunque l'asta è parametrizzata da

$$\overrightarrow{OP}(s) = (s\cos y, s\sin y, hy) , \qquad 0 \le s \le R .$$

Quindi

$$T(y, \dot y) = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{M}{R} \left|\boldsymbol{v}_P(t; s)\right|^2 \,\mathrm{d}s = \frac{M}{2R}\int_0^R (s^2\dot y^2 + h^2\dot y^2)\,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{M}{2}\Big(\frac{R^2}{3} + h^2\Big)\dot y^2 .$$

Inoltre il potenziale delle forze applicate è

$$U(y) = -Mghy - \frac{1}{2}kh^2y^2 .$$

Perciò

$$\mathcal{L}(y,\dot y)=\frac{M}{2}\Big(\frac{R^2}{3}+h^2\Big)\dot y^2-Mghy-\frac{1}{2}kh^2y^2\,,$$

e l'equazione di Lagrange è

$$M\Big(\frac{R^2}{3}+h^2\Big)\ddot y+Mgh+kh^2y=0\,.$$

R.

$$M\Big(\frac{R^2}{3}+h^2\Big)\ddot y+Mgh+kh^2y=0\,.$$

12. [19/7/2007 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie data, in coordinate cilindriche, da

$$z=rf(\varphi)\,,\qquad r>0\,,$$

ove $r=\sqrt{x^2+y^2}$ e φ sono appunto le usuali coordinate polari nel piano (x,y). La $f\in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è un'assegnata funzione positiva, periodica con periodo 2π.
Sul punto agisce la forza peso, nel verso negativo dell'asse z.
Si dimostri che se $f'(\varphi_0)=0$, con $\varphi_0\in(-\pi,\pi)$ dato, allora è possibile un moto di P in cui $\varphi(t)=\varphi_0$ per ogni t.
Soluzione
Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$(r,\varphi)\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi)\,.$$

Allora

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(r,\varphi)=r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1+r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2+rf(\varphi)\boldsymbol{e}_3\,,$$

e

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}=(\dot r\cos\varphi-\dot\varphi r\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1+(\dot r\sin\varphi+\dot\varphi r\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2+(\dot rf(\varphi)+rf'(\varphi)\dot\varphi)\boldsymbol{e}_3\,.$$

Dunque

$$T^{\mathrm{L}}=\frac{1}{2}m\big[\dot r^2\big(1+f(\varphi)^2\big)+r^2\dot\varphi^2\big(1+f'(\varphi)^2\big)+2r\dot r\dot\varphi f(\varphi)f'(\varphi)\big]\,.$$

Inoltre il potenziale della forza peso è

$$U^{\mathrm{L}}=-mgz(r,\varphi)=-mgrf(\varphi)\,.$$

Dunque la lagrangiana è

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\big[\dot r^2\big(1+f(\varphi)^2\big)+r^2\dot\varphi^2\big(1+f'(\varphi)^2\big)+2r\dot r\dot\varphi f(\varphi)f'(\varphi)\big]-mgrf(\varphi)\,.$$

Le equazioni di Lagrange sono quindi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[m\dot r\big(1+f(\varphi)^2\big)+mr\dot\varphi f(\varphi)f'(\varphi)\Big]-mr\dot\varphi^2\big(1+f'(\varphi)^2\big)-m\dot r\dot\varphi f(\varphi)f'(\varphi)+mgf(\varphi)=0\,, \tag{1}$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[mr^2\dot\varphi\big(1+f'(\varphi)^2\big)+mr\dot r f(\varphi)f'(\varphi)\Big]-m\dot r^2 f(\varphi)f'(\varphi)-mr^2\dot\varphi^2 f'(\varphi)f''(\varphi)\\
-mr\dot r\dot\varphi[f'(\varphi)^2+f(\varphi)f''(\varphi)]+mgrf'(\varphi)=0\,, \quad (2)
\end{aligned}
$$

Se $\varphi(t)=\varphi_0$ e quindi $\dot\varphi(t)=0$ per ogni t, si ha dalla (2)

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[r\dot r]mf(\varphi_0)f'(\varphi_0)-m\dot r^2 f(\varphi_0)f'(\varphi_0)+mgrf'(\varphi_0)=0\,,
$$

da cui

$$
mrf'(\varphi_0)\big[\ddot r f(\varphi_0)+g\big]=0\,.
$$

Questa è soddisfatta se

$$
f'(\varphi_0)=0\,.
$$

L'alternativa

$$
\ddot r=-\frac{g}{f(\varphi_0)}\,, \qquad (3)
$$

non è realizzabile, perché la (1)*, nelle stesse ipotesi, dà:*

$$
\ddot r=-\frac{gf(\varphi_0)}{1+f(\varphi_0)^2}\,,
$$

che è incompatibile con la (3)*.*

13. [19/7/2007 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie data, in coordinate cilindriche, da

$$
z=rf(\varphi)\,, \qquad r>0\,,
$$

ove $r=\sqrt{x^2+y^2}$ e φ sono appunto le usuali coordinate polari nel piano (x,y). La $f\in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è un'assegnata funzione positiva, periodica con periodo 2π.
Sul punto agisce una forza di potenziale

$$
U=kx\,,
$$

con $k>0$ costante.
Si dimostri che se $f'(0)=0$, allora è possibile un moto di P in cui $\varphi(t)=0$ per ogni t.

14. [13/12/2007 (ex)I] Un'asta rigida di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata

- a giacere nel piano verticale fisso $x_3=0$;
- ad avere il centro C sull'asse x_2.

Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_2$. Inoltre sull'asta agiscono due forze elastiche applicate nei due estremi A_1 e A_2:

$$\boldsymbol{F}_{A_1} = -k_1\overrightarrow{OA_1}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{A_2} = -k_2\overrightarrow{OA_2}\,,$$

ove si assume $k_1 > k_2 > 0$.
Scrivere le equazioni di Lagrange dell'asta, e determinarne le posizioni di equilibrio.
Soluzione
Scegliamo come coordinate lagrangiane la coordinata $y = x_2 \in \boldsymbol{R}$ di C, e l'angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ formato da $\overrightarrow{A_1A_2}$ con $\boldsymbol{e}_1$. La parametrizzazione di A_1A_2 sarà data da

$$\overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}(s) = y\boldsymbol{e}_2 + s(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2)\,,$$

per $-L \leq s \leq L$.
Poiché le forze applicate sono conservative, possiamo scrivere la funzione lagrangiana del sistema.
L'energia cinetica dell'asta si può ottenere per integrazione: si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OP}(s) = -s\dot\varphi\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + (s\dot\varphi\cos\varphi + \dot y)\boldsymbol{e}_2\,.$$

Dunque

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\frac{m}{2L}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OP}(s)\right|^2\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\frac{m}{2L}\dot\varphi^2\int_{-L}^{L}s^2\,\mathrm{d}s + \frac{m}{2}\dot y^2 = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 + \frac{m}{2}\dot y^2\,,$$

ove

$$I = \frac{mL^2}{3}$$

è il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo asse.
Il potenziale delle forze è dato da

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{L}} &= -mgy - \frac{1}{2}k_1\left|\overrightarrow{OA_1}\right|^2 - \frac{1}{2}k_2\left|\overrightarrow{OA_2}\right|^2 \\ &= -mgy - \frac{1}{2}(k_1+k_2)y^2 + (k_1-k_2)Ly\sin\varphi - \frac{1}{2}(k_1+k_2)L^2\,. \end{aligned}$$

Perciò

$$\mathcal{L}(y,\varphi,\dot y,\dot\varphi) = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 + \frac{m}{2}\dot y^2 - mgy - \frac{1}{2}(k_1+k_2)y^2 + (k_1-k_2)Ly\sin\varphi\,.$$

Le posizioni di equilibrio corrispondono a punti stazionari di U^{L}, ossia alle soluzioni di

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= -(k_1-k_2)Ly\cos\varphi = 0\,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial y} &= -mg - (k_1+k_2)y + (k_1-k_2)L\sin\varphi = 0\,. \end{aligned}$$

La prima equazione dà

$$a)\ y = 0, \qquad \text{oppure} \qquad b)\ \ \varphi \in \Big\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big\}\,.$$

Nel caso a), la seconda equazione implica

$$\sin\varphi = \frac{mg}{L(k_1 - k_2)}\,,$$

che è ammissibile solo se

$$mg \le L(k_1 - k_2)\,,$$

e in questo caso determina due valori per φ (coincidenti se in essa vale l'uguaglianza).
Nel caso b), il valore di y è determinato dalla seconda equazione, in corrispondenza di ciascuno dei valori di φ.
R. *Equazioni di Lagrange:*

$$\begin{aligned} I\ddot{\varphi} - (k_1 - k_2)Ly\cos\varphi = 0\,,\\ m\ddot{y} + mg + (k_1 + k_2)y - (k_1 - k_2)L\sin\varphi = 0\,. \end{aligned}$$

Posizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} &\text{a) se} && mg \le L(k_1 - k_2)\,,\\ &\text{a1)} && y = 0\,, \quad \varphi = \arcsin\frac{mg}{L(k_1 - k_2)}\,,\\ &\text{a2)} && y = 0\,, \quad \varphi = \pi - \arcsin\frac{mg}{L(k_1 - k_2)}\,;\\ &\text{b1)} && y = -\frac{mg}{k_1 + k_2} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}L\,, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}\,,\\ &\text{b2)} && y = -\frac{mg}{k_1 + k_2} - \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}L\,, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

15. [13/12/2007 (ex)II] Un'asta rigida di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata

- a giacere nel piano verticale fisso $x_3 = 0$;
- ad avere il centro C sull'asse x_2.

Il peso è diretto come $\boldsymbol{e}_2$. Inoltre sull'asta agiscono due forze elastiche applicate nei due estremi A_1 e A_2:

$$\boldsymbol{F}_{A_1} = -k_1\overrightarrow{OA_1}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{A_2} = -k_2\overrightarrow{OA_2}\,,$$

ove si assume $k_2 > k_1 > 0$.
Scrivere le equazioni di Lagrange dell'asta, e determinarne le posizioni di equilibrio.
R. *Equazioni di Lagrange:*

$$\begin{aligned} I\ddot{\varphi} - (k_1 - k_2)Ly\cos\varphi = 0\,,\\ m\ddot{y} - mg + (k_1 + k_2)y - (k_1 - k_2)L\sin\varphi = 0\,. \end{aligned}$$

Posizioni di equilibrio:

$$
\begin{array}{ll}
\textit{a) se} & mg \leq L(k_2 - k_1)\,, \\
\textit{a1)} & y = 0\,, \quad \varphi = \arcsin \dfrac{mg}{L(k_2 - k_1)}\,, \\
\textit{a2)} & y = 0\,, \quad \varphi = \pi - \arcsin \dfrac{mg}{L(k_2 - k_1)}\,; \\
\textit{b1)} & y = \dfrac{mg}{k_1 + k_2} + \dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} L\,, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}\,, \\
\textit{b2)} & y = \dfrac{mg}{k_1 + k_2} - \dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} L\,, \quad \varphi = -\dfrac{\pi}{2}\,.
\end{array}
$$

16. [1/4/2008 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla sfera di raggio $R > 0$

$$
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,
$$

ed è soggetto

- alla forza peso, diretta come $-\boldsymbol{e}_3$;
- alla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{NP}$, ove $N = (0,0,R)$. Qui $k > 0$ è costante.

Determinare

1. le equazioni di moto;
2. per quali quote x_3 sono possibili moti circolari a quota x_3 costante.

SOLUZIONE
Usiamo le coordinate lagrangiane

$$
-\pi < \varphi < \pi\,, \qquad 0 < \theta < \pi\,,
$$

tali che

$$
\begin{aligned}
x_{1P} &= R\cos\varphi\sin\theta\,, \\
x_{2P} &= R\sin\varphi\sin\theta\,, \\
x_{3P} &= R\cos\theta\,.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= R(-\sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\theta, 0)\,, \\
\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} &= R(\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, -\sin\theta)\,,
\end{aligned}
$$

e

$$
\overrightarrow{NP} = R(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta - 1)\,.
$$

Le componenti lagrangiane delle forze sono

$$Q_\varphi = -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} - k\overrightarrow{NP} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = 0\,,$$

e

$$Q_\theta = -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} - k\overrightarrow{NP} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} = (mg - kR)R\sin\theta\,.$$

Inoltre l'energia cinetica è secondo la rappresentazione lagrangiana

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m\left|\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi}\right|^2 \dot\varphi^2 + m\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \theta}\dot\varphi\dot\theta + \frac{1}{2}m\left|\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \theta}\right|^2 \dot\theta^2 \\ = \frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2\,. \end{aligned}$$

Quindi le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(mR^2\sin^2\theta\dot\varphi\Big) &= 0\,, \\ mR^2\ddot\theta - \frac{1}{2}mR^2\sin 2\theta\dot\varphi^2 &= (mg - kR)R\sin\theta\,. \end{aligned}$$

Se il punto si muove di moto circolare a quota costante, allora θ è costante, e dalla prima equazione segue che

$$\ddot\varphi = 0\,, \quad \textit{cioè } \dot\varphi(t) = \dot\varphi_0 \textit{ costante,}$$

e quindi dalla seconda equazione

$$\cos\theta = \frac{kR - mg}{mR\dot\varphi_0^2}\,.$$

Perciò se $kR > mg$ sono ammissibili tutti i valori $\theta \in (0, \pi/2)$, se $kR < mg$ sono ammissibili tutti i valori $\theta \in (\pi/2, \pi)$, se $kR = mg$, è ammissibile solo il valore $\theta = \pi/2$.

R. *Le equazioni di moto sono:*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(mR^2\sin^2\theta\dot\varphi\Big) &= 0\,, \\ mR^2\ddot\theta - \frac{1}{2}mR^2\sin 2\theta\dot\varphi^2 &= (mg - kR)R\sin\theta\,. \end{aligned}$$

I moti circolari sono possibili alle quote:

$$\begin{aligned} &0 < x_3 < R\,, && kR > mg\,, \\ &x_3 = 0\,, && kR = mg\,, \\ &-R < x_3 < 0\,, && kR < mg\,. \end{aligned}$$

17. [1/4/2008 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato all'elica circolare

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos\varphi\,, \\ x_2 &= R\sin\varphi\,, \\ x_3 &= a\varphi\,, \end{aligned}$$

ove a e R sono costanti positive.
Il punto è soggetto alla forza peso, ortogonale all'asse dell'elica,

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Scrivere l'equazione di moto del punto.
SOLUZIONE
Scegliamo come coordinata lagrangiana φ. La velocità è

$$\boldsymbol{v} = \dot\varphi(-R\sin\varphi, R\cos\varphi, a) \,,$$

per cui l'energia cinetica è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 = \frac{1}{2}m\dot\varphi^2(R^2 + a^2) \,.$$

Perciò la funzione lagrangiana è

$$\mathcal{L} = T^{\mathrm{L}} - U^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m\dot\varphi^2(R^2 + a^2) - mgR\sin\varphi \,.$$

R.

$$(R^2 + a^2)\ddot\varphi + gR\cos\varphi = 0 \,. \tag{1}$$

18. [1/7/2008 (ex)I] Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è sottoposta ai seguenti vincoli:

- giace sul piano $x_3 = 0$;
- il centro C appartiene alla curva

$$x_2 = -b\cos ax_1 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

L'asta è sottoposta alle seguenti forze:

- la forza peso, diretta nel verso negativo dell'asse x_2;
- le due forze elastiche

  $$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{A_1A} \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k\overrightarrow{B_1B} \,,$$

  ove A_1 [rispettivamente B_1] è la proiezione di A [rispettivamente di B] sull'asse x_1.

Qui a, b, k sono costanti positive.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange;
2. dare una condizione sui dati iniziali perché l'asta nel suo moto compia una rotazione completa.

Soluzione

1) Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1C} \,, \qquad x \in \boldsymbol{R} \,,$$

e l'angolo φ tale che

$$\overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2) \,, \qquad -\pi < \varphi < \pi \,.$$

Le due forze $\boldsymbol{F}_A$ e $\boldsymbol{F}_B$ sono date da

$$\boldsymbol{F}_A = -kx_{2A} \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -kx_{2B} \,,$$

che hanno potenziale

$$-\frac{k}{2}(x_{2A}^2 + x_{2B}^2) \,.$$

Quindi il potenziale lagrangiano risulterà uguale a

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{L}}(x,\varphi) = mgb\cos ax - \frac{k}{2}(-b\cos ax - L\sin\varphi)^2 - \frac{k}{2}(-b\cos ax + L\sin\varphi)^2 \\ = mgb\cos ax - k(b^2\cos^2 ax + L^2\sin^2\varphi) \,. \end{aligned}$$

L'energia cinetica dell'asta, secondo il teorema di König, è data da

$$T^{\mathrm{L}}(x,\varphi) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + a^2b^2\sin^2 ax) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 \,,$$

ove I è il momento d'inerzia dell'asta intorno all'asse centrale ad essa ortogonale. Quindi le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m\dot{x}(1 + a^2b^2\sin^2 ax)\big] - \frac{1}{2}ma^3b^2\dot{x}^2\sin 2ax \\ - kab^2\sin 2ax + mgab\sin ax = 0 \,, \end{aligned}$$

e

$$I\ddot{\varphi} + kL^2\sin 2\varphi = 0 \,.$$

2) La condizione richiesta per esempio può essere ottenuta imponendo che la derivata $\dot{\varphi}$ si mantenga uniformemente distaccata da 0, ossia che

$$|\dot{\varphi}(t)| \geq c > 0 \,, \qquad \text{per ogni } t.$$

Moltiplicando la seconda equazione di Lagrange per $\dot{\varphi}$ e integrando, si ha

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}(t)^2 = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}(0)^2 + \frac{1}{2}kL^2(\cos 2\varphi(t) - \cos 2\varphi(0)) \geq \frac{1}{2}I\dot{\varphi}(0)^2 - kL^2 \,.$$

Dunque saremo nelle condizioni richieste se per esempio

$$\dot{\varphi}(0)^2 > \frac{2kL^2}{I} \,.$$

R. *Le equazioni di Lagrange sono:*

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(1 + a^2b^2\sin^2 ax) + m\dot{x}^2a^3b^2\sin 2ax - \frac{1}{2}ma^3b^2\dot{x}^2\sin 2ax \\ - kab^2\sin 2ax + mgab\sin ax = 0 \,, \\ I\ddot{\varphi} + kL^2\sin 2\varphi = 0 \,. \end{aligned}$$

La condizione per esempio è:

$$\dot{\varphi}(0)^2 > \frac{2kL^2}{I} .$$

19. [1/7/2008 (ex)II] Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è sottoposta ai seguenti vincoli:

- giace sul piano $x_3 = 0$;
- il centro C appartiene alla curva

$$x_2 = a \cos bx_1 , \qquad x_3 = 0 .$$

L'asta è sottoposta alle seguenti forze:

- la forza peso, diretta nel verso positivo dell'asse x_2;
- le due forze elastiche

  $$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{A_1A} , \qquad \boldsymbol{F}_B = -k\overrightarrow{B_1B} ,$$

  ove A_1 [rispettivamente B_1] è la proiezione di A [rispettivamente di B] sull'asse x_1.

Qui a, b, k sono costanti positive.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange;
2. dare una condizione sui dati iniziali perché l'asta nel suo moto compia una rotazione completa.

R. *Le equazioni di Lagrange sono:*

$$\begin{gathered} m\ddot{x}(1 + a^2b^2 \sin^2 bx) + m\dot{x}^2a^2b^3 \sin 2bx - \frac{1}{2}ma^2b^3\dot{x}^2 \sin 2bx \\ - ka^2b \sin 2bx + mgab \sin bx = 0 , \\ I\ddot{\varphi} + kL^2 \sin 2\varphi = 0 . \end{gathered}$$

La condizione per esempio è:

$$\dot{\varphi}(0)^2 > \frac{2kL^2}{I} .$$

20. [12/9/2008 (ex)I] Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza L è vincolata ad avere l'estremo A nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
All'estremo B è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = -kx_1\boldsymbol{e}_3 ,$$

con $k > 0$ costante.
Le condizioni iniziali sono tali che al tempo $t = 0$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{L}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 - \frac{L}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2 , \qquad \boldsymbol{v}_B = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 + \frac{v_0}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2 .$$

Scrivere le equazioni di Lagrange e ricavare un integrale primo del moto.
Soluzione
A) Scegliamo le due coordinate lagrangiane

$$\varphi \in (-\pi, \pi) , \qquad \theta \in (0, \pi) ,$$

tali che AB sia parametrizzata da

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta; \lambda(s)) = s\cos\varphi \sin\theta \boldsymbol{e}_1 + s\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + s\cos\theta\boldsymbol{e}_3 ,$$

con $0 \le s \le L$.
La velocità $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}$ quindi è

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = \dot\varphi \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} + \dot\theta\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} ,$$

con

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= -s\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + s\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 , \\ \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= s\cos\varphi\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + s\sin\varphi\cos\theta\boldsymbol{e}_2 - s\sin\theta\boldsymbol{e}_3 . \end{aligned}$$

Dunque l'energia cinetica è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{m}{L} s^2(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2)\,\mathrm{d}s = \frac{mL^2}{6}(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) .$$

Le componenti lagrangiane delle forze sono

$$\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_B}{\partial\varphi} = 0 , \qquad \boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_B}{\partial\theta} = kL^2\cos\varphi\sin^2\theta .$$

Dunque si hanno le equazioni di Lagrange

$$\begin{gathered} \frac{mL^2}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot\varphi\sin^2\theta) = 0 , \\ \frac{mL^2}{3}\ddot\theta - \frac{mL^2}{6}\dot\varphi^2\sin 2\theta = kL^2\cos\varphi\sin^2\theta . \end{gathered}$$

B) All'istante iniziale si ha

$$\varphi(0) = -\frac{\pi}{4} , \quad \theta(0) = \frac{\pi}{2} , \qquad \dot\varphi = \frac{v_0}{L} , \quad \dot\theta(0) = 0 .$$

Dalla prima delle equazioni di Lagrange si ottiene dunque

$$\dot\varphi(t)\sin^2\theta(t) = \dot\varphi(0)\sin^2\theta(0) = \frac{v_0}{L} , \qquad t > 0 .$$

R. *Equazioni di Lagrange:*

$$\frac{mL^2}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot\varphi\sin^2\theta) = 0\,,$$
$$\frac{mL^2}{3}\ddot\theta - \frac{mL^2}{6}\dot\varphi^2\sin 2\theta = kL^2\cos\varphi\sin^2\theta\,.$$

Integrale primo:

$$\dot\varphi\sin^2\theta = \frac{v_0}{L}\,.$$

21. [12/9/2008 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$x_1 = R\cos\varphi\,,\qquad x_2 = \frac{R}{\sqrt2}\sin\varphi\,,\qquad x_3 = \frac{R}{\sqrt2}\sin\varphi\,,\qquad -\pi\le\varphi\le\pi\,.$$

ove $R>0$ è costante.
Il punto è soggetto alla forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{CP}\,,$$

ove $k>0$ è costante, e

$$\overrightarrow{OC} = R\boldsymbol{e}_3\,,$$

con O origine del sistema di riferimento fisso.
Il punto è anche soggetto alla forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.

SOLUZIONE
A) Usiamo il formalismo lagrangiano; scegliamo la coordinata φ come coordinata lagrangiana in

$$-\pi<\varphi<\pi\,.$$

In questo modo si ha

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = R\dot\varphi\Big(-\sin\varphi, \frac{1}{\sqrt2}\cos\varphi, \frac{1}{\sqrt2}\cos\varphi\Big)\,,$$

e anche

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -\frac{k}{2}\left|\overrightarrow{CP}\right|^2 - mgx_3 = -kR^2\Big(1-\frac{1}{\sqrt2}\sin\varphi\Big) - \frac{1}{\sqrt2}mgR\sin\varphi\,.$$

Perciò

$$\mathcal{L} = \frac12 mR^2\dot\varphi^2 - kR^2\Big(1-\frac{1}{\sqrt2}\sin\varphi\Big) - \frac{1}{\sqrt2}mgR\sin\varphi\,.$$

L'equazione di moto dunque sarà

$$\ddot{\varphi} = \frac{k}{m}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi - \frac{g}{R\sqrt{2}}\cos\varphi\,.$$

B) Il potenziale si può scrivere come

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = costante + \frac{R}{\sqrt{2}}(kR - mg)\sin\varphi\,.$$

Quindi ha un massimo isolato in $\varphi = \pi/2$ e un minimo isolato in $\varphi = -\pi/2$ se

$$kR > mg\,,$$

e viceversa se vale la disuguaglianza opposta.
Se

$$kR = mg\,,$$

tutte le posizioni sono di equilibrio (instabile).
R.

$$\ddot{\varphi} = \frac{k}{m}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi - \frac{g}{R\sqrt{2}}\cos\varphi\,.$$

$$\begin{array}{llll} \varphi = \dfrac{\pi}{2} & \text{stabile,} & \varphi = -\dfrac{\pi}{2} & \text{instabile,} \quad \text{se } kR > mg; \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} & \text{instabile,} & \varphi = -\dfrac{\pi}{2} & \text{stabile,} \quad \text{se } kR < mg; \end{array}$$

tutte le posizioni sono di equilibrio instabile se $kR = mg$.

22. [12/9/2008 (ex)II] Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata ad avere il centro C nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
All'estremo B è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = -kx_2\boldsymbol{e}_3\,,$$

con $k > 0$ costante.
Le condizioni iniziali sono tali che al tempo $t = 0$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{L}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 - \frac{L}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{v}_B = 0\,.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange e ricavare un integrale primo del moto.
R. *Equazioni di Lagrange:*

$$\frac{mL^2}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\sin^2\theta) = 0\,,$$
$$\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{mL^2}{6}\dot{\varphi}^2\sin 2\theta = kL^2\sin\varphi\sin^2\theta\,.$$

Integrale primo:

$$\dot{\varphi} = 0\,.$$

23. [12/9/2008 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$x_1 = R\cos\varphi\,, \qquad x_2 = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\varphi\,, \qquad x_3 = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\varphi\,, \qquad -\pi \le \varphi \le \pi\,.$$

ove $R > 0$ è costante.
Il punto è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{CP}\,,$$

ove $k > 0$ è costante, e

$$\overrightarrow{OC} = -R\boldsymbol{e}_3\,,$$

con O origine del sistema di riferimento fisso.
Il punto è anche soggetto alla forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.

R.

$$\ddot{\varphi} = \frac{k}{m}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi - \frac{g}{R\sqrt{2}}\cos\varphi\,.$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ *stabile,* $\quad\varphi = -\frac{\pi}{2}$ *instabile,* $\quad$ *se* $kR > mg$;
$\varphi = \frac{\pi}{2}$ *instabile,* $\quad\varphi = -\frac{\pi}{2}$ *stabile,* $\quad$ *se* $kR < mg$;

tutte le posizioni sono di equilibrio instabile se $kR = mg$.

24. [12/6/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla curva

$$x_3 = 0\,, \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1\,,$$

ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}_P = -k\overrightarrow{AP}\,,$$

ove

$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_3\,.$$

Qui a, b, R, k sono costanti positive, con $a > b$.
Si determinino l'equazione di moto del punto, e le posizioni di equilibrio.
Soluzione

A) Usiamo come coordinata lagrangiana l'angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che la posizione del punto sia data da

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi) = a\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + b\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,.$$

L'energia cinetica dunque è

$$T^{\mathrm{L}}(\varphi, \dot\varphi) = \frac{1}{2} m\dot\varphi^2 (a^2 \sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) \,.$$

Il potenziale della forza elastica è

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -\frac{k}{2}(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + R^2) \,,$$

per cui la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot\varphi^2 (a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) - \frac{k}{2}(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + R^2) \,.$$

L'equazione di Lagrange sarà perciò

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m\dot\varphi(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\big] - \frac{1}{2}m\dot\varphi^2(a^2-b^2)\sin 2\varphi - \frac{k}{2}(a^2-b^2)\sin 2\varphi = 0 \,.$$

B) All'equilibrio, cioè per $\varphi \equiv \varphi_0$, si deve avere

$$-\frac{k}{2}(a^2-b^2)\sin 2\varphi = 0 \,,$$

cioè una tra le

$$\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2} \,, \qquad \varphi_0 = 0 \,, \qquad \varphi_0 = \pi \,.$$

La soluzione $\varphi_0 = \pi$ in effetti è fuori dell'aperto di variazione Q della coordinata lagrangiana, ma la si trova scegliendo invece $Q = (0,2\pi)$: i calcoli restano invariati.
R.

$$m\ddot\varphi(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) + \frac{1}{2}(m\dot\varphi^2 - k)(a^2-b^2)\sin 2\varphi = 0 \,,$$
$$\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2} \,, \qquad \varphi_0 = 0 \,, \qquad \varphi_0 = \pi \,.$$

25. [12/6/2009 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla curva

$$x_3 = 0 \,, \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \,,$$

ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}_P = k\overrightarrow{AP} \,,$$

ove

$$\overrightarrow{OA} = -R\boldsymbol{e}_3 \,,$$

e al peso

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{peso}} = -mg\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui a, b, R, k sono costanti positive, con $a > b$.
Si determinino l'equazione di moto del punto, e le posizioni di equilibrio.
R.

$$m\ddot{\varphi}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) + \frac{1}{2}(m\dot{\varphi}^2 + k)(a^2 - b^2)\sin 2\varphi = 0\,,$$
$$\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}\,, \qquad \varphi_0 = 0\,, \qquad \varphi_0 = \pi\,.$$

26. [15/7/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato al cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,.$$

Sul punto P agisce il peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Le condizioni iniziali del moto sono

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_2\,.$$

1. Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.

2. Dare una condizione su v_0 perché risulti $\overrightarrow{OP}(t)$ ortogonale a $\boldsymbol{e}_1$ prima che $x_{3P}(t) = -R$.

Soluzione
1) Il punto ha due gradi di libertà. Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$z = x_{3P} \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi)\,,$$

tali che

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\,.$$

Allora

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)\,,$$

e

$$U^{\mathrm{L}} = -mgx_3(z,\varphi) = -mgz\,.$$

Dunque

$$\mathcal{L}(z,\varphi) = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz\,,$$

e le equazioni di Lagrange sono

$$mR^2\ddot{\varphi} = 0\,,$$
$$m\ddot{z} + mg = 0\,.$$

2) La soluzione corrispondente ai dati iniziali assegnati, ossia a

$$\varphi(0) = 0\,, \qquad \dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{R}\,, \qquad z(0) = 0\,, \qquad \dot{z}(0) = 0\,,$$

è

$$\varphi(t) = \frac{v_0}{R} t \,, \qquad z(t) = -\frac{g}{2} t^2 \,.$$

Dunque vogliamo che il primo $\bar{t}$ tale che

$$|\varphi(\bar{t})| = \frac{|v_0|}{R} \bar{t} = \frac{\pi}{2} \,,$$

soddisfi

$$z(\bar{t}) = -\frac{g}{2} \bar{t}^2 \geq -R \,.$$

Questo significa

$$\frac{g}{2} \Big(\frac{\pi R}{2|v_0|} \Big)^2 \leq R \,.$$

R.

$$1) \qquad mR^2 \ddot{\varphi} = 0 \,, \quad m\ddot{z} + mg = 0 \,.$$

$$2) \qquad v_0^2 \geq \frac{g}{8} \pi^2 R \,.$$

27. [15/7/2009 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato al cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,.$$

Sul punto P agisce il peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Le condizioni iniziali del moto sono

$$\overrightarrow{OP}(0) = -R\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = -v_0 \boldsymbol{e}_2 \,.$$

1. Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
2. Dare una condizione su v_0 perché $\overrightarrow{OP}(t)$ ritorni ortogonale a $\boldsymbol{e}_2$ (per un tempo positivo t) con $x_{3P}(t) > -R$.

R.

$$1) \qquad mR^2 \ddot{\varphi} = 0 \,, \quad m\ddot{z} + mg = 0 \,.$$

$$2) \qquad v_0^2 \geq \frac{g}{2} \pi^2 R \,.$$

28. [11/9/2009 (ex)I] Un corpo rigido è formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R, e da un punto P di massa m solidale al disco, fissato al bordo del disco.
Il rigido è vincolato a ruotare intorno all'asse x_1 del sistema di riferimento fisso (O, x_i). Tale asse si mantiene perpendicolare al disco nel suo centro C, che è a sua volta fissato nell'origine O.

La forza peso è diretta nel verso negativo dell'asse x_3. Sul rigido agisce anche la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_P = -k\overrightarrow{AP}\,,$$

applicata in P, ove A è tale che

$$\overrightarrow{OA} = L\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui k, L, R sono costanti positive.

- Scrivere le equazioni di moto del rigido.
- Trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

SOLUZIONE

A) Visto che il rigido è vincolato a ruotare intorno a un asse fisso, ha un solo grado di libertà. Introduciamo come coordinata lagrangiana l'angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_3\,.$$

L'energia cinetica del rigido è data da

$$T^{\mathrm{L}} = T^{\mathrm{L}}_{\mathrm{disco}} + T^{\mathrm{L}}_{\mathrm{punto}} = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2\,.$$

Entrambe le forze applicate sono conservative; il potenziale della forza elastica è

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}\left|\overrightarrow{AP}\right|^2 = -\frac{k}{2}[(L-R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi]$$
$$= \frac{k}{2}[L^2 + R^2 - 2LR\cos\varphi]\,.$$

Prendendo poi come livello zero per il potenziale gravitazionale $x_3 = 0$, si ha

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{peso}} = U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{peso;disco}} + U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{peso};P} = U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{peso};P} = -mgR\sin\varphi\,.$$

Dunque la lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2 + kLR\cos\varphi - mgR\sin\varphi\,,$$

e l'equazione di Lagrange è

$$(I + mR^2)\ddot\varphi = -kLR\sin\varphi - mgR\cos\varphi\,.$$

B) Le posizioni di equilibrio corrispondono a

$$\frac{\mathrm{d}U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}\varphi} = -kLR\sin\varphi - mgR\cos\varphi = 0\,,$$

ossia a

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{mg}{kL}\,,$$

che ha come soluzioni

$$\varphi_0 = -\operatorname{arctg}\frac{mg}{kL} \in \Big(-\frac{\pi}{2}, 0\Big)\,, \qquad \varphi_1 = \varphi_0 + \pi \in \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big)\,.$$

Per studiare la stabilità calcoliamo

$$\frac{\mathrm{d}^2 U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}\varphi^2} = -kLR\cos\varphi + mgR\sin\varphi\,.$$

Dunque

$$\frac{\mathrm{d}^2 U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}\varphi^2}(\varphi_0) < 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}\varphi^2}(\varphi_1) > 0\,,$$

e quindi φ_0 è un punto di massimo isolato, e perciò è stabile; invece φ_1 è un punto di minimo isolato, e perciò è instabile.

R.

$$(I + mR^2)\ddot{\varphi} = -kLR\sin\varphi - mgR\cos\varphi\,.$$

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = -\operatorname{arctg}\frac{mg}{kL} \in \Big(-\frac{\pi}{2}, 0\Big)\,, && \textit{stabile;} \\ &\varphi_1 = \varphi_0 + \pi \in \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big)\,, && \textit{instabile.} \end{aligned}$$

29. [11/9/2009 (ex)II] Un corpo rigido è formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R, e da un punto P di massa m solidale al disco, fissato al bordo del disco.
Il rigido è vincolato a ruotare intorno all'asse x_1 del sistema di riferimento fisso (O, x_i). Tale asse si mantiene perpendicolare al disco nel suo centro C, che è a sua volta fissato nell'origine O.
La forza peso è diretta nel verso negativo dell'asse x_3. Sul rigido agisce anche la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{AQ}\,,$$

ove Q è il punto solidale con il rigido tale che

$$\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{CQ}\,,$$

e A è tale che

$$\overrightarrow{OA} = L\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui k, L, R sono costanti positive.

- Scrivere le equazioni di moto del rigido.
- Trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

R.

$$(I + mR^2)\ddot{\varphi} = kLR\sin\varphi - mgR\cos\varphi\,.$$

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{mg}{kL} \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big)\,, && \textit{instabile;} \\ &\varphi_1 = \varphi_0 - \pi \in \Big(-\pi, -\frac{\pi}{2}\Big)\,, && \textit{stabile.} \end{aligned}$$

30. [25/1/2010 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2 = \beta \cos(\alpha x_1) \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Qui α, $\beta > 0$ sono costanti.

L'asta è soggetta alla forza peso diretta secondo il verso negativo dell'asse x_2.
Scrivere la lagrangiana dell'asta.
SOLUZIONE
Usiamo come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1A} \in \boldsymbol{R} \,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi) \,,$$

tali che

$$\overrightarrow{AB} = 2L \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + 2L \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Perciò il punto generico P dell'asta è dato da

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = x\boldsymbol{e}_1 + \beta\cos(\alpha x_1)\boldsymbol{e}_2 + s\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + s\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 \,,$$

$0 \le s \le 2L$, *e la sua velocità è data da*

$$\boldsymbol{v} = (\dot{x} - s\dot{\varphi}\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (-\alpha\beta\dot{x}\sin(\alpha x) + s\dot{\varphi}\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} T^{\text{L}} &= \frac{1}{2}\frac{m}{2L}\int_0^{2L} (\dot{x}^2 - 2s\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + s^2\dot{\varphi}^2 + \alpha^2\beta^2\dot{x}^2\sin^2(\alpha x) - 2\alpha\beta\dot{x}\dot{\varphi}s\sin(\alpha x)\cos\varphi)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{m}{2}(1 + \alpha^2\beta^2\sin^2(\alpha x))\dot{x}^2 - mL(\sin\varphi + \alpha\beta\sin(\alpha x)\cos\varphi)\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{2mL^2}{3}\dot{\varphi}^2 \,. \end{aligned}$$

Il potenziale della forza peso è

$$U^{\text{L}} = -mgx_{2C} = -mg(\beta\cos(\alpha x) + L\sin\varphi) \,.$$

R.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{m}{2}(1 + \alpha^2\beta^2\sin^2(\alpha x))\dot{x}^2 - mL(\sin\varphi + \alpha\beta\sin(\alpha x)\cos\varphi)\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{2mL^2}{3}\dot{\varphi}^2 \\ - mg(\beta\cos(\alpha x) + L\sin\varphi) \,. \end{aligned}$$

31. [25/1/2010 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- ad avere il centro C sulla curva

$$x_2 = \beta \cos(\alpha x_1) \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Qui α, $\beta > 0$ sono costanti.

L'asta è soggetta alla forza peso diretta secondo il verso negativo dell'asse x_2.
Scrivere la lagrangiana dell'asta.
R.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(1 + \alpha^2\beta^2 \sin^2(\alpha x))\dot{x}^2 + \frac{mL^2}{6}\dot{\varphi}^2 - mg\beta\cos(\alpha x) .$$

32. [22/2/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha\sin(\beta x_1) + \gamma x_2^2 ,$$

ove α, β, γ sono costanti positive.
Il punto è soggetto alla forza peso diretta nel verso negativo dell'asse x_3.
Il punto parte con velocità iniziale nulla nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = 0 .$$

Qui $(O, \boldsymbol{e}_i)$ denota il sistema fisso, con coordinate (x_i).
Scrivere le equazioni di moto del punto, e dedurne che il moto è piano.
SOLUZIONE
Usiamo come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane $x = x_1$, $y = x_2 \in \boldsymbol{R}$. Allora

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{e}_1 + \dot{y}\boldsymbol{e}_2 + [\alpha\beta\dot{x}\cos(\beta x) + 2\gamma y\dot{y}]\boldsymbol{e}_3 ,$$

e

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -mg[\alpha\sin(\beta x) + \gamma y^2] .$$

Quindi la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\big\{[1 + \alpha^2\beta^2\cos^2(\beta x)]\dot{x}^2 + (1 + 4\gamma^2y^2)\dot{y}^2 + 4\alpha\beta\gamma\dot{x}\dot{y}y\cos(\beta x)\big\} \\ - mg[\alpha\sin(\beta x) + \gamma y^2] .$$

Le equazioni di moto dunque sono

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{m\big([1 + \alpha^2\beta^2\cos^2(\beta x)]\dot{x} + 2\alpha\beta\gamma\dot{y}y\cos(\beta x)\big)\big\} + \frac{1}{2}m\alpha^2\beta^3\sin(2\beta x)\dot{x}^2 \\ + 2m\alpha\beta^2\gamma\dot{x}\dot{y}y\sin(\beta x) + mg\alpha\beta\cos(\beta x) = 0 ,$$

e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{m\big((1 + 4\gamma^2y^2)\dot{y} + 2\alpha\beta\gamma\dot{x}y\cos(\beta x)\big)\big\} - 4m\gamma^2y\dot{y}^2 \\ - 2m\alpha\beta\gamma\dot{x}\dot{y}\cos(\beta x) + 2mg\gamma y = 0 .$$

Si vede (usando il teorema di unicità) che la soluzione è tale che $y = 0$, quindi il moto avviene sul piano $x_2 = 0$.

R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{m\big([1+\alpha^2\beta^2\cos^2(\beta x)]\dot{x}+2\alpha\beta\gamma\dot{y}y\cos(\beta x)\big)\big\}+\frac{1}{2}m\alpha^2\beta^3\sin(2\beta x)\dot{x}^2$$
$$+2m\alpha\beta^2\gamma\dot{x}\dot{y}y\sin(\beta x)+mg\alpha\beta\cos(\beta x)=0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{m\big((1+4\gamma^2y^2)\dot{y}+2\alpha\beta\gamma\dot{x}y\cos(\beta x)\big)\big\}-4m\gamma^2y\dot{y}^2$$
$$-2m\alpha\beta\gamma\dot{x}\dot{y}\cos(\beta x)+2mg\gamma y=0\,.$$

33. [22/2/2010 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3=\alpha\sin(\beta x_1)+\gamma x_2^2\,,$$

ove α, β, γ sono costanti positive.
Il punto è soggetto alla forza peso diretta nel verso negativo dell'asse x_3.
Il punto parte con velocità iniziale nulla nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0)=-\frac{\pi}{2\beta}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{e}_2+\Big(\frac{1}{\gamma}-\alpha\Big)\boldsymbol{e}_3\,.$$

Qui $(O,\boldsymbol{e}_i)$ denota il sistema fisso, con coordinate (x_i).
Scrivere le equazioni di moto del punto, e dedurne che il moto è piano.
R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{m\big([1+\alpha^2\beta^2\cos^2(\beta x)]\dot{x}+2\alpha\beta\gamma\dot{y}y\cos(\beta x)\big)\big\}+\frac{1}{2}m\alpha^2\beta^3\sin(2\beta x)\dot{x}^2$$
$$+2m\alpha\beta^2\gamma\dot{x}\dot{y}y\sin(\beta x)+mg\alpha\beta\cos(\beta x)=0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{m\big((1+4\gamma^2y^2)\dot{y}+2\alpha\beta\gamma\dot{x}y\cos(\beta x)\big)\big\}-4m\gamma^2y\dot{y}^2$$
$$-2m\alpha\beta\gamma\dot{x}\dot{y}\cos(\beta x)+2mg\gamma y=0\,.$$

34. [9/4/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla sfera

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2\,.$$

Il punto è soggetto alla forza peso diretta nel verso negativo dell'asse x_3 e alla forza

$$\boldsymbol{F}=\alpha x_1\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui α, $R>0$ sono costanti, e (O,x_i) denota il sistema di riferimento fisso.
Scrivere le equazioni di Lagrange per il moto.
Soluzione

Si noti che $\boldsymbol{F}$ *non è conservativa, dunque non si può usare la funzione lagrangiana. Scegliamo le coordinate lagrangiane* $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in (0, \pi)$ *in modo che*

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos\varphi\sin\theta\,, \\ x_2 &= R\sin\varphi\sin\theta\,, \\ x_3 &= R\cos\theta\,. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_P = R[(-\dot\varphi\sin\varphi\sin\theta + \dot\theta\cos\varphi\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 \\ + (\dot\varphi\cos\varphi\sin\theta + \dot\theta\sin\varphi\cos\theta)\boldsymbol{e}_2 - \dot\theta\sin\theta\boldsymbol{e}_3]\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}mR^2(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2)\,.$$

Le componenti lagrangiane delle forze sono date, secondo la loro definizione, da:

$$\begin{aligned} Q_\varphi = (-mg\boldsymbol{e}_3 + \alpha x_1\boldsymbol{e}_2)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= -mg\cdot 0 + \alpha x_1 R\cos\varphi\sin\theta \\ &= \alpha x_1 R\cos\varphi\sin\theta\,, \end{aligned}$$

e da:

$$Q_\theta = (-mg\boldsymbol{e}_3 + \alpha x_1\boldsymbol{e}_2)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} = mgR\sin\theta + \alpha x_1 R\sin\varphi\cos\theta\,.$$

R.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot\varphi\sin^2\theta] &= \alpha x_1 R\cos\varphi\sin\theta\,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot\theta] - \frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2\sin 2\theta &= mgR\sin\theta + \alpha x_1 R\sin\varphi\cos\theta\,. \end{aligned}$$

35. [20/1/2014 (ex)I] Un punto materiale P di massa M è vincolato al cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,.$$

Sul punto agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_3. Il punto parte dalla posizione (R,0,0), con velocità iniziale $\boldsymbol{v}(0)$ tale che

$$\boldsymbol{v}(0)\cdot\boldsymbol{e}_2 > 0\,, \qquad \boldsymbol{v}(0)\cdot\boldsymbol{e}_3 > 0\,.$$

Dare una condizione su $\boldsymbol{v}(0)$ che garantisca che nell'istante in cui il punto raggiunge la sua massima quota x_3 esso si trovi sulla retta

$$x_1 = -R\,, \qquad x_2 = 0\,.$$

Soluzione

Introduciamo le coordinate lagrangiane

$$z = x_{3P} \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \varphi \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\Big)\,,$$

tali che se O è l'origine del sistema di riferimento

$$\overrightarrow{OP} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)\,.$$

Dunque la velocità di P è data da

$$\boldsymbol{v} = (-R\dot\varphi\sin\varphi, R\dot\varphi\cos\varphi, \dot z)\,.$$

Il potenziale lagrangiano invece è

$$U^{\mathrm{L}}(z,\varphi) = -mgz\,.$$

Dunque la lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - mgz\,,$$

per cui le equazioni di Lagrange sono

$$mR^2\ddot\varphi = 0\,,$$
$$m\ddot z + mg = 0\,.$$

Usando i dati del problema indichiamo le condizioni iniziali con

$$z(0) = 0\,,\quad \varphi(0) = 0\,,\quad \dot z(0) = \dot z_0 > 0\,,\quad \dot\varphi(0) = \dot\varphi_0 > 0\,.$$

A questo punto le equazioni di Lagrange si integrano immediatamente ottenendo

$$z(t) = \dot z_0 t - \frac{1}{2}gt^2\,,\qquad \varphi(t) = \dot\varphi_0 t\,.$$

L'istante in cui P raggiunge la quota massima è pertanto

$$\bar t = \frac{\dot z_0}{g}\,,$$

e quindi in tale istante deve valere secondo la richiesta del problema

$$\pi = \varphi(\bar t) = \dot\varphi_0\bar t = \frac{\dot\varphi_0\dot z_0}{g}\,.$$

R.
$$\boldsymbol{v}(0) = \frac{\pi R g}{\lambda}\boldsymbol{e}_2 + \lambda\boldsymbol{e}_3\,,\qquad \lambda > 0\,.$$

36. [20/1/2014 (ex)II] Un punto materiale P di massa M è vincolato al cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,.$$

Sul punto agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP}\,,$$

ove $k > 0$ è costante e O è l'origine del sistema di riferimento.

Il punto parte dalla posizione $(R{,}0{,}0)$, con velocità iniziale $\boldsymbol{v}(0)$ tale che

$$\boldsymbol{v}(0) \cdot \boldsymbol{e}_2 > 0\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) \cdot \boldsymbol{e}_3 > 0\,.$$

Dare una condizione su $\boldsymbol{v}(0)$ che garantisca che nell'istante in cui il punto raggiunge la sua massima quota x_3 esso si trovi sulla retta

$$x_1 = -R\,, \qquad x_2 = 0\,.$$

SOLUZIONE
Introduciamo le coordinate lagrangiane

$$z = x_{3P} \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \varphi \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\Big)\,,$$

tali che se O è l'origine del sistema di riferimento

$$\overrightarrow{OP} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)\,.$$

Dunque la velocità di P è data da

$$\boldsymbol{v} = (-R\dot\varphi\sin\varphi, R\dot\varphi\cos\varphi, \dot z)\,.$$

Il potenziale lagrangiano invece è

$$U^{\mathrm{L}}(z,\varphi) = -\frac{k}{2}(R^2 + z^2)\,.$$

Dunque la lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - \frac{k}{2}(R^2 + z^2)\,,$$

per cui le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} mR^2\ddot\varphi &= 0\,, \\ m\ddot z + kz &= 0\,. \end{aligned}$$

Usando i dati del problema indichiamo le condizioni iniziali con

$$z(0) = 0\,, \quad \varphi(0) = 0\,, \quad \dot z(0) = \dot z_0 > 0\,, \quad \dot\varphi(0) = \dot\varphi_0 > 0\,.$$

Le equazioni di Lagrange si integrano esattamente ottenendo

$$\varphi(t) = \dot\varphi_0 t\,, \qquad z(t) = \frac{\dot z_0}{\omega}\sin(\omega t)\,, \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

La massima quota $\dot z_0/\omega$ viene raggiunta nell'istante

$$\bar t = \frac{\pi}{2\omega}\,,$$

in cui dobbiamo pertanto imporre

$$\varphi(\bar t) = \dot\varphi_0 \bar t = \pi\,.$$

R.

$$\boldsymbol{v}(0) = 2R\sqrt{\frac{k}{m}}\boldsymbol{e}_2 + \mu\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \mu > 0\,.$$

37. [17/2/2014 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una sfera di raggio R con centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Su di esso non sono applicate forze.
Si mostri che, a parte il caso della quiete, la traiettoria è sempre una circonferenza di raggio R, indicandone la dipendenza dalle condizioni iniziali del moto.
Soluzione
Possiamo scegliere come rappresentazione lagrangiana del moto

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{u}_3\,,$$

con $\varphi \in (-\pi,\pi)$, $\theta \in (0,\pi)$, ove la terna ortonormale fissa $(\boldsymbol{u}_h)$ è stata scelta proprio in modo tale che, intanto, valga

$$\overrightarrow{OP}(0) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big) = R\boldsymbol{u}_1\,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{v}_P(0) = R\dot\varphi(0)\boldsymbol{u}_2 - R\dot\theta(0)\boldsymbol{u}_3\,,$$

e scegliamo ora

$$\dot\varphi(0) = 0\,, \qquad \dot\theta(0) = -\frac{|\boldsymbol{v}_P(0)|}{R}\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{v}_P(0)}{|\boldsymbol{v}_P(0)|}\,,$$

se $\boldsymbol{v}_P(0) \neq 0$; altrimenti $\boldsymbol{u}_3$ e perciò $\boldsymbol{u}_2$ restano arbitrari.
L'energia cinetica è data da

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}mR^2(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2)\,.$$

Dunque le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot\varphi\sin\theta) &= 0\,,\\ \frac{\mathrm{d}\dot\theta}{\mathrm{d}t} - \dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta &= 0\,,\end{aligned}$$

con le condizioni iniziali

$$\varphi(0) = 0\,, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{2}\,, \quad \dot\varphi(0) = 0\,, \quad \dot\theta(0) = -\frac{|\boldsymbol{v}_P(0)|}{R}\,.$$

Dunque è facile vedere che il sistema di Lagrange è risolto da

$$(\varphi(t),\theta(t)) = \Big(0, \dot\theta(0)t + \frac{\pi}{2}\Big)\,.$$

R. *Il moto avviene sulla circonferenza massima che passa per la posizione iniziale ed è tangente alla velocità iniziale, se questa non è nulla. Altrimenti il moto è la quiete.*

38. [17/2/2014 (ex)I] Un disco D di centro C, massa M e raggio R è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$. Qui $(O, (x_h))$ è il sistema di riferimento fisso. Su di esso agisce una distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(P) = \lambda \overrightarrow{CP} \times \boldsymbol{e}_3 \,\mathrm{d}\mu \,, \qquad P \in D \,,$$

ove $\mathrm{d}\mu$ rappresenta la misura di superficie sul disco, e $\lambda > 0$ è costante.
Scrivere le equazioni di Lagrange del disco.
Soluzione
Il rigido ha tre gradi di libertà; scegliamo in corrispondenza le tre coordinate lagrangiane

$$x = x_{1C} \in \boldsymbol{R} \,, \qquad y = x_{2C} \in \boldsymbol{R} \,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi) \,,$$

ove φ è tale che

$$\overrightarrow{CA} = R \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,,$$

e A è un punto solidale con il disco sul suo bordo. L'energia cinetica del disco può essere trovata con il teorema di König:

$$T = \frac{1}{2} M |\boldsymbol{v}_C|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \,,$$

ove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare del disco e $\boldsymbol{\sigma}$ il suo tensore d'inerzia in C. Dunque

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} (2I) \dot{\varphi}^2 \,,$$

se I indica il momento d'inerzia diametrale del disco.
Dobbiamo poi calcolare le componenti lagrangiane delle forze. Si ha la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(x, y, \varphi; s, \theta) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + s\cos(\varphi + \theta)\boldsymbol{e}_1 + s\sin(\varphi + \theta)\boldsymbol{e}_2 \,,$$

ove $s \in [0, R]$ e $\theta \in [0,2\pi)$ sono due parametri geometrici del disco; in pratica s è la distanza dal centro e θ un'anomalia polare solidale che ha $\overrightarrow{CA}$ come semiretta di riferimento.
Calcoliamo intanto

$$\overrightarrow{CP} \times \boldsymbol{e}_3 = -s\cos(\varphi + \theta)\boldsymbol{e}_2 + s\sin(\varphi + \theta)\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Poi si ha per definizione di componenti lagrangiane delle forze:

$$Q_x = \iint_D \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} = \lambda \int_0^R \int_0^{2\pi} \overrightarrow{CP} \times \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 s \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}\theta$$
$$= \lambda \int_0^R \int_0^{2\pi} s^2 \sin(\varphi + \theta) \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}\theta = 0 \,.$$

Analogamente $Q_y = 0$. Infine

$$Q_\varphi = \iint_D \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = \lambda \int_0^R \int_0^{2\pi} [-\cos(\varphi+\theta)\boldsymbol{e}_2 + \sin(\varphi+\theta)\boldsymbol{e}_1] \cdot [-\sin(\varphi+\theta)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\varphi+\theta)\boldsymbol{e}_2] s^3 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}\theta$$
$$= \lambda \int_0^R s^3 \,\mathrm{d}s \int_0^{2\pi} (-1) \,\mathrm{d}\theta = -2\pi\lambda \frac{R^4}{4} \,.$$

R.

$$
\begin{aligned}
M\ddot{x} &= 0\,,\\
M\ddot{y} &= 0\,,\\
2I\ddot{\varphi} &= -\pi\lambda\frac{R^4}{2}\,.
\end{aligned}
$$

39. [17/2/2014 (ex)II] Un disco D di centro C, massa M e raggio R è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$. Qui $(O, (x_h))$ è il sistema di riferimento fisso. Su di esso agisce una distribuzione di forze

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{F}(P) = \lambda|\overrightarrow{CP}|\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{CP}\,\mathrm{d}\mu\,, \qquad P \in D\,,
$$

ove $\mathrm{d}\mu$ rappresenta la misura di superficie sul disco, e $\lambda > 0$ è costante. Scrivere le equazioni di Lagrange del disco.
R.

$$
\begin{aligned}
M\ddot{x} &= 0\,,\\
M\ddot{y} &= 0\,,\\
I\ddot{\varphi} &= \pi\lambda\frac{R^5}{5}\,.
\end{aligned}
$$

40. [19/6/2014 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie S ottenuta ruotando la parabola

$$
x_2 = L + \alpha x_3^2\,, \qquad x_3 \in \boldsymbol{R}\,,
$$

intorno all'asse x_3. Qui L e α sono costanti positive.
Su di esso agisce il peso

$$
-mg\boldsymbol{e}_3\,.
$$

Si assuma che il moto avvenga tutto o sulla parte di S ove $x_3 > 0$ o su quella ove $x_3 < 0$.

- Si scrivano le equazioni di moto di P.
- Si dica se sono possibili moti in cui P si mantiene a distanza fissa dall'asse x_3, e li si descriva qualitativamente.

Soluzione
La superficie S ha equazione

$$
\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = L + \alpha x_3^2\,, \qquad x_3 \in \boldsymbol{R}\,.
$$

Scegliamo come coordinate lagrangiane quelle polari della proiezione di P su $x_3 = 0$, cosicché

$$\overrightarrow{OP} = r\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + r\sin\varphi \boldsymbol{u}_2 \pm \frac{\sqrt{r-L}}{\alpha} \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $r \in (L, +\infty)$, $\varphi \in (0{,}2\pi)$. Qui e di seguito usiamo la convenzione per cui nei simboli $\pm$ e $\mp$ il segno superiore corrisponde alla parte di S ove $x_3 > 0$, quello inferiore alla parte ove $x_3 < 0$.
Quindi con calcoli immediati

$$|\boldsymbol{v}_P|^2 = \dot{r}^2\Big(1 + \frac{1}{4\alpha(r-L)}\Big) + r^2\dot{\varphi}^2 \,,$$

e

$$U = -mgx_3 = \mp mg\frac{\sqrt{r-L}}{\sqrt{\alpha}} \,,$$

e quindi la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\Big[\dot{r}^2\Big(1 + \frac{1}{4\alpha(r-L)}\Big) + r^2\dot{\varphi}^2\Big] \mp mg\frac{\sqrt{r-L}}{\sqrt{\alpha}} \,.$$

Le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[m\dot{r}\Big(1 + \frac{1}{4\alpha(r-L)}\Big)\Big] - m\Big[r\dot{\varphi}^2 \mp g\frac{1}{2\sqrt{\alpha(r-L)}}\Big] = 0 \,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mr^2\dot{\varphi}] = 0 \,.$$

Quindi in un moto in cui $r = r_0 > 0$ costante, si deve avere anche $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ costante e

$$\dot{\varphi}_0^2 = \pm\frac{g}{2\sqrt{\alpha}}\,\frac{1}{r_0\sqrt{r_0 - L}} \,,$$

il che è possibile solo se il moto avviene sulla falda superiore di S.
R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[m\dot{r}\Big(1 + \frac{1}{4\alpha(r-L)}\Big)\Big] - m\Big[r\dot{\varphi}^2 \mp g\frac{1}{2\sqrt{\alpha(r-L)}}\Big] = 0 \,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mr^2\dot{\varphi}] = 0 \,.$$

I moti con $r = r_0$ costante possono avvenire solo su $x_3 > 0$ e sono moti circolari uniformi con

$$\dot{\varphi}_0^2 = \frac{g}{2\sqrt{\alpha}}\,\frac{1}{r_0\sqrt{r_0 - L}} \,.$$

41. [17/7/2014 (ex)I] Due aste AB e CD di uguale lunghezza $2L$ e massa M sono vincolate a giacere nel piano $x_3 = 0$ e ad avere ciascuna il centro in un punto fisso del piano $x_3 = 0$, ossia rispettivamente

$$\overrightarrow{OP_1} = 0 \,, \qquad \overrightarrow{OP_2} = R\boldsymbol{e}_1 \,,$$

ove P_1 $[P_2]$ è il centro di AB $[CD]$ e $R > 4L$. Qui $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{e}_i))$ è il sistema di riferimento fisso, e le (x_i) sono le coordinate in tale sistema.
Gli estremi A e C si attraggono con forza elastica

$$\boldsymbol{F}_A = k\overrightarrow{AC} = -\boldsymbol{F}_C \,,$$

con $k > 0$.
Ricavare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
Soluzione
Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$\varphi \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \Big) \,, \theta \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \Big) \,,$$

tali che

$$\overrightarrow{AB} = 2L\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + 2L\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,, \quad \overrightarrow{CD} = 2L\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + 2L\sin\theta \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Dunque

$$\overrightarrow{AC} = (R - L\cos\theta + L\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (-L\sin\theta + L\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Quindi il potenziale elastico è

$$U^{\mathrm{L}} = -\frac{k}{2}[R^2 + 2L^2 - 2L^2\cos(\theta - \varphi) + 2RL(\cos\varphi - \cos\theta)] \,.$$

Le equazioni che danno l'equilibrio sono pertanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= L^2 k \sin(\theta - \varphi) + RLk\sin\varphi = 0 \,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} &= -L^2 k \sin(\theta - \varphi) - RLk\sin\theta = 0 \,. \end{aligned}$$

Pertanto all'equilibrio si ha

$$\sin\varphi = \sin\theta \,,$$

il che implica uno dei due casi

$$A) \quad \theta = \varphi \,, \qquad B) \quad \theta = \pi - \varphi \,.$$

Nel caso i) si ha

$$\sin(\theta - \varphi) = \sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \{0, \pi\} \,.$$

Nel caso ii) si ha invece

$$\sin(\theta - \varphi) = \sin(\pi - 2\varphi) = \sin(2\varphi) \,,$$

Usando la prima delle due equazioni sopra si ottiene perciò

$$2L\sin\varphi\cos\varphi + R\sin\varphi = 0 \,,$$

il che implica l'alternativa

$$\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad (\varphi, \theta) \in \{(0, \pi), (\pi, 0)\} \,,$$

oppure

$$\sin\varphi \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = -\frac{R}{2L} < -2\,,$$

che è impossibile.
Concludendo le posizioni (φ, θ) *di equilibrio sono date da*

$$(0{,}0\,, \quad (\pi, \pi)\,, \quad (0, \pi)\,, \quad (\pi{,}0)\,.$$

Calcoliamo le componenti della matrice hessiana

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi^2} &= -L^2 k \cos(\theta - \varphi) + RLk \cos\varphi\,,\\
\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi \partial \theta} &= L^2 k \cos(\theta - \varphi)\,,\\
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta}\theta &= -L^2 k \cos(\theta - \varphi) - RLk \cos\theta\,.
\end{aligned}$$

Si vede facilmente che in $(0{,}0)$ *e in* (π, π) *la matrice hessiana è indefinita, mentre in* $(0, \pi)$ *è definita positiva. Infine in* $(\pi{,}0)$ *è definita negativa.*
R. *Le posizioni di equilibrio sono:* $(0{,}0)$, (π, π), $(0, \pi)$ *(instabili), e* $(\pi{,}0)$ *(stabile).*

42. [13/1/2015 (ex)I] Una circonferenza materiale γ_1 di massa M e raggio R è vincolata a giacere sul piano verticale $x_3 = 0$, con il centro coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso. Qui le x_i indicano le coordinate in tale sistema.
Una seconda circonferenza γ_2 di centro C, raggio $r < R$ e massa m è vincolata a rotolare senza strisciare su γ_1, mantenendosi al suo interno e giacendo anch'essa sul piano $x_3 = 0$.
Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_2$.
Si determinino le velocità angolari delle due circonferenze e si scrivano le equazioni di Lagrange del sistema.
[Si scelgano come coordinate lagrangiane le anomalie polari θ di un punto A solidale con γ_1 e φ di C.]
SOLUZIONE
Il sistema ha due gradi di libertà; scegliamo come coordinate lagrangiane $\theta \in (-\pi, \pi)$ *e* $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *tali che*

$$\overrightarrow{OA} = R\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta \boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{OC} = \rho\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \rho\sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,,$$

ove $A \in \gamma_1$ *è un punto solidale con* γ_1 *e* $\rho := R - r$.
Indichiamo con B *il punto in cui* γ_1 *e* γ_2 *si toccano in un istante* $\bar{t}$ *fissato ad arbitrio. Sia poi* B_i, $i = 1, 2$ *il punto solidale con* γ_i *tale che per* $t = \bar{t}$ *si abbia* $B_i = B$. *Per definizione di contatto senza strisciamento si deve avere in tale istante*

$$\boldsymbol{v}_{B_1} = \boldsymbol{v}_{B_2}\,. \tag{1}$$

Si noti che vale per ovvi motivi geometrici

$$\overrightarrow{OB_i} = R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,, \qquad i = 1\,,2\,,$$

e dunque

$$\boldsymbol{v}_{B_1} = \boldsymbol{\omega}_{\gamma_1} \times \overrightarrow{OB_1} = R\dot{\theta}[-\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2] .$$

Inoltre

$$\boldsymbol{v}_{B_2} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{\gamma_2} \times \overrightarrow{CB_2} .$$

Si ha subito

$$\boldsymbol{v}_C = \rho\dot{\varphi}[-\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2] , \qquad \overrightarrow{CB_2} = r\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 .$$

Dato che il moto della terna solidale con γ_2 è una rotazione di asse $\boldsymbol{e}_3$ si avrà

$$\boldsymbol{\omega}_{\gamma_2} = \omega_3 \boldsymbol{e}_3 .$$

Per determinare ω_3 imponiamo la (1), ottenendo con i calcoli che essa è equivalente a

$$\omega_3 = \frac{R}{r}\dot{\theta} - \frac{\rho}{r}\dot{\varphi} .$$

Perciò l'energia cinetica del sistema è data da

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\Big(\frac{R}{r}\dot{\theta} - \frac{\rho}{r}\dot{\varphi}\Big)^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\varphi}^2 ,$$

ove si è usato anche il teorema di König. Il potenziale della forza peso è

$$U^{\mathrm{L}} = -mgx_{2C} = -mg\rho\sin\varphi .$$

R.

$$\boldsymbol{\omega}_{\gamma_1} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_3 , \qquad \boldsymbol{\omega}_{\gamma_2} = \Big(\frac{R}{r}\dot{\theta} - \frac{\rho}{r}\dot{\varphi}\Big)\boldsymbol{e}_3 , \qquad \rho := R - r .$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[MR^2\dot{\theta} + mRr\Big(\frac{R}{r}\dot{\theta} - \frac{\rho}{r}\dot{\varphi}\Big)\Big] = 0 ,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[- mr\rho\Big(\frac{R}{r}\dot{\theta} - \frac{\rho}{r}\dot{\varphi}\Big) + m\rho^2\dot{\varphi}\Big] + mg\rho\cos\varphi = 0 .$$

43. [13/1/2015 (ex)II] Una circonferenza materiale γ_1 di massa M e raggio R è vincolata a giacere sul piano verticale $x_3 = 0$, con il centro coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso. Qui le x_i indicano le coordinate in tale sistema.
Una seconda circonferenza γ_2 di centro C, raggio r e massa m è vincolata a rotolare senza strisciare su γ_1, mantenendosi al suo esterno e giacendo anch'essa sul piano $x_3 = 0$.
Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_2$.
Si determinino le velocità angolari delle due circonferenze e si scrivano le equazioni di Lagrange del sistema.
[Si scelgano come coordinate lagrangiane le anomalie polari θ di un punto A solidale con γ_1 e φ di C.]
R.

$$\boldsymbol{\omega}_{\gamma_1} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_3 , \qquad \boldsymbol{\omega}_{\gamma_2} = \Big(\frac{\rho}{r}\dot{\varphi} - \frac{R}{r}\dot{\theta}\Big)\boldsymbol{e}_3 , \qquad \rho := R + r .$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[MR^2\dot\theta + mRr\Big(\frac{R}{r}\dot\theta - \frac{\rho}{r}\dot\varphi\Big)\Big] = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[-mr\rho\Big(\frac{R}{r}\dot\theta - \frac{\rho}{r}\dot\varphi\Big) + m\rho^2\dot\varphi\Big] + mg\rho\cos\varphi = 0\,.$$

44. [10/2/2015 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di raggio R e massa M è vincolata a ruotare intorno al suo diametro AB che giace sull'asse x_3 del sistema di riferimento fisso; i punti A e B sono fissi e solidali con γ. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su γ.
Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema e dare una condizione sui parametri M, m, R perché valga, se $\boldsymbol{\omega}$ denota la velocità angolare della circonferenza, che

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}(0)| \le |\boldsymbol{\omega}(t)| \le 2|\boldsymbol{\omega}(0)|\,, \qquad t > 0\,,$$

per qualunque scelta delle condizioni iniziali.
Soluzione
A) Possiamo assumere che il centro della circonferenza sia nell'origine del sistema di riferimento fisso $(O,(\boldsymbol{e}_h))$. Consideriamo la terna solidale con la circonferenza

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_2$ sia ortogonale al piano della circonferenza. Allora P avrà parametrizzazione lagrangiana

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3\,.$$

Qui φ, $\theta \in (-\pi,\pi)$. Dunque la velocità di P sarà

$$\boldsymbol{v} = -R\dot\theta\sin\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot\varphi\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta\cos\theta\boldsymbol{u}_3\,.$$

Pertanto l'energia cinetica del sistema è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\cos^2\theta)\,.$$

Qui $I = MR^2/2$ è il momento diametrale d'inerzia della circonferenza.
Si hanno le equazioni di Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I\dot\varphi + mR^2\dot\varphi\cos^2\theta] = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot\theta] + \frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2\sin 2\theta = 0\,.$$

B) Si hanno gli integrali primi dell'energia, ossia $T^{\mathrm{L}} =$ costante, e

$$\dot\varphi = \frac{C}{I + mR^2\cos^2\theta}\,,$$

che segue subito dalla prima equazione di Lagrange. Qui C è una costante dipendente dalle condizioni iniziali. Poiché

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3\,,$$

si hanno le stime cercate se

$$2\min_{\theta\in[-\pi,\pi]}\frac{1}{I+mR^2\cos^2\theta} \geq \max_{\theta\in[-\pi,\pi]}\frac{1}{I+mR^2\cos^2\theta}\,,$$

ossia se

$$\frac{2}{I+mR^2} \geq \frac{1}{I}\,.$$

R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I\dot{\varphi}+mR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta] = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot{\theta}] + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2\sin 2\theta = 0\,;$$
$$M \geq 2m\,.$$

45. [10/2/2015 (ex)II] Una circonferenza materiale γ di raggio r e massa m è vincolata a ruotare intorno al suo diametro AB che giace sull'asse x_2 del sistema di riferimento fisso; i punti A e B sono fissi e solidali con γ. Un punto materiale P di massa M è vincolato a muoversi su γ.
Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema e trovare due integrali primi del moto.
R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I\dot{\varphi}+mR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta] = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot{\theta}] + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2\sin 2\theta = 0\,;$$

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\cos^2\theta) = C_1\,,$$
$$\dot{\varphi} = \frac{C_2}{I+mR^2\cos^2\theta}\,.$$

46. [4/6/2015 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di massa M e raggio R è vincolata ad avere un punto solidale A nell'origine O del sistema fisso $(O,(x_i))$, e a giacere sul piano $x_3=0$.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sulla circonferenza. Sul sistema agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_2$.

- Si scriva la lagrangiana del sistema.

- Si determinino gli eventuali punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

SOLUZIONE

A) Sia AB il diametro di γ passante per A e sia DC il diametro a esso ortogonale. Sia G il centro della circonferenza. Scegliamo le coordinate lagrangiane $\varphi \in (-\pi/4, 7\pi/4)$ e $\theta \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\overrightarrow{DC} = 2R(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2)\,, \quad \overrightarrow{GP} = R(\cos(\varphi+\theta)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\varphi+\theta)\boldsymbol{e}_2)\,.$$

In questo modo θ è l'angolo tra $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{GP}$.
Dunque l'energia cinetica del sistema è data da

$$T = T_\gamma + T_P = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_P|^2\,.$$

Poiché

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}\,, \qquad \overrightarrow{OG} = R(\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 - \cos\varphi \boldsymbol{e}_2)\,,$$

si ha

$$\boldsymbol{v}_P = R\dot{\varphi}(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2) + R(\dot{\varphi}+\dot{\theta})(-\sin(\varphi+\theta)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\varphi+\theta)\boldsymbol{e}_2)\,.$$

Perciò

$$|\boldsymbol{v}_P|^2 = R^2[\dot{\varphi}^2 + (\dot{\varphi}+\dot{\theta})^2 - 2\dot{\varphi}(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\sin\theta]\,.$$

Infine il potenziale è dato da

$$U = U_\gamma + U_P = MgR\cos\varphi - mgR(-\cos\varphi + \sin(\varphi+\theta))\,.$$

B) All'equilibrio si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \varphi} &= -MgR\sin\varphi - mgR\sin\varphi - mgR\cos(\varphi+\theta) = 0\,,\\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= -mgR\cos(\varphi+\theta) = 0\,.\end{aligned}$$

Dunque

$$\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \{0, \pi\}\,,$$

e

$$\cos(\varphi+\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi+\theta \in \Big\{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\Big\}\,.$$

Ne segue che le soluzioni (φ, θ) sono

$$\Big(0, -\frac{\pi}{2}\Big)\,, \quad \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big)\,, \quad \Big(\pi, -\frac{\pi}{2}\Big)\,, \quad \Big(\pi, \frac{\pi}{2}\Big)\,.$$

Valutiamo l'hessiana

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} &= -(M+m)gR\cos\varphi + mgR\sin(\varphi+\theta)\,,\\ \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \theta} &= mgR\sin(\varphi+\theta)\,,\\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} &= mgR\sin(\varphi+\theta)\,.\end{aligned}$$

Perciò si ha nei punti di equilibrio

$$D^2U\Big(0,-\frac{\pi}{2}\Big)=\begin{pmatrix}-(M+2m)gR & -mgR\\ -mgR & -mgR\end{pmatrix}\,,\qquad \textit{definita negativa, equilibrio stabile;}$$
$$D^2U\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big)=\begin{pmatrix}-MgR & mgR\\ mgR & mgR\end{pmatrix}\,,\qquad \textit{indefinita, equilibrio instabile;}$$
$$D^2U\Big(\pi,-\frac{\pi}{2}\Big)=\begin{pmatrix}(M+m)gR & mgR\\ mgR & mgR\end{pmatrix}\,,\qquad \textit{definita positiva, equilibrio instabile;}$$
$$D^2U\Big(\pi,\frac{\pi}{2}\Big)=\begin{pmatrix}MgR & -mgR\\ -mgR & -mgR\end{pmatrix}\,,\qquad \textit{indefinita, equilibrio instabile.}$$

R.

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}I\dot\varphi^2+\frac{1}{2}mR^2[\dot\varphi^2+(\dot\varphi+\dot\theta)^2-2\dot\varphi(\dot\varphi+\dot\theta)\sin\theta]+MgR\cos\varphi-mgR(-\cos\varphi+\sin(\varphi+\theta))\,.$$

I punti di equilibrio sono

$$\Big(0,-\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \Big(0,\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \Big(\pi,-\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \Big(\pi,\frac{\pi}{2}\Big)\,,$$

di cui solo il primo è stabile.

47. [4/6/2015 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere sul piano $x_3=0$. Su di essa agisce la distribuzione di forze elastiche

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=-ks\overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}s\,,\qquad P\in AB\,,$$

ove $k>0$ è costante, e $s\in[0,2L]$ è l'ascissa di P su AB misurata a partire da A. Qui $(O,(\boldsymbol{e}_i))$ è il sistema fisso di riferimento.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Determinare le posizioni di equilibrio dell'asta.

Soluzione

A) Scegliamo le coordinate lagrangiane

$$x\in\boldsymbol{R}\,,\qquad y\in\boldsymbol{R}\,,\qquad \varphi\in\Big(-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\Big)\,,$$

tali che

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2\,,\qquad \overrightarrow{AB}=2L(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1+\sin\varphi\boldsymbol{e}_2)\,,$$

cosicché il moto del generico punto dell'asta è dato da

$$\boldsymbol{X}=(x+s\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1+(y+s\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2\,.$$

L'energia cinetica è data per il teorema di König da

$$T=\frac{1}{2}I\dot\varphi^2+\frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_G|^2\,.$$

Dato che

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + L(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2)\,,$$

si ha

$$\boldsymbol{v}_G = (\dot{x} - L\dot{\varphi}\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (\dot{y} + L\dot{\varphi}\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2\,.$$

Dunque

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{\varphi}(\dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi)]\,.$$

La componente lagrangiana delle forze è dovuta alla distribuzione $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ *assegnata. In particolare le equazioni di moto sono*

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M\dot{x} - ML\dot{\varphi}\sin\varphi] = Q_x = -\int_{AB} ks\boldsymbol{X}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x}\,\mathrm{d}s = -2kL^2x - \frac{8}{3}kL^3\cos\varphi\,,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M\dot{y} + ML\dot{\varphi}\cos\varphi] = Q_y = -\int_{AB} ks\boldsymbol{X}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial y}\,\mathrm{d}s = -2kL^2y - \frac{8}{3}kL^3\sin\varphi\,,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[ML^2\dot{\varphi} + ML(\dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi) + I\dot{\varphi}] + ML\dot{\varphi}(\dot{y}\sin\varphi + \dot{x}\cos\varphi)\\
&\quad = Q_\varphi = -\int_{AB} ks\boldsymbol{X}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}s = -\frac{8}{3}kL^3(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)\,.
\end{aligned}$$

B) L'equilibrio si ottiene se

$$\dot{x} = 0\,,\qquad \dot{y} = 0\,,\qquad \dot{\varphi} = 0\,.$$

Dunque dalle equazioni di moto si hanno le equazioni dell'equilibrio

$$\begin{aligned}
x + \frac{4}{3}L\cos\varphi &= 0\,,\\
y + \frac{4}{3}L\sin\varphi &= 0\,,\\
-x\cos\varphi + y\sin\varphi &= 0\,.
\end{aligned}$$

Si vede per sostituzione che la terza è sempre soddisfatta in conseguenza delle prime due. Dunque le posizioni di equilbrio sono

$$x = -\frac{4}{3}L\cos\varphi\,,\qquad y = -\frac{4}{3}L\sin\varphi\,,\qquad -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}\,.$$

R.

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M\dot{x} - ML\dot{\varphi}\sin\varphi] = -2kL^2x - \frac{8}{3}kL^3\cos\varphi\,,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M\dot{y} + ML\dot{\varphi}\cos\varphi] = -2kL^2y - \frac{8}{3}kL^3\sin\varphi\,,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[ML^2\dot{\varphi} + ML(\dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi) + I\dot{\varphi}] + ML\dot{\varphi}(\dot{y}\sin\varphi + \dot{x}\cos\varphi)\\
&\quad = -\frac{8}{3}kL^3(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)\,.
\end{aligned}$$

Posizioni di equilibrio:

$$x = -\frac{4}{3}L\cos\varphi\,,\qquad y = -\frac{4}{3}L\sin\varphi\,,\qquad -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}\,.$$

48. [4/6/2015 (ex)II] Una circonferenza materiale γ di massa m e raggio L è vincolata ad avere un punto solidale B nel punto $2L\boldsymbol{e}_1$ del sistema fisso $(O,(x_i))$, e a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Un punto materiale P di massa M è vincolato a muoversi sulla circonferenza. Sul sistema agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_2$.

- Si scriva la lagrangiana del sistema.
- Si determinino gli eventuali punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

R.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2+\frac{1}{2}ML^2[\dot\varphi^2+(\dot\varphi+\dot\theta)^2-2\dot\varphi(\dot\varphi+\dot\theta)\sin\theta]+mgL\cos\varphi-mgL(-\cos\varphi+\sin(\varphi+\theta))\,.$$

I punti di equilibrio sono

$$\Big(0,-\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \Big(0,\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \Big(\pi,-\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \Big(\pi,\frac{\pi}{2}\Big)\,,$$

di cui solo il primo è stabile.

49. [4/6/2015 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere sul piano $x_1 = 0$. Su di essa agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = ks^2\overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}s\,,\qquad P\in AB\,,$$

ove $k > 0$ è costante, e $s \in [0,2L]$ è l'ascissa di P su AB misurata a partire da A. Qui $(O,(\boldsymbol{e}_i))$ è il sistema fisso di riferimento.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Determinare le posizioni di equilibrio dell'asta.

R.

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M\dot x - ML\dot\varphi\sin\varphi] = \frac{8}{3}kL^3x + 4kL^4\cos\varphi\,,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M\dot y + ML\dot\varphi\cos\varphi] = \frac{8}{3}kL^3y + 4kL^4\sin\varphi\,,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[ML^2\dot\varphi + ML(\dot y\cos\varphi - \dot x\sin\varphi) + I\dot\varphi] + ML\dot\varphi(\dot y\sin\varphi + \dot x\cos\varphi)\\
&\quad = 4kL^4(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)\,.
\end{aligned}$$

Posizioni di equilibrio:

$$x = -\frac{3}{2}L\cos\varphi\,,\qquad y = -\frac{3}{2}L\sin\varphi\,,\qquad -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}\,.$$

50. [3/9/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$\frac{x_3^2}{a^2} = -1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{b^2}\,, \qquad x_3 < 0\,,$$

ove a, $b > 0$ sono costanti assegnate.
Su P agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
- Dimostrare che non esistono moti lungo i quali x_3 si mantiene costante.

SOLUZIONE
Usiamo come coordinate lagrangiane $r \in (b, +\infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *tali che*

$$\overrightarrow{OP} = r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 - \frac{a}{b}\sqrt{r^2 - b^2}\boldsymbol{e}_3\,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{v} = \dot r(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2) + r\dot\varphi(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2) - \frac{a}{b}\frac{r\dot r}{\sqrt{r^2 - b^2}}\boldsymbol{e}_3\,.$$

Quindi

$$|\boldsymbol{v}|^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + \frac{a^2}{b^2}\frac{r^2\dot r^2}{r^2 - b^2}\,.$$

Il potenziale della forza peso si esprime in coordinate lagrangiane come

$$U^{\mathrm{L}}(r,\varphi) = -mgx_3 = mg\frac{a}{b}\sqrt{r^2 - b^2}\,.$$

Pertanto

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big\{\dot r^2\Big(1 + \frac{a^2}{b^2}\frac{r^2}{r^2 - b^2}\Big) + r^2\dot\varphi^2\Big\} + mg\frac{a}{b}\sqrt{r^2 - b^2}\,,$$

e le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\dot r\Big(1 + \frac{a^2}{b^2}\frac{r^2}{r^2 - b^2}\Big)\Big] + \dot r^2\frac{a^2}{b^2}\frac{br}{(r^2 - b^2)^2} - r\dot\varphi^2 - g\frac{a}{b}\frac{r}{\sqrt{r^2 - b^2}} = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[r^2\dot\varphi] = 0\,.$$

B) Poiché dunque $r\dot\varphi^2 = c$*, dalla prima equazione si ottiene poi, se* $r = r_0$ *costante,*

$$-\frac{c^2}{r_0^3} - g\frac{a}{b}\frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 - b^2}} = 0\,,$$

assurdo perché il membro di sinistra è negativo.
Si lascia al lettore come esercizio ulteriore la dimostrazione, basata su un argomento simile, che $r(t)$ *non può rimanere limitato durante il moto.*
R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\dot r\Big(1 + \frac{a^2}{b^2}\frac{r^2}{r^2 - b^2}\Big)\Big] + \dot r^2\frac{a^2}{b^2}\frac{br}{(r^2 - b^2)^2} - r\dot\varphi^2 - g\frac{a}{b}\frac{r}{\sqrt{r^2 - b^2}} = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[r^2\dot\varphi] = 0\,.$$

51. [3/9/2015 (ex)I] Un mezzo disco di centro C, massa M e raggio R è vincolato a giacere sul piano coordinato fisso $x_3 = 0$.
Su di esso agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = k(\overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} \,\mathrm{d}\mu \,,$$

ove P denota il generico punto del mezzo disco, $\mathrm{d}\mu$ l'usuale misura di area e $\boldsymbol{u}$ è il versore solidale con il mezzo disco e parallelo a $\overrightarrow{CA}$, ove A è uno degli estremi del diametro che delimita il mezzo disco. Inoltre O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Qui $k > 0$ è una costante assegnata.
Calcolare le componenti lagrangiane della distribuzione $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$.
SOLUZIONE
Parametrizziamo il mezzo disco mediante le coordinate lagrangiane

$$(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi) \,,$$

tali che

$$\overrightarrow{OC} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{u} = \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Dunque il mezzo disco risulta parametrizzato da

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(x, y, \varphi; r, \theta) = \overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + r\cos(\varphi + \theta)\boldsymbol{e}_1 + r\sin(\varphi + \theta)\boldsymbol{e}_2 \,,$$

con $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, \pi]$. *Inoltre con i calcoli si ottiene*

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = k[x\cos\varphi + y\sin\varphi + r\cos\theta]\boldsymbol{u} \,\mathrm{d}\mu \,.$$

Pertanto per definizione di Q_i *si ottiene*

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= \int_{\textit{mezzo disco}} \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} \\ &= k \int_0^R r \int_0^\pi [x\cos\varphi + y\sin\varphi + r\cos\theta]\boldsymbol{u} \cdot [-r\sin(\varphi + \theta)\boldsymbol{e}_1 + r\cos(\varphi + \theta)\boldsymbol{e}_2] \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}r \\ &= -k \int_0^R r^2 \int_0^\pi [x\cos\varphi + y\sin\varphi + r\cos\theta] \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}r \\ &= -\frac{2}{3} kR^3 [x\cos\varphi + y\sin\varphi] \,. \end{aligned}$$

Poi si calcola

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_{\textit{mezzo disco}} \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} \\ &= k \int_0^R r \int_0^\pi [x\cos\varphi + y\sin\varphi + r\cos\theta]\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_1 \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2} kR^2 [x\cos\varphi + y\sin\varphi] \cos\varphi \,. \end{aligned}$$

In modo simile si trova anche Q_y.

R.

$$Q_\varphi = -\frac{2}{3}kR^3[x\cos\varphi + y\sin\varphi]\,, \quad Q_x = \frac{\pi}{2}kR^2[x\cos\varphi + y\sin\varphi]\cos\varphi\,,$$
$$Q_y = \frac{\pi}{2}kR^2[x\cos\varphi + y\sin\varphi]\sin\varphi\,.$$

52. [9/2/2016 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L < 2R$ e massa M è vincolata a mantenere l'estremo A sulla circonferenza fissa

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

e a giacere sul piano $x_3 = 0$, mantenendosi ortogonale alla circonferenza; B è esterno alla circonferenza.
Sull'asta agiscono il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_2$, e una forza data da

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -\mu x_2 \boldsymbol{v}\chi_{AB}\,\mathrm{d}s\,,$$

ove s denota l'ascissa sulla retta di AB e $\mu > 0$ è costante.
Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
SOLUZIONE
L'asta ha un grado di libertà; scegliamo come coordinata lagrangiana $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\overrightarrow{OA} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

Allora se P denota il punto generico delll'asta a distanza $s \in [0,2L]$ da A

$$\overrightarrow{OP} = (R+s)\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + (R+s)\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

La componente lagrangiana della forza peso si può trovare usando il potenziale

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{peso}} = -Mgx_{2G} = -Mg(R+L)\sin\varphi\,,$$

per cui

$$Q_{\varphi\,;\mathrm{peso}} = \frac{\partial U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{peso}}}{\partial\varphi} = -Mg(R+L)\cos\varphi\,.$$

Invece la componente della distribuzione $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ verrà trovata usando la definizione; calcoliamo

$$\boldsymbol{v} = \dot\varphi(R+s)[-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2]\,, \qquad \frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = (R+s)[-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2]\,.$$

Dunque

$$Q_{\varphi\,;\mathrm{F}} = -\mu\int_{AB} x_2\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}s = -\mu\int_0^{2L}(R+s)\sin\varphi(R+s)^2\dot\varphi\,\mathrm{d}s$$
$$= -\mu\frac{(R+2L)^4 - R^4}{4}\dot\varphi\sin\varphi\,.$$

R.
$$Q_\varphi = -Mg(R+L)\cos\varphi - \mu\frac{(R+2L)^4 - R^4}{4}\dot\varphi\sin\varphi\,.$$

53. [9/2/2016 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L < 2R$ e massa M è vincolata a mantenere l'estremo A sulla circonferenza fissa
$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$
e a giacere sul piano $x_3 = 0$, mantenendosi ortogonale alla circonferenza; B è interno alla circonferenza.
Sull'asta agiscono il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_2$, e una forza data da
$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mu x_1 \boldsymbol{v}\chi_{AB}\,\mathrm{d}s\,,$$
ove s denota l'ascissa sulla retta di AB e $\mu > 0$ è costante.
Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
R.
$$Q_\varphi = -Mg(R-L)\cos\varphi + \mu\frac{R^4 - (R-2L)^4}{4}\dot\varphi\cos\varphi\,.$$

54. [19/3/2016 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie data, in coordinate cilindriche, da
$$z = rf(\varphi)\,, \qquad r > 0\,,$$
ove $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e φ sono appunto le usuali coordinate polari nel piano (x,y). La $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è un'assegnata funzione positiva, periodica con periodo 2π.
Sul punto agisce la forza data, per una $g \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, da
$$\boldsymbol{F} = g(z)\boldsymbol{e}_3\,.$$
Si diano condizioni su f e g perché siano possibili moti di P in cui $\varphi(t) = \varphi_0 \in (-\pi,\pi)$ per ogni t.
R.
$$f'(\varphi_0) = 0\,.$$

55. [7/6/2016 (ex)I] Un disco di centro C, massa M e raggio R è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Su di esso agisce la forza applicata nel punto A
$$\boldsymbol{F}_A = k\overrightarrow{CA} \times \boldsymbol{e}_3\,,$$

ove A è un punto solidale con il disco a distanza $2R$ da C. Qui $k > 0$ è costante.
Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che il moto non è periodico.
SOLUZIONE
A) Introduciamo le tre coordinate lagrangiane x, $y \in \boldsymbol{R}$ e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *tali che*

$$\overrightarrow{OC} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \overrightarrow{CA} = 2R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + 2R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 \,,$$

cosicché

$$\boldsymbol{X}_A = \overrightarrow{OA} = (x + 2R\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (y + 2R\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Allora per il teorema di König

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 \,,$$

ove I *è il momento assiale del disco.*
Calcoliamo poi le componenti lagrangiane della forza

$$\boldsymbol{F}_A = 2kR(\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 - \cos\varphi\boldsymbol{e}_2) \,;$$

esse ammontano a

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial \boldsymbol{X}_A}{\partial x} \cdot \boldsymbol{F}_A = 2kR\sin\varphi \,, \\ Q_y &= \frac{\partial \boldsymbol{X}_A}{\partial y} \cdot \boldsymbol{F}_A = -2kR\cos\varphi \,, \\ Q_\varphi &= \frac{\partial \boldsymbol{X}_A}{\partial \varphi} \cdot \boldsymbol{F}_A = -4kR^2 \,. \end{aligned}$$

Pertanto le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= 2kR\sin\varphi \,, \\ M\ddot{y} &= -2kR\cos\varphi \,, \\ I\ddot{\varphi} &= -4kR^2 \,. \end{aligned}$$

B) Si ha dalla terza equazione di moto

$$\varphi(t) = -\frac{2kR^2}{I}t^2 + \dot{\varphi}(0)t + \varphi(0) \,,$$

quindi il moto non è periodico.
R.

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= kR\sin\varphi \,, \\ M\ddot{y} &= -kR\cos\varphi \,, \\ I\ddot{\varphi} &= -4kR^2 \,. \end{aligned}$$

56. [12/7/2016 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie ottenuta ruotando la curva

$$z = \alpha x + \beta\sin(\lambda x) \,, \quad x > 0 \,; \qquad y = 0 \,,$$

intorno all'asse z.
Sul punto agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza

$$\boldsymbol{F} = k(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) .$$

Qui α, β, λ, $k > 0$ sono costanti assegnate.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Si dimostri che esistono moti circolari e che i possibili raggi di tali moti sono limitati da una costante dipendente solo dai parametri del problema.

Soluzione
La superficie ha equazione

$$z = \alpha\sqrt{x^2+y^2} + \beta\sin(\lambda\sqrt{x^2+y^2}) , \qquad x^2+y^2>0 .$$

Introduciamo per P le coordinate lagrangiane

$$r \in (0,+\infty) , \qquad \varphi \in (-\pi,\pi) ,$$

tali che

$$\overrightarrow{OP} = r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + (\alpha r + \beta\sin(\lambda r))\boldsymbol{e}_3 .$$

Dunque

$$\boldsymbol{v} = \dot r[\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + (\alpha+\beta\sin(\lambda r))\boldsymbol{e}_3] + \dot\varphi[-r\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + r\cos\varphi\boldsymbol{e}_2] .$$

Perciò

$$T = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 = \frac{1}{2}m\{\dot r^2[1+(\alpha+\beta\lambda\cos(\lambda r))^2] + r^2\dot\varphi^2\} .$$

Il potenziale completo delle forze è

$$U = -mgz + \frac{k}{2}(x^2+y^2) = -mg(\alpha r + \beta\sin(\lambda r)) + \frac{k}{2}r^2 .$$

Le equazioni di moto pertanto sono

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\dot r[1+(\alpha+\beta\lambda\cos(\lambda r))^2]\} \\
&\quad - m\{-\dot r^2(\alpha+\beta\lambda\cos(\lambda r))\beta\lambda^2\sin(\lambda r) + r\dot\varphi^2\} = -mg(\alpha+\beta\lambda\cos(\lambda r)) + kr , \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{mr^2\dot\varphi\} = 0 .
\end{aligned}$$

B) Se esistono dei moti per cui $r(t) = r_0$ per ogni t, la seconda equazione dà $\ddot\varphi = 0$, da cui $\dot\varphi(t) = \dot\varphi_0$. Allora la prima equazione diviene

$$-mr\dot\varphi_0^2 = -mg(\alpha+\beta\lambda\cos(\lambda r)) + kr ,$$

ossia

$$r = \frac{mg}{m\dot\varphi_0^2 + k}(\alpha+\beta\lambda\cos(\lambda r)) =: h(r) . \tag{1}$$

Dato che per ogni fissato $\dot\varphi_0 \in \boldsymbol{R}$ *si ha*

$$\lim_{r\to 0+} h(r) = \frac{mg}{m\dot\varphi_0^2 + k}(\alpha + \beta\lambda) > 0 \,,$$

ma h *si mantiene limitata su* $(0, +\infty)$ *l'equazione* (1) *ha almeno una soluzione. Inoltre tutte le soluzioni soddisfano*

$$r \le \frac{mg}{m\dot\varphi_0^2 + k}(\alpha + \beta\lambda) \le \frac{mg}{k}(\alpha + \beta\lambda) \,.$$

R.

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\dot r[1 + (\alpha + \beta\lambda\cos(\lambda r))^2]\} \\ &\quad - m\{-\dot r^2(\alpha + \beta\lambda\cos(\lambda r))\beta\lambda^2\sin(\lambda r) + r\dot\varphi^2\} = -mg(\alpha + \beta\lambda\cos(\lambda r)) + kr \,, \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{mr^2\dot\varphi\} = 0 \,. \end{aligned}$$

La limitazione è

$$r \le \frac{mg}{k}(\alpha + \beta\lambda) \,.$$

57. [6/9/2016 (ex)I] Due punti materiali P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 sono vincolati ad appartenere al piano $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso $(O, (x_h))$ e a mantenersi allineati con l'origine O (ossia: O, P_1 e P_2 appartengono a una stessa retta in ciascun istante, non necessariamente costante nel tempo). Si assuma sempre che né P_1 né P_2 coincidano con O e che O si trovi tra i due punti P_i.
Sui punti agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_2$.

- Si scrivano le equazioni di moto.
- Si trovino le eventuali configurazioni di equilibrio.

Soluzione
A) Il sistema ha 3 gradi di libertà; i vincoli infatti possono essere espressi come

$$x_{3P_1} = 0 \,, \quad x_{3P_2} = 0 \,, \quad x_{1P_1}x_{2P_2} - x_{2P_1}x_{1P_2} = 0 \,.$$

Introduciamo le coordinate lagrangiane

$$r \,, \rho \in (0, +\infty) \,, \qquad \varphi \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\Big) \,,$$

tali che

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_1} &= \rho\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 \,, \\ \overrightarrow{OP_2} &= -r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 - r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 \,. \end{aligned}$$

Dunque la velocità di P_1 *vale*

$$\boldsymbol{v}_1 = \dot\rho(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2) + \rho\dot\varphi(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2) \,,$$

e

$$|\boldsymbol{v}_1|^2 = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 \,.$$

Analogamente

$$|\boldsymbol{v}_2|^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 \,.$$

Inoltre

$$U^{\mathrm{L}}(\rho, r, \varphi) = -m_1 g\rho \sin\varphi + m_2 g r \sin\varphi \,.$$

Infine

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2) + \frac{1}{2} m_2(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - (m_1\rho - m_2 r) g \sin\varphi \,.$$

Dunque le equazioni di moto sono

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m_1\dot\rho] - (m_1\rho\dot\varphi^2 - m_1 g\sin\varphi) &= 0 \,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m_2\dot r] - (m_2 r\dot\varphi^2 + m_2 g\sin\varphi) &= 0 \,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(m_1\rho^2 + m_2 r^2)\dot\varphi] + (m_1\rho - m_2 r) g\cos\varphi &= 0 \,. \end{aligned}$$

B) Cerchiamo le posizioni di equilibrio come soluzioni di

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\rho} &= -m_1 g\sin\varphi = 0 \,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial r} &= m_2 g\sin\varphi = 0 \,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= (-m_1 g\rho + m_2 g r)\cos\varphi = 0 \,. \end{aligned}$$

Si ottiene per le soluzioni $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ e $m_1\rho = m_2 r$.
R.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m_1\dot\rho] - (m_1\rho\dot\varphi^2 - m_1 g\sin\varphi) &= 0 \,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m_2\dot r] - (m_2 r\dot\varphi^2 + m_2 g\sin\varphi) &= 0 \,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(m_1\rho^2 + m_2 r^2)\dot\varphi] + (m_1\rho - m_2 r) g\cos\varphi &= 0 \,. \end{aligned}$$

Posizioni di equilibrio: tutte quelle in cui $\varphi = 0$ o $\varphi = \pi$ e $m_1\rho = m_2 r$.

58. [6/9/2016 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di massa M, centro C e raggio R è vincolata a giacere sul piano fisso $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso $(O, (x_h))$.
La circonferenza γ è soggetta alla distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(P) = -k(\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA})\overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}s \,.$$

Qui A è un punto di γ a essa solidale, P è il generico punto di γ e $k > 0$ è una costante assegnata.

Calcolare le componenti lagrangiane delle forze.

SOLUZIONE

Fissiamo un sistema di riferimento $\mathcal{S} = (C, (\boldsymbol{u}_h))$ *solidale con* γ *in modo che*

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{CA}}{R}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3.$$

Allora scriveremo

$$\overrightarrow{CP} = R\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{u}_2, \qquad \varphi \in [0,2\pi).$$

Introduciamo le tre coordinate lagrangiane

$$x, y \in \boldsymbol{R}, \qquad \theta \in (-\pi, \pi),$$

tali che

$$\overrightarrow{OC} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2, \qquad \overrightarrow{CA} = R\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta \boldsymbol{e}_2,$$

si ottiene sostituendo nell'espressione di $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ *la parametrizzazione della circonferenza e la definizione di* $\boldsymbol{u}_h$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(P) = -kR^2\cos\varphi[(x + R\cos(\varphi+\theta))\boldsymbol{e}_1 + (y + R\sin(\varphi+\theta))\boldsymbol{e}_2]\,\mathrm{d}s.$$

A questo punto possiamo applicare la definizione delle Q_h*. Si ha con i calcoli*

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} = \int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_1 \\ &= -kR^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi(x + R\cos\varphi\cos\theta - R\sin\varphi\sin\theta)R\,\mathrm{d}\varphi \\ &= -kR^4\pi\cos\theta. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} Q_y &= \int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial y} = \int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ &= -kR^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi(y + R\sin\varphi\cos\theta + R\cos\varphi\sin\theta)R\,\mathrm{d}\varphi \\ &= -kR^4\pi\sin\theta. \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} Q_\theta &= \int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} = \int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot [-R\sin(\varphi+\theta)\boldsymbol{e}_1 + R\cos(\varphi+\theta)\boldsymbol{e}_2] \\ &= -kR^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi[-Rx\sin(\varphi+\theta) + Ry\cos(\varphi+\theta)]R\,\mathrm{d}\varphi \\ &= -kR^4\pi(-x\sin\theta + y\cos\theta). \end{aligned}$$

Oppure possiamo osservare che la forza $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ *è conservativa, con potenziale*

$$\mathrm{d}U = -k(\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA})\frac{|\overrightarrow{OP}|^2}{2}\,\mathrm{d}s.$$

È importante notare allo scopo che il fattore scalare $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA}$ *non dipende dalla posizione di* P *nel sistema fisso, ma solo dalle sue coordinate solidali. Dunque si ha*

$$\mathrm{d}U^{\mathrm{L}} = -\frac{1}{2}kR^2\cos\varphi[x^2+y^2+R^2+2Rx\cos(\varphi+\theta)+2Ry\sin(\varphi+\theta)]\,\mathrm{d}s\,.$$

Integrando

$$U^{\mathrm{L}}(x,y,\theta) = \int_\gamma \mathrm{d}U^{\mathrm{L}} = -kR^4\pi(x\cos\theta + y\sin\theta)\,.$$

Poi le Q_h *si ritrovano come derivate parziali di* U^{L} *rispetto a* q_h*.*
R.

$$\begin{aligned}
Q_x &= -kR^4\pi\cos\theta\,,\\
Q_y &= -kR^4\pi\sin\theta\,,\\
Q_\theta &= -kR^4\pi(-x\sin\theta + y\cos\theta)\,.
\end{aligned}$$

59. [17/01/2017 (ex)I] Un punto materiale di massa m è vincolato alla superficie

$$z = \alpha(x^2+y^2)\,, \qquad z>0\,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Qui (x,y,z) sono le coordinate nel sistema fisso $(O,(\boldsymbol{e}_h))$.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{PP_0}\,,$$

ove $k>0$ è costante e P_0 è la proiezione ortogonale di P sul piano $z=0$.

- Si scrivano le equazioni di moto del punto.
- Si trovino le condizioni iniziali per le quali il moto del punto avviene a quota $z>0$ costante.

SOLUZIONE
Usiamo come coordinate lagrangiane

$$r \in (0,+\infty)\,, \qquad \varphi \in (-\pi,\pi)\,,$$

tali che

$$\overrightarrow{OP} = r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + \alpha r^2\boldsymbol{e}_3\,,$$

e quindi

$$\boldsymbol{v}_P = \dot r(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + 2\alpha r\boldsymbol{e}_3) + r\dot\varphi(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2)\,.$$

Allora l'energia cinetica del punto è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_P|^2 = \frac{1}{2}m[\dot r^2(1+4\alpha^2r^2) + r^2\dot\varphi^2]\,.$$

La forza $\boldsymbol{F}$ *si può scrivere come*

$$\boldsymbol{F} = -kz\boldsymbol{e}_3 \,,$$

con potenziale

$$U = -\frac{k}{2}z^2 \,.$$

Quindi

$$U^{\mathrm{L}} = -\frac{k}{2}\alpha^2 r^4 \,.$$

Pertanto la lagrangiana del moto è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2(1+4\alpha^2r^2) + r^2\dot{\varphi}^2] - \frac{k}{2}\alpha^2 r^4 \,.$$

Le equazioni del moto quindi sono

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m\dot{r}(1+4\alpha^2r^2)] - 4m\alpha^2 r\dot{r}^2 - mr\dot{\varphi}^2 + 2k\alpha^2r^3 = 0 \,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mr^2\dot{\varphi}] = 0 \,.$$

B) Dalla II equazione di Lagrange segue

$$r(t)^2\dot{\varphi}(t) = r(0)^2\dot{\varphi}(0) \,.$$

Poiché noi vogliamo che $z = \alpha r^2$*, cioè* r*, sia costante, anche* $\dot{\varphi}$ *quindi deve mantenersi costante durante il moto. Sostituendo queste informazioni nella I equazione di Lagrange si trova*

$$-mr(0)\dot{\varphi}(0)^2 + 2k\alpha^2 r(0)^3 = 0 \,,$$

che è soddisfatta, ricordando $r > 0$*, se e solo se*

$$\dot{\varphi}(0)^2 = \frac{2k\alpha^2}{m}r(0)^2 \,. \tag{1}$$

Viceversa, se le condizioni iniziali soddisfano (1) *con* $r(0) > 0$*, allora la funzione*

$$(r(0), \dot{\varphi}(0)t + \varphi(0)) \,, \qquad t > 0 \,,$$

è l'unica soluzione del sistema di Lagrange.
R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m\dot{r}(1+4\alpha^2r^2)] - 4m\alpha^2 r\dot{r}^2 - mr\dot{\varphi}^2 + 2k\alpha^2r^3 = 0 \,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mr^2\dot{\varphi}] = 0 \,.$$

Le condizioni iniziali cercate sono quelle che soddisfano

$$\dot{\varphi}(0)^2 = \frac{2k\alpha^2}{m}r(0)^2 \,, \qquad \dot{r}(0) = 0 \,.$$

60. [17/01/2017 (ex)II] Un punto materiale di massa m è vincolato alla superficie

$$z = -\frac{\alpha}{x^2 + y^2}\,, \qquad x^2 + y^2 > 0\,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Qui (x, y, z) sono le coordinate nel sistema fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{PP_0}\,,$$

ove $k > 0$ è costante e P_0 è la proiezione ortogonale di P sul piano $z = 0$.

- Si scrivano le equazioni di moto del punto.
- Si trovino le condizioni iniziali per le quali il moto del punto avviene a quota $z < 0$ costante.

R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[m\dot r\Big(1 + \frac{4\alpha^2}{r^6}\Big)\Big] + 12m\frac{\alpha^2}{r^7}\dot r^2 - mr\dot\varphi^2 + 2k\frac{\alpha^2}{r^5} = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mr^2\dot\varphi] = 0\,.$$

Le condizioni iniziali cercate sono quelle che soddisfano

$$\dot\varphi(0)^2 = \frac{2k\alpha^2}{mr(0)^6}\,, \qquad \dot r(0) = 0\,.$$

61. [8/02/2017 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato ad appartenere al cilindro

$$x_2^2 + x_3^2 = R^2\,.$$

Sul punto agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}} = -k\overrightarrow{P_0P}\,,$$

ove P_0 è la proiezione di P sulla retta

$$x_2 = 0\,, \qquad x_3 = R\,,$$

e $k > 0$ è costante.

- Si scrivano le equazioni di Lagrange del punto.
- Si determinino le condizioni iniziali cui corrispondono moti rettilinei.

Soluzione

A) Usiamo come coordinate lagrangiane $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *e* $x \in \boldsymbol{R}$ *tali che*

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{e}_1 + R\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Allora

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + R^2\dot{\varphi}^2) \,.$$

Sul punto agisce la forza peso di potenziale

$$U_{\mathrm{peso}} = -mgx_3 \,,$$

e la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}} = -k\overrightarrow{P_0P} = -kx_2\boldsymbol{e}_2 - k(x_3 - R)\boldsymbol{e}_3 \,,$$

che ha quindi potenziale

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}[x_2^2 + (x_3 - R)^2] \,.$$

In coordinate lagrangiane

$$U^{\mathrm{L}} = -mgR\sin\varphi - kR^2[1 - \sin\varphi] \,.$$

Dunque

$$\mathcal{L} = T^{\mathrm{L}} + U^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + R^2\dot{\varphi}^2) - mgR\sin\varphi + kR^2\sin\varphi \,.$$

Le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m\dot{x}] &= 0 \,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot{\varphi}] - (kR^2 - mgR)\cos\varphi &= 0 \,. \end{aligned}$$

B) Il moto può essere rettilineo solo se φ *si mantiene costante. Dunque si deve avere dalla II equazione di Lagrange*

$$(kR^2 - mgR)\cos\varphi = 0 \,.$$

Perciò si hanno due casi:

1. $kR^2 - mgR \neq 0$, *in cui solo i due valori* $\varphi \in \{-\pi/2, \pi/2\}$ *sono ammissibili;*
2. $kR^2 - mgR = 0$, *in cui tutti i valori* $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *sono ammissibili.*

Nel primo caso le condizioni iniziali sono

$$x(0) = x_0 \,, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \,, \quad \varphi(0) = \pm\frac{\pi}{2} \,, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \,,$$

con x_0, $\dot{x}_0 \in \boldsymbol{R}$ *arbitrari.*

Nel secondo caso le condizioni iniziali sono

$$x(0) = x_0 \,, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \,, \quad \varphi(0) = \varphi_0 \,, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \,,$$

con x_0, $\dot{x}_0 \in \boldsymbol{R}$ e $\varphi_0 \in (-\pi, \pi)$ arbitrari.
R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m\dot{x}] = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot{\varphi}] - (kR^2 - mgR)\cos\varphi = 0\,.$$

$$x(0) = x_0\,, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0\,, \quad \varphi(0) = \pm\frac{\pi}{2}\,, \quad \dot{\varphi}(0) = 0\,, \qquad \text{se } kR^2 - mgR \neq 0;$$
$$x(0) = x_0\,, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0\,, \quad \varphi(0) = \varphi_0\,, \quad \dot{\varphi}(0) = 0\,, \qquad \text{se } kR^2 - mgR = 0;$$

qui x_0, $\dot{x}_0 \in \boldsymbol{R}$ e $\varphi_0 \in (-\pi, \pi)$ sono arbitrari.

62. [8/02/2017 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato ad appartenere al cilindro
$$x_2^2 + x_3^2 = R^2\,.$$
Sul punto agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica
$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}} = k\overrightarrow{P_0P}\,,$$
ove P_0 è la proiezione di P sulla retta
$$x_2 = 0\,, \qquad x_3 = -R\,,$$
e $k > 0$ è costante.

- Si scrivano le equazioni di Lagrange del punto.
- Si determinino le condizioni iniziali cui corrispondono moti rettilinei.

R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m\dot{x}] = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot{\varphi}] - (kR^2 - mgR)\cos\varphi = 0\,.$$

$$x(0) = x_0\,, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0\,, \quad \varphi(0) = \pm\frac{\pi}{2}\,, \quad \dot{\varphi}(0) = 0\,, \qquad \text{se } kR^2 - mgR \neq 0;$$
$$x(0) = x_0\,, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0\,, \quad \varphi(0) = \varphi_0\,, \quad \dot{\varphi}(0) = 0\,, \qquad \text{se } kR^2 - mgR = 0;$$

qui x_0, $\dot{x}_0 \in \boldsymbol{R}$ e $\varphi_0 \in (-\pi, \pi)$ sono arbitrari.

63. [06/06/2017 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di raggio R e massa M è vincolata a giacere sul piano verticale $x_3 = 0$. Inoltre è vincolata ad avere il punto solidale $A \in \gamma$ nell'origine del sistema fisso.
Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_2$. Un punto materiale P di massa m è vincolato a stare su γ.

- Scrivere la lagrangiana del sistema.
- Trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

Soluzione
A) Sia C il centro della circonferenza. Introduciamo le due coordinate lagrangiane φ, $\theta \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\overrightarrow{OC} = R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \overrightarrow{CP} = R\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{v}_P = -R(\dot\varphi\sin\varphi + \dot\theta\sin\theta)\boldsymbol{e}_1 + R(\dot\varphi\cos\varphi + \dot\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Perciò

$$T_P^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}mR^2\{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 + 2\dot\varphi\dot\theta\cos(\varphi-\theta)\} \,.$$

Il potenziale del peso è

$$U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\varphi - mgR(\sin\varphi + \sin\theta) \,.$$

B) Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= -MgR\cos\varphi - mgR\cos\varphi \,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= -mgR\cos\theta \,.\end{aligned}$$

Quindi i punti di equilibrio, ossia i punti critici del potenziale, sono

$$(\varphi,\theta) = \Big(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2}\Big) \,,$$

con qualsiasi scelta dei segni. Studiamo l'hessiana del potenziale:

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = gR\begin{pmatrix}(M+m)\sin\varphi & 0 \\ 0 & m\sin\theta\end{pmatrix} \,.$$

Dunque l'hessiana è definita positiva in $(\pi/2,\pi/2)$, negativa in $-(\pi/2,\pi/2)$ e indefinita negli altri due punti. Perciò solo $-(\pi/2,\pi/2)$ corrisponde a una posizione di equilibrio stabile.
R.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mR^2\{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 + 2\dot\varphi\dot\theta\cos(\varphi-\theta)\} \\ - MgR\sin\varphi - mgR(\sin\varphi+\sin\theta) \,.\end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio sono date dalle

$$(\varphi,\theta) = \Big(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2}\Big) \,, \quad \text{con qualsiasi scelta dei segni,}$$

di cui solo $-(\pi/2,\pi/2)$ è stabile.

64. [11/07/2017 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = g(x-y) \,,$$

con $g \in C^\infty(\boldsymbol{R})$.
Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{P'P}\,,$$

ove P' è la proiezione ortogonale di P sull'asse z, e $k > 0$ è costante.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Determinare esplicitamente tutti i moti per cui

$$x(t) = y(t) + C\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $C \in \boldsymbol{R}$ costante assegnata, per le costanti C per cui esistono tali moti.

Soluzione
A) Scegliamo $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ come coordinate lagrangiane. Allora

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{e}_1 + \dot{y}\boldsymbol{e}_2 + g'(x-y)(\dot{x}-\dot{y})\boldsymbol{e}_3\,,$$

cosicché

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + g'(x-y)^2(\dot{x}-\dot{y})^2]\,.$$

La forza $\boldsymbol{F}$ si può scrivere come

$$\boldsymbol{F} = -k(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2)\,,$$

che ha potenziale

$$U^{\mathrm{L}} = -\frac{k}{2}(x^2 + y^2)\,.$$

Dunque la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[(1 + g'(x-y)^2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2g'(x-y)^2\dot{x}\dot{y}] - \frac{k}{2}(x^2 + y^2)\,.$$

Pertanto le equazioni di moto (di Lagrange) sono

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m[(1 + (g')^2)\dot{x} - (g')^2\dot{y}] - m[g'g''(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y})] + kx = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m[(1 + (g')^2)\dot{y} - (g')^2\dot{x}] - m[-g'g''(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y})] + ky = 0\,,$$

ove si è sottinteso in g, g', g'' l'argomento $x - y$.
B) Se un moto soddisfa per ogni t

$$x(t) = y(t) + C\,,$$

allora le due equazioni divengono

$$m\ddot{x} + kx = 0\,,$$
$$m\ddot{y} + ky = 0\,.$$

Le condizioni iniziali devono essere ovviamente

$$x(0) = \alpha\,, \quad y(0) = \alpha - C\,, \qquad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \beta\,,$$

per due costanti α e β arbitrarie. I moti quindi si determinano per integrazione diretta delle due equazioni, ottenendo

$$x(t) = \alpha \cos\Big(\sqrt{\frac{k}{m}}t\Big) + \beta\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\Big(\sqrt{\frac{k}{m}}t\Big)\,,$$
$$y(t) = (\alpha - C)\cos\Big(\sqrt{\frac{k}{m}}t\Big) + \beta\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\Big(\sqrt{\frac{k}{m}}t\Big)\,.$$

È immediato verificare che questi moti non soddisfano in realtà la condizione richiesta $x = y + C$, salvo il caso $C = 0$.
R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m[(1 + (g')^2)\dot{x} - (g')^2\dot{y}] - mg'g''(\dot{x} - \dot{y})^2 + kx = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m[(1 + (g')^2)\dot{y} - (g')^2\dot{x}] + mg'g''(\dot{x} - \dot{y})^2 + ky = 0\,,$$

con g, g', g'' calcolati in $x - y$. I moti richiesti esistono solo per $C = 0$ e sono dati da

$$x(t) = y(t) = \alpha\cos\Big(\sqrt{\frac{k}{m}}t\Big) + \beta\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\Big(\sqrt{\frac{k}{m}}t\Big)\,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ arbitrari.

65. [11/07/2017 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = \alpha\cos(\beta x)\,;$$

qui $(O, (x, y, z))$ è il sistema di riferimento fisso, e α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.
Sul punto agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$.
Il moto soddisfa le condizioni iniziali

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = \lambda\boldsymbol{e}_1\,,$$

per un $\lambda > 0$ dato.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Esprimere la reazione vincolare in funzione delle coordinate lagrangiane e delle loro derivate prime (rispetto al tempo).

Soluzione
A) Usiamo le coordinate lagrangiane $(\xi, \eta) \in \boldsymbol{R}^2$ tali che

$$\overrightarrow{OP} = \xi\boldsymbol{e}_1 + \eta\boldsymbol{e}_2 + \alpha\cos(\beta\xi)\boldsymbol{e}_3\,.$$

Quindi la velocità in coordinate lagrangiane è data da

$$\boldsymbol{v} = \dot{\xi}\boldsymbol{e}_1 + \dot{\eta}\boldsymbol{e}_2 - \alpha\beta\dot{\xi}\sin(\beta\xi)\boldsymbol{e}_3 ,$$

e

$$\xi(0) = 0 , \quad \eta(0) = 0 ; \qquad \dot{\xi}(0) = \lambda , \quad \dot{\eta}(0) = 0 .$$

La forza peso ha potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}} = -mgz = -mg\alpha\cos(\beta\xi) .$$

Dunque

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \alpha^2\beta^2\dot{\xi}^2\sin^2(\beta\xi)] - mg\alpha\cos(\beta\xi) .$$

Le equazioni di Lagrange sono dunque

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{\xi} + \alpha^2\beta^2\dot{\xi}\sin^2(\beta\xi)] - \frac{1}{2}m\alpha^2\beta^3\dot{\xi}^2\sin(2\beta\xi) - mg\alpha\beta\sin(\beta\xi) = 0 ,$$

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{\eta}] = 0 .$$

B) La II dà, insieme con le condizioni iniziali,

$$\eta(t) = 0 , \qquad t > 0 .$$

Dalla I si ottiene

$$\ddot{\xi}[1 + \alpha^2\beta^2\sin^2(\beta\xi)] + \frac{1}{2}\alpha^2\beta^3\dot{\xi}^2\sin(2\beta\xi) - g\alpha\beta\sin(\beta\xi) = 0 ,$$

che permette di trovare $\ddot{\xi}$ in funzione di $\dot{\xi}$ e ξ.
Calcoliamo poi

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\xi}\boldsymbol{e}_1 + \ddot{\eta}\boldsymbol{e}_2 - \alpha\beta[\ddot{\xi}\sin(\beta\xi) + \beta\dot{\xi}^2\cos(\beta\xi)]\boldsymbol{e}_3 .$$

Dalle due equazioni sopra e da

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = m\boldsymbol{a} - mg\boldsymbol{e}_3 ,$$

si arriva alla rappresentazione richiesta per $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$.
R.

$$\ddot{\xi}[1 + \alpha^2\beta^2\sin^2(\beta\xi)] + \frac{1}{2}\alpha^2\beta^3\dot{\xi}^2\sin(2\beta\xi) - g\alpha\beta\sin(\beta\xi) = 0 ,$$

$$\ddot{\eta} = 0 .$$

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = m\frac{g\alpha\beta\sin(\beta\xi) - \frac{1}{2}\alpha^2\beta^3\dot{\xi}^2\sin(2\beta\xi)}{1 + \alpha^2\beta^2\sin^2(\beta\xi)}[\boldsymbol{e}_1 - \alpha\beta\sin(\beta\xi)\boldsymbol{e}_3] - m[\alpha\beta^2\dot{\xi}^2\cos(\beta\xi) - g]\boldsymbol{e}_3 .$$

66. [15/01/2018 (ex)I] Due punti materiali P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 sono vincolati rispettivamente da $P_1 \in \gamma_1$ e $P_2 \in \gamma_2$, ove

$$\begin{aligned} \gamma_1 : &\qquad x_1^2 + x_2^2 = r_1^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,; \\ \gamma_2 : &\qquad x_1^2 + x_3^2 = r_2^2 \,, \qquad x_2 = 0 \,, \end{aligned}$$

ove $r_1 > r_2 > 0$ sono costanti.
I due punti si attraggono con forza elastica

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = -k\overrightarrow{P_2P_1} = -\boldsymbol{F}_{P_2} \,, \qquad k > 0 \text{ costante.}$$

- Si scrivano le equazioni di Lagrange del sistema.
- Se ne deduca che sono possibili dei moti ove solo uno dei punti è in quiete.

Soluzione
A) Scegliamo come parametri lagrangiani

$$\varphi_i \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Big) \,, \qquad i = 1\,,2 \,,$$

ove se $\overrightarrow{OP_i} = \boldsymbol{X}_i$ *si abbia*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1 &= r_1 \cos\varphi_1 \boldsymbol{e}_1 + r_1 \sin\varphi_1 \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{X}_2 &= r_2 \cos\varphi_2 \boldsymbol{e}_1 + r_2 \sin\varphi_2 \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Dunque l'energia cinetica del sistema è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \dot\varphi_2^2 \,.$$

La forza elastica ha potenziale

$$U^{\mathrm{L}} = -\frac{k}{2} |\overrightarrow{P_1P_2}|^2 = -\frac{k}{2} (r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2) \,.$$

Quindi la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \dot\varphi_2^2 + k r_1 r_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \,.$$

Seguono le equazioni di Lagrange

$$\begin{aligned} m_1 r_1^2 \ddot\varphi_1 + k r_1 r_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 &= 0 \,, \\ m_2 r_2^2 \ddot\varphi_2 + k r_1 r_2 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 &= 0 \,. \end{aligned}$$

B) Se per esempio $\varphi_1(t) = \varphi_1^0$ *per ogni* $t > 0$, *allora per la prima equazione di Lagrange deve essere, se* φ_2 *non è costante,*

$$\sin\varphi_1 = 0 \,,$$

ossia $\varphi_1^0 \in \{0, \pi\}$. *Quindi* φ_2 *è una soluzione della seconda equazione che prende la forma*

$$m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_2 \pm k r_1 r_2 \sin\varphi_2 = 0\,.$$

Analogamente si ragiona assumendo φ_2 *costante.*
R.

$$\begin{aligned} m_1 r_1^2 \ddot{\varphi}_1 + k r_1 r_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 &= 0\,, \\ m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_2 + k r_1 r_2 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

67. [15/01/2018 (ex)II] Due punti materiali P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 sono vincolati rispettivamente da $P_1 \in \gamma_1$ e $P_2 \in \gamma_2$, ove

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \qquad & x_1^2 + x_2^2 = r_1^2\,, \qquad x_3 = 0\,; \\ \gamma_2 : \qquad & x_2^2 + x_3^2 = r_2^2\,, \qquad x_1 = 0\,, \end{aligned}$$

ove $r_2 > r_1 > 0$ sono costanti.
I due punti si attraggono con forza elastica

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = -k\overrightarrow{P_2P_1} = -\boldsymbol{F}_{P_2}\,, \qquad k > 0 \text{ costante.}$$

- Si scrivano le equazioni di Lagrange del sistema.
- Se ne deduca che sono possibili dei moti ove solo uno dei punti è in quiete.

R.

$$\begin{aligned} m_1 r_1^2 \ddot{\varphi}_1 + k r_1 r_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 &= 0\,, \\ m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_2 + k r_1 r_2 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

68. [13/02/2018 (ex)I] Un punto materiale (P, m) è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

ove $R > 0$ è costante, ed è soggetto al peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.
Il punto parte da fermo nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = \frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)\,.$$

Determinare $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$, $\ddot{\boldsymbol{q}}$ nell'istante $\bar{t}$ in cui P raggiunge per la prima volta la quota $x_3 = -R/2$. Qui $\boldsymbol{q}$ indica il vettore delle coordinate lagrangiane.
Soluzione

Il punto ha due gradi di libertà; scegliamo come coordinate lagrangiane $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *e* $\theta \in (0, \pi)$ *tali che*

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\varphi \sin\theta \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \sin\theta \boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta \boldsymbol{e}_3 .$$

In particolare

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{4}, \qquad \theta(0) = \frac{\pi}{2} .$$

Vale

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= -R\sin\varphi \sin\theta \boldsymbol{e}_1 + R\cos\varphi \sin\theta \boldsymbol{e}_2 ,\\
\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} &= R\cos\varphi \cos\theta \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \cos\theta \boldsymbol{e}_2 - R\sin\theta \boldsymbol{e}_3 .
\end{aligned}$$

Dunque

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi}\dot\varphi + \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \theta}\dot\theta ,$$

e

$$|\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}|^2 = R^2\dot\varphi^2 \sin^2\theta + R^2\dot\theta^2 .$$

Inoltre

$$U^{\mathrm{L}} = -mgx_{3P} = -mgR\cos\theta .$$

Dunque la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) - mgR\cos\theta .$$

Le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot\varphi\sin^2\theta] &= 0 ,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot\theta] - mR^2\dot\varphi^2\cos\theta\sin\theta - mgR\sin\theta &= 0 .
\end{aligned}$$

La prima dà subito

$$\dot\varphi(t)\sin^2\theta(t) = \dot\varphi(0)\sin^2\theta(0) = 0 , \qquad t > 0 .$$

Dunque

$$\dot\varphi(t) = 0 , \quad \varphi(t) = \frac{\pi}{4} ,$$

per tutti i $t > 0$ *di nostro interesse.*
Inoltre la seconda equazione di Lagrange, moltiplicata per $\dot\theta$ *e integrata dà*

$$\frac{R}{2}\dot\theta(t)^2 = -g\cos\theta(t) ,$$

ove si è già tenuto conto delle condizioni iniziali. D'altronde nell'istante $\bar t$ *richiesto*

$$R\cos\theta(\bar t) = x_{3P} = -\frac{R}{2} ,$$

ossia $\theta(\bar{t}) = 2\pi/3$ *e perciò*

$$\dot{\theta}(\bar{t}) = \sqrt{\frac{g}{R}}\,, \qquad \ddot{\theta}(\bar{t}) = \frac{g}{R}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{g}{R}\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

ove si è usata ancora la seconda equazione di Lagrange per trovare $\ddot{\theta}(\bar{t})$.
R.

$$\varphi(\bar{t}) = \frac{\pi}{4}\,, \qquad \dot{\varphi}(\bar{t}) = 0\,, \qquad \ddot{\varphi}(\bar{t}) = 0\,;$$
$$\theta(\bar{t}) = \frac{2}{3}\pi\,, \qquad \dot{\theta}(\bar{t}) = \sqrt{\frac{g}{R}}\,, \qquad \ddot{\theta}(\bar{t}) = \frac{g}{R}\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

69. [13/02/2018 (ex)II] Un punto materiale (P, m) è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

ove $R > 0$ è costante, ed è soggetto al peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.
Il punto parte da fermo nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = \frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)\,.$$

Determinare $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$, $\ddot{\boldsymbol{q}}$ nell'istante $\bar{t}$ in cui P raggiunge per la prima volta la quota $x_3 = -R/\sqrt{2}$. Qui $\boldsymbol{q}$ indica il vettore delle coordinate lagrangiane.
R.

$$\varphi(\bar{t}) = -\frac{\pi}{4}\,, \qquad \dot{\varphi}(\bar{t}) = 0\,, \qquad \ddot{\varphi}(\bar{t}) = 0\,;$$
$$\theta(\bar{t}) = \frac{3}{4}\pi\,, \qquad \dot{\theta}(\bar{t}) = \sqrt{\sqrt{2}\frac{g}{R}}\,, \qquad \ddot{\theta}(\bar{t}) = \frac{g}{\sqrt{2}R}\,.$$

70. [27/06/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie S che si ottiene ruotando intorno all'asse x_3 la curva

$$x_1 = a(\sin(bx_3) + 2)\,, \qquad x_2 = 0\,.$$

Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{P'P}\,,$$

ove P' è la proiezione ortogonale di P sul piano $x_3 = 0$. Qui a, b, k sono costanti positive assegnate.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.
- Dimostrare che sono possibili moti con x_3 costante e opportuna, e determinarli.

Soluzione

A) Introduciamo le coordinate lagrangiane $z \in \boldsymbol{R}$, $\varphi \in (0,2\pi)$ tali che

$$\overrightarrow{OP} = a(\sin(bz) + 2)[\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2] + z\boldsymbol{e}_3 .$$

Allora

$$\boldsymbol{v}^{\text{L}} = ab\dot{z}\cos(bz)[\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2] + a(\sin(bz) + 2)\dot{\varphi}[-\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2] + \dot{z}\boldsymbol{e}_3 ,$$

cosicché

$$|\boldsymbol{v}^{\text{L}}|^2 = a^2 b^2 \dot{z}^2 (\cos(bz))^2 + a^2\dot{\varphi}^2(\sin(bz) + 2)^2 + \dot{z}^2 .$$

Inoltre la forza elastica ha potenziale

$$U^{\text{L}} = -\frac{k}{2}|\overrightarrow{P'P}|^2 = -\frac{k}{2}z^2 .$$

Dunque

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\big\{\dot{z}^2[a^2b^2(\cos(bz))^2 + 1] + a^2\dot{\varphi}^2[\sin(bz) + 2]^2\big\} - \frac{k}{2}z^2 .$$

Le equazioni di Lagrange sono pertanto

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{\dot{z}[a^2b^2(\cos(bz))^2 + 1]\big\} - \Big\{ -\frac{m}{2}\dot{z}^2a^2b^2\sin(2bz) \\ + ma^2b\dot{\varphi}^2[\sin(bz) + 2]\cos(bz)\Big\} + kz = 0 ,$$

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{a^2\dot{\varphi}[\sin(bz) + 2]^2\big\} = 0 .$$

B) Se $z(t) = z_0$ costante, la II dà

$$\ddot{\varphi} = 0 ,$$

ossia $\dot{\varphi}(t) = \alpha$ costante, e quindi la I implica

$$-2a^2b\alpha^2[\sin(bz_0) + 2]\cos(bz_0) + kz_0 = 0 . \tag{1}$$

Ne segue che il segno di z_0 e quello di $\cos(bz_0)$ devono coincidere; in particolare i moti possibili si hanno per

$$z_0 = 0 ; \quad z_0 > 0 , \cos(bz_0) > 0 ; \quad z_0 < 0 , \cos(bz_0) < 0 .$$

In tutti i casi α è determinato dalla (1).

R.

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{\dot{z}[a^2b^2(\cos(bz))^2 + 1]\big\} - \Big\{ -\frac{m}{2}\dot{z}^2a^2b^2\sin(2bz) \\ + 2a^2b\dot{\varphi}^2[\sin(bz) + 2]\cos(bz)\Big\} + kz = 0 ,$$

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{a^2\dot{\varphi}[\sin(bz) + 2]^2\big\} = 0 .$$

I moti possibili a quota costante $z(t) = z_0$ sono quelli ove $\dot{\varphi}(t) = \alpha$ e

$$\alpha = 0 , z_0 = 0 , \quad \text{oppure} \quad \alpha^2 = \frac{kz_0}{2a^2b[\sin(bz_0) + 2]\cos(bz_0)} .$$

71. [23/07/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 ,$$

ove $(O, (x_i))$ è il sistema di riferimento fisso.
Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{P'P} ,$$

ove P' è la proiezione ortogonale di P sul piano $x_3 = -R$.
All'istante iniziale si ha

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1 , \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_2 .$$

Qui R, v_0, k sono costanti positive assegnate.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Ottenere un integrale primo in funzione di m, R, k, v_0.
- Dimostrare che P non può raggiungere quota $x_3 = -R$.

Soluzione
A) Introduciamo le coordinate lagrangiane $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in (0, \pi)$ tali che

$$\overrightarrow{OP} = R\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3 .$$

Si ha

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} = {} & R\dot\varphi\sin\theta(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2) \\ & + r\dot\theta(\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 - \sin\theta\boldsymbol{e}_3) .\end{aligned}$$

Quindi

$$|\boldsymbol{v}|^2 = R^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) .$$

Inoltre la forza

$$\boldsymbol{F} = -(x_3 + R)\boldsymbol{e}_3$$

ha potenziale

$$U = -\frac{k}{2}(x_3 + R)^2 .$$

Pertanto possiamo considerare la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) - \frac{1}{2}kR^2(1 + \cos\theta)^2 .$$

Le equazioni di moto sono

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot\varphi\sin^2\theta] &= 0 , \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot\theta] - \frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2\sin(2\theta) - kR^2(1 + \cos\theta)\sin\theta &= 0 .\end{aligned}$$

B) Dalle condizioni iniziali si ha

$$\varphi(0) = 0\,, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{2}\,, \quad \dot\varphi(0) = \frac{v_0}{R}\,, \quad \dot\theta(0) = 0\,.$$

Così la I implica che

$$\dot\varphi(t)\sin^2\theta(t) = \dot\varphi(0)\sin^2\theta(0) = \frac{v_0}{R}\,.$$

C) Sostituendo l'integrale primo nella II,

$$m\ddot\theta - \frac{mv_0^2}{R^2\sin^4\theta}\sin\theta\cos\theta - k(1+\cos\theta)\sin\theta = 0\,,$$

ossia

$$\ddot\theta = \frac{v_0^2}{R^2}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{k}{m}(1+\cos\theta)\sin\theta\,.$$

Moltiplichiamo per $\dot\theta$ e integriamo usando le condizioni iniziali:

$$\frac{\dot\theta^2}{2} = \frac{v_0^2}{2R^2}\Big(1 - \frac{1}{\sin^2\theta}\Big) - \frac{k}{m}\Big(\cos\theta + \frac{1}{4}\cos(2\theta) + \frac{1}{4}\Big)\,.$$

In particolare risulta

$$\frac{1}{\sin^2\theta} \leq 1 - \frac{2kR^2}{mv_0^2}\Big(\cos\theta + \frac{1}{4}\cos(2\theta) + \frac{1}{4}\Big)\,.$$

Se $\theta(t)$ si avvicina indefinitamente a π, allora il membro di sinistra diviene illimitato, mentre il membro di destra resta comunque limitato da

$$1 + \frac{3kR^2}{mv_0^2}\,.$$

R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot\varphi\sin^2\theta] = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot\theta] - \frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2\sin(2\theta) - kR^2(1+\cos\theta)\sin\theta = 0\,.$$

$$\dot\varphi(t)\sin^2\theta(t) = \frac{v_0}{R}\,.$$

72. [06/02/2020 (ex)I] Si consideri il toro S parametrizzato da

$$\boldsymbol{r}(\varphi,\theta) = \cos\varphi(L+R\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(L+R\cos\theta)\boldsymbol{e}_2 + R\sin\theta\boldsymbol{e}_3\,,$$

con $\varphi\in(-\pi,\pi)$, $\theta\in(-\pi,\pi)$. Per maggiore chiarezza, questo è il toro dato dalla rotazione della circonferenza

$$(x_2-L)^2 + x_3^2 = R^2\,, \qquad x_1 = 0\,,$$

intorno all'asse x_3. Qui $L > R > 0$.
Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a S. Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha |x_2| \Big(- \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \boldsymbol{e}_1 + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \boldsymbol{e}_2 \Big) .$$

Determinare i moti che si svolgono in modo che φ o θ (ma non entrambi) rimangano costanti durante il moto.
[Suggerimento: usare le equazioni di Lagrange.]
SOLUZIONE
A) Usiamo come parametri lagrangiani $\varphi \in (-\pi/2, 3\pi/2)$, $\theta \in (-\pi/2, 3\pi/2)$. *Allora*

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = \dot{\varphi} \boldsymbol{r}_\varphi + \dot{\theta} \boldsymbol{r}_\theta ,$$

ove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_\varphi &= (L + R\cos\theta)(-\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2) , \\ \boldsymbol{r}_\theta &= -R\cos\varphi \sin\theta \boldsymbol{e}_1 - R\sin\varphi \sin\theta \boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta \boldsymbol{e}_3 . \end{aligned}$$

Si noti che $\boldsymbol{r}_\varphi \cdot \boldsymbol{r}_\theta = 0$.
Quindi

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2} |\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}|^2 = \frac{m}{2} [(L + R\cos\theta)^2 \dot{\varphi}^2 + R^2 \dot{\theta}^2] .$$

La forza non è conservativa, perciò calcoliamo

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= \boldsymbol{r}_\varphi \cdot \boldsymbol{F} = \alpha (L + R\cos\theta)^2 |\sin\varphi| , \\ Q_\theta &= \boldsymbol{r}_\theta \cdot \boldsymbol{F} = 0 . \end{aligned}$$

Le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \big[m (L + R\cos\theta)^2 \dot{\varphi} \big] &= \alpha (L + R\cos\theta)^2 |\sin\varphi| , \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [m R^2 \dot{\theta}] + m \dot{\varphi}^2 (L + R\cos\theta) R \sin\theta &= 0 . \end{aligned}$$

B) Il moto con $\varphi(t) = \varphi_0$ *soddisfa la prima equazione se e solo se*

$$\sin\varphi_0 = 0 , \quad \textit{cioè } \varphi_0 \in \{0, \pi\}.$$

La seconda equazione diviene allora

$$\ddot{\theta} = 0 , \quad \textit{quindi } \theta(t) = \theta(0) + \dot{\theta}(0) t.$$

Il moto con $\theta(t) = \theta_0$ *soddisfa la seconda equazione se e solo se*

$$\sin\theta_0 = 0 , \quad \textit{cioè } \theta_0 \in \{0, \pi\}.$$

La prima equazione diviene allora

$$m \ddot{\varphi} = \alpha |\sin\varphi| ,$$

che ha unica soluzione date le condizioni iniziali $\varphi(0)$, $\dot{\varphi}(0)$.

R.

$$(\varphi(t),\theta(t))=(0,\theta(0)+\dot\theta(0)t)\,,\qquad(\varphi(t),\theta(t))=(\pi,\theta(0)+\dot\theta(0)t)\,,\qquad t\in\boldsymbol{R}\,;$$
$$(\varphi(t),\theta(t))=(\varphi_1(t),0)\,,\qquad(\varphi(t),\theta(t))=(\varphi_1(t),\pi)\,,\qquad t\in\boldsymbol{R}\,,$$

ove φ_1 è la soluzione di

$$m\ddot\varphi=\alpha|\sin\varphi|\,,$$

con le opportune condizioni iniziali.

73. [06/02/2020 (ex)I] [*Questa parte tra [...] non è indispensabile alla risoluzione e viene proposta solo come aiuto all'intuizione.*
Un punto materiale $(\boldsymbol{X},m)$ è vincolato alla superficie espressa da

$$x_3=f(r)\,,\qquad r>0\,,$$

con $f\in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Qui r e φ sono le usuali coordinate polari nel piano (x_1,x_2).
Sul punto agiscono il peso $-mg\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica

$$\boldsymbol{F}=-k(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_A)\,.$$

Qui $\boldsymbol{X}_A$ è la proiezione ortogonale di $\boldsymbol{X}$ sull'asse x_3.]
La lagrangianaa del moto è

$$\mathcal{L}=\frac{m}{2}\big[\dot r^2\big(1+f'(r)^2\big)+r^2\dot\varphi^2\big]-mgf(r)-\frac{k}{2}r^2\,,$$

ove $r\in(0,+\infty)$, $\varphi\in(-\pi,\pi)$ sono le coordinate lagrangiane. Qui m, g, $k>0$ sono costanti e $f\in C^\infty(\boldsymbol{R})$.
Determinare tutti i moti della forma $(r_0,\varphi(t))$, $t\in I$, ossia con $r(t)=r_0$ costante.
Soluzione
Le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m\dot r\big(1+f'(r)^2\big)\big]-m\big[\dot r^2f'(r)f''(r)+r\dot\varphi^2\big]+mgf'(r)+kr=0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mr^2\dot\varphi]=0\,.$$

Se r si mantiene costante la seconda equazione di Lagrange quindi dà $\dot\varphi(t)=\dot\varphi_0$, $t\in I$, mentre la prima diviene

$$-mr_0\dot\varphi_0^2+mgf'(r_0)+kr_0=0\,.$$

Quindi $\dot\varphi_0^2$ è determinato da

$$\dot\varphi_0^2=g\frac{f'(r_0)}{r_0}+\frac{k}{m}\,.$$

Dunque deve essere

$$\alpha:=g\frac{f'(r_0)}{r_0}+\frac{k}{m}\geq0\,.$$

Se $\alpha = 0$ si ha la quiete; se $\alpha > 0$ si hanno i moti

$$(r_0, \sqrt{\alpha}t + \varphi(0))\,, \qquad (r_0, -\sqrt{\alpha}t + \varphi(0))\,.$$

R. *I moti sono quelli della forma*

$$(r_0, \sqrt{\alpha}t + \varphi(0))\,, \qquad (r_0, -\sqrt{\alpha}t + \varphi(0))\,,$$

sotto la condizione che

$$\alpha := g\frac{f'(r_0)}{r_0} + \frac{k}{m} \geq 0\,.$$

74. [06/02/2020 (ex)II] Si consideri il toro S parametrizzato da

$$\boldsymbol{r}(\varphi, \theta) = \cos\varphi(R + h\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(R + h\cos\theta)\boldsymbol{e}_2 + h\sin\theta\boldsymbol{e}_3\,,$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in (-\pi, \pi)$. Per maggiore chiarezza, questo è il toro dato dalla rotazione della circonferenza

$$(x_2 - R)^2 + x_3^2 = h^2\,, \qquad x_1 = 0\,,$$

intorno all'asse x_3. Qui $R > h > 0$.
Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a S. Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha|x_1|\Big(- \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\boldsymbol{e}_1 + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\boldsymbol{e}_2\Big)\,.$$

Determinare i moti che si svolgono in modo che φ o θ (ma non entrambi) rimangano costanti durante il moto.
[Suggerimento: usare le equazioni di Lagrange.]
R.

$$(\varphi(t), \theta(t)) = \Big(- \frac{\pi}{2}, \theta(0) + \dot\theta(0)t\Big)\,, \qquad (\varphi(t), \theta(t)) = \Big(\frac{\pi}{2}, \theta(0) + \dot\theta(0)t\Big)\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,;$$
$$(\varphi(t), \theta(t)) = (\varphi_1(t), 0)\,, \qquad (\varphi(t), \theta(t)) = (\varphi_1(t), \pi)\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove φ_1 è la soluzione di

$$m\ddot\varphi = \alpha|\cos\varphi|\,,$$

con le opportune condizioni iniziali.

75. [06/02/2020 (ex)II] [*Questa parte tra [...] non è indispensabile alla risoluzione e viene proposta solo come aiuto all'intuizione.*
Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie espressa da

$$x_3 = f(r)\,, \qquad r > 0\,,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Qui r e φ sono le usuali coordinate polari nel piano (x_1, x_2). Sul punto agiscono il peso $-mg\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica repulsiva

$$\boldsymbol{F} = k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_A)\,.$$

Qui $\boldsymbol{X}_A$ è la proiezione ortogonale di $\boldsymbol{X}$ sull'asse x_3.]
La lagrangianaa del moto è

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\big[\dot{r}^2\big(1+f'(r)^2\big)+r^2\dot{\varphi}^2\big] - mgf(r) + \frac{k}{2}r^2\,,$$

ove $r \in (0,+\infty)$, $\varphi \in (-\pi,\pi)$ sono le coordinate lagrangiane. Qui m, g, $k>0$ sono costanti e $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$.
Determinare tutti i moti della forma $(r_0,\varphi(t))$, $t \in I$, ossia con $r(t) = r_0$ costante.
R. *I moti sono quelli della forma*

$$(r_0, \sqrt{\alpha}t + \varphi(0))\,, \qquad (r_0, -\sqrt{\alpha}t + \varphi(0))\,,$$

sotto la condizione che

$$\alpha := g\frac{f'(r_0)}{r_0} - \frac{k}{m} \geq 0\,.$$

76. [10/02/2020 (ex)I] Un punto materiale $(\boldsymbol{X},m)$ è vincolato alla superficie ottenuta ruotando la curva

$$x_2 = be^{cx_3}\,, \qquad x_1 = 0\,,$$

intorno all'asse x_3; qui b, $c>0$ sono costanti.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -\mu\boldsymbol{v} + kx_3\boldsymbol{e}_1\,,$$

ove $\boldsymbol{v}$ è la velocità e μ, $k>0$ sono costanti.

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Determinare se sono possibili moti in cui il punto rimane su un piano passante per l'asse x_3.

Soluzione
A) La superficie può essere parametrizzata da

$$\boldsymbol{r}(\varphi,z) = be^{cz}\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + be^{cz}\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\,,$$

$\varphi \in (-\pi/2, 3\pi/2)$, $z \in \boldsymbol{R}$, che prendiamo anche come parametrizzazione lagrangiana.
Dunque

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{r}_\varphi + \dot{z}\boldsymbol{r}_z\,,$$

con

$$\boldsymbol{r}_\varphi = be^{cz}(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2)\,, \qquad \boldsymbol{r}_z = bce^{cz}\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + bce^{cz}\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\,.$$

Pertanto

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}[b^2e^{2cz}\dot{\varphi}^2 + (1 + b^2c^2e^{2cz})\dot{z}^2]\,.$$

Le forze non sono conservative, neppure in senso lagrangiano per la presenza della velocità in $\boldsymbol{F}$, quindi conviene calcolarsi le componenti lagrangiane delle forze:

$$Q_\varphi = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}_\varphi = -b^2e^{2cz}\mu\dot{\varphi} - be^{cz}kz\sin\varphi\,,$$
$$Q_z = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}_z = -\mu(1 + b^2c^2e^{2cz})\dot{z} + bce^{cz}kz\cos\varphi\,.$$

Le equazioni di Lagrange quindi sono

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mb^2e^{2cz}\dot{\varphi}] = -b^2e^{2cz}\mu\dot{\varphi} - be^{cz}kz\sin\varphi\,,$$

e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m\dot{z}(1 + b^2c^2e^{2cz})\big] - mb^2ce^{2cz}\dot{\varphi}^2 - mb^2c^3e^{2cz}\dot{z}^2 = -\mu(1 + b^2c^2e^{2cz})\dot{z} + bce^{cz}kz\cos\varphi\,.$$

B) I moti cercati sono quelli che avvengono per $\varphi(t) = \varphi_0$ costante. Sostituendo questa ipotesi nelle equazioni di Lagrange, la prima implica che debba essere

$$z = 0\,, \qquad \textit{oppure} \qquad \varphi_0 \in \{0, \pi\}\,.$$

La seconda equazione è soddisfatta se $z = 0$ per qualunque φ_0; questi sono moti di quiete.
Se $\varphi_0 \in \{0, \pi\}$, sono possibili anche i moti che soddisfano l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m\dot{z}(1 + b^2c^2e^{2cz})\big] - mb^2c^3e^{2cz}\dot{z}^2 = -\mu(1 + b^2c^2e^{2cz})\dot{z} + bce^{cz}kz\cos\varphi_0\,.$$

R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mb^2e^{2cz}\dot{\varphi}] = -b^2e^{2cz}\mu\dot{\varphi} - be^{cz}kz\sin\varphi\,;$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m\dot{z}(1 + b^2c^2e^{2cz})\big] - mb^2ce^{2cz}\dot{\varphi}^2 - mb^2c^3e^{2cz}\dot{z}^2 = -\mu(1 + b^2c^2e^{2cz})\dot{z} + bce^{cz}kz\cos\varphi\,.$$

I moti sui piani cercati sono la quiete del tipo $(\varphi, z) = (\varphi_1, 0)$ per ogni φ_1, e quelli del tipo $(\varphi, z) = (\varphi_0, z)$, ove $\varphi_0 \in \{0, \pi\}$ e z è determinata dalla seconda equazione di Lagrange con $\varphi(t) = \varphi_0$.

77. [10/02/2020 (ex)II] Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie ottenuta ruotando la curva

$$x_1 = be^{-cx_3}\,, \qquad x_2 = 0\,,$$

intorno all'asse x_3; qui b, $c > 0$ sono costanti.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -\mu\boldsymbol{v} + kx_3\boldsymbol{e}_2\,,$$

ove $\boldsymbol{v}$ è la velocità e μ, $k > 0$ sono costanti.

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Determinare se sono possibili moti in cui il punto rimane su un piano passante per l'asse x_3.

R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mb^2e^{-2cz}\dot{\varphi}] = -b^2e^{-2cz}\mu\dot{\varphi} + be^{-cz}kz\cos\varphi\,;$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m\dot{z}(1+b^2c^2e^{-2cz})\big] + mb^2ce^{-2cz}\dot{\varphi}^2 + mb^2c^3e^{-2cz}\dot{z}^2 = -\mu(1+b^2c^2e^{-2cz})\dot{z} - bce^{-cz}kz\sin\varphi\,.$$

I moti sui piani cercati sono la quiete del tipo $(\varphi, z) = (\varphi_1{,}0)$ per ogni φ_1, e quelli del tipo $(\varphi, z) = (\varphi_0, z)$, ove $\varphi_0 \in \{-\pi/2, \pi/2\}$ e z è determinata dalla seconda equazione di Lagrange con $\varphi(t) = \varphi_0$.

78. [19/01/2023 (ex)I] Consideriamo il sistema formato dall'asta rigida AB di lunghezza R e massa M, e dal punto materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$. L'asta è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ con l'estremo A nell'origine O del sistema di riferimento fisso, e $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

I vincoli sono lisci.
Sull'asta agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = cs\boldsymbol{e}_1\,\mathrm{d}s - k(\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_P)\,\mathrm{d}\delta_B\,,$$

ove $s \in [0, R]$ è l'ascissa sull'asta misurata da A. Qui c, k sono costanti positive assegnate; $\mathrm{d}\delta_B$ indica che la forza è applicata in B. Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_P = -k(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_B)\,.$$

Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi/2{,}3\pi/2) \times (-\pi/2{,}3\pi/2)$, tali che

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi) = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{X}_B^{\mathrm{L}}(\theta) = R\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{e}_2\,.$$

1) Si determini l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Si determini il potenziale lagrangiano delle forze direttamente applicate all'asta.
3) Si dimostri che le equazioni di Lagrange sono:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot{\varphi}] = kR^2\sin(\theta-\varphi)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I\dot{\theta}] = -kR^2\sin(\theta-\varphi) - \frac{cR^3}{3}\sin\theta\,.$$

4) Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
5) Assegnate le condizioni iniziali

$$\varphi(0) = 0 \,, \quad \theta(0) = 0 \,, \quad \dot\varphi(0) = \dot\varphi_0 \,, \quad \dot\theta(0) = \dot\theta_0 \,,$$

si determini una limitazione su $\dot\varphi_0$, $\dot\theta_0$ in termini di m, M, R e dei momenti di inerzia di AB che garantisca

$$|\theta(t)| \leq \frac{\pi}{3} \,, \qquad \text{per ogni } t.$$

6) Usando come coordinate locali del sistema

$$x_{1A} \,, x_{2A} \,, x_{3A} \,, x_{1B} \,, x_{3B} \,, x_{1P} \,, x_{2P} \,, x_{3P} \,,$$

si esprimano i vincoli dati come vincoli olonomi regolari.
SOLUZIONE
1) Si ha

$$\boldsymbol{v}_P^{\mathrm{L}} = R\dot\varphi(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2) \,.$$

Quindi

$$T_P^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}R^2\dot\varphi^2 \,.$$

Usando la formula dell'energia cinetica per moti polari di corpi rigidi si ha

$$T_{AB}^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}I\dot\theta^2 \,,$$

con I momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse ortogonale in A.
2) Per quanto riguarda la forza elastica si ha

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_P|^2 \,,$$

quindi

$$U_{\mathrm{el}}^{\mathrm{L}} = -\frac{k}{2}R^2[(\cos\varphi - \cos\theta)^2 + (\sin\varphi - \sin\theta)^2] = -kR^2[1 - \cos(\theta - \varphi)] \,.$$

La distribuzione $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ *ha potenziale*

$$\mathrm{d}U_d = csx_1 \,\mathrm{d}s \,.$$

Quindi

$$U_d^{\mathrm{L}} = \int_0^R csx_1 \,\mathrm{d}s = \int_0^R cs^2\cos\theta \,\mathrm{d}s = \frac{cR^3}{3}\cos\theta \,.$$

3) Il potenziale U_{AB}^{L} calcolato nel punto 2) è in realtà il potenziale lagrangiano completo, perché U_{el} è il potenziale del sistema di forze elastiche applicate in B e in P. Pertanto le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot\varphi] = kR^2\sin(\theta - \varphi) \,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I\dot\theta] = -kR^2\sin(\theta - \varphi) - \frac{cR^3}{3}\sin\theta \,.$$

4) Il sistema del gradiente del potenziale è

$$kR^2 \sin(\theta - \varphi) = 0\,,$$
$$-kR^2 \sin(\theta - \varphi) - \frac{cR^3}{3} \sin\theta = 0\,,$$

che equivale a

$$\sin(\theta - \varphi) = 0\,, \qquad \sin\theta = 0\,.$$

Perciò si ha equilibrio se e solo se

$$\theta \in \{0, \pi\}\,, \qquad \theta - \varphi = n\pi\,, \quad n \in \boldsymbol{Z}\,,$$

naturalmente per $(\varphi, \theta) \in Q$*. Dato che appunto*

$$-2\pi < \theta - \varphi < 2\pi\,,$$

si deve avere $n \in \{0,1,-1\}$*. Quindi le posizioni di equilibrio* $(\varphi, \theta) \in Q$ *sono*

$$(0,0)\,, \quad (\pi,0)\,, \quad (0,\pi)\,, \quad (\pi,\pi)\,.$$

Per studiare la stabilità, calcoliamo l'hessiana di U^{L}*:*

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -kR^2 \cos(\theta - \varphi) & kR^2 \cos(\theta - \varphi) \\ kR^2 \cos(\theta - \varphi) & -kR^2 \cos(\theta - \varphi) - \frac{cR^3}{3} \cos\theta \end{pmatrix}\,.$$

Si vede che l'hessiana è definita negativa in $(0,0)$*, definita positiva in* $(0, \pi)$*, indefinita in* $(\pi,0)$ *e in* (π, π)*.*
5) Usiamo la conservazione dell'energia, scritta in coordinate lagrangiane

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{L}} - U^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}R^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}I\dot\theta^2 + kR^2[1 - \cos(\theta - \varphi)] - \frac{cR^3}{3}\cos\theta \\ \geq kR^2[1 - \cos(\theta - \varphi)] - \frac{cR^3}{3}\cos\theta\,. \end{aligned}$$

Quindi per le condizioni iniziali indicate si ha

$$\frac{m}{2}R^2\dot\varphi_0^2 + \frac{1}{2}I\dot\theta_0^2 - kR^2 - \frac{cR^3}{3} \geq -kR^2\cos(\theta - \varphi) - \frac{cR^3}{3}\cos\theta\,,$$

che conduce a

$$\frac{m}{2}R^2\dot\varphi_0^2 + \frac{1}{2}I\dot\theta_0^2 \geq kR^2[1 - \cos(\theta - \varphi)] + \frac{cR^3}{3}[1 - \cos\theta] \geq \frac{cR^3}{3}[1 - \cos\theta]\,.$$

Poiché l'ultimo membro è strettamente crescente in $(0, \pi/2)$*, la limitazione desiderata si ottiene sostituendo* $\theta = \pi/3$*.*
6) I vincoli sono $m = 6$ *e sono dati da*

$$x_{1A} = 0\,, \quad x_{2A} = 0\,, \quad x_{3A} = 0\,, \quad x_{3B} = 0\,,$$
$$x_{1P}^2 + x_{2P}^2 - R^2 = 0\,, \quad x_{3P} = 0\,.$$

R. *1)*

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}R^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}I\dot\theta^2\,.$$

2)

$$U^{\mathrm{L}}_{AB} = -kR^2[1 - \cos(\theta - \varphi)] + \frac{cR^3}{3}\cos\theta\,.$$

3)

$$mR^2\ddot{\varphi} = kR^2\sin(\theta - \varphi)\,,$$
$$I\ddot{\theta} = -kR^2\sin(\theta - \varphi) - \frac{cR^3}{3}\sin\theta\,.$$

4)

$$(0{,}0)\,,\quad \textit{stabile;}\qquad (\pi{,}0)\,,(0,\pi)\,,(\pi,\pi)\,,\quad \textit{instabile.}$$

5)

$$mR^2\dot{\varphi}_0^2 + I\dot{\theta}_0^2 \le \frac{cR^3}{3}\,.$$

6)

$$x_{1A} = 0\,,\quad x_{2A} = 0\,,\quad x_{3A} = 0\,,\quad x_{3B} = 0\,,$$
$$x_{1P}^2 + x_{2P}^2 - R^2 = 0\,,\quad x_{3P} = 0\,.$$

79. [24/03/2023 (ex)I] Consideriamo il sistema formato dall'asta rigida AB di lunghezza R e massa M, e dal punto materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$. L'asta è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ con l'estremo A nell'origine O del sistema di riferimento fisso, e $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,,\qquad x_3 = 0\,.$$

I vincoli sono lisci.
Sull'asta agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = [c\boldsymbol{e}_1 - k(\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_P)]\,\mathrm{d}\delta_B\,,$$

ove $c \ge 0$, $k > 0$ sono costanti assegnate; $\mathrm{d}\delta_B$ indica che la forza è applicata in B. Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_P = d\boldsymbol{e}_2 - k(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_B)\,,$$

con $d > 0$ assegnata.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, tali che

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_P(\varphi) = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,\quad \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_B(\theta) = R\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{e}_2\,.$$

1) Si determini l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Si determini il potenziale lagrangiano delle forze direttamente applicate all'asta.
3) Si dimostri che le equazioni di Lagrange sono:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot{\varphi}] = kR^2\sin(\theta - \varphi) + dR\cos\varphi\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I\dot{\theta}] = -kR^2\sin(\theta - \varphi) - cR\sin\theta\,.$$

4) Assumendo $c = 0$, si determinino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
5) Si assuma ancora $c = 0$. Assegnate le condizioni iniziali

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{2}\,, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{2}\,, \quad \dot\varphi(0) = \dot\varphi_0\,, \quad \dot\theta(0) = \dot\theta_0\,,$$

si determini una limitazione su $\dot\varphi_0$, $\dot\theta_0$ in termini di m, M, R e dei momenti di inerzia di AB che garantisca

$$\varphi(t) \geq \frac{\pi}{6}\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

6) Si considerino le coordinate locali del sistema

$$x_{1A}\,, x_{2A}\,, x_{3A}\,, x_{1B}\,, x_{3B}\,, x_{1P}\,, x_{2P}\,, x_{3P}\,.$$

Si estragga da esse un sistema di possibili coordinate lagrangiane (valido almeno per alcune configurazioni).

Soluzione

1) Si ha

$$\boldsymbol{v}_P^{\mathrm{L}} = R\dot\varphi(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2)\,.$$

Quindi

$$T_P^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}R^2\dot\varphi^2\,.$$

Usando la formula dell'energia cinetica per moti polari di corpi rigidi si ha

$$T_{AB}^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}I\dot\theta^2\,,$$

con I momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse ortogonale in A.
2) Per quanto riguarda la forza elastica si ha

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_P|^2\,,$$

quindi

$$U_{\mathrm{el}}^{\mathrm{L}} = -\frac{k}{2}R^2[(\cos\varphi - \cos\theta)^2 + (\sin\varphi - \sin\theta)^2] = -kR^2[1 - \cos(\theta - \varphi)]\,.$$

La forza $c\boldsymbol{e}_1$ ha potenziale

$$U_c = cx_{1B}\,.$$

Quindi

$$U_c^{\mathrm{L}} = cR\cos\theta\,.$$

3) Il potenziale lagrangiano completo si trova aggiungendo a quello delle forze applicate all'asta, che comprende anche quello della forza elastica applicata a P, quello della forza $d\boldsymbol{e}_2$ applicata a P. Si ottiene

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = -kR^2[1 - \cos(\theta - \varphi)] + cR\cos\theta + dR\sin\varphi\,.$$

Pertanto le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot{\varphi}] = kR^2\sin(\theta-\varphi) + dR\cos\varphi\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I\dot{\theta}] = -kR^2\sin(\theta-\varphi) - cR\sin\theta\,.$$

4) Il sistema del gradiente del potenziale è

$$kR^2\sin(\theta-\varphi) + dR\cos\varphi = 0\,,$$
$$-kR^2\sin(\theta-\varphi) = 0\,,$$

che equivale a

$$\sin(\theta-\varphi) = 0\,,\qquad \cos\varphi = 0\,.$$

Perciò si ha equilibrio se e solo se

$$\varphi \in \Big\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big\}\,,\qquad \theta-\varphi = n\pi\,,\quad n\in\boldsymbol{Z}\,,$$

naturalmente per $(\varphi,\theta)\in Q$*. Dato che appunto*

$$-2\pi < \theta-\varphi < 2\pi\,,$$

si deve avere $n\in\{0{,}1,-1\}$*. Quindi le posizioni di equilibrio* $(\varphi,\theta)\in Q$ *sono*

$$\Big(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \Big(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \Big(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\,.$$

Per studiare la stabilità, calcoliamo l'hessiana di U^{L}*:*

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} -kR^2\cos(\theta-\varphi) - dR\sin\varphi & kR^2\cos(\theta-\varphi) \\ kR^2\cos(\theta-\varphi) & -kR^2\cos(\theta-\varphi) \end{pmatrix}\,.$$

Si vede che l'hessiana è definita negativa in $(\pi/2,\pi/2)$*, definita positiva in* $(-\pi/2,\pi/2)$*, indefinita in* $(\pi/2,-\pi/2)$ *e in* $(-\pi/2,-\pi/2)$*.*
5) Usiamo la conservazione dell'energia, scritta in coordinate lagrangiane

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{L}} - U^{\mathrm{L}} &= \frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + kR^2[1-\cos(\theta-\varphi)] - dR\sin\varphi \\ &\geq kR^2[1-\cos(\theta-\varphi)] - dR\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Quindi per le condizioni iniziali indicate si ha

$$\frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}_0^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}_0^2 - dR \geq kR^2[1-\cos(\theta-\varphi)] - dR\sin\varphi\,,$$

che conduce a

$$\frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}_0^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}_0^2 \geq kR^2[1-\cos(\theta-\varphi)] + dR[1-\sin\varphi] \geq dR[1-\sin\varphi]\,.$$

Poiché l'ultimo membro è strettamente decrescente in $(0,\pi/2)$*, la limitazione desiderata si ottiene sostituendo* $\varphi=\pi/6$*.*
6) I vincoli sono $m=6$ *e sono dati da*

$$x_{1A}=0\,,\quad x_{2A}=0\,,\quad x_{3A}=0\,,\quad x_{3B}=0\,,$$
$$x_{1P}^2 + x_{2P}^2 - R^2 = 0\,,\quad x_{3P}=0\,.$$

Si vede dunque che per esempio (x_{1P}, x_{1B}) *sono coordinate lagrangiane per le configurazioni ove* $x_{2P} > 0$, $x_{2B} > 0$.
R. *1)*
$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}R^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}I\dot\theta^2 .$$
2)
$$U^{\mathrm{L}}_{AB} = -kR^2[1-\cos(\theta-\varphi)] + cR\cos\theta .$$
3)
$$\begin{aligned} mR^2\ddot\varphi &= kR^2\sin(\theta-\varphi) + dR\cos\varphi ,\\ I\ddot\theta &= -kR^2\sin(\theta-\varphi) - cR\sin\theta . \end{aligned}$$
4)
$$\Big(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big), \quad \textit{stabile;} \qquad \Big(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\Big), \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big), \Big(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\Big), \quad \textit{instabile.}$$
5)
$$mR^2\dot\varphi_0^2 + I\dot\theta_0^2 \le dR .$$
6)
$$(x_{1P}, x_{1B}) \in (-R,R)\times(-R,R) .$$

80. [18/01/2024 (ex)I] Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ (le x_h denotano le coordinate del sistema di riferimento fisso). L'estremo A è vincolato alla circonferenza
$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 , \qquad x_3 = 0 .$$
Sull'asta agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_2$ e la forza elastica
$$\boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{X}_B ,$$
applicata nell'estremo B. Qui L, R, k sono costanti positive assegnate.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi,\theta) \in (-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)$ tali che
$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_A(\varphi) &= R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 ,\\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_B(\varphi,\theta) - \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_A(\varphi) &= 2L\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + 2L\sin\theta\boldsymbol{e}_2 . \end{aligned}$$
1) Si determini l'energia cinetica in rappresentazione lagrangiana dell'asta.
2) Determinare il potenziale lagrangiano delle forze direttamente applicate.
3) Determinare le posizioni di equilibrio ove $\varphi = \theta$.
4) Dimostrare che esiste una posizione di equilibrio con $\varphi = \theta$ ove, se i parametri k, m, R, L, g soddisfano una condizione opportuna, è possibile definire le piccole oscillazioni; calcolare l'energia cinetica ridotta in tale posizione.
5) All'istante $t = 0$ si abbia
$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_A(0) &= \frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2) , \quad \boldsymbol{v}_A(0) = \frac{v_0}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2) ,\\ \boldsymbol{X}_B(0) &= \frac{R+2L}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2) , \quad \boldsymbol{v}_B(0) = \frac{v_0}{2}(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1) , \end{aligned}$$

con $v_0 > 0$ costante assegnata. Ricavare $\varphi(0)$, $\theta(0)$, $\dot\varphi(0)$, $\dot\theta(0)$.
6) Usando come coordinate locali per l'asta

$$\boldsymbol{z} = (x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, x_{1B}, x_{3B}) ,$$

scrivere i vincoli nella forma $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = 0$ (omettere il vincolo di rigidità $|\boldsymbol{X}_A - \boldsymbol{X}_B| = 2L$), e dimostrare che hanno matrice iacobiana di rango massimo.
Soluzione
1) Usiamo il teorema di König. Poiché il versore dell'asta è

$$\boldsymbol{u} = \cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_2 ,$$

con

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \dot\theta(-\sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \boldsymbol{e}_2) = \dot\theta \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{u} ,$$

si ha che la velocità angolare propria dell'asta è $\boldsymbol{\omega} = \dot\theta \boldsymbol{e}_3$*. Quindi se* G *è il centro di massa dell'asta e* I *denota il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse ad essa ortogonale in* G*, si ha*

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} I \dot\theta^2 .$$

Inoltre

$$\boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}} = (R\cos\varphi + L\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (R\sin\varphi + L\sin\theta)\boldsymbol{e}_2 ,$$

e quindi

$$\boldsymbol{v}_G^{\mathrm{L}} = -(R\dot\varphi\sin\varphi + L\dot\theta\sin\theta)\boldsymbol{e}_1 + (R\dot\varphi\cos\varphi + L\dot\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_2 ,$$

cosicché

$$\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G^{\mathrm{L}}|^2 = \frac{m}{2}\big\{R^2\dot\varphi^2 + L^2\dot\theta^2 + 2RL\dot\varphi\dot\theta\cos(\varphi - \theta)\big\} .$$

2) Il potenziale conservativo di peso e forza elastica è

$$U = -mgx_{2G} - \frac{k}{2}|\boldsymbol{x}_B|^2 .$$

Dunque quello lagrangiano ottenuto sostituendo la parametrizzazione lagrangiana è

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{L}} &= -mg(R\sin\varphi + L\sin\theta) - \frac{k}{2}[(R\cos\varphi + 2L\cos\theta)^2 + (R\sin\varphi + 2L\sin\theta)^2] \\ &= -mg(R\sin\varphi + L\sin\theta) - \frac{k}{2}[R^2 + 4L^2 + 4RL\cos(\varphi - \theta)] . \end{aligned}$$

3) Scriviamo il sistema del gradiente del potenziale, che è

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= -mgR\cos\varphi + 2kRL\sin(\varphi - \theta) = 0 , \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= -mgL\cos\theta - 2kRL\sin(\varphi - \theta) = 0 . \end{aligned}$$

Dunque se $\varphi = \theta$ *si ha*

$$\cos\varphi = 0 , \quad \cos\theta = 0 ,$$

ossia $\varphi = \theta = \pm\pi/2$.
4) Calcoliamo l'hessiana del potenziale, ottenendo

$$\begin{pmatrix} mgR\sin\varphi + 2kRL\cos(\varphi-\theta) & -2kRL\cos(\varphi-\theta) \\ -2kRL\cos(\varphi-\theta) & mgL\sin\theta + 2kRL\cos(\varphi-\theta) \end{pmatrix}.$$

Dunque nella posizione di equilibrio $\boldsymbol{q}_0 = (-\pi/2, -\pi/2)$ *si ha*

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}_0) = \begin{pmatrix} -mgR + 2kRL & -2kRL \\ -2kRL & -mgL + 2kRL \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\det D^2U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}_0) = mgRL[mg - 2k(R+L)] > 0$$

se

$$mg > 2k(R+L).$$

La stessa condizione garantisce che l'elemento di posto 11 *della matrice sia negativo; quindi sotto questa condizione, l'hessiana è definita negativa in* $\boldsymbol{q}_0$ *e qui si possono definire le piccole oscillazioni.*
Poi dalle definizioni segue

$$T^* = T^{\mathrm{L}}\Big(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \dot\varphi, \dot\theta\Big) = \frac{1}{2}I\dot\theta^2 + \frac{m}{2}\big\{R^2\dot\varphi^2 + L^2\dot\theta^2 + 2RL\dot\varphi\dot\theta\big\}.$$

5) Si ha dunque per $t = 0$ *(come nel seguito)*

$$\boldsymbol{X}_A^{\mathrm{L}} = R\cos\varphi(0)\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi(0)\boldsymbol{e}_2 = \frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2).$$

Pertanto $\varphi(0) = \pi/4$. *Inoltre*

$$\boldsymbol{v}_A^{\mathrm{L}} = \dot\varphi(0)R(-\sin\varphi(0)\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi(0)\boldsymbol{e}_2) = \dot\varphi(0)R\frac{\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1}{\sqrt{2}} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2),$$

cosicché $\dot\varphi(0) = -v_0/R$. *Poi si ha*

$$\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{L}} = \boldsymbol{X}_A^{\mathrm{L}} + 2L(\cos\theta(0)\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta(0)\boldsymbol{e}_2),$$

da cui

$$2L(\cos\theta(0)\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta(0)\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{X}_B^{\mathrm{L}} - \boldsymbol{X}_A^{\mathrm{L}} = \sqrt{2}L(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2),$$

cioè $\theta(0) = \pi/4$. *Infine*

$$\boldsymbol{v}_B^{\mathrm{L}} = \boldsymbol{v}_A^{\mathrm{L}} + 2L\dot\theta(0)(-\sin\theta(0)\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta(0)\boldsymbol{e}_2),$$

ossia

$$\frac{v_0}{2}(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1) = \frac{v_0}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) + 2L\dot\theta(0)\frac{\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1}{\sqrt{2}},$$

da cui $\dot\theta(0) = v_0(\sqrt{2}+1)/(2L\sqrt{2})$.
6) I vincoli sono

$$x_{3A} = 0, \quad x_{3B} = 0, \quad x_{1A}^2 + x_{2A}^2 - R^2 = 0.$$

Dunque la matrice iacobiana è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2x_{1A} & 2x_{2A} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango massimo perché nelle configurazioni compatibili con il vincolo si ha $(x_{1A}, x_{2A}) \neq (0{,}0)$.
R.

$$1)\quad T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}I\dot\theta^2 + \frac{m}{2}\bigl\{R^2\dot\varphi^2 + L^2\dot\theta^2 + 2RL\dot\varphi\dot\theta\cos(\varphi-\theta)\bigr\}.$$

$$2)\quad U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = -mg(R\sin\varphi + L\sin\theta) - 2kRL\cos(\varphi-\theta).$$

$$3)\quad \Bigl(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Bigr),\quad \Bigl(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\Bigr).$$

$$4)\quad mg > 2k(R+L),\quad T^{*} = \frac{1}{2}I\dot\theta^2 + \frac{m}{2}\bigl\{R^2\dot\varphi^2 + L^2\dot\theta^2 + 2RL\dot\varphi\dot\theta\bigr\}.$$

$$5)\quad \varphi(0) = \frac{\pi}{4},\quad \theta(0) = \frac{\pi}{4},\quad \dot\varphi(0) = -\frac{v_0}{R},\quad \dot\theta(0) = \frac{v_0}{2L\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1).$$

$$6)\quad x_{3A} = 0,\quad x_{3B} = 0,\quad x_{1A}^2 + x_{2A}^2 - R^2 = 0.$$

81. [06/09/2024 (ex)I] Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$ e $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ sono vincolati con vincoli lisci come segue: $\boldsymbol{X}_1$ appartiene alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2,\qquad x_3 = h,$$

e invece $\boldsymbol{X}_2$ appartiene alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2,\qquad x_3 = 0.$$

Su $\boldsymbol{X}_1$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_1 = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) + \beta\boldsymbol{e}_2,$$

e su $\boldsymbol{X}_2$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_2 = -k(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1);$$

qui R, h, k, β sono costanti positive.
Si usino le coordinate lagrangiane $(\theta,\varphi) \in (-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\theta) = R\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + h\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(\varphi) = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2.$$

1) Si calcoli il potenziale lagrangiano del sistema.
2) Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
3) Si scrivano le equazioni di Lagrange.

4) Si dimostri che ciascun moto mantiene velocità limitata e se ne determini una limitazione in funzione dei dati iniziali.
5) Si determini nell'istante generico la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}2}$ su $\boldsymbol{X}_2$, in funzione di θ, φ, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ (oltre che ovviamente di m_1, m_2, R, h, k, β).
6) Si usino le coordinate locali $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_6)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{i=1}^{3} z_i \boldsymbol{e}_i \qquad \boldsymbol{X}_2 = \sum_{i=1}^{3} z_{i+3} \boldsymbol{e}_i \,.$$

Si determini, nella configurazione $\boldsymbol{z}_0 = (R,0,h,0,R,0)$, una base dello spazio normale dei vincoli $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ come sottospazio di $\boldsymbol{R}^6$.
SOLUZIONE
1) Le forze sono conservative con potenziale

$$U = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^2 + \beta \boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Quindi sostituendo la parametrizzazione lagrangiana si ottiene il potenziale lagrangiano

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{L}} &= -\frac{k}{2}[R^2(\cos\theta - \cos\varphi)^2 + R^2(\sin\theta - \sin\varphi)^2 + h^2] + \beta R \sin\theta \\ &= kR^2\cos(\theta - \varphi) + \beta R\sin\theta - \frac{k}{2}[2R^2 + h^2] \,. \end{aligned}$$

2) Il sistema del gradiente del potenziale lagrangiano è

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} &= -kR^2 \sin(\theta - \varphi) + \beta R \cos\theta = 0 \,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= kR^2 \sin(\theta - \varphi) = 0 \,. \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$\theta - \varphi = n\pi \,, \qquad n \in \boldsymbol{Z} \,.$$

Perciò dalla prima

$$\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi \,, \qquad m \in \boldsymbol{Z} \,.$$

Denotando equivalentemente $j = m - n$ si arriva a

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + m\pi - n\pi = \frac{\pi}{2} + j\pi \,, \qquad j \in \boldsymbol{Z} \,.$$

Poiché m e j sono indipendenti si ottengono infine le posizioni di equilibrio

$$\boldsymbol{q}_1 = \Big(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\Big) \,, \quad \boldsymbol{q}_2 = \Big(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\Big) \,, \quad \boldsymbol{q}_3 = \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \,, \quad \boldsymbol{q}_4 = \Big(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \,.$$

Per determinarne la stabilità calcoliamo la matrice hessiana

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -kR^2\cos(\theta - \varphi) - \beta R \sin\theta & kR^2 \cos(\theta - \varphi) \\ kR^2\cos(\theta - \varphi) & -kR^2\cos(\theta - \varphi) \end{pmatrix} \,.$$

Nelle posizioni di equilibrio si ha

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}_1) = \begin{pmatrix} -kR^2+\beta R & kR^2 \\ kR^2 & -kR^2 \end{pmatrix}, \quad D^2 U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}_2) = \begin{pmatrix} kR^2-\beta R & -kR^2 \\ -kR^2 & kR^2 \end{pmatrix},$$
$$D^2 U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}_3) = \begin{pmatrix} kR^2+\beta R & -kR^2 \\ -kR^2 & kR^2 \end{pmatrix}, \quad D^2 U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}_4) = \begin{pmatrix} -kR^2-\beta R & kR^2 \\ kR^2 & -kR^2 \end{pmatrix},$$

Si vede subito che l'hessiana è indefinita in $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, definita positiva in $\boldsymbol{q}_3$ e definita negativa in $\boldsymbol{q}_4$ che quindi risulta l'unico punto di massimo isolato e perciò l'unico punto stabile.

3) Va determinata l'energia cinetica lagrangiana, usando

$$\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{L}} = R\dot{\theta}(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_2), \quad \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{L}} = R\dot{\varphi}(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2).$$

Si ottiene

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m_1}{2}R^2\dot{\theta}^2 + \frac{m_2}{2}R^2\dot{\varphi}^2.$$

Quindi le equazioni di Lagrange si ottengono per esempio dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}R^2\dot{\theta}^2 + \frac{m_2}{2}R^2\dot{\varphi}^2 + kR^2\cos(\theta-\varphi) + \beta R\sin\theta,$$

e sono

$$\begin{aligned} m_1R^2\ddot{\theta} + kR^2\sin(\theta-\varphi) - \beta R\cos\theta &= 0, \\ m_2R^2\ddot{\varphi} - kR^2\sin(\theta-\varphi) &= 0. \end{aligned}$$

4) Vale la conservazione dell'energia

$$\mathcal{E}(t) = T(t) - U(\boldsymbol{X}_1(t), \boldsymbol{X}_2(t)) = \mathcal{E}(0).$$

In termini della rappresentazione lagrangiana

$$\frac{m_1}{2}R^2\dot{\theta}^2 + \frac{m_2}{2}R^2\dot{\varphi}^2 - kR^2\cos(\theta-\varphi) - \beta R\sin\theta = \mathcal{E}(0),$$

da cui

$$\frac{m_1}{2}R^2\dot{\theta}^2 + \frac{m_2}{2}R^2\dot{\varphi}^2 \le \mathcal{E}(0) + kR^2 + \beta R.$$

5) Si ha dall'equazione di moto, usando anche la seconda equazione di Lagrange,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\mathrm{vin}2} &= m_2\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{F}_2 = m_2R\ddot{\varphi}(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2) \\ &\quad - m_2R\dot{\varphi}^2(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2) + k(\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(\varphi) - \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\theta)) \\ &= Rk\sin(\theta-\varphi)(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2) \\ &\quad - m_2R\dot{\varphi}^2(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2) + k(\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(\varphi) - \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\theta)). \end{aligned}$$

6) I vincoli sono 4, fissi, dati da

$$f_1 = z_1^2 + z_2^2 - R^2 = 0, \qquad f_2 = z_3 - h = 0,$$
$$f_3 = z_4^2 + z_5^2 - R^2 = 0, \qquad f_4 = z_6 = 0.$$

Quindi i gradienti sono

$$\nabla f_1 = (2z_1, 2z_2, 0, 0, 0, 0), \qquad \nabla f_2 = (0, 0, 1, 0, 0, 0),$$
$$\nabla f_3 = (0, 0, 0, 2z_4, 2z_5, 0), \qquad \nabla f_4 = (0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Nella configurazione data si ha

$$
\begin{aligned}
\nabla f_1 &= (2R{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0)\,, & \nabla f_2 &= (0{,}0{,}1{,}0{,}0{,}0)\,,\\
\nabla f_3 &= (0{,}0{,}0{,}0{,}2R{,}0)\,, & \nabla f_4 &= (0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}1)\,.
\end{aligned}
$$

Questi sono i vettori della base cercata.
R.

1) $U^{\mathrm{L}}(\theta,\varphi) = kR^2\cos(\theta-\varphi) + \beta R\sin\theta\,;$
2) $\boldsymbol{q}_1 = \Big(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\Big)\,, \quad \boldsymbol{q}_2 = \Big(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\Big)\,, \quad \boldsymbol{q}_3 = \Big(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\Big)\,, \quad \boldsymbol{q}_4 = \Big(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\Big)\,;$
   solo $\boldsymbol{q}_4$ *è stabile;*
3) $m_1R^2\ddot\theta + kR^2\sin(\theta-\varphi) - \beta R\cos\theta = 0\,,$
   $m_2R^2\ddot\varphi - kR^2\sin(\theta-\varphi) = 0\,;$
4) $\dfrac{m_1}{2}R^2\dot\theta^2 + \dfrac{m_2}{2}R^2\dot\varphi^2 \le \dfrac{m_1}{2}R^2\dot\theta(0)^2 + \dfrac{m_2}{2}R^2\dot\varphi(0)^2 + 2kR^2 + 2\beta R\,;$
5) $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}2} = Rk\sin(\theta-\varphi)(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2)$
   $- m_2R\dot\varphi^2(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2) + k(\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(\varphi) - \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\theta))\,;$
6) $(2R{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0)\,, \quad (0{,}0{,}1{,}0{,}0{,}0)\,, \quad (0{,}0{,}0{,}0{,}2R{,}0)\,, \quad (0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}1)\,.$

630. Equazioni di Lagrange per vincoli mobili

1. [4/7/2005 (ex)I] Due punti materiali P_1 e P_2 di uguale massa m sono vincolati a una circonferenza γ di centro l'origine O del sistema di riferimento fisso (O,x_1,x_2,x_3), e di raggio R. La circonferenza ruota intorno all'asse verticale x_2 (che è un suo diametro) con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_2$. I vincoli sono lisci.
I punti si attraggono con forze elastiche di costante $k>0$, ossia

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = k\overrightarrow{P_1P_2}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{P_2} = k\overrightarrow{P_2P_1}\,.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.
Soluzione
Le forze che fanno lavoro sono conservative. Scriviamo la lagrangiana del sistema. Indicando nel sistema fisso

$$P_1 = (y_1,y_2,y_3)\,, \qquad P_2 = (z_1,z_2,z_3)\,,$$

si ha per il potenziale delle forze elastiche

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{3}(y_i-z_i)^2\,;$$

infatti

$$\boldsymbol{F}_{P_j} = \nabla_{P_j}U_{\mathrm{el}}\,, \qquad j = 1\,,2\,.$$

Il potenziale delle forze peso (assumendo che il verso positivo dell'asse x_2 sia rivolto verso l'alto) è

$$U_{\mathrm{peso}} = -mgy_2 - mgz_2 \,.$$

Per scrivere l'energia cinetica di ciascuno dei due punti nel sistema fisso, usiamo la formula della cinematica relativa:

$$\boldsymbol{v}_{P_1} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_1} \,,$$

ove con $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ indichiamo la velocità di P_1 relativa al sistema di riferimento solidale con il moto della circonferenza. È chiaro che $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ e $\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_1}$ sono ortogonali, poiché sia $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ che $\overrightarrow{OP_1}$ e $\boldsymbol{\omega}$ appartengono al piano della circonferenza. Dunque

$$\left|\boldsymbol{v}_{P_1}\right|^2 = \left|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}\right|^2 + \left|\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_1}\right|^2 \,.$$

Visto che il moto di P_1 nel sistema mobile è circolare con raggio R, si ha

$$\left|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}\right|^2 = R^2\dot{\theta}^2 \,,$$

se θ è la coordinata angolare di P_1 nel piano della circonferenza. In particolare, scegliamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ in modo che gli assi ξ_2 e x_2 coincidano, e che l'asse ξ_1 contenga il diametro della circonferenza ortogonale a x_2. Quindi scegliamo θ in modo che

$$[P_1]_{\mathcal{S}} = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0) \,.$$

Allora

$$\left|\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_1}\right|^2 = \omega^2[\mathrm{dist}(P_1, \text{asse } \xi_2)]^2 = \omega^2 R^2 \cos^2\theta \,.$$

Per P_2 si procede in modo del tutto analogo, chiamando φ la sua coordinata angolare. Si ha infine

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} mR^2\big(\dot{\theta}^2 + \omega^2\cos^2\theta + \dot{\varphi}^2 + \omega^2\cos^2\varphi\big) \\ - kR^2\big(1 - \cos(\theta - \varphi)\big) - mgR(\sin\theta + \sin\varphi) \,,\end{aligned}$$

da cui le equazioni di Lagrange

$$\begin{aligned} mR^2\ddot{\theta} + kR^2\sin(\theta - \varphi) + mgR\cos\theta + m\omega^2R^2\sin\theta\cos\theta = 0 \,, \\ mR^2\ddot{\varphi} - kR^2\sin(\theta - \varphi) + mgR\cos\varphi + m\omega^2R^2\sin\varphi\cos\varphi = 0 \,. \end{aligned}$$

2. [4/7/2005 (ex)II] Due punti materiali P_1 e P_2 di uguale massa m sono vincolati a una circonferenza γ di centro l'origine O del sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3), e di raggio R. La circonferenza ruota intorno all'asse verticale x_2 (che è un suo diametro) con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_2$. I vincoli sono lisci.
I punti si respingono con forze elastiche di costante $k > 0$, ossia

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = k\overrightarrow{P_2P_1} \,, \qquad \boldsymbol{F}_{P_2} = k\overrightarrow{P_1P_2} \,.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.

SOLUZIONE

Se θ [φ] è la coordinata angolare di P_1 [P_2], si ha

$$mR^2\ddot{\theta} - kR^2 \sin(\theta - \varphi) + mgR\cos\theta + m\omega^2 R^2 \sin\theta\cos\theta = 0\,,$$
$$mR^2\ddot{\varphi} + kR^2 \sin(\theta - \varphi) + mgR\cos\varphi + m\omega^2 R^2 \sin\varphi\cos\varphi = 0\,.$$

3. [18/7/2005 (ex)I] Si consideri un piano mobile $\pi(t)$ sovrapposto al piano fisso $x_3 = 0$, ruotante intorno all'asse x_3 con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = -\omega \boldsymbol{e}_3$, ove $\omega > 0$. Il punto O solidale con $\pi(t)$ coincide con l'origine del sistema fisso. Una curva γ solidale con $\pi(t)$ ha equazione (in coordinate polari su $\pi(t)$)

$$r = a\theta\,, \qquad 0 < \theta < \infty\,,$$

ove $a > 0$ è costante.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a γ. Il vincolo è liscio. Si dimostri che se le condizioni iniziali del moto corrispondono a

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \dot{\theta}(0) = \omega\,,$$

il moto di P nel sistema di riferimento fisso è rettilineo.
(Si deve assumere che θ cresca nel verso antiorario rispetto al verso positivo dell'asse x_3.)

SOLUZIONE

A) Consideriamo un sistema di riferimento solidale con π, $\mathcal{S} = (O, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, ove $\pi(t)$ coincide in ogni istante con il piano $\xi_3 = 0$, e O con l'intersezione dell'asse ξ_3 con $\pi(t)$.
Dato che nel sistema fisso vale

$$P(t) = (r\cos(-\omega t + \theta), r\sin(-\omega t + \theta), 0)\,, \tag{1}$$

(se all'istante iniziale gli assi x_i e ξ_i si assumono coincidenti, $i = 1, 2$), il moto di P è rettilineo nel sistema fisso se

$$-\omega t + \theta = \text{ costante}\,, \quad \textit{ossia} \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \omega t\,.$$

L'equazione di moto di P nel sistema $\mathcal{S}$ è

$$m\boldsymbol{a}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} + \boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C} + \mathbf{f}_{\text{vin}}\,,$$

ove $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ è la reazione vincolare. Le forze $\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C}$ e $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ hanno componenti lagrangiane nulle. La forza $\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T}$ è nel nostro caso è data da

$$\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}] = m\omega^2 \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\,\boldsymbol{u} = m\omega^2 r \boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è il versore radiale su $\xi_3 = 0$. Dunque $\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T}$ ammette un potenziale

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2\theta^2\,.$$

L'energia cinetica di P è espressa da

$$T = \frac{1}{2} m \left| \dot{r}\boldsymbol{u} + r\dot{\theta}\boldsymbol{\tau} \right|^2 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2} m a^2 (1 + \theta^2)\dot{\theta}^2 \,,$$

se $\boldsymbol{\tau}$ è il versore trasversale a $\boldsymbol{u}$. Usiamo la coordinata lagrangiana θ. Allora la lagrangiana del sistema vale

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m a^2 (1 + \theta^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \theta^2 \,.$$

L'equazione di Lagrange è pertanto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(m a^2 (1 + \theta^2)\dot{\theta}\big) - m a^2 \theta\dot{\theta}^2 - m\omega^2 a^2 \theta = 0 \,,$$

ossia

$$m a^2 (1+\theta^2)\ddot{\theta} + 2 m a^2 \theta\dot{\theta}^2 - m a^2 \theta\dot{\theta}^2 - m\omega^2 a^2 \theta = m a^2 (1+\theta^2)\ddot{\theta} + m a^2 \theta\dot{\theta}^2 - m\omega^2 a^2 \theta = 0 \,.$$

Si verifica subito che

$$\dot{\theta}(t) = \omega \,, \qquad t \geq 0 \,,$$

è soluzione (e quindi l'unica), corrispondente al dato iniziale

$$\dot{\theta}(0) = \omega \,.$$

Quindi la soluzione dell'equazione di Lagrange è

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega t = \frac{\pi}{2} + \omega t \,,$$

confermando che il moto di P nel sistema fisso è rettilineo.
B) In alternativa alla risoluzione sopra, risolviamo il problema calcolando la lagrangiana nel sistema fisso.
In questo sistema non ci sono forze applicate al punto.
La velocità (vedi la (1)) è

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = \big(& a\dot{\theta}\cos(-\omega t + \theta) - (-\omega + \dot{\theta}) a\theta \sin(-\omega t + \theta), \\ & a\dot{\theta}\sin(-\omega t + \theta) + (-\omega + \dot{\theta}) a\theta \cos(-\omega t + \theta), \\ & 0\big) \,. \end{aligned}$$

Dunque la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} m [a^2\dot{\theta}^2 + (-\omega + \dot{\theta})^2 a^2 \theta^2] \,.$$

L'equazione di Lagrange è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[a^2\dot{\theta} + (-\omega + \dot{\theta}) a^2 \theta^2\Big] - (-\omega + \dot{\theta})^2 a^2 \theta = 0 \,,$$

da cui ancora

$$a^2 (1 + \theta^2)\ddot{\theta} + a^2 \theta\dot{\theta}^2 - \omega^2 a^2 \theta = 0 \,,$$

e si conclude come sopra.

4. [18/7/2005 (ex)II] Si consideri un piano mobile $\pi(t)$ sovrapposto al piano fisso $x_1 = 0$, ruotante intorno all'asse x_1 con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = -\omega \boldsymbol{e}_1$, ove $\omega > 0$. Una curva γ solidale con $\pi(t)$ ha equazione (in coordinate polari su $\pi(t)$)

$$r = b\theta\,, \qquad 0 < \theta < \infty\,,$$

ove $b > 0$ è costante.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a γ. Il vincolo è liscio. Si dimostri che se le condizioni iniziali del moto corrispondono a

$$\theta(0) = \pi\,, \qquad \dot\theta(0) = \omega\,,$$

il moto di P nel sistema di riferimento fisso è rettilineo.
(Si deve assumere che θ cresca nel verso antiorario rispetto al verso positivo dell'asse x_1.)

5. [15/12/2005 (ex)I] Un'asta omogenea di lunghezza $2L$ e massa m ha un estremo vincolato a una circonferenza γ di raggio R e centro O, che a sua volta ruota con velocità costante $\boldsymbol{\omega}$ intorno al suo diametro verticale AB. I punti A e B sono fissi nel sistema di riferimento fisso. L'asta appartiene al piano della circonferenza. I vincoli sono lisci.
Scrivere il sistema di equazioni che determina le posizioni di equilibrio dell'asta nel sistema di riferimento solidale con il piano della circonferenza, e origine in O, e riconoscere che in nessuna posizione di equilibrio l'asta si mantiene orizzontale.
SOLUZIONE
L'asta ha due gradi di libertà.
Sia $(O, \boldsymbol{u}_i)$ il sistema di riferimento solidale con il piano della circonferenza, che prendiamo come $\{x_1 = 0\}$. Inoltre sia $\boldsymbol{u}_3$ la verticale ascendente.
Indichiamo con P_1 l'estremo dell'asta vincolato a γ, e con P_2 l'altro estremo.
Scegliamo come prima coordinata lagrangiana l'angolo φ formato da $\overrightarrow{OP_1}$ con $\boldsymbol{u}_2$. Come seconda coordinata scegliamo l'angolo θ formato da $\overrightarrow{P_1P_2}$ con $\boldsymbol{u}_2$. Dunque l'asta è parametrizzata da

$$\overrightarrow{OP(s)} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P(s)} = R(0, \cos\varphi, \sin\varphi) + s(0, \cos\theta, \sin\theta)\,,$$

per $0 \le s \le 2L$.
Nel sistema $(O, \boldsymbol{u}_i)$ sull'asta agiscono il peso e la forza di trascinamento di densità

$$\frac{m}{2L}\omega^2 x_2\,.$$

Quindi il potenziale di quest'ultima sarà dato da

$$\begin{aligned} U_{\scriptscriptstyle T} = \int_0^{2L} \frac{m}{2L}\omega^2 \frac{x_2^2}{2}\,\mathrm{d}s &= \frac{m}{4L}\omega^2 \int_0^{2L} (R\cos\varphi + s\cos\theta)^2\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{m}{4L}\omega^2 \Big(2LR^2\cos^2\varphi + 4L^2R\cos\varphi\cos\theta + \frac{8}{3}L^3\cos^2\theta\Big)\,. \end{aligned}$$

Il potenziale della forza peso sarà invece, se G è il centro di massa dell'asta,

$$U_{\text{peso}} = -mgx_{3G} = -mg(R\sin\varphi + L\sin\theta)\,.$$

Il potenziale complessivo si ottiene sommando i due, ed è

$$U(\varphi,\theta) = \frac{m}{2}\omega^2\Big(R^2\cos^2\varphi + 2LR\cos\varphi\cos\theta + \frac{4}{3}L^2\cos^2\theta\Big) - mg(R\sin\varphi + L\sin\theta)\,.$$

Le equazioni che determinano le posizioni di equilibrio sono date da $\nabla U = 0$, ossia da

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial\varphi} &= \frac{m}{2}\omega^2(-2R^2\cos\varphi\sin\varphi - 2LR\sin\varphi\cos\theta) - mgR\cos\varphi = 0\,,\\
\frac{\partial U}{\partial\theta} &= \frac{m}{2}\omega^2\Big(-2LR\cos\varphi\sin\theta - \frac{8}{3}L^2\cos\theta\sin\theta\Big) - mgL\cos\theta = 0\,.
\end{aligned}$$

La posizione orizzontale di $\overrightarrow{P_1P_2}$ corrisponde a $\theta = 0$, valore che però è escluso dalla seconda equazione.
R.

$$\begin{aligned}
\omega^2(R\cos\varphi\sin\varphi + L\sin\varphi\cos\theta) + g\cos\varphi = 0\,,\\
\omega^2\Big(R\cos\varphi\sin\theta + \frac{4}{3}L\cos\theta\sin\theta\Big) + g\cos\theta = 0\,.
\end{aligned}$$

6. [7/7/2006 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato a una retta $R(t)$ di equazione

$$\begin{aligned}
x_3 &= 0\,,\\
x_1\sin\alpha(t) - x_2\cos\alpha(t) &= 0\,,
\end{aligned}$$

ove $\alpha : [0,\infty) \to [0,\infty)$ è una funzione C^1 con $\dot\alpha > 0$. Il peso è diretto secondo il verso negativo dell'asse x_2.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.
2. Determinare il moto del punto nel caso in cui $\alpha(t) = \omega t$, e siano assegnate le condizioni iniziali

$$P(0) = (s_0,0,0)\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = s_0\omega(0,1,0)\,.$$

Soluzione
1) Scegliamo come coordinata lagrangiana l'ascissa r del punto sulla retta $R(t)$. Si ha quindi

$$P = (r\cos\alpha(t), r\sin\alpha(t), 0)\,,$$

cosicché l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\alpha^2)\,.$$

Il potenziale della forza peso è poi dato da

$$U = -mgx_2 = -mgr\sin\alpha(t)\,.$$

Dunque

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}^2) - mgr\sin\alpha(t)\,.$$

Perciò l'equazione di Lagrange è

$$\ddot{r} - r\dot{\alpha}(t)^2 + g\sin\alpha(t) = 0\,.$$

2) Nel caso in cui $\alpha(t) = \omega t$, questa si riduce a

$$\ddot{r} - \omega^2 r = -g\sin\omega t\,,$$

che ha integrale generale

$$r(t) = k_1 e^{\omega t} + k_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\,.$$

Le costanti k_i si determinano imponendo le condizioni iniziali, che in coordinate lagrangiane si leggono come

$$r(0) = s_0\,, \qquad \dot{r}(0) = 0\,.$$

R. *1) Equazioni di Lagrange:*

$$\ddot{r} - r\dot{\alpha}(t)^2 + g\sin\alpha(t) = 0\,,$$

ove r è l'ascissa su $R(t)$.
2) Moto:

$$r(t) = \frac{1}{2}\Big[\Big(s_0 - \frac{g}{2\omega^2}\Big)e^{\omega t} + \Big(s_0 + \frac{g}{2\omega^2}\Big)e^{-\omega t}\Big] + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\,.$$

7. [7/7/2006 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato a una retta $R(t)$ di equazione

$$\begin{aligned} x_3 &= 0\,,\\ -x_1\cos\alpha(t) + x_2\sin\alpha(t) &= 0\,, \end{aligned}$$

ove $\alpha : [0,\infty) \to [0,\infty)$ è una funzione C^1 con $\dot{\alpha} > 0$. Il peso è diretto secondo il verso negativo dell'asse x_1.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.
2. Determinare il moto del punto nel caso in cui $\alpha(t) = \omega t$, e siano assegnate le condizioni iniziali

$$P(0) = (0, s_0, 0)\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = s_0\omega(1,0,0)\,.$$

R. *1) Equazioni di Lagrange:*

$$\ddot{r} - r\dot{\alpha}(t)^2 + g\sin\alpha(t) = 0\,,$$

ove r è l'ascissa su $R(t)$.
2) Moto:

$$r(t) = \frac{1}{2}\Big[\Big(s_0 - \frac{g}{2\omega^2}\Big)e^{\omega t} + \Big(s_0 + \frac{g}{2\omega^2}\Big)e^{-\omega t}\Big] + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\,.$$

8. [19/7/2006 (ex)I] Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a muoversi sul piano ruotante $\Pi(t)$ di equazione

$$-x_1\cos(\omega t) + x_2\sin(\omega t) = 0\,,$$

ove $\omega > 0$ è costante.
Sia $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con $\Pi(t)$, ove $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{u}_1(t)$ è perpendicolare a $\Pi(t)$ per ogni t; inoltre sia $\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{e}_1$. Qui O denota l'origine del sistema di riferimento fisso. Siano (ξ_i) le coordinate associate a $\mathcal{S}$.
Il centro C dell'asta è vincolato alla retta solidale con $\Pi(t)$

$$\xi_3 = \xi_2\,, \qquad \xi_1 = 0\,.$$

Sull'asta agisce la forza peso diretta nel verso negativo dell'asse x_3.

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Determinare le eventuali posizioni di equilibrio relative a $\Pi(t)$.

Soluzione
1) Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$x = \xi_{2C}\,,$$
$$\varphi = \text{angolo tra } \overrightarrow{AB} \text{ e } \boldsymbol{u}_2.$$

L'asta AB verrà allora parametrizzata, nel sistema $\mathcal{S}$, da

$$(0, x + s\cos\varphi, x + s\sin\varphi)\,, \qquad -L < s < L\,.$$

Su AB, sempre nel sistema $\mathcal{S}$, agiscono il peso, di potenziale

$$U_{\text{peso}}(x, \varphi) = -mg\xi_{3C} = -mgx\,,$$

e la forza di trascinamento, di densità

$$\frac{m}{2L}\omega^2\xi_2\boldsymbol{u}_2\,.$$

Dunque

$$U_{\mathrm{T}}(x,\varphi) = \int_{-L}^{L} \frac{m}{4L}\omega^2 (x + s\cos\varphi)^2 \,\mathrm{d}s = \frac{m}{4L}\omega^2\Big(2Lx^2 + \frac{2}{3}L^3\cos^2\varphi\Big)\,.$$

Infine in $\mathcal{S}$, per il teorema di König,

$$T = \frac{1}{2}m\left|[\boldsymbol{v}_C]_{\mathcal{S}}\right|^2 + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 = m\dot x^2 + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2\,,$$

se I è il momento d'inerzia di AB relativo all'asse ortogonale a AB in C. Quindi

$$\mathcal{L} = m\dot x^2 + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 - mgx + \frac{m}{2}\omega^2\Big(x^2 + \frac{1}{3}L^2\cos^2\varphi\Big)\,.$$

Le equazioni di Lagrange pertanto sono

$$\begin{gathered} 2m\ddot x + mg - m\omega^2 x = 0\,,\\ I\ddot\varphi + \frac{m}{3}\omega^2 L^2 \sin\varphi\cos\varphi = 0\,. \end{gathered}$$

2) Cerchiamo i punti stazionari di $U = U_{\mathrm{peso}} + U_{\mathrm{T}}$. Dato che

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -mg + m\omega^2 x\,,\\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= -\frac{m}{3}\omega^2 L^2\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{m}{6}\omega^2 L^2 \sin 2\varphi\,, \end{aligned}$$

si hanno i quattro punti stazionari

$$(g\omega^{-2},0)\,,\quad (g\omega^{-2},\pi/2)\,,\quad (g\omega^{-2},\pi)\,,\quad (g\omega^{-2},3\pi/2)\,.$$

Dunque

- $(g\omega^{-2}$,0) *e* $(g\omega^{-2},\pi)$: *si ha*

  $$D^2U = \begin{pmatrix} m\omega^2 & 0\\ 0 & -m\omega^2L^2/3 \end{pmatrix}\,,$$

  che è indefinita. Quindi si ha equilibrio instabile.
- $(g\omega^{-2},\pi/2)$ *e* $(g\omega^{-2}$,$3\pi/2)$: *si ha*

  $$D^2U = \begin{pmatrix} m\omega^2 & 0\\ 0 & m\omega^2L^2/3 \end{pmatrix}\,,$$

  che è definita positiva. Quindi si ha equilibrio instabile.

R. *Equazioni di Lagrange:*

$$\begin{gathered} 2m\ddot x + mg - m\omega^2 x = 0\,,\\ I\ddot\varphi + \frac{m}{3}\omega^2 L^2 \sin\varphi\cos\varphi = 0\,. \end{gathered}$$

Equilibrio:

$$\begin{gathered} (g\omega^{-2},0)\,,\quad (g\omega^{-2},\pi)\,,\quad \text{(equilibrio instabile)}\\ (g\omega^{-2},\pi/2)\,,\quad (g\omega^{-2},3\pi/2)\quad \text{(equilibrio instabile)}\,. \end{gathered}$$

9. [19/7/2006 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza di raggio variabile $r(t)$ data da

$$x_1^2 + x_2^2 = r(t)^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Qui dunque $r \in C^1(\boldsymbol{R})$ è un'assegnata funzione con $r(t) > 0$ per ogni t.
Il punto è soggetto alla forza peso, diretta nel verso negativo dell'asse x_1.
Scrivere le equazioni di Lagrange.
Soluzione
Scegliamo come coordinata lagrangiana l'anomalia polare φ nel piano $x_3 = 0$. Allora le coordinate di P nel sistema fisso sono

$$(r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, 0) \,,$$

e quindi

$$\boldsymbol{v}_P = \dot r(t)(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) + r(t)\dot\varphi(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \,.$$

La lagrangiana dunque è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot r(t)^2 + r(t)^2\dot\varphi^2) - mgr(t)\cos\varphi \,,$$

e l'equazione di Lagrange risulta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr(t)^2\dot\varphi) - mgr(t)\sin\varphi = 0 \,,$$

cioè

$$r(t)\ddot\varphi + 2\dot r(t)\dot\varphi - g\sin\varphi = 0 \,.$$

R. *Equazione di Lagrange:*

$$r(t)\ddot\varphi + 2\dot r(t)\dot\varphi - g\sin\varphi = 0 \,.$$

10. [19/7/2006 (ex)II] Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a muoversi sul piano ruotante $\Pi(t)$ di equazione

$$-x_1\cos(\omega t) + x_2\sin(\omega t) = 0 \,,$$

ove $\omega > 0$ è costante.
Sia $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con $\Pi(t)$, ove $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{u}_1(t)$ è perpendicolare a $\Pi(t)$ per ogni t; inoltre sia $\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{e}_1$. Qui O denota l'origine del sistema di riferimento fisso. Siano (ξ_i) le coordinate associate a $\mathcal{S}$.
Il centro C dell'asta è vincolato alla retta solidale con $\Pi(t)$

$$\xi_3 = -\xi_2 \,, \qquad \xi_1 = 0 \,.$$

Sull'asta agisce la forza peso diretta nel verso positivo dell'asse x_3.

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Determinare le eventuali posizioni di equilibrio relative a $\Pi(t)$.

R. *Equazioni di Lagrange:*

$$2m\ddot{x} - mg - m\omega^2 x = 0\,,$$
$$I\ddot{\varphi} + \frac{m}{3}\omega^2 L^2 \sin\varphi\cos\varphi = 0\,.$$

Equilibrio:

$$(g\omega^{-2}, 0)\,, \quad (g\omega^{-2}, \pi)\,, \quad \textit{(equilibrio stabile)}$$
$$(g\omega^{-2}, \pi/2)\,, \quad (g\omega^{-2}, 3\pi/2) \quad \textit{(equilibrio instabile)}\,.$$

11. [19/7/2006 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza di raggio variabile $r(t)$ data da

$$x_1^2 + x_2^2 = r(t)^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Qui dunque $r \in C^1(\boldsymbol{R})$ è un'assegnata funzione con $r(t) > 0$ per ogni t.
Il punto è soggetto alla forza peso, diretta nel verso positivo dell'asse x_2.
Scrivere le equazioni di Lagrange.
R. *Equazione di Lagrange:*

$$r(t)\ddot{\varphi} + 2\dot{r}(t)\dot{\varphi} - g\cos\varphi = 0\,.$$

12. [22/9/2006 (ex)I] Un'asta rigida di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere su un piano ruotante, con velocità angolare di modulo costante $\omega > 0$, intorno all'asse fisso verticale x_3.
Un estremo A dell'asta è fisso su tale asse, mentre l'altro B è richiamato da una forza elastica di costante $k > 0$ e centro un punto C solidale con il piano ruotante.
Se denotiamo con $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2)$ un sistema di riferimento solidale con tale piano, in modo che $O \equiv A$, $\boldsymbol{u}_3 \equiv \boldsymbol{e}_3$, e $\boldsymbol{u}_1$ sia sempre ortogonale al piano, si ha che

$$\overrightarrow{OC} = R\boldsymbol{u}_2 + R\boldsymbol{u}_3\,.$$

Sia inoltre $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{u}_3$ l'accelerazione di gravità.
Scrivere le equazioni di moto dell'asta, e trovare una condizione su m, L, R, ω, k che permetta di avere una configurazione di equilibrio relativo per l'asta quando questa è orizzontale.
Soluzione
Si tratta di un sistema a vincoli olonomi mobili, a un grado di libertà. Scegliamo come coordinata lagrangiana l'angolo φ formato da $\overrightarrow{AB}$ con $\boldsymbol{u}_2$, e scriviamo le equazioni del moto nel sistema di riferimento $\mathcal{S}$ solidale con il piano ruotante.

L'energia cinetica dell'asta risulta allora

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}_{AB} \cdot \boldsymbol{\omega}_{AB} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \,,$$

ove $\boldsymbol{\omega}_{AB} = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1$ *denota la velocità angolare dell'asta in* $\mathcal{S}$, *e* I *il suo momento di inerzia rispetto a* $\boldsymbol{u}_1$.
Il potenziale è

$$U = U_{\text{peso}} + U_{\scriptscriptstyle T} + U_{\text{elastico}} \,,$$

ove

$$U_{\text{peso}} = -mgL\sin\varphi \,.$$

Inoltre

$$U_{\scriptscriptstyle T} = \int_0^{2L} \frac{m}{2L}\frac{1}{2}\omega^2 s^2 \cos^2\varphi \,\mathrm{d}s = \frac{2}{3} m\omega^2 L^2 \cos^2\varphi \,,$$

e

$$U_{\text{elastico}} = -\frac{k}{2}\Big\{(2L\sin\varphi - R)^2 + (2L\cos\varphi - R)^2\Big\} \\ = -k\big\{2L^2 + R^2 - 2RL(\sin\varphi + \cos\varphi)\big\} \,.$$

Quindi

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 - mgL\sin\varphi + \frac{2}{3} m\omega^2 L^2 \cos^2\varphi - k\big\{2L^2 + R^2 - 2RL(\sin\varphi + \cos\varphi)\big\} \,.$$

L'equazione di Lagrange è

$$I\ddot{\varphi} + mgL\cos\varphi + \frac{4}{3} m\omega^2 L^2 \sin\varphi\cos\varphi - 2kRL(\cos\varphi - \sin\varphi) = 0 \,.$$

Le posizioni di equilibrio corispondono a

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \,,$$

ossia a

$$mgL\cos\varphi + \frac{4}{3} m\omega^2 L^2 \sin\varphi\cos\varphi - 2kRL(\cos\varphi - \sin\varphi) = 0 \,,$$

che dà una soluzione $\varphi = 0$ *se e solo se* $mgL = 2RLk$.
R.

$$mg = 2Rk \,.$$

13. [13/12/2006 (ex)I] Sia $(O, \boldsymbol{e}_i)$ il sistema di riferimento fisso, e sia

$$\overrightarrow{OP} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_3 \boldsymbol{e}_3 \,,$$

ove P è un punto di massa m. P è vincolato a una circonferenza di raggio R e centro A, giacente sul piano $x_2 = 0$.

A sua volta, A è vincolato ad appartenere all'asse x_3, ma è mobile su tale asse, con moto

$$\overrightarrow{OA} = -ct^2\boldsymbol{e}_3\,,$$

con c costante positiva.
Su P agisce la forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange di P.
SOLUZIONE
Scegliamo come coordinata lagrangiana l'angolo φ tra $\overrightarrow{AP}$ e $\boldsymbol{e}_1$. Indichiamo anche

$$z(t) = -ct^2\,.$$

Dunque

$$\overrightarrow{OP} = (R\cos\varphi, 0, z(t) + R\sin\varphi)\,.$$

Dato che le forze sono conservative con potenziale

$$U = -mgx_3\,,$$

si può scrivere

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 - mgx_3\,.$$

Ma

$$\boldsymbol{v} = (-R\dot\varphi\sin\varphi, 0, \dot z(t) + R\dot\varphi\cos\varphi)\,,$$

e pertanto

$$|\boldsymbol{v}|^2 = \dot z(t)^2 + R^2\dot\varphi^2 + 2R\dot z(t)\dot\varphi\cos\varphi\,.$$

Perciò

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot z(t)^2 + R^2\dot\varphi^2 + 2R\dot z(t)\dot\varphi\cos\varphi) - mgz(t) - mgR\sin\varphi\,.$$

Il sistema ha un grado di libertà, quindi le equazioni di Lagrange si riducono alla

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(R^2\dot\varphi + R\dot z(t)\cos\varphi) + mR\dot z(t)\dot\varphi\sin\varphi + mgR\cos\varphi = 0\,.$$

R.

$$R\ddot\varphi + (g - 2c)\cos\varphi = 0\,.$$

14. [26/3/2007 (ex)I] Due punti materiali P_1 e P_2 entrambi di massa m sono vincolati a una circonferenza liscia di raggio R e centro O, che ruota intorno a un suo diametro fisso AB con velocità angolare costante $\omega > 0$. Sui punti P_1 e P_2 agiscono le forze:

$$\text{su } P_1: \qquad \boldsymbol{F}_1 = k\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2\overrightarrow{P_1P_2}\,;$$

$$\text{su } P_2: \qquad \boldsymbol{F}_2 = k\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2\overrightarrow{P_2P_1}\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Scrivere le equazioni che danno le posizioni di equilibrio relativo al piano della circonferenza.
SOLUZIONE
Introduciamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, x_i)$, con l'asse x_3 ortogonale al piano della circonferenza, e l'asse x_2 coincidente con la direzione di $\overrightarrow{AB}$.
Scegliamo come coordinate lagrangiane i due angoli φ_1 e φ_2 tali che nel sistema $\mathcal{S}$ si abbia

$$\overrightarrow{OP_i} = (R\cos\varphi_i, R\sin\varphi_i, 0)\,.$$

Gli intervalli in cui sono definite queste coordinate, che possiamo assumere entrambi di lunghezza 2π, non entreranno esplicitamente nei calcoli seguenti.
Il potenziale in $\mathcal{S}$, che comprende quindi il contributo delle forze fittizie, è

$$\begin{aligned}
U_{\mathcal{S}} &= -\frac{k}{4}\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^4 + \frac{m\omega^2}{2}x_{1P_1}^2 + \frac{m\omega^2}{2}x_{1P_2}^2 \\
&= -\frac{k}{4}\big[(x_{1P_1} - x_{1P_2})^2 + (x_{2P_1} - x_{2P_2})^2\big]^2 + \frac{m\omega^2}{2}x_{1P_1}^2 + \frac{m\omega^2}{2}x_{1P_2}^2 \\
&= -kR^4[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]^2 + \frac{m\omega^2R^2}{2}(\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2)\,.
\end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio relativo si trovano in corrispondenza dei punti critici di $U_{\mathcal{S}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{\mathcal{S}}}{\partial\varphi_1} &= -2kR^4[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + m\omega^2R^2\cos\varphi_1\sin\varphi_1\,, \\
\frac{\partial U_{\mathcal{S}}}{\partial\varphi_2} &= -2kR^4[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + m\omega^2R^2\cos\varphi_2\sin\varphi_2\,.
\end{aligned}$$

Quindi sommando le due equazioni

$$\frac{\partial U_{\mathcal{S}}}{\partial\varphi_1}(\varphi_1, \varphi_2) = 0\,, \qquad \frac{\partial U_{\mathcal{S}}}{\partial\varphi_2}(\varphi_1, \varphi_2) = 0\,,$$

si ha

$$\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + \cos\varphi_2\sin\varphi_2 = 0\,,$$

ossia

$$\sin(2\varphi_1) = \sin(-2\varphi_2)\,.$$

Perciò vale una delle

$$2\varphi_1 + 2\varphi_2 = 2n\pi\,, \qquad 2\varphi_1 - 2\varphi_2 = (2n+1)\pi\,,$$

per qualche $n \in \boldsymbol{Z}$ che dipenderà dagli intervalli di variazione scelti per le coordinate lagrangiane.

15. [4/7/2007 (ex)I] Un punto P è vincolato alla retta mobile r data da

$$r(t) = \{s\boldsymbol{u}(t) \mid s \in \boldsymbol{R}\}\,,$$

ove

$$\boldsymbol{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big(\boldsymbol{u}_1(t) + \boldsymbol{u}_2(t) + \boldsymbol{u}_3(t)\big)\,,$$

e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2(t) &= -\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3(t) &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

con $\omega > 0$ costante.
Su P agiscono il peso, nel verso negativo dell'asse x_3, e la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{AP}\,,$$

con k costante positiva, ove A è il punto di $r(t)$ corrispondente a $s = L > 0$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
- Determinare le eventuali posizioni di equilibrio di P rispetto a r.

Soluzione
Usiamo s come coordinata lagrangiana, cosicché

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \dot{s}\boldsymbol{u}(t) + s\dot{\boldsymbol{u}}(t)\\ &= \dot{s}\boldsymbol{u}(t) + s\omega\frac{1}{\sqrt{3}}\big[(\cos(\omega t) - \sin(\omega t))\boldsymbol{e}_2 - (\sin(\omega t) + \cos(\omega t))\boldsymbol{e}_1\big]\,.\end{aligned}$$

Dunque (si noti che per costruzione le due componenti vettoriali di $\boldsymbol{v}$ sono tra di loro ortogonali)

$$|\boldsymbol{v}|^2 = \dot{s}^2 + s^2\omega^2\frac{1}{3}\big[(\cos(\omega t) - \sin(\omega t))^2 + (\sin(\omega t) + \cos(\omega t))^2\big] = \dot{s}^2 + \frac{2}{3}s^2\omega^2\,.$$

Il potenziale delle forze è dato da

$$U^{\mathrm{L}}(s) = -mgx_3(s) - \frac{k}{2}\left|\overrightarrow{AP}\right|^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}mgs - \frac{k}{2}(s-L)^2\,.$$

Quindi

$$\mathcal{L}(s,\dot{s}) = \frac{1}{2}m\Big(\dot{s}^2 + \frac{2}{3}s^2\omega^2\Big) - \frac{1}{\sqrt{3}}mgs - \frac{k}{2}(s-L)^2\,.$$

Quindi l'equazione di Lagrange è

$$m\ddot{s} - \frac{2}{3}m\omega^2 s + \frac{1}{\sqrt{3}}mg + k(s-L) = 0\,.$$

Le posizioni di equilibrio relativo a r sono dunque date dalle soluzioni s costante, ossia

$$s(t) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}mg + kL}{-\frac{2}{3}m\omega^2 + k}\,,$$

se

$$-\frac{2}{3}m\omega^2 + k \neq 0\,,$$

e da ogni valore di s se

$$-\frac{2}{3}m\omega^2+k=0\,,\qquad -\frac{1}{\sqrt{3}}mg+kL=0\,.$$

R.

$$m\ddot{s}-\frac{2}{3}m\omega^2 s+\frac{1}{\sqrt{3}}mg+k(s-L)=0\,,$$
$$s(t)=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}mg+kL}{-\frac{2}{3}m\omega^2+k}\,,\quad \frac{2}{3}m\omega^2\neq k\,.$$

16. [4/7/2007 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3=0$ del sistema di riferimento fisso $(O,\boldsymbol{e}_i)$, e ad avere l'estremo A mobile secondo la legge

$$\overrightarrow{OA}(t)=R\cos\alpha(t)\boldsymbol{e}_1+R\sin\alpha(t)\boldsymbol{e}_2\,,$$

ove $\alpha\in C^2(\boldsymbol{R})$ è una funzione assegnata, con $\alpha(0)=0$.
L'asta è anche sottoposta alla forza peso, che agisce nel verso negativo dell'asse x_2.

- Scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema.
- Trovare, nella forma di un'equazione differenziale, la condizione che deve soddisfare α affinché siano possibili moti in cui $\overrightarrow{AB}$ si mantiene parallelo a $\overrightarrow{OA}$.

Soluzione
A) Parametrizziamo $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}(\varphi,t,s)&=\overrightarrow{OA}(t)+\overrightarrow{AP}(\varphi,s)\\&=(R\cos\alpha(t)+s\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1+(R\sin\alpha(t)+s\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2\,,\end{aligned}$$

con $0\leq s\leq 2L$. Si è qui introdotta la coordinata lagrangiana $\varphi\in(-\pi,\pi)$ data dall'angolo formato da $\overrightarrow{AB}$ con $\boldsymbol{e}_1$.
Quindi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OP}(s,t)=(-R\dot\alpha(t)\sin\alpha(t)-s\dot\varphi\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1+(R\dot\alpha(t)\cos\alpha(t)+s\dot\varphi\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2\,,$$

e

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OP}(s,t)\right|^2=R^2\dot\alpha^2+s^2\dot\varphi^2+2Rs\dot\alpha\dot\varphi\cos(\varphi-\alpha)\,.$$

Quindi l'energia cinetica è

$$\begin{aligned}T^{\mathrm{L}}(\varphi,\dot\varphi,t)&=\frac{1}{2}\int_0^{2L}\frac{m}{2L}\big\{R^2\dot\alpha^2+s^2\dot\varphi^2+2Rs\dot\alpha\dot\varphi\cos(\varphi-\alpha)\big\}\,\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2}m\{R^2\dot\alpha^2+\frac{4}{3}L^2\dot\varphi^2+2LR\dot\alpha\dot\varphi\cos(\varphi-\alpha)\}\,,\end{aligned}$$

e la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = T^{\mathrm{L}} + U^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} m \{ R^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{4}{3} L^2 \dot{\varphi}^2 + 2LR\dot{\alpha}\dot{\varphi} \cos(\varphi - \alpha) \} \\ - mg(R \sin \alpha(t) + L \sin \varphi) \,.$$

Quindi l'equazione di Lagrange è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m \Big[\frac{4}{3} L^2 \dot{\varphi} + LR\dot{\alpha} \cos(\varphi - \alpha) \Big] - \Big[- mLR\dot{\alpha}\dot{\varphi} \sin(\varphi - \alpha) - mgL \cos \varphi \Big] = 0 \,,$$

ossia

$$\frac{4}{3} L^2 \ddot{\varphi} + LR\ddot{\alpha} \cos(\varphi - \alpha) + LR\dot{\alpha}^2 \sin(\varphi - \alpha) + gL \cos \varphi = 0 \,.$$

B) I due vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{AB}$ sono paralleli al tempo t se e solo se $\varphi(t) = \alpha(t)$. Dunque la condizione su α è

$$\Big(\frac{4}{3} L^2 + LR \Big) \ddot{\alpha} + gL \cos \alpha = 0 \,.$$

R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m \Big[\frac{4}{3} L^2 \dot{\varphi} + LR\dot{\alpha} \cos(\varphi - \alpha) \Big] - \Big[- mLR\dot{\alpha}\dot{\varphi} \sin(\varphi - \alpha) - mgL \cos \varphi \Big] = 0 \,.$$

$$\Big(\frac{4}{3} L^2 + LR \Big) \ddot{\alpha} + gL \cos \alpha = 0 \,.$$

17. [4/7/2007 (ex)I] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare rispetto a quello fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$ data da $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_3$, con $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t.
Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva solidale con $\mathcal{S}$

$$\gamma : \begin{cases} x_3 = a \operatorname{arctg} bx_2 \,, \\ x_1 = 0 \,, \end{cases}$$

con a, b costanti positive (qui le x_i indicano le coordinate in $\mathcal{S}$).
Su P agisce la forza peso nel verso negativo di x_3.
Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
SOLUZIONE
Scegliamo come coordinata lagrangiana la coordinata cartesiana $x = x_2$ di P.
Nel sistema $\mathcal{S}$ su P agiscono la forza fittizia di Coriolis e quella di trascinamento. Sia

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(x, t) = x\boldsymbol{u}_2(t) + a \operatorname{arctg} bx \boldsymbol{u}_3(t) \,,$$

cosicché

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \dot{x} \Big\{ \boldsymbol{u}_2(t) + \frac{ab}{1 + b^2 x^2} \boldsymbol{u}_3(t) \Big\} = \dot{x} \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} \,.$$

Ne segue che la componente lagrangiana della forza di Coriolis è nulla:

$$\boldsymbol{F}_{C} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} = 0 \,.$$

Perciò la forza di Coriolis non appare nella equazione di Lagrange. La forza di trascinamento è

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -m\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}] = m\omega^2 x \boldsymbol{u}_2(t)\,,$$

da cui

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} = m\omega^2 x\,.$$

Infine su P agisce la forza peso, la cui componente lagrangiana è:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{peso}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} = -mg\boldsymbol{u}_3(t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial x} = -\frac{mgab}{1+b^2x^2}\,.$$

L'energia cinetica di P (in $\mathcal{S}$) è

$$T^{\mathrm{L}}(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}|^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\Big(1 + \frac{a^2b^2}{(1+b^2x^2)^2}\Big)\,.$$

Perciò l'equazione di Lagrange è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[m\dot{x}\Big(1+\frac{a^2b^2}{(1+b^2x^2)^2}\Big)\Big] + m\dot{x}^2\frac{2a^2b^4x}{(1+b^2x^2)^3} = m\omega^2 x - \frac{mgab}{1+b^2x^2}\,.$$

R.

$$\ddot{x}\Big(1+\frac{a^2b^2}{(1+b^2x^2)^2}\Big) + \frac{2a^2b^4x\dot{x}^2}{(1+b^2x^2)^3} = \omega^2 x - \frac{gab}{1+b^2x^2}\,.$$

18. [4/7/2007 (ex)II] Un punto P è vincolato alla retta mobile r data da

$$r(t) = \{s\boldsymbol{u}(t) \mid s \in \boldsymbol{R}\}\,,$$

ove

$$\boldsymbol{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big(\boldsymbol{u}_1(t) + \boldsymbol{u}_2(t) + \boldsymbol{u}_3(t)\big)\,,$$

e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2(t) &= -\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

con $\omega > 0$ costante.
Su P agiscono il peso, nel verso negativo dell'asse x_3, e la forza

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{AP}\,,$$

con k costante positiva, ove A è il punto di $r(t)$ corrispondente a $s = -L$, $L > 0$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
- Determinare le eventuali posizioni di equilibrio di P rispetto a r.

R.

$$m\ddot{s} - \frac{2}{3}m\omega^2 s + \frac{1}{\sqrt{3}}mg - k(s+L) = 0\,,$$
$$s(t) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}mg + kL}{-\frac{2}{3}m\omega^2 - k}\,.$$

19. [4/7/2007 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$, e ad avere l'estremo A mobile secondo la legge

$$\overrightarrow{OA}(t) = R\cos\alpha(t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin\alpha(t)\boldsymbol{e}_2\,,$$

ove $\alpha \in C^2(\boldsymbol{R})$ è una funzione assegnata, con $\alpha(0) = 0$.
L'asta è anche sottoposta alla forza peso, che agisce nel verso negativo dell'asse x_1.

- Scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema.
- Trovare, nella forma di un'equazione differenziale, la condizione che deve soddisfare α affinché siano possibili moti in cui l'angolo tra $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OA}$ sia sempre uguale a $\pi/2$.

R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\Big[\frac{4}{3}L^2\dot{\varphi} + LR\dot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha)\Big] - \Big[-mLR\dot{\alpha}\dot{\varphi}\sin(\varphi-\alpha) + mgL\sin\varphi\Big] = 0\,.$$
$$\frac{4}{3}L^2\ddot{\alpha} - LR\dot{\alpha}^2 + gL\cos\alpha = 0\,.$$

20. [4/7/2007 (ex)II] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare rispetto a quello fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$ data da $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_3$, con $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t.
Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva solidale con $\mathcal{S}$

$$\gamma : \begin{cases} x_2 = a \operatorname{arctg} bx_3\,, \\ x_1 = 0\,, \end{cases}$$

con a, b costanti positive (qui le x_i indicano le coordinate in $\mathcal{S}$).
Su P agisce la forza peso nel verso negativo di x_3.
Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
R.

$$\ddot{x}\Big(1 + \frac{a^2b^2}{(1+b^2x^2)^2}\Big) + \frac{2a^2b^4x\dot{x}^2}{(1+b^2x^2)^3} = -g + \frac{\omega^2a^2b}{1+b^2x^2}\operatorname{arctg} bx\,.$$

21. [19/7/2007 (ex)I] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega \boldsymbol{u}_3$, con $\omega > 0$ costante, rispetto al sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$. Si prenda $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t.
Al piano ruotante $x_1 = 0$ (qui le x_i denotano le coordinate in $\mathcal{S}$) è vincolata un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m.
L'asta è sottoposta alla forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{u}_1$$

(quindi ortogonale all'asta medesima), applicata all'estremo B, con λ costante positiva.
Scrivere le equazioni di Lagrange dell'asta.
SOLUZIONE
Se G è il centro di AB, introduciamo le coordinate lagrangiane

$$y = x_{2G}\,, \qquad z = x_{3G}\,, \qquad \varphi \text{ angolo tra } \overrightarrow{AB} \text{ e } \boldsymbol{u}_2 .$$

Allora l'asta è parametrizzata da

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(y, z, \varphi, t; s) = (y + s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_2(t) + (z + s\sin\varphi)\boldsymbol{u}_3\,, \qquad -L \le s \le L\,.$$

L'energia cinetica in $\mathcal{S}$ si ottiene per esempio dal Teorema di König, nella forma

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} m(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2\,,$$

se I denota il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse ortogonale in G all'asta medesima.
In $\mathcal{S}$ agiscono sull'asta le forza fittizie, oltre alla $\boldsymbol{F}$.
Si verifica subito che la forza di Coriolis $\boldsymbol{F}_{C}$ ha componenti lagrangiane nulle, perché (per ogni punto di AB) $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ è parallela a $\boldsymbol{u}_1$, e quindi ortogonale a $\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}$.
Invece, dato che per la forza di trascinamento si ha

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{T} = \frac{m}{2L}\omega^2 (y + s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_2\,,$$

si ha

$$Q_{Ty} = \int_{AB} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{T} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial y} = \int_{-L}^{L} \frac{m}{2L}\omega^2 (y + s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 \,\mathrm{d}s = m\omega^2 y\,.$$

Si ha subito $Q_{Tz} = 0$, e infine

$$Q_{T\varphi} = \int_{AB} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{T} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = \int_{-L}^{L} \frac{m}{2L}\omega^2 (y + s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_2 \cdot (-s\sin\varphi)\boldsymbol{u}_2 \,\mathrm{d}s = -\frac{m\omega^2 L^2}{6}\sin 2\varphi\,.$$

La $\boldsymbol{F}$ si può scrivere come

$$\boldsymbol{F} = \lambda[2L\cos\varphi \boldsymbol{u}_2 + 2L\sin\varphi \boldsymbol{u}_3] \times \boldsymbol{u}_1 = 2\lambda L \sin\varphi \boldsymbol{u}_2 - 2\lambda L\cos\varphi \boldsymbol{u}_3\,.$$

Quindi

$$Q_y = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial y}(x, y, \varphi, t; L) = 2\lambda L \sin\varphi\,,$$

$$Q_z = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial z}(x, y, \varphi, t; L) = -2\lambda L \cos\varphi\,,$$

$$Q_\varphi = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi}(x, y, \varphi, t; L) = -2\lambda L^2\,.$$

R.

$$
\begin{aligned}
m\ddot{y} &= m\omega^2 y + 2\lambda L \sin\varphi \,,\\
m\ddot{z} &= -2\lambda L \cos\varphi \,,\\
I\ddot{\varphi} &= -\frac{m\omega^2 L^2}{6} \sin 2\varphi - 2\lambda L^2 \,.
\end{aligned}
$$

22. [19/7/2007 (ex)II] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega \boldsymbol{u}_3$, con $\omega > 0$ costante, rispetto al sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$. Si prenda $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t.
Al piano ruotante $x_1 = 0$ (qui le x_i denotano le coordinate in $\mathcal{S}$) è vincolata un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m.
L'asta è sottoposta alla forza

$$
\boldsymbol{F} = \lambda(t)\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{u}_1
$$

(quindi ortogonale all'asta medesima), applicata all'estremo A, con $\lambda \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ funzione assegnata del tempo.
Scrivere le equazioni di Lagrange dell'asta.
R.

$$
\begin{aligned}
m\ddot{y} &= m\omega^2 y + 2\lambda L \sin\varphi \,,\\
m\ddot{z} &= -2\lambda L \cos\varphi \,,\\
I\ddot{\varphi} &= -\frac{m\omega^2 L^2}{6} \sin 2\varphi + 2\lambda L^2 \,.
\end{aligned}
$$

23. [17/9/2007 (ex)I] Un piano mobile $\Pi(t)$ ha equazione nel sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$

$$
x_1 \cos\omega t + x_2 \sin\omega t + x_3 = 0 \,.
$$

Si tratta dunque di un piano passante per l'origine e con normale

$$
\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\omega t, \sin\omega t, 1) \,.
$$

Un punto materiale P di massa m è vincolato a $\Pi(t)$ e sottoposto alla forza peso, diretta nel verso negativo dell'asse x_3.
Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.
Soluzione
Scriviamo le equazioni di Lagrange nel sistema di riferimento mobile solidale con $\Pi(t)$ $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, con

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\omega t, -\sin\omega t, 1) \,,\\
\boldsymbol{u}_2(t) &= (\sin\omega t, -\cos\omega t, 0) \,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \nu(t) \,.
\end{aligned}
$$

Quindi $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ *è una base di* $\Pi(t)$.
Applicando l'espressione delle componenti della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ *di* $\mathcal{S}$ *in funzione delle derivate dei versori* $\boldsymbol{u}_i$ *si ottiene subito*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{\omega}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3) = \omega \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Quindi il moto di $\mathcal{S}$ *è una rotazione costante.*
Scegliamo come coordinate lagrangiane x, $y \in \boldsymbol{R}$ *tali che*

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2 \,.$$

Nel sistema di riferimento mobile agiscono su P *oltre alla forza peso le forze fittizie di trascinamento* $\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T}$ *e di Coriolis* $\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C}$. *Si ha*

$$\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = -m\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}] = m\omega^2 \Big\{ \frac{x}{2}\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2 - \frac{x}{2}\boldsymbol{u}_3 \Big\} \,,$$

cosicché le corrispondenti componenti lagrangiane delle forze sono

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\scriptscriptstyle L}}{\partial x} &= \boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} \cdot \boldsymbol{u}_1 = m\omega^2 \frac{x}{2} \,, \\ \boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\scriptscriptstyle L}}{\partial y} &= \boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} \cdot \boldsymbol{u}_2 = m\omega^2 y \,. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} &= -m\omega\sqrt{2}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3) \times (\dot{x}\boldsymbol{u}_1 + \dot{y}\boldsymbol{u}_2) \\ &= m\omega\sqrt{2}(\dot{y}\boldsymbol{u}_1 - \dot{x}\boldsymbol{u}_2 - \dot{y}\boldsymbol{u}_3) \,, \end{aligned}$$

cosicché le corrispondenti componenti lagrangiane delle forze sono

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\scriptscriptstyle L}}{\partial x} &= \boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C} \cdot \boldsymbol{u}_1 = m\omega\sqrt{2}\dot{y} \,, \\ \boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\scriptscriptstyle L}}{\partial y} &= \boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C} \cdot \boldsymbol{u}_2 = -m\omega\sqrt{2}\dot{x} \,. \end{aligned}$$

Infine, per quanto riguarda la forza peso,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\text{peso}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\scriptscriptstyle L}}{\partial x} &= -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = -\frac{mg}{\sqrt{2}} \,, \\ \boldsymbol{F}_{\text{peso}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\scriptscriptstyle L}}{\partial y} &= -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0 \,. \end{aligned}$$

L'energia cinetica è

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \,.$$

R.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= m\omega^2 \frac{x}{2} + m\omega\sqrt{2}\dot{y} - \frac{mg}{\sqrt{2}} \,, \\ m\ddot{y} &= m\omega^2 y - m\omega\sqrt{2}\dot{x} \,. \end{aligned}$$

24. [17/9/2007 (ex)II] Un piano mobile $\Pi(t)$ ha equazione nel sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$

$$x_1 \cos \omega t + x_2 + x_3 \sin \omega t = 0 .$$

Si tratta dunque di un piano passante per l'origine e con normale

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \omega t, 1, \sin \omega t) .$$

Un punto materiale P di massa m è vincolato a $\Pi(t)$ e sottoposto alla forza peso, diretta nel verso positivo dell'asse x_2.
Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.
R.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= m\omega^2 \frac{x}{2} + m\omega\sqrt{2}\dot{y} + \frac{mg}{\sqrt{2}} , \\ m\ddot{y} &= m\omega^2 y - m\omega\sqrt{2}\dot{x} . \end{aligned}$$

25. [1/7/2008 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato a giacere sulla superficie mobile

$$x_3 = a \sin \big(b(x_1 - ct) \big) ,$$

ove a, b, c sono costanti positive.
P è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 ,$$

e alla forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP} ,$$

ove $k > 0$ è costante, e O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Scrivere le equazioni di Lagrange del moto, e riconoscere che non si possono avere moti uniformi (cioè con accelerazione nulla nel sistema di riferimento fisso).
SOLUZIONE
A) Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$x = x_1 , \qquad y = x_2 , \qquad x , y \in \boldsymbol{R} .$$

Allora

$$\overrightarrow{OP} = \Big(x, y, a \sin \big(b(x - ct) \big) \Big) ,$$

per cui

$$\boldsymbol{v} = \Big(\dot{x}, \dot{y}, ab(\dot{x} - c) \cos \big(b(x - ct) \big) \Big) ,$$

e l'energia cinetica è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} m \Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2 b^2 (\dot{x} - c)^2 \cos^2 \big(b(x - ct) \big) \Big) .$$

Inoltre il potenziale è dato da

$$U = -mgx_3 - \frac{k}{2} \left| \overrightarrow{OP} \right|^2 ,$$

e quindi in coordinate lagrangiane

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -mga \sin \big(b(x - ct) \big) - \frac{k}{2} \Big(x^2 + y^2 + a^2 \sin^2 \big(b(x - ct) \big) \Big) .$$

L'equazione di Lagrange corrispondente alla coordinata x quindi si ottiene come

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big[m\dot{x} + ma^2 b^2 (\dot{x} - c) \cos^2 \big(b(x - ct) \big) \Big] \\ &\quad + \frac{m}{2} a^2 b^3 (\dot{x} - c)^2 \sin \big(2b(x - ct) \big) \\ &\quad + mgab \cos \big(b(x - ct) \big) + \frac{k}{2} \Big(2x + a^2 b \sin \big(2b(x - ct) \big) \Big) = 0 . \end{aligned}$$

Invece quella corrispondente alla coordinata y è

$$m\ddot{y} + ky = 0 .$$

B) Se un moto $(x(t), y(t))$ fosse uniforme, l'accelerazione corrispondente dovrebbe essere nulla, ma si ha subito

$$\boldsymbol{a} = \Big(\ddot{x}, \ddot{y}, ab\ddot{x} \cos \big(b(x - ct) \big) - ab^2 (\dot{x} - c)^2 \sin \big(b(x - ct) \big) \Big) .$$

Dunque si dovrebbe avere in particolare

$$\ddot{x} = 0 , \qquad (\dot{x} - c)^2 \sin \big(b(x - ct) \big) = 0 .$$

Se ci fosse un istante $\bar{t}$ in cui $\dot{x}(\bar{t}) \neq c$, allora per continuità ci sarebbe un intervallo aperto contenente $\bar{t}$ in cui $\dot{x} \neq c$. Ne segue che in quell'intervallo

$$\sin \big(b(x - ct) \big) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - ct = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = c ,$$

in contraddizione con $\dot{x}(\bar{t}) \neq c$. Dunque

$$\dot{x}(t) = c , \qquad \text{per ogni } t,$$

e quindi

$$x(t) = x_0 + ct , \qquad \text{per ogni } t.$$

Dalla prima equazione di Lagrange seguirebbe quindi che

$$mgab \cos(bx_0) + \frac{k}{2} \Big(2x_0 + 2ct + a^2 b \sin(2bx_0) \Big) = 0 , \qquad \text{per ogni } t,$$

che è impossibile.

R.

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} + ma^2b^2\ddot{x}\cos^2\big(b(x-ct)\big) - ma^2b^3(\dot{x}-c)^2\sin\big(2b(x-ct)\big) \\
+ \frac{m}{2}a^2b^3(\dot{x}-c)^2\sin\big(2b(x-ct)\big) \\
+ mgab\cos\big(b(x-ct)\big) + \frac{k}{2}\Big(2x + a^2b\sin\big(2b(x-ct)\big)\Big) = 0\,, \\
m\ddot{y} + ky = 0\,.
\end{aligned}
$$

26. [1/7/2008 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato a giacere sulla superficie mobile

$$x_3 = a\cos\big(b(x_2 - ct)\big)\,,$$

ove a, b, c sono costanti positive.
P è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,,$$

e alla forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP}\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Scrivere le equazioni di Lagrange del moto, e riconoscere che non si possono avere moti uniformi (cioè con accelerazione nulla nel sistema di riferimento fisso).
R.

$$
\begin{aligned}
m\ddot{y} + ma^2b^2\ddot{y}\sin^2\big(b(y-ct)\big) + ma^2b^3(\dot{y}-c)^2\sin\big(2b(y-ct)\big) \\
- \frac{m}{2}a^2b^3(\dot{y}-c)^2\sin\big(2b(y-ct)\big) \\
- mgab\sin\big(b(y-ct)\big) + \frac{k}{2}\Big(2y - a^2b\sin\big(2b(y-ct)\big)\Big) = 0\,, \\
m\ddot{x} + kx = 0\,.
\end{aligned}
$$

27. [18/7/2008 (ex)I] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}
$$

e

$$\overrightarrow{\varOmega O} = R\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

Qui ω, R sono costanti positive, e $(\varOmega, \boldsymbol{e}_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Le coordinate in $\mathcal{S}$ si denotano con (x_i).

Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e massa m è vincolata ad avere il lato AD sull'asse (mobile) x_3, con A e D fissi rispetto a $\mathcal{S}$.
Al vertice B è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_B = k\boldsymbol{\nu}\,,$$

ove $\boldsymbol{\nu}$ è il versore normale alla lamina, e $k > 0$ è costante.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange della lamina.

2. Trovare per quali valori dei parametri si possono avere posizioni di equilibrio relativo.

Soluzione
Scegliamo come coordinata lagrangiana φ l'angolo formato dal piano della lamina con il piano $x_2 = 0$ cosicché in $\mathcal{S}$ l'energia cinetica della lamina è

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2\,,$$

ove I è il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse per AD.
Più in generale, la parametrizzazione della lamina è data da

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s_1 \cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + s_1 \sin\varphi \boldsymbol{u}_2 + s_2 \boldsymbol{u}_3 \\ = s_1 \cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + s_1 \sin\varphi \boldsymbol{u}_2 + (a + s_2)\boldsymbol{u}_3\,,\end{aligned}$$

ove $a = x_{3A}$, con $0 \leq s_1,\ s_2 \leq L$, assumendo senza perdita di generalità che $x_{3A} < x_{3D}$. Quindi

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = -s_1 \dot{\varphi} \sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + s_1 \dot{\varphi} \cos\varphi \boldsymbol{u}_2\,,$$

e la normale è

$$\boldsymbol{\nu} = -\sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{u}_2\,.$$

In $\mathcal{S}$ sulla lamina agiscono le forze fittizie $\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C}$ e $\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T}$. Calcoliamo le componenti lagrangiane integrando sulla lamina le distribuzioni

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C} = -2\frac{m}{L^2}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = 2\frac{m}{L^2} s_1 \omega \dot{\varphi} (\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_2)\,,$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = -\frac{m}{L^2}\boldsymbol{a}_O - \frac{m}{L^2}\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}) \\ = \frac{m}{L^2} R\omega^2 \boldsymbol{u}_1 + \frac{m}{L^2}\omega^2 (s_1 \cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + s_1 \sin\varphi \boldsymbol{u}_2)\,.\end{aligned}$$

Infine

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\scriptscriptstyle L}}{\partial \varphi} = -s_1 \sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + s_1 \cos\varphi \boldsymbol{u}_2\,.$$

Dunque

$$Q_{C\varphi} = \iint_{ABCD} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\scriptscriptstyle L}}{\partial \varphi} = 0\,.$$

Si noti comunque che si poteva evitare di calcolare l'integrale precedente, richiamandosi al risultato generale che asserisce che la componente lagrangiana della forza di Coriolis è nulla in sistemi con un grado di libertà.
Poi si ha

$$
\begin{aligned}
Q_{T\varphi} &= \iint_{ABCD} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} \\
&= \int_0^L \int_0^L \Big\{ \frac{m\omega^2}{L^2}(R + s_1\cos\varphi)(-s_1\sin\varphi) + \frac{m\omega^2}{L^2} s_1^2 \sin\varphi\cos\varphi \Big\} \,\mathrm{d}s_1 \,\mathrm{d}s_2 \\
&= \frac{m\omega^2}{L} \int_0^L \Big\{ -Rs_1\sin\varphi \Big\} \,\mathrm{d}s_1 = -\frac{m\omega^2}{2} RL\sin\varphi \,.
\end{aligned}
$$

Infine

$$
Q_{B\varphi} = \iint_{ABCD} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_B \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = \iint_{ABCD} k\boldsymbol{\nu} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} \delta_B = k\boldsymbol{\nu} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi}(\varphi; L, 0) = kL \,.
$$

Quindi l'equazione di Lagrange è

$$
I\ddot{\varphi} = -\frac{m\omega^2}{2} RL\sin\varphi + kL \,.
$$

Si può avere equilibrio se il membro di destra nell'equazione di Lagrange può annullarsi, ovvero se

$$
m\omega^2 R \geq 2k \,.
$$

R. *Equazione di Lagrange:*

$$
I\ddot{\varphi} = -\frac{m\omega^2}{2} RL\sin\varphi + kL \,.
$$

Le posizioni di equilibrio esistono se

$$
m\omega^2 R \geq 2k \,.
$$

28. [18/7/2008 (ex)II] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}
$$

e

$$
\overrightarrow{\Omega O} = R\boldsymbol{u}_1(t) \,.
$$

Qui ω, R sono costanti positive, e $(\Omega, \boldsymbol{e}_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Le coordinate in $\mathcal{S}$ si denotano con (x_i).
Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e massa m è vincolata ad avere il lato AD sull'asse (mobile) x_3, con A e D fissi rispetto a $\mathcal{S}$.
Al centro G della lamina è applicata la forza

$$
\boldsymbol{F}_G = k\boldsymbol{u}_2 \,,
$$

ove $k > 0$ è costante.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange della lamina.
2. Dimostrare che per tutti i valori dei parametri si hanno posizioni di equilibrio relativo.

R. *Equazione di Lagrange:*

$$I\ddot{\varphi} = -\frac{m\omega^2}{2}RL\sin\varphi + \frac{kL}{2}\cos\varphi\,.$$

Le posizioni di equilibrio sono date da

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k}{m\omega^2 R}\,.$$

29. [12/9/2008 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla sfera mobile

$$(x_1 - R\cos\omega t)^2 + (x_2 - R\sin\omega t)^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

ove $R > 0$ e $\omega > 0$ sono costanti.
Su P agisce la forza peso

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Trovare per P le posizioni di equilibrio relative al sistema di riferimento mobile $(C, \boldsymbol{u}_i)$, ove C è il centro della sfera, e

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{OC}}{R}\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

Soluzione

A) Introduciamo il sistema di riferimento solidale con la sfera $(C, \boldsymbol{u}_i)$, ove C è il centro della sfera, cosicché (se O denota l'origine del sistema di riferimento fisso)

$$\overrightarrow{OC} = R\cos\omega t\boldsymbol{e}_1 + R\sin\omega t\boldsymbol{e}_2\,.$$

Inoltre fissiamo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \frac{\overrightarrow{OC}}{R} = \cos\omega t\boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\omega t\boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Scegliamo infine le coordinate lagrangiane

$$\varphi \in (-\pi, \pi)\,, \qquad \theta \in (0, \pi)\,,$$

in modo che

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{CP} &= R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{u}_3 \\
&= R\sin\theta(\cos\varphi\cos\omega t - \sin\varphi\sin\omega t)\boldsymbol{e}_1 \\
&\quad + R\sin\theta(\cos\varphi\sin\omega t + \sin\varphi\cos\omega t)\boldsymbol{e}_2 \\
&\quad + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3 \\
&= R\sin\theta\cos(\varphi+\omega t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\sin(\varphi+\omega t)\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}
$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} &= R(\cos\omega t + \sin\theta\cos(\varphi+\omega t))\boldsymbol{e}_1 \\
&\quad + R(\sin\omega t + \sin\theta\sin(\varphi+\omega t))\boldsymbol{e}_2 \\
&\quad + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}
$$

e, nel sistema di riferimento fisso,

$$
|\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}|^2 = R^2[\dot\theta^2 + (\dot\varphi+\omega)^2\sin^2\theta + \omega^2 + 2\omega\dot\theta\cos\theta\sin\varphi + 2\omega(\dot\varphi+\omega)\sin\theta\cos\varphi] \,.
$$

Il potenziale è

$$
U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta,t) = -mgx_3(\varphi,\theta,t) = -mgR\cos\theta \,.
$$

Dunque la lagrangiana è:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta) = \\
&\quad \frac{1}{2}mR^2[\dot\theta^2 + (\dot\varphi+\omega)^2\sin^2\theta + \omega^2 + 2\omega\dot\theta\cos\theta\sin\varphi + 2\omega(\dot\varphi+\omega)\sin\theta\cos\varphi] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - mgR\cos\theta \,.
\end{aligned}
$$

Le equazioni di Lagrange sono

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[2(\dot\varphi+\omega)\sin^2\theta + 2\omega\sin\theta\cos\varphi\Big] \\
&\quad - \Big[2\omega\dot\theta\cos\theta\cos\varphi - 2\omega(\dot\varphi+\omega)\sin\theta\sin\varphi\Big] = 0 \,, \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\dot\theta + \omega\cos\theta\sin\varphi\Big] - 2\Big[(\dot\varphi+\omega)^2\sin\theta\cos\theta \\
&\quad - \omega\dot\theta\sin\theta\sin\varphi + \omega(\dot\varphi+\omega)\cos\theta\cos\varphi + \frac{g}{2R}\sin\theta\Big] = 0 \,.
\end{aligned}
$$

B) Intanto notiamo che, dato che il sistema di riferimento mobile è solidale con la sfera, le eventuali posizioni di equilibrio relativo corrispondono a moti per cui φ e θ si mantengono costanti.
Sostituendo $\varphi = \varphi_0$, $\theta = \theta_0$ nelle equazioni di Lagrange, si ottiene

$$
\sin\theta_0\sin\varphi_0 = 0 \,, \tag{1}
$$

$$
\omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0 + \omega^2\cos\theta_0\cos\varphi_0 + \frac{g}{2R}\sin\theta_0 = 0 \,. \tag{2}
$$

Per (1)*, poiché* $\sin\theta_0 > 0$ *per* $\theta_0 \in (0,\pi)$*, deve essere*

$$
\sin\varphi_0 = 0 \,, \qquad \textit{cioè} \qquad \varphi_0 \in \{0,\pi\} \,.
$$

Si noti che si è sostituito l'intervallo di variazione per φ con $(-\pi/2{,}3\pi/2)$. Dunque da (2) si ha

$$\omega^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \pm \omega^2 \cos\theta_0 + \frac{g}{2R} \sin\theta_0 = 0\,.$$

R.

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[2(\dot\varphi+\omega)\sin^2\theta + 2\omega\sin\theta\cos\varphi\Big] \\
&\quad - \Big[2\omega\dot\theta\cos\theta\cos\varphi - 2\omega(\dot\varphi+\omega)\sin\theta\sin\varphi\Big] = 0\,, \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\dot\theta + \omega\cos\theta\sin\varphi\Big] - 2\Big[(\dot\varphi+\omega)^2\sin\theta\cos\theta \\
&\quad - \omega\dot\theta\sin\theta\sin\varphi + \omega(\dot\varphi+\omega)\cos\theta\cos\varphi + \frac{g}{2R}\sin\theta\Big] = 0\,.
\end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio relativo sono date da $(\varphi,\theta) = (0,\theta_{0+})$, $(\varphi,\theta) = (\pi,\theta_{0-})$ ove $\theta_{0\pm}$ risolvono

$$\omega^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \pm \omega^2 \cos\theta_0 + \frac{g}{2R} \sin\theta_0 = 0\,, \qquad 0 < \theta_0 < \pi\,.$$

30. [12/9/2008 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla sfera mobile

$$(x_1 - L\cos\omega t)^2 + x_2^2 + (x_3 - L\sin\omega t)^2 = L^2\,,$$

ove $L > 0$ e $\omega > 0$ sono costanti.
Su P agisce la forza peso

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_2\,.$$

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Trovare per P le posizioni di equilibrio relative al sistema di riferimento mobile $(C,\boldsymbol{u}_i)$, ove C è il centro della sfera, e

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{OC}}{L}\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

R.

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[2(\dot\varphi+\omega)\sin^2\theta + 2\omega\sin\theta\cos\varphi\Big] \\
&\quad - \Big[2\omega\dot\theta\cos\theta\cos\varphi - 2\omega(\dot\varphi+\omega)\sin\theta\sin\varphi\Big] = 0\,, \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\dot\theta + \omega\cos\theta\sin\varphi\Big] - 2\Big[(\dot\varphi+\omega)^2\sin\theta\cos\theta \\
&\quad - \omega\dot\theta\sin\theta\sin\varphi + \omega(\dot\varphi+\omega)\cos\theta\cos\varphi + \frac{g}{2L}\sin\theta\Big] = 0\,.
\end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio relativo sono date da $(\varphi, \theta) = (0, \theta_{0+})$, $(\varphi, \theta) = (\pi, \theta_{0-})$ *ove* $\theta_{0\pm}$ *risolvono*

$$\omega^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \pm \omega^2 \cos\theta_0 + \frac{g}{2R} \sin\theta_0 = 0 \,, \qquad 0 < \theta_0 < \pi \,.$$

31. [12/1/2009 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$x_3 = \alpha \sin(\beta x_1) \,, \qquad x_1 \in \boldsymbol{R} \,,$$

sul piano ruotante

$$\xi_1 \sin\omega t - \xi_2 \cos\omega t = 0 \,.$$

Qui α, β, ω sono costanti positive, $(O, \boldsymbol{e}_i)$ è il sistema di riferimento fisso, con coordinate ξ_i, e $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ è il sistema di riferimento mobile solidale con il piano ruotante, con coordinate x_i. $\mathcal{S}$ è scelto in modo che $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t, e che $\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{u}_2(0) = \boldsymbol{e}_2$, per $t = 0$.
Sul punto agisce il peso, diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.
- Supponendo che il punto parta da fermo nell'origine O, dimostrare che si ha $x_1(t) < 0$ almeno per un intervallo opportuno $(0, \bar{t})$.

Soluzione
Scegliamo come coordinata lagrangiana

$$x = x_1 \in \boldsymbol{R} \,.$$

Nel sistema di riferimento mobile sul punto agiscono, oltre al peso, le forze apparenti $\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T}$ e $\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C}$. *Tuttavia si sa che la componente lagrangiana di* $\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C}$ *è nulla, perché* P *è vincolato a una curva. Inoltre*

$$\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}) = m\omega^2 x_1 \boldsymbol{u}_1 \,,$$

dato che la velocità angolare di $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ *è*

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{u}_3 \,.$$

Perciò si ha che il sistema di forze è conservativo, con potenziale

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} m\omega^2 x_1^2 - mgx_3 \,.$$

Dunque il potenziale lagrangiano sarà

$$U^{\mathrm{L}}(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - mg\alpha \sin(\beta x) \,.$$

La lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 (1 + \alpha^2\beta^2 \cos^2(\beta x)) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - mg\alpha \sin(\beta x) \,.$$

L'equazione di Lagrange dunque è

$$m\ddot{x}(1+\alpha^2\beta^2\cos^2(\beta x)) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\alpha^2\beta^3\sin(2\beta x) + m[\omega^2 x - \alpha\beta g\cos(\beta x)]\,.$$

Dall'equazione di Lagrange, insieme con i dati iniziali

$$x(0) = 0\,, \dot{x}(0) = 0\,,$$

si ricava

$$\ddot{x}(0) = -\frac{\alpha\beta}{1+\alpha^2\beta^2}g < 0\,.$$

Dunque deve essere $\dot{x}(t) < 0$ in un intervallo opportuno, e di conseguenza anche $x(t) < 0$.

R.

$$m\ddot{x}(1+\alpha^2\beta^2\cos^2(\beta x)) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\alpha^2\beta^3\sin(2\beta x) + m[\omega^2 x - \alpha\beta g\cos(\beta x)]\,.$$

32. [12/1/2009 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere l'estremo A sull'asse fisso x_1, e a giacere sul piano verticale $x_3 = 0$. Inoltre l'estremo A è soggetto al vincolo

$$x_{1A} = \frac{\alpha}{2}t^2\,,$$

con $\alpha > 0$ costante.
Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_2.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Supponendo $\alpha = g$, tracciare il diagramma di fase del moto.

Soluzione

Introduciamo la coordinata lagrangiana φ, data dall'angolo formato da $\overrightarrow{AB}$ e da $\boldsymbol{e}_1$: l'asta risulta quindi parametrizzata da

$$\overrightarrow{AP}(s) = s\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + s\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,, \qquad 0 \le s \le 2L\,,$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

Nel sistema di riferimento mobile $(A, \boldsymbol{e}_i)$ l'asta risulta soggetta al peso e alla forza di trascinamento

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = -\frac{m}{2L}\boldsymbol{a}_A\,\mathrm{d}s = -\frac{m}{2L}\alpha\boldsymbol{e}_1\,\mathrm{d}s\,.$$

Dunque possiamo scrivere la distribuzione di potenziale

$$\mathrm{d}U = -mgx_{2C}\delta_C - \frac{m}{2L}\alpha x_1\,\mathrm{d}s\,,$$

ove C è il centro dell'asta. Perciò

$$U^{\scriptscriptstyle L}(\varphi) = -mgL\sin\varphi - \int_0^{2L}\frac{m}{2L}\alpha s\cos\varphi\,\mathrm{d}s = -mgL\sin\varphi - m\alpha L\cos\varphi\,.$$

La lagrangiana perciò è

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 - mgL \sin\varphi - m\alpha L \cos\varphi \,,$$

ove I è il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse ad essa ortogonale passante per A.
Dunque l'equazione di moto è

$$I\ddot{\varphi} + mgL\cos\varphi - m\alpha L \sin\varphi = 0 \,.$$

Per tracciare il diagramma nel piano delle fasi, nell'ipotesi $\alpha = g$ conviene riscrivere il potenziale così:

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -mgL(\sin\varphi + \cos\varphi) &= -\sqrt{2} mgL(\cos\frac{\pi}{4}\sin\varphi + \sin\frac{\pi}{4}\cos\varphi) \\ &= -\sqrt{2} mgL \sin\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big) \,. \end{aligned}$$

Le orbite nel piano delle fasi dunque si ottengono da

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\Big[E + U^{\mathrm{L}}(\varphi)\Big]} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\Big[E - \sqrt{2} mgL \sin\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big)\Big]} \,,$$

e il diagramma coincide pertanto con quello usuale del pendolo traslato di $-\pi/4$.
R.

$$I\ddot{\varphi} + mgL\cos\varphi - m\alpha L \sin\varphi = 0 \,.$$

Il diagramma coincide con quello del pendolo traslato di $-\pi/4$.

33. [12/1/2009 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$x_3 = -\alpha \sin x_1 \,, \qquad x_1 \in \boldsymbol{R} \,,$$

sul piano ruotante

$$\xi_1 \sin\omega t - \xi_2 \cos\omega t = 0 \,.$$

Qui α, ω sono costanti positive, $(O, \boldsymbol{e}_i)$ è il sistema di riferimento fisso, con coordinate ξ_i, e $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ è il sistema di riferimento mobile solidale con il piano ruotante, con coordinate x_i. $\mathcal{S}$ è scelto in modo che $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t, e che $\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{u}_2(0) = \boldsymbol{e}_2$, per $t = 0$.
Sul punto agisce il peso, diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.
- Supponendo che il punto parta da fermo nell'origine O, dimostrare che si ha $x_1(t) > 0$ almeno per un intervallo opportuno $(0, \bar{t})$.

R.

$$m\ddot{x}(1 + \alpha^2\beta^2\cos^2(\beta x)) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2\alpha^2\beta^3\sin(2\beta x) + m[\omega^2 x + \alpha\beta g\cos(\beta x)] \,.$$

34. [12/1/2009 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza L e massa m è vincolata ad avere l'estremo A sull'asse fisso x_1, e a giacere sul piano verticale $x_2 = 0$. Inoltre l'estremo A è soggetto al vincolo

$$x_{1A} = -\frac{\alpha}{2}t^2 \,,$$

con $\alpha > 0$ costante.
Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_3.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Supponendo $\alpha = g$, tracciare il diagramma di fase del moto.

R.

$$I\ddot{\varphi} - mgL\cos\varphi - m\alpha L\sin\varphi = 0 \,.$$

Il diagramma coincide con quello del pendolo traslato di $\pi/4$.

35. [12/2/2009 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere l'estremo A sull'ellisse ruotante

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

ove le coordinate x_i sono relative al sistema mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

L'asta è anche vincolata a giacere sul piano dell'ellisse.
Qui L, a, b sono costanti positive, e O è anche l'origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Si calcolino le componenti lagrangiane delle forze agenti sull'asta nel sistema $\mathcal{S}$.
Soluzione
Parametrizzata l'ellisse come

$$x_1 = a\cos\varphi \,, \qquad x_2 = b\sin\varphi \,,$$

scegliamo come coordinate lagrangiane $\varphi \in (-\pi, \pi)$ corrispondente alla posizione di A (φ non è in genere uguale all'angolo tra $\overrightarrow{OA}$ e $\boldsymbol{u}_1$), e l'angolo $\theta \in (-\pi, \pi)$ tra $\overrightarrow{AB}$ e $\boldsymbol{u}_1$.
Quindi l'asta è parametrizzata da

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta; s) = \overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}(s) = \\ (a\cos\varphi + s\cos\theta)\boldsymbol{u}_1 + (b\sin\varphi + s\sin\theta)\boldsymbol{u}_2 \,,$$

e si ha

$$\boldsymbol{v}_P = (-a\dot\varphi\sin\varphi - s\dot\theta\sin\theta)\boldsymbol{u}_1 + (b\dot\varphi\cos\varphi + s\dot\theta\cos\theta)\boldsymbol{u}_2 \,.$$

Sull'asta agiscono in $\mathcal{S}$ anche le forze fittizie

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{T} = -\frac{m}{2L}\boldsymbol{\omega}\times\big(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OP}\big)\,\mathrm{d}s = -\frac{m}{2L}\omega^2\boldsymbol{u}_3\times\big(\boldsymbol{u}_3\times\overrightarrow{OP}\big)\,\mathrm{d}s = \frac{m}{2L}\omega^2\overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}s\,,$$

e

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{C} = -2\frac{m}{2L}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_P = \frac{m}{L}\omega\big[(b\dot\varphi\cos\varphi + s\dot\theta\cos\theta)\boldsymbol{u}_1 + (a\dot\varphi\sin\varphi + s\dot\theta\sin\theta)\boldsymbol{u}_2\big]\,.$$

Dunque

$$\begin{aligned} Q_{T\varphi} &= \int_0^{2L}\frac{m}{2L}\omega^2\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta;s)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta;s)}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}s \\ Q_{T\theta} &= \int_0^{2L}\frac{m}{2L}\omega^2\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta;s)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta;s)}{\partial\theta}\,\mathrm{d}s\,, \end{aligned}$$

e in modo analogo si calcolano $Q_{C\varphi}$ e $Q_{C\theta}$.
R.

$$\begin{aligned} Q_{T\varphi} &= m\omega^2\big[(b^2-a^2)\cos\varphi\sin\varphi - 2aL\cos\theta\sin\varphi + 2bL\sin\theta\cos\varphi\big]\,, \\ Q_{T\theta} &= mL\omega^2[-a\cos\varphi\sin\theta + b\cos\theta\sin\varphi]\,, \\ Q_{C\varphi} &= 2mL\omega\dot\theta[-a\cos\theta\sin\varphi + b\cos\varphi\sin\theta]\,, \\ Q_{C\theta} &= 2mL\omega\dot\varphi[a\cos\theta\sin\varphi - b\cos\varphi\sin\theta]\,. \end{aligned}$$

36. [12/2/2009 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere il centro C sull'ellisse ruotante

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

ove le coordinate x_i sono relative al sistema mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

L'asta è anche vincolata a giacere sul piano dell'ellisse.
Qui L, a, b sono costanti positive, e O è anche l'origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Si calcolino le componenti lagrangiane delle forze agenti sull'asta nel sistema $\mathcal{S}$.
R.

$$\begin{aligned} Q_{T\varphi} &= m\omega^2(b^2-a^2)\cos\varphi\sin\varphi\,, \\ Q_{T\theta} &= 0\,, \\ Q_{C\varphi} &= 0\,, \\ Q_{C\theta} &= 0\,. \end{aligned}$$

37. [12/6/2009 (ex)I] Due punti P_1 e P_2 entrambi di massa m sono vincolati come segue:

$$x_{2P_1} = 0\,, \qquad x_{2P_2} = 0\,;$$
$$x_{3P_1} = \frac{a}{x_{1P_1}}\,, \quad x_{1P_1} > 0\,; \qquad x_{3P_2} = -\frac{a}{x_{1P_2}}\,, \quad x_{1P_2} < 0\,;$$

qui $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, e (x_i) indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\omega t\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

con $\omega > 0$ costante.
Sui punti agiscono il peso, diretto nel verso negativo dell'asse x_3, e le forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = -k\overrightarrow{P_2P_1}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{P_2} = -k\overrightarrow{P_1P_2}\,,$$

ove $k > 0$.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema.
2. Si assuma anche $k > m\omega^2$. Allora moti in cui la distanza di uno dei due punti da O divenga illimitata sono impossibili, in uno dei due casi $a > 0$ o $a < 0$. Trovare in quale.

Soluzione
1) Si scelgono come coordinate lagrangiane

$$\xi_1 = x_{1P_1} \in (0,\infty)\,, \qquad \xi_2 = x_{1P_2} \in (-\infty,0)\,.$$

Perciò

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\xi_1) = \xi_1\boldsymbol{u}_1 + \frac{a}{\xi_1}\boldsymbol{u}_3\,, \qquad \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(\xi_2) = \xi_2\boldsymbol{u}_1 - \frac{a}{\xi_2}\boldsymbol{u}_3\,.$$

Nel sistema mobile $\mathcal{S}$ sui punti agiscono anche le forze fittizie. Comunque la forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle, perché i punti giacciono su un piano che ruota intorno a un asse appartenente al piano medesimo.
Dunque possiamo scrivere la funzione lagrangiana, visto che le altre forze sono tutte conservative; i potenziali sono

$$\begin{aligned}
U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{el}} &= -\frac{k}{2}\,|\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} - \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}|^2 = -\frac{k}{2}\Big[(\xi_1-\xi_2)^2 + \Big(\frac{a}{\xi_1} + \frac{a}{\xi_2}\Big)^2\Big]\,,\\
U^{\mathrm{L}}_{T} &= \frac{m\omega^2}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)\,,\\
U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{peso}} &= -mg\Big(\frac{a}{\xi_1} - \frac{a}{\xi_2}\Big)\,.
\end{aligned}$$

L'energia cinetica si ricava subito dalle velocità

$$\boldsymbol{v}_1 = \dot{\xi}_1 \boldsymbol{u}_1 - \dot{\xi}_1 \frac{a}{\xi_1^2} \boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \dot{\xi}_2 \boldsymbol{u}_1 + \dot{\xi}_2 \frac{a}{\xi_2^2} \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ed è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}\Big[\dot{\xi}_1^2\Big(1+\frac{a^2}{\xi_1^4}\Big) + \dot{\xi}_2^2\Big(1+\frac{a^2}{\xi_2^4}\Big)\Big] \,.$$

2) Per la conservazione dell'energia, durante ciascun moto,

$$T^{\mathrm{L}} - U^{\mathrm{L}} = E \,,$$

e quindi

$$-2U^{\mathrm{L}} = k\Big[(\xi_1-\xi_2)^2 + a^2\Big(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}\Big)^2\Big] \\ - m\omega^2(\xi_1^2+\xi_2^2) + 2mga\Big(\frac{1}{\xi_1}-\frac{1}{\xi_2}\Big) \le 2E \,.$$

Segue che

$$(k-m\omega^2)(\xi_1^2+\xi_2^2) - 2k\xi_1\xi_2 + 2mga\Big(\frac{1}{\xi_1}-\frac{1}{\xi_2}\Big) \le 2E \,,$$

e quindi, visto che $|\xi_2| = -\xi_2$,

$$(k-m\omega^2)(\xi_1^2+\xi_2^2) + 2mga\Big(\frac{1}{\xi_1}-\frac{1}{\xi_2}\Big) \le 2E \,. \tag{1}$$

Il moto diviene illimitato se e solo se almeno una tra le quattro quantità

$$\frac{1}{|\xi_i|} \,, \qquad |\xi_i| \,, \qquad i = 1,2 \,,$$

diviene illimitata.
Se $a > 0$ *e* $k > m\omega^2$, *dalla* (1) *segue che questo non può accadere.*
R.

$$1) \qquad \mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big[\dot{\xi}_1^2\Big(1+\frac{a^2}{\xi_1^4}\Big) + \dot{\xi}_2^2\Big(1+\frac{a^2}{\xi_2^4}\Big)\Big] - \frac{k}{2}\Big[(\xi_1-\xi_2)^2 + \Big(\frac{a}{\xi_1}+\frac{a}{\xi_2}\Big)^2\Big] \\ + \frac{m\omega^2}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2) - mg\Big(\frac{a}{\xi_1}-\frac{a}{\xi_2}\Big) \,.$$

$$2) \qquad a > 0 \,.$$

38. [12/6/2009 (ex)II] Due punti P_1 e P_2 entrambi di massa m sono vincolati come segue:

$$x_{2P_1} = 0 \,, \qquad x_{2P_2} = 0 \,;$$

$$x_{3P_1} = \frac{a}{x_{1P_1}^2} \,, \quad x_{1P_1} > 0 \,; \qquad x_{3P_2} = \frac{a}{x_{1P_2}^2} \,, \quad x_{1P_2} < 0 \,;$$

qui $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, e (x_i) indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos\omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t\, \boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t\, \boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

con $\omega > 0$ costante.
Sui punti agiscono il peso, diretto nel verso negativo dell'asse x_3, e le forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = -k\overrightarrow{P_2P_1}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{P_2} = -k\overrightarrow{P_1P_2}\,,$$

ove $k > 0$.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema.
2. Si assuma anche $k > m\omega^2$. Allora moti in cui la distanza di uno dei due punti da O divenga illimitata sono impossibili, in uno dei due casi $a > 0$ o $a < 0$. Trovare in quale.

R.

$$1) \qquad \mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big[\dot\xi_1^2\Big(1 + \frac{4a^2}{\xi_1^6}\Big) + \dot\xi_2^2\Big(1 + \frac{4a^2}{\xi_2^6}\Big)\Big] - \frac{k}{2}\Big[(\xi_1 - \xi_2)^2 + \Big(\frac{a}{\xi_1^2} - \frac{a}{\xi_2^2}\Big)^2\Big] + \frac{m\omega^2}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) - mg\Big(\frac{a}{\xi_1^2} + \frac{a}{\xi_2^2}\Big)\,.$$

$$2) \qquad a > 0\,.$$

39. [11/9/2009 (ex)I] Un punto P di massa M è vincolato alla superficie mobile liscia data, nel sistema di riferimento fisso (O, x_i), da

$$S(t) = \big\{(r\cos(\varphi+\omega t), r\sin(\varphi+\omega t), \alpha r^2 \sin(2\varphi+\omega t)) \mid r > 0\,, \varphi \in (-\pi, \pi)\big\}\,.$$

Qui $\omega > 0$ e $\alpha > 0$ sono costanti.
Sul punto agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_3.

- Scrivere la lagrangiana del punto.
- Scrivere i dati iniziali per le coordinate lagrangiane corrispondenti a:
  - velocità iniziale diretta lungo $\boldsymbol{e}_3$;
  - $x_1(0) = \rho_0 > 0$, $x_2(0) = 0$.

SOLUZIONE

A) Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$\rho \in (0, \infty), \qquad \theta \in (-\pi, \pi),$$

tali che

$$\overrightarrow{OP} = \rho \cos(\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_1 + \rho \sin(\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_2 + \alpha\rho^2 \sin(2\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_3 .$$

La velocità di P è dunque

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \dot\rho[\cos(\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_2 + 2\alpha\rho \sin(2\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_3] \\ &+ (\dot\theta + \omega)\rho[-\sin(\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_2] + \alpha(2\dot\theta + \omega)\rho^2 \cos(2\theta + \omega t)\boldsymbol{e}_3 , \end{aligned} \tag{1}$$

da cui

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}|^2 &= \dot\rho^2 + (\dot\theta + \omega)^2\rho^2 + 4\rho^2\dot\rho^2\alpha^2 \sin^2(2\theta + \omega t) \\ &\quad + (2\dot\theta + \omega)^2\rho^4\alpha^2 \cos^2(2\theta + \omega t) + 2(2\dot\theta + \omega)\alpha^2\rho^3\dot\rho \sin(4\theta + 2\omega t) .\end{aligned}$$

Inoltre il potenziale della forza peso è

$$U(x_1, x_2, x_3) = -mgx_3 ,$$

e dunque in coordinate lagrangiane

$$U^{\mathrm{L}}(\rho, \theta, t) = -mg\alpha\rho^2 \sin(2\theta + \omega t) .$$

B) Dalla (1) *segue che per*

$$\rho(0) = \rho_0 , \quad \theta(0) = 0 , \qquad \dot\rho(0) = 0 , \quad \dot\theta(0) = -\omega ,$$

si ha in effetti

$$\boldsymbol{v}(0) = -\alpha\omega\rho_0^2\boldsymbol{e}_3 .$$

R.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big\{&\dot\rho^2 + (\dot\theta + \omega)^2\rho^2 + 4\rho^2\dot\rho^2\alpha^2 \sin^2(2\theta + \omega t) \\ &+ (2\dot\theta + \omega)^2\rho^4\alpha^2 \cos^2(2\theta + \omega t) + 2(2\dot\theta + \omega)\alpha^2\rho^3\dot\rho \sin(4\theta + 2\omega t)\Big\} \\ &- mg\alpha\rho^2 \sin(2\theta + \omega t) .\end{aligned}$$

Dati iniziali:

$$\rho(0) = \rho_0 , \quad \theta(0) = 0 , \qquad \dot\rho(0) = 0 , \quad \dot\theta(0) = -\omega .$$

40. [11/9/2009 (ex)II] Un punto P di massa M è vincolato alla superficie mobile liscia data, nel sistema di riferimento fisso (O, x_i), da

$$S(t) = \big\{(r \sin(\varphi + \omega t), r \cos(\varphi + \omega t), \alpha r^2 \sin(2\varphi + \omega t)) \mid r > 0 , \varphi \in (-\pi, \pi)\big\} .$$

Qui $\omega > 0$ e $\alpha > 0$ sono costanti.
Sul punto agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_3.

- Scrivere la lagrangiana del punto.
- Scrivere i dati iniziali per le coordinate lagrangiane corrispondenti a:
  - velocità iniziale diretta lungo $\boldsymbol{e}_3$;
  - $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = \rho_0 > 0$.

R.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big\{ &\dot\rho^2 + (\dot\theta + \omega)^2\rho^2 + 4\rho^2\dot\rho^2\alpha^2\sin^2(2\theta + \omega t) \\ &+ (2\dot\theta + \omega)^2\rho^4\alpha^2\cos^2(2\theta + \omega t) + 2(2\dot\theta + \omega)\alpha^2\rho^3\dot\rho\sin(4\theta + 2\omega t)\Big\} \cdot \\ &- mg\alpha\rho^2\sin(2\theta + \omega t)\end{aligned}$$

Dati iniziali:

$$\rho(0) = \rho_0\,, \quad \theta(0) = 0\,, \qquad \dot\rho(0) = 0\,, \quad \dot\theta(0) = -\omega\,.$$

41. [20/11/2009 (ex)I] Un'asta di massa M e lunghezza $2R$ è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, e ad avere l'estremo A mobile con legge assegnata

$$\overrightarrow{OA} = L\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1\,,$$

ove $(O, \boldsymbol{e}_i)$ è il sistema fisso e $L > 0$, $\alpha > 0$ sono costanti.
Sull'asta agiscono il peso, diretto nel verso negativo dell'asse x_2, e la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_B = -k\overrightarrow{OB}\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Scrivere le equazioni di Lagrange dell'asta.
SOLUZIONE
L'asta ha un solo grado di libertà. Scegliamo come coordinata lagrangiana l'angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\overrightarrow{AB} = 2R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + 2R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

L'energia cinetica dell'asta è, per il teorema di König,

$$T = \frac{1}{2}M\left|\boldsymbol{v}_G\right|^2 + T_{\mathcal{S}}\,,$$

ove $\mathcal{S} = (G, \boldsymbol{e}_i)$ e G è il centro di massa dell'asta. Si ha

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = (L\cos\alpha t + R\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,$$

da cui

$$\boldsymbol{v}_G = (-L\alpha\sin\alpha t - R\dot\varphi\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 + R\dot\varphi\cos\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

Dunque

$$\left|\boldsymbol{v}_G\right|^2 = R^2\dot\varphi^2 + L^2\alpha^2\sin^2\alpha t + 2RL\alpha\sin\alpha t\sin\varphi\,.$$

Poi, visto che il moto in $\mathcal{S}$ è una rotazione,

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \,,$$

ove I è il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un'asse ortogonale in G.
Le forze sono conservative. Il potenziale della forza peso è

$$U_p = -Mgx_{2G} = -MgR \sin\varphi \,,$$

e quello della forza elastica è

$$U_e = -\frac{k}{2} \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = -\frac{k}{2} \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right|^2 = \\ -\frac{k}{2}(L^2 \cos^2 \alpha t + 4LR \cos\alpha t \cos\varphi + 4R^2) \,.$$

Dunque

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2} M(R^2\dot{\varphi}^2 + L^2\alpha^2 \sin^2 \alpha t + 2RL\alpha \sin\alpha t \sin\varphi) \\ + \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 - MgR \sin\varphi - \frac{k}{2}(L^2 \cos^2 \alpha t + 4LR \cos\alpha t \cos\varphi + 4R^2) \,.$$

L'equazione di Lagrange è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[MR^2\dot{\varphi} + MLR\alpha \sin\alpha t \sin\varphi + I\dot{\varphi}\Big] \\ - MLR\alpha\dot{\varphi} \sin\alpha t \cos\varphi + MgR \cos\varphi - 2kLR \cos\alpha t \sin\varphi = 0 \,.$$

R.

$$(MR^2 + I)\ddot{\varphi} + MLR\alpha^2 \cos\alpha t \sin\varphi + MgR \cos\varphi - 2kLR \cos\alpha t \sin\varphi = 0 \,.$$

42. [25/1/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato al piano ruotante

$$\Pi(t) : \qquad -x_1 \sin\omega t + x_2 \cos\omega t = 0 \,,$$

ed è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_2 \,.$$

All'istante iniziale si ha

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \omega R\boldsymbol{e}_2 + \beta\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Trovare una condizione sulle costanti ω, m, $R > 0$, e α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ che garantisca che $x_{2P} > 0$ per $0 < t < \pi/\omega$.

Soluzione

Scegliamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_1)$, solidale con il piano $\Pi(t)$:

$$\boldsymbol{u}_1 = \cos\omega t \, \boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t \, \boldsymbol{e}_2 \,,$$
$$\boldsymbol{u}_2 = -\sin\omega t \, \boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t \, \boldsymbol{e}_2 \,,$$
$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Denotiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$. Dunque $\Pi(t)$ ha equazione in $\mathcal{S}$ data da $y_2 = 0$. Inoltre la velocità angolare di $(\boldsymbol{u}_i)$ è

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{u}_3 = \omega \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Scegliamo $(y_1, y_3) \in \boldsymbol{R}^2$ come coordinate lagrangiane di P.
Su P agiscono in $\mathcal{S}$, oltre alla forza peso, le forze fittizie. Tuttavia la forza di Coriolis ha come è noto componenti lagrangiane nulle, in questo caso particolare. Inoltre

$$\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = m\omega^2 \left[\overrightarrow{OP}\right]_{\perp} = m\omega^2 y_1 \boldsymbol{u}_1 \,,$$

ed è perciò conservativa di potenziale

$$U_{\scriptscriptstyle T} = \frac{1}{2} m\omega^2 y_1^2 \,.$$

La forza peso è

$$\boldsymbol{F}_p = -mg\boldsymbol{e}_2 = -mg(\sin\omega t \boldsymbol{u}_1 + \cos\omega t \boldsymbol{u}_2) \,,$$

ed ha perciò potenziale

$$U_p = -mg(y_1 \sin\omega t + y_2 \cos\omega t) \,.$$

Dunque la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 y_1^2 - mgy_1 \sin\omega t \,.$$

Le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 - (m\omega^2 y_1 - mg\sin\omega t) &= 0 \,, \\ m\ddot{y}_3 &= 0 \,. \end{aligned}$$

Per la geometria del problema, nell'intervallo di tempo $(0, \pi/\omega)$ si ha $x_{2P} > 0$ se e solo se $y_1 > 0$. Il problema ai valori iniziali per y_1 è

$$\ddot{y}_1 - \omega^2 y_1 = -g \sin\omega t \,, \qquad y_1(0) = R \,, \qquad \dot{y}_1 = \alpha \,,$$

che ha soluzione

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\Big(R - \frac{\alpha}{\omega} + \frac{g}{2\omega^2}\Big) e^{-\omega t} + \frac{1}{2}\Big(R + \frac{\alpha}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2}\Big) e^{\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin\omega t \,.$$

Dato che

$$\frac{g}{2\omega^2} \sin\omega t > 0 \,, \qquad 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \,,$$

basterà avere ad esempio

$$R > \frac{|\alpha|}{\omega} + \frac{g}{2\omega^2} \,.$$

R.

$$R > \frac{|\alpha|}{\omega} + \frac{g}{2\omega^2} \,.$$

43. [25/1/2010 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato al piano ruotante

$$\Pi(t): \qquad -x_1 \sin \omega t + x_2 \cos \omega t = 0 \,,$$

ed è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_1 \,.$$

All'istante iniziale si ha

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \omega R \boldsymbol{e}_2 + \beta \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Trovare una condizione sulle costanti ω, m, $R > 0$, e α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ che garantisca che $x_{2P} > 0$ per $0 < t < \pi/\omega$.
R.

$$R > \frac{|\alpha|}{\omega} + \frac{3g}{2\omega^2} \,.$$

44. [8/7/2010 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato a un piano mobile $\Pi(t)$ che ruota intorno a un suo asse r orizzontale con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$. Supponiamo che r coincida con l'asse fisso x_1 e che $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_1$. Sul punto agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{P'P} \,,$$

ove P' è la proiezione ortogonale di P su r. Qui k e ω sono costanti positive.

1. Scrivere le equazioni di moto.

2. Determinare le condizioni iniziali per cui il moto è periodico, sapendo che all'istante iniziale Π è orizzontale.

SOLUZIONE
Consideriamo un sistema di riferimento $(O, \boldsymbol{u}_i)$ solidale con Π, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{u}_3 \perp \Pi \,.$$

Denotiamo

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2 \,,$$

e scegliamo $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ come coordinate lagrangiane.
La forza peso dà luogo a un potenziale

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{peso}} = -mgx_{3P} = -mgy \sin(\omega t) \,.$$

La forza elastica, che si esprime come,

$$\boldsymbol{F} = -ky\boldsymbol{u}_2 \,,$$

ha potenziale

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{el}} = -\frac{1}{2} k y^2 \,.$$

La forza di trascinamento

$$\boldsymbol{F}_{T} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}) = m\omega^2 y \boldsymbol{u}_2$$

ha potenziale

$$U^{\mathrm{L}}_{T} = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 \,.$$

Infine, come è noto, in questo caso la forza di Coriolis non contribuisce all'equazione di moto.
Dunque la Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy\sin(\omega t) - \frac{1}{2} k y^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 \,.$$

1) Le equazioni di moto sono dunque

$$m\ddot{x} = 0 \,,$$
$$m\ddot{y} + mg\sin(\omega t) - (m\omega^2 - k)y = 0 \,.$$

2) Poniamo

$$x(0) = x_0 \,, \quad y(0) = y_0 \,, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \,, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \,.$$

Si ha

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t \,,$$

per cui una soluzione periodica è possibile solo se intanto

$$\dot{x}_0 = 0 \,.$$

Riscriviamo la seconda equazione di moto come

$$\ddot{y} - \alpha y = -g\sin(\omega t) \,, \qquad \alpha := \omega^2 - km^{-1} \,.$$

Distinguiamo i tre casi:
i) $\alpha > 0$. *Si ottiene che l'integrale generale della e.d.o. è dato da*

$$y(t) = k_1 e^{\beta t} + k_2 e^{-\beta t} + \frac{g}{\omega^2 + \alpha} \sin(\omega t) \,, \qquad \beta := \sqrt{\alpha} \,.$$

Per avere una soluzione periodica occorre e basta che $k_1 = k_2 = 0$, *ossia*

$$y_0 = 0 \,, \qquad \dot{y}_0 = \frac{g\omega}{\omega^2 + \alpha} \,.$$

ii) $\alpha = 0$. *Si ottiene che l'integrale generale della e.d.o. è dato da*

$$y(t) = k_1 + k_2 t + \frac{g}{\omega^2} \sin(\omega t) \,.$$

Di nuovo occorre e basta che $k_2 = 0$, *ossia*

$$\dot{y}_0 = \frac{g}{\omega} \,.$$

iii) $\alpha < 0$. *a)* $\omega^2 \neq \mu^2$. *Si ottiene che l'integrale generale della e.d.o. è dato da*

$$y(t) = k_1 \cos(\mu t) + k_2 \sin(\mu t) + \frac{g}{\omega^2 + \alpha} \sin(\omega t) , \qquad \mu := \sqrt{-\alpha} .$$

Se μ/ω *è un numero razionale, tutte le soluzioni sono periodiche. Se* μ/ω *non è un numero razionale, occorre e basta che* $k_1 = k_2 = 0$, *ossia*

$$y_0 = 0 , \qquad \dot{y}_0 = \frac{g\omega}{\omega^2 + \alpha} .$$

b) $\omega^2 = \mu^2$. *In questo caso, quando cioè* $2\omega^2 = k/m$, *l'integrale generale della e.d.o. è dato da*

$$y(t) = k_1 \cos(\mu t) + k_2 \sin(\mu t) + \frac{g}{2\omega} t \cos(\omega t) , \qquad \mu := \sqrt{-\alpha} ,$$

e le soluzioni non sono mai periodiche.
R. *Equazioni di moto:*

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 , \\ m\ddot{y} + mg \sin(\omega t) - (m\omega^2 - k) y &= 0 . \end{aligned}$$

Condizioni per la periodicità delle soluzioni:

$$\begin{array}{ll} 2\omega^2 = km^{-1} , & \textit{mai periodiche;} \\ \omega^{-1}\sqrt{km^{-1} - \omega^2} \in \boldsymbol{Q} , & \textit{sempre periodiche;} \\ \omega^2 = km^{-1} , & \dot{x}_0 = 0 , \quad \dot{y}_0 = g\omega^{-1} ; \\ \textit{altrimenti} & \dot{x}_0 = 0 , \quad y_0 = 0 , \quad \dot{y}_0 = g\omega(2\omega^2 - km^{-1})^{-1} . \end{array}$$

45. [7/9/2010 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato a una circonferenza γ di raggio R, che è vincolata a sua volta a ruotare intorno al suo diametro verticale AB. I punti A e B sono sia fissi che solidali con γ.
La velocità di rotazione di γ è assegnata come

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t) \frac{\overrightarrow{AB}}{2R} ,$$

con $\omega \in C^1(\boldsymbol{R})$.
Scrivere l'equazione di moto del punto.
Soluzione
Scegliamo come coordinata lagrangiana

$$\varphi \in (-\pi, \pi) ,$$

in modo che

$$\overrightarrow{OP} = R \cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + R \sin\varphi \boldsymbol{u}_3 ,$$

se $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_i))$ *è un sistema di riferimento solidale con la circonferenza, con*

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2R} ,$$

e O coincidente con il centro di γ.
Su P, nel sistema $\mathcal{S}$, agiscono il peso

$$-mg\boldsymbol{u}_3\,,$$

e la forza di trascinamento

$$\boldsymbol{F}_{T} = -m[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP})] = m[\omega^2 R \cos\varphi \boldsymbol{u}_1 - \dot{\omega} R \cos\varphi \boldsymbol{u}_2]\,.$$

Dato che la forza di Coriolis, come è noto, ha in questo caso componente lagrangiana nulla, si ha dunque

$$\begin{aligned} Q_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} \cdot [-mg\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{F}_{T}] &= R[-\sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{u}_2] \cdot [-mg\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{F}_{T}] \\ &= -mgR\cos\varphi - m\omega^2 R^2 \sin\varphi\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

Dato che in $\mathcal{S}$

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}|^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2\,,$$

si ha l'equazione di Lagrange

$$mR^2 \ddot{\varphi} = -mgR\cos\varphi - m\omega^2 R^2 \sin\varphi\cos\varphi\,.$$

R.

$$\ddot{\varphi} = -gR^{-1}\cos\varphi - \omega^2 \sin\varphi\cos\varphi\,.$$

46. [17/7/2014 (ex)I] Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere sul piano mobile $\Pi(t)$ la cui equazione è

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0\,,$$

ove $\alpha > 0$ è una costante assegnata e (x_i) denota le coordinate nel sistema fisso. Il centro C dell'asta è vincolato a giacere sul piano fisso $x_3 = 0$.
Sull'asta agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(P) = \lambda \overrightarrow{CP} \times \boldsymbol{u}\,,$$

ove $\lambda > 0$ è una costante assegnata, P denota il generico punto dell'asta e

$$\boldsymbol{u} = -\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2$$

denota la normale al piano $\Pi(t)$. Qui $(\boldsymbol{e}_h)$ è la base fissa.
Scrivere le equazioni di Lagrange e determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\Pi(t)$.
SOLUZIONE
Introduciamo un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ ove

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

Si noti che i versori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_3$ *giacciono su* $\Pi(t)$. *Se indichiamo con* (y_i) *le coordinate in* $\mathcal{S}$, *scegliamo come coordinate lagrangiane*

$$y = y_{1C} \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi)\,,$$

in modo che l'asta risulti parametrizzata da

$$\overrightarrow{CP} = s\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + s\sin\varphi \boldsymbol{u}_3\,, \qquad s \in [-L, L]\,,$$

ossia $\overrightarrow{OP} = y\boldsymbol{u}_1 + \overrightarrow{CP}$.
Quindi l'energia cinetica dell'asta relativa a $\mathcal{S}$ *è data da*

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(C)|^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2\,.$$

Qui I *è il momento d'inerzia centrale dell'asta rispetto al suo asse.*
Dato che la distribuzione di forze non è conservativa, occorre calcolarne le componenti lagrangiane, tenendo anche conto della forza di trascinamento

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = \alpha^2\frac{M}{2L}(y + s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_1\,.$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} Q_y &= \int_{AB}(\,\mathrm{d}\boldsymbol{F} + \,\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T})\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\scriptscriptstyle L}}{\partial y} = \int_{AB}(\lambda\overrightarrow{CP}\times\boldsymbol{u}_2 + \,\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T})\cdot\boldsymbol{u}_1 \\ &= \int_{-L}^{L}[\lambda(s\cos\varphi\boldsymbol{u}_3 - s\sin\varphi\boldsymbol{u}_1) + \alpha^2\frac{M}{2L}(y + s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_1]\cdot\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}s = M\alpha^2 y\,, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= \int_{AB}(\,\mathrm{d}\boldsymbol{F} + \,\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T})\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\scriptscriptstyle L}}{\partial \varphi} \\ &= \int_{-L}^{L}[\lambda\overrightarrow{CP}\times\boldsymbol{u}_2 + \alpha^2\frac{M}{2L}(y + s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_1]\cdot(-s\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + s\cos\varphi\boldsymbol{u}_3)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$= \int_{-L}^{L}[\lambda(s^2\cos^2\varphi + s^2\sin^2\varphi) - \alpha^2\frac{M}{2L}s^2\cos\varphi\sin\varphi]\,\mathrm{d}s = \frac{2}{3}\lambda L^3 - \alpha^2\frac{ML^2}{3}\cos\varphi\sin\varphi\,.$$

Perciò le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M\dot{y}] &= My\alpha^2\,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I\dot{\varphi}] &= \frac{2}{3}\lambda L^3 - \alpha^2\frac{ML^2}{3}\cos\varphi\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

L'equilibrio pertanto corrisponde alle posizioni che annullano i secondi membri delle equazioni di Lagrange, ossia

$$y = 0\,, \qquad \sin(2\varphi) = \frac{4\lambda L}{M\alpha^2}\,.$$

Nell'ipotesi che $4\lambda L \le M\alpha^2$ *si ha perciò equilibrio per*

$$2\varphi = \arcsin\frac{4\lambda L}{M\alpha^2} =: 2\varphi_0 \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big]\,,$$

e per

$$2\varphi = \pi - 2\varphi_0\,, \qquad 2\varphi = -\pi - 2\varphi_0\,, \qquad 2\varphi = -2\pi + 2\varphi_0\,.$$

R.

$$M\ddot{y} = My\alpha^2\,,$$
$$I\ddot{\varphi} = \frac{2}{3}\lambda L^3 - \alpha^2 \frac{ML^2}{3}\cos\varphi\sin\varphi\,.$$

Si ha equilibrio relativo, se $4\lambda L \le M\alpha^2$*, per*

$$y = 0\,, \qquad \varphi \in \Big\{\varphi_0\,, \frac{\pi}{2} - \varphi_0\,, -\frac{\pi}{2} - \varphi_0\,, -\pi + \varphi_0\Big\}\,, \qquad \varphi_0 := \frac{1}{2}\arcsin\frac{4\lambda L}{M\alpha^2} \in \Big(0, \frac{\pi}{4}\Big]\,.$$

47. [13/1/2015 (ex)I] Consideriamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e per $\alpha > 0$ dato

$$\boldsymbol{u}_1 = \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,$$
$$\boldsymbol{u}_2 = -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,$$
$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(x_1, t) = x_1\boldsymbol{u}_1(t) + \lambda x_1^k \boldsymbol{u}_3(t)\,, \qquad x_1 > 0\,,$$

ove λ, $k > 0$. Qui le (x_i) denotano le coordinate nel sistema $\mathcal{S}$.
Sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di moto del punto.
- Determinare, se esistono, le posizioni di equilibrio di P in $\mathcal{S}$ e studiarne la stabilità.

Soluzione
A) Il punto ha un solo grado di libertà. Scegliamo come coordinata lagrangiana $x \in (0, +\infty)$ *tale che*

$$\overrightarrow{OP}(t) = \boldsymbol{\Psi}(x(t), t)\,.$$

Si ha pertanto

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \dot{x}\boldsymbol{u}_1 + k\lambda x^{k-1}\dot{x}\boldsymbol{u}_3\,,$$

e quindi

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}|^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + k^2\lambda^2 x^{2k-2})\,.$$

Inoltre su P *in* $\mathcal{S}$ *agiscono la forza peso e la forza di trascinamento*

$$\boldsymbol{F}_{T} = m\alpha^2 x_1 \boldsymbol{u}_1\,.$$

Poiché, come è noto, nel caso di moti con un grado di libertà la forza di Coriolis dà contributo nullo alle equazioni di Lagrange possiamo scrivere il potenziale

$$U = -mgx_3 + \frac{1}{2}m\alpha^2 x_1^2 \,,$$

e quindi la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1+\lambda^2k^2x^{2k-2}) - mg\lambda x^k + \frac{1}{2}m\alpha^2x^2 \,.$$

B) Troviamo le posizioni di equilibrio come punti critici del potenziale risolvendo

$$\frac{\mathrm{d}U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}x}(x) = -mg\lambda kx^{k-1} + m\alpha^2x = 0 \,.$$

B.i) Sia $k \neq 2$. Poiché $x > 0$ si ottiene l'unica soluzione

$$x = x_0 := \Big(\frac{\alpha^2}{g\lambda k}\Big)^{\frac{1}{k-2}} \,.$$

Inoltre

$$\frac{\mathrm{d}^2U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}x^2} = -mg\lambda k(k-1)x^{k-2} + m\alpha^2 \,,$$

cosicché

$$\frac{\mathrm{d}^2U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = m\alpha^2(2-k) \,.$$

Perciò la posizione è di equilibrio stabile se $k > 2$ e di equilibrio instabile se $k < 2$.
B.ii) Sia $k = 2$. In questo caso

$$\frac{\mathrm{d}U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}x}(x) = mx(\alpha^2 - g\lambda k) \,.$$

Nel caso in cui

$$\alpha^2 \neq g\lambda k$$

dunque non si hanno punti di equilibrio. Se invece

$$\alpha^2 = g\lambda k$$

tutte le posizioni sono di equilibrio instabile.
R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m\dot{x}(1+\lambda^2k^2x^{2k-2})\big] - m\dot{x}^2\lambda^2k^2(k-1)x^{2k-3} + mg\lambda kx^{k-1} - m\alpha^2x = 0 \,.$$

Equilibrio:

$k \neq 2$: $\quad x_0 = \Big(\frac{\alpha^2}{g\lambda k}\Big)^{\frac{1}{k-2}}$; *stabile se $k > 2$, instabile se $k < 2$;*

$k = 2$: *nessun equilibrio se $\alpha^2 \neq g\lambda k$; tutti i punti di equilibrio instabile se $\alpha^2 = g\lambda k$.*

48. [13/1/2015 (ex)II] Consideriamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e per $\alpha > 0$ dato

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(x_1, t) = \lambda x_3^k \boldsymbol{u}_1(t) + x_3 \boldsymbol{u}_3(t) \,, \qquad x_3 > 0 \,,$$

ove λ, $k > 0$. Qui le (x_i) denotano le coordinate nel sistema $\mathcal{S}$.
Sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di moto del punto.
- Determinare, se esistono, le posizioni di equilibrio di P in $\mathcal{S}$ e studiarne la stabilità.

R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m\dot{z}(1 + \lambda^2 k^2 z^{2k-2})\big] - m\dot{z}^2 \lambda^2 k^2 (k-1) z^{2k-3} + mg - m\alpha^2 \lambda^2 k z^{2k-1} = 0 \,.$$

Equilibrio:

$k \neq \dfrac{1}{2}$: $\quad z_0 = \Big(\dfrac{g}{\alpha^2 \lambda^2 k}\Big)^{\frac{1}{2k-1}}$; *stabile se* $k < 1/2$, *instabile se* $k > 1/2$;

$k = \dfrac{1}{2}$: *nessun equilibrio se* $\alpha^2 \lambda^2 k \neq g$; *tutti i punti di equilibrio instabile se* $\alpha^2 \lambda^2 k = g$.

49. [2/7/2015 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di lato $2L$ e massa M è vincolata in modo che i due vertici consecutivi A e B sono dati da

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega A} &= R\boldsymbol{u}_1(t) + L\boldsymbol{u}_2(t) - \frac{c}{2} t^2 \boldsymbol{u}_3(t) \,, \\
\overrightarrow{\Omega B} &= R\boldsymbol{u}_1(t) - L\boldsymbol{u}_2(t) - \frac{c}{2} t^2 \boldsymbol{u}_3(t) \,,
\end{aligned}$$

ove la terna $(\boldsymbol{u}_i)$ è data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Qui α, c, $R > 0$ sono assegnati e Ω è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Scrivere le equazioni di Lagrange della lamina nel sistema $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_i))$ ove

$$\overrightarrow{\Omega O} = -\frac{c}{2} t^2 \boldsymbol{u}_3(t) \,.$$

Soluzione

Poiché le posizioni dei due vertici A e B sono assegnate la lamina ha un solo grado di libertà; scegliamo come coordinata lagrangiana $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che se denotiamo con $\boldsymbol{\nu}$ la normale alla lamina

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{u}_3 = \sin \varphi \,.$$

La velocità angolare della lamina in $\mathcal{S}$, trattandosi di un moto di rotazione intorno ad AB vale

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}} = \dot{\varphi} \boldsymbol{u}_2 \,.$$

Per lo stesso motivo vale

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \,,$$

ove I è il momento d'inerzia relativo ad AB.
Le forze applicate sono quelle fittizie. In ogni caso la forza di Coriolis ha componente nulla perché il sistema ha un solo grado di libertà.
L'accelerazione di trascinamento è data da

$$\boldsymbol{a}_{\scriptscriptstyle T} = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}] = -c\boldsymbol{u}_3 + \alpha^2 \boldsymbol{u}_3 \times [\boldsymbol{u}_3 \times \overrightarrow{OP}] \,,$$

poiché la velocità angolare di $(\boldsymbol{u}_i)$ è data da

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha \boldsymbol{u}_3 \,.$$

Dobbiamo parametrizzare $ABCD$: per $s \in [-L, L]$, $r \in [0{,}2L]$ scriviamo

$$\boldsymbol{X}(\varphi; r, s) = \overrightarrow{OP} = R\boldsymbol{u}_1(t) + s\boldsymbol{u}_2(t) + r(\cos \varphi \boldsymbol{u}_1(t) + \sin \varphi \boldsymbol{u}_3) \,.$$

Dunque

$$\boldsymbol{u}_3 \times [\boldsymbol{u}_3 \times \overrightarrow{OP}] = \boldsymbol{u}_3 \times [(R + r\cos\varphi)\boldsymbol{u}_2 - s\boldsymbol{u}_1] = -(R + r\cos\varphi)\boldsymbol{u}_1 - s\boldsymbol{u}_2 \,,$$

e

$$\begin{aligned} Q_{\scriptscriptstyle T\varphi} &= -\int_{ABCD} \frac{M}{4L^2} \boldsymbol{a}_{\scriptscriptstyle T} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \varphi}(\varphi; r, s) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}s \\ &= -\int_{ABCD} \frac{M}{4L^2} \{-c\boldsymbol{u}_3 - \alpha^2 (R + r\cos\varphi)\boldsymbol{u}_1 - \alpha^2 s\boldsymbol{u}_2\} \cdot \{r(-\sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{u}_3)\} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}s \,. \end{aligned}$$

R.

$$I\ddot{\varphi} = -ML\Big\{ - c\cos\varphi + \alpha^2 R \sin\varphi + \frac{2}{3} L\alpha^2 \sin 2\varphi \Big\} \,.$$

50. [12/1/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza mobile

$$x_1^2 + (x_2 - \alpha \sin(\lambda t))^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Qui α, λ, $R > 0$ sono costanti assegnate.
Determinare l'equazione di moto di P in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana.

Soluzione
Scegliamo come coordinata lagrangiana $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *tale che*

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + (R\sin\varphi + \alpha\sin(\lambda t))\boldsymbol{e}_2 \,,$$

ove O *è l'origine. Quindi*

$$\boldsymbol{v}_P = -\dot\varphi R\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + (R\dot\varphi\cos\varphi + \alpha\lambda\cos(\lambda t))\boldsymbol{e}_2 \,,$$

cosicché l'energia cinetica è

$$T^{\mathrm{L}}(\varphi, \dot\varphi, t) = \frac{1}{2} m R^2 \dot\varphi^2 + mR\alpha\lambda\dot\varphi\cos\varphi\cos(\lambda t) + \frac{1}{2} m\alpha^2\lambda^2\cos^2(\lambda t) \,.$$

Poiché non ci sono forze applicate $\mathcal{L} = T^{\mathrm{L}}$*, e l'equazione di moto è*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[mR^2\dot\varphi + mR\alpha\lambda\cos\varphi\cos(\lambda t)\big] + mR\alpha\lambda\dot\varphi\sin\varphi\cos(\lambda t) = 0 \,.$$

R.

$$\ddot\varphi = \frac{\alpha\lambda^2}{R}\cos\varphi\sin(\lambda t) \,.$$

51. [12/1/2015 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza mobile

$$(x_1 - \alpha\cos(\lambda t))^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Qui α, λ, $R > 0$ sono costanti assegnate.
Determinare l'equazione di moto di P in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana.
R.

$$\ddot\varphi = -\frac{\alpha\lambda^2}{R}\sin\varphi\cos(\lambda t) \,.$$

52. [9/2/2016 (ex)I] La terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ del sistema di riferimento $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$ ha velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega\boldsymbol{u}_3(t) = \omega\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie solidale con $\mathcal{S}$

$$y_3 = f(r)g(\varphi) \,, \qquad r > 0 \,,$$

ove (y_h) sono le coordinate in $\mathcal{S}$, e (r, φ) le relative coordinate polari nel piano $y_3 = 0$. Si assuma sempre $r > 0$.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{P'P} = -ky_3\boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove P' è la proiezione di P su $y_3 = 0$. Qui ω, $k > 0$ sono costanti assegnate.

- Scrivere la funzione lagrangiana del moto.
- Trovare le posizioni di equilibrio, relativo a $\mathcal{S}$, assumendo che

$$g(\varphi) = 2 + \cos\varphi\,, \qquad f(r) = r^2\,.$$

SOLUZIONE

A) Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$\rho \in (0, +\infty)\,, \qquad \theta \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\Big)\,,$$

tali che

$$\overrightarrow{OP} = \rho\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + \rho\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + f(\rho)g(\theta)\boldsymbol{u}_3\,.$$

Su P agisce la forza $\boldsymbol{F}$, che ha potenziale

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = -\frac{k}{2}y_3^2 = -\frac{k}{2}x_3^2\,.$$

Calcoleremo la velocità come

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OP}\,.$$

La velocità relativa a $\mathcal{S}$ è

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = (\dot\rho\cos\theta - \rho\dot\theta\sin\theta)\boldsymbol{u}_1 + (\dot\rho\sin\theta + \rho\dot\theta\cos\theta)\boldsymbol{u}_2 \\ + [\dot\rho f'(\rho)g(\theta) + \dot\theta f(\rho)g'(\theta)]\boldsymbol{u}_3\,.\end{aligned}$$

Si ha poi

$$\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OP} = \omega(\rho\cos\theta\boldsymbol{u}_2 - \rho\sin\theta\boldsymbol{u}_1)\,.$$

Perciò la velocità assoluta è

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= [\dot\rho\cos\theta - \rho\dot\theta\sin\theta - \omega\rho\sin\theta]\boldsymbol{u}_1 \\ &\quad + [\dot\rho\sin\theta + \rho\dot\theta\cos\theta + \omega\rho\cos\theta]\boldsymbol{u}_2 \\ &\quad + [\dot\rho f'(\rho)g(\theta) + \dot\theta f(\rho)g'(\theta)]\boldsymbol{u}_3\,.\end{aligned}$$

Dunque la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2 + \omega^2\rho^2 + 2\omega\dot\theta\rho^2 + (\dot\rho f'(\rho)g(\theta) + \dot\theta f(\rho)g'(\theta))^2] - \frac{k}{2}f(\rho)^2g(\theta)^2\,.$$

B) Il potenziale del moto nel sistema $\mathcal{S}$ è dato quindi da

$$U^{\mathrm{L}}(\rho,\theta) = \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 - \frac{k}{2}f(\rho)^2g(\theta)^2\,.$$

L'equilibrio è individuato da

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\rho} &= -kf(\rho)f'(\rho)g(\theta)^2 + m\omega^2\rho = 0\,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= -f(\rho)^2g(\theta)g'(\theta) = 0\,.\end{aligned}$$

La seconda equazione dà che almeno uno tra i fattori $f(\rho)$, $g(\theta)$, $g'(\theta)$ deve annullarsi. Ma se si annullasse uno dei primi due, la prima equazione darebbe $\rho = 0$, che è una posizione esclusa. Dunque deve essere $g'(\theta) = 0$. Per tali θ risultano di equilibrio i punti per cui è soddisfatta la prima equazione.
R.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2 + \omega^2\rho^2 + 2\omega\dot\theta\rho^2 + (\dot\rho f'(\rho)g(\theta) + \dot\theta f(\rho)g'(\theta))^2] - \frac{k}{2}f(\rho)^2 g(\theta)^2 .$$

I due punti di equilibrio sono

$$\rho = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{m}{2k}}\omega , \quad \theta = 0 ; \qquad \rho = \sqrt{\frac{m}{2k}}\omega , \quad \theta = \pi .$$

53. [9/2/2016 (ex)II] La terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ del sistema di riferimento $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$ ha velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega \boldsymbol{u}_3(t) = \omega \boldsymbol{e}_3 .$$

Qui O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie solidale con $\mathcal{S}$

$$y_3 = f(r)g(\varphi) , \qquad r > 0 ,$$

ove (y_h) sono le coordinate in $\mathcal{S}$, e (r, φ) le relative coordinate polari nel piano $y_3 = 0$. Si assuma sempre $r > 0$.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{P'P} = k y_3 \boldsymbol{u}_3 ,$$

ove P' è la proiezione di P su $y_3 = 0$. Qui ω, $k > 0$ sono costanti assegnate.

- Scrivere la funzione lagrangiana del moto.
- Trovare le posizioni di equilibrio, relativo a $\mathcal{S}$, assumendo che

$$g(\varphi) = 2 + \cos\varphi , \qquad f(r) = r^{-2} ,$$

  e discuterne la stabilità.

R.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2 + \omega^2\rho^2 + 2\omega\dot\theta\rho^2 + (\dot\rho f'(\rho)g(\theta) + \dot\theta f(\rho)g'(\theta))^2] + \frac{k}{2}f(\rho)^2 g(\theta)^2 .$$

I due punti di equilibrio sono

$$\rho = \sqrt[6]{\frac{18k}{m\omega^2}} , \quad \theta = 0 ; \qquad \rho = \sqrt[6]{\frac{2k}{m\omega^2}} , \quad \theta = \pi .$$

Entrambi sono instabili.

54. [7/6/2016 (ex)I] Quattro punti materiali A, B, C, D di uguale massa m sono vincolati ad appartenere al piano ruotante $\Pi(t)$ di equazione

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0 \,,$$

ove le x_i sono le coordinate nel sistema fisso. Inoltre $ABCD$ è un quadrato di centro l'origine O del sistema fisso, di lato di lunghezza variabile positiva, con i lati AD e BC paralleli all'asse x_3.
Su ciascun punto $X \in \{A, B, C, D\}$ agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_X = -k\overrightarrow{YX} - k\overrightarrow{ZX} \,,$$

ove Y e Z sono i due vertici adiacenti a X. Sui punti agisce anche la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$.
Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema e dare una condizione sui parametri positivi k e α perché il lato del quadrato si mantenga limitato durante tutti i moti.
SOLUZIONE
Il sistema ha un solo grado di libertà perché la posizione di A determina quella di tutti gli altri punti e A a sua volta può muoversi solo su una semiretta di $\Pi(t)$. Poniamo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Sia poi $r \in (0, +\infty)$ la coordinata lagrangiana scelta in modo che

$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC} = -r\boldsymbol{u}_1 - r\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD} = r\boldsymbol{u}_1 - r\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Quindi il lato di $ABCD$ misura $2r$.
Scriviamo le equazioni di moto nel sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$; qui per esempio

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}^A = -\dot{r}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3) \,, \qquad |\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}^A|^2 = 2\dot{r}^2 \,,$$

cosicché

$$T_{\mathcal{S}} = 4m\dot{r}^2 \,.$$

Determiniamo poi il potenziale delle forze elastiche:

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{1}{2}k\{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2\} = -8kr^2 \,.$$

Il potenziale della forza peso è costante perché il centro di massa del sistema coincide con l'origine O e quindi è a quota fissa. La forza fittizia di Coriolis ha componente lagrangiana nulla in questo caso, come è noto. La forza di trascinamento vale, se le y_i denotano le coordinate in $\mathcal{S}$,

$$\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = m\alpha^2 y_1 \boldsymbol{u}_1 = m\,\nabla_y \Big(\frac{\alpha^2}{2} y_1^2\Big) \,.$$

Quindi il sistema delle forze di trascinamento ha potenziale

$$U_{\mathrm{T}} = 2m\alpha^2 r^2 .$$

Possiamo per le considerazioni precedenti scrivere le equazioni in forma conservativa, con lagrangiana

$$\mathcal{L} = 4m\dot{r}^2 + 2(m\alpha^2 - 4k)r^2 .$$

Si arriva a

$$2m\ddot{r} - (m\alpha^2 - 4k)r = 0 .$$

B) Le soluzioni dell'equazione di Lagrange sono combinazioni di seni e coseni se

$$m\alpha^2 - 4k < 0 ,$$

altrimenti tra di esse ve ne sono di illimitate.
R.

$$2m\ddot{r} - (m\alpha^2 - 4k)r = 0 ; \qquad 4k > m\alpha^2 .$$

55. [7/6/2016 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ è formata da due metà omogenee, una AC di massa m_1 e una CB di massa $m_2 > m_1$, ove C è il centro dell'asta.
L'asta è vincolata ad avere il centro C mobile con legge

$$\overrightarrow{OC} = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 ,$$

ove R, $\alpha > 0$ sono costanti date. Qui $(O, (\boldsymbol{e}_h))$ è il sistema di riferimento fisso.
Si scrivano le equazioni di moto dell'asta nel sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 ,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 ,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 .
\end{aligned}$$

Soluzione
Introduciamo le coordinate lagrangiane

$$\varphi \in (-\pi, \pi) , \qquad \theta \in (0, \pi) ,$$

tali che

$$\overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi \sin\theta \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + \cos\theta \boldsymbol{u}_3) .$$

In $\mathcal{S}$ C è fisso, dato che

$$\overrightarrow{OC} = R\boldsymbol{u}_1(t) .$$

Dunque la velocità in $\mathcal{S}$ del generico punto P dell'asta con

$$\overrightarrow{CP} = s(\cos\varphi \sin\theta \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + \cos\theta \boldsymbol{u}_3) ,$$

è data da

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(s) &= s\dot{\varphi}(-\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{u}_1+\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{u}_2)\\ &\qquad + s\dot{\theta}(\cos\varphi\cos\theta\boldsymbol{u}_1+\sin\varphi\cos\theta\boldsymbol{u}_2-\sin\theta\boldsymbol{u}_3)\,.\end{aligned}$$

Pertanto

$$|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(s)|^2 = s^2(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)\,.$$

Dunque

$$\begin{aligned}T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(s)|^2\,\rho(s)\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\Big\{\frac{m_1}{L}\int_{-L}^{0}s^2\,\mathrm{d}s+\frac{m_2}{L}\int_{0}^{L}s^2\,\mathrm{d}s\Big\}(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)\\ &= \frac{m_1+m_2}{6}L^2(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)\,.\end{aligned}$$

Sul sistema agiscono solo le forze fittizie $\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T}$ e $\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C}$. Si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} &= -\rho\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OP}]\,\mathrm{d}s = -\rho\alpha^2\boldsymbol{u}_3\times[\boldsymbol{u}_3\times(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP})]\,\mathrm{d}s\\ &= \rho\alpha^2R\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}s+\rho\alpha^2 s(\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{u}_1+\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{u}_2)\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}Q_{\varphi}^{\mathrm{T}} &= \int_{-L}^{L}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = \alpha^2R\int_{-L}^{L}\rho(s)s(-\sin\varphi\sin\theta)\,\mathrm{d}s\,;\\ Q_{\theta}^{\mathrm{T}} &= \int_{-L}^{L}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} = \alpha^2\int_{-L}^{L}[Rs\cos\varphi\cos\theta+s^2\sin\theta\cos\theta]\rho(s)\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

Poi si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C} &= -2\rho\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}\,\mathrm{d}s\\ &= 2\rho\alpha s[(\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta+\dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta)\boldsymbol{u}_1+(\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta-\dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta)\boldsymbol{u}_2]\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned}Q_{\varphi}^{\mathrm{C}} &= \int_{-L}^{L}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = -2\alpha\int_{-L}^{L}\rho(s)s^2[\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta]\,\mathrm{d}s\,;\\ Q_{\theta}^{\mathrm{C}} &= \int_{-L}^{L}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle C}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} = 2\alpha\int_{-L}^{L}\rho(s)s^2[\dot{\varphi}\cos\theta\sin\theta]\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

R.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{m_1+m_2}{3}L^2\dot{\varphi}\sin^2\theta\Big] &= \frac{\alpha^2RL}{2}(m_1-m_2)\sin\varphi\sin\theta\\ &\quad -\frac{\alpha L^2}{3}(m_1+m_2)\sin(2\theta)\,,\\ \frac{L^2}{6}(m_1+m_2)[2\ddot{\theta}-\dot{\varphi}^2\sin(2\theta)] &= \frac{\alpha^2RL}{2}(m_2-m_1)\cos\varphi\cos\theta\\ &\quad +(m_1+m_2)\sin(2\theta)\Big[\frac{\alpha^2L^2}{6}+\frac{\alpha L^2}{3}\dot{\varphi}\Big]\,.\end{aligned}$$

56. [12/7/2016 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$\mathit{\Pi}: \quad -x_1 \cos(\alpha t) + x_2 \sin(\alpha t) = 0\,.$$

Inoltre l'estremo A deve appartenere alla curva

$$y_3 = \lambda y_1^c\,, \quad y_1 > 0\,; \qquad y_2 = 0\,.$$

Qui λ, $c > 0$ sono parametri assegnati e $\mathcal{S} = (O, (y_h))$ è un sistema di riferimento mobile tale che $\mathit{\Pi} = \{y_2 = 0\}$, e gli assi x_3 e y_3 coincidono.
Sull'asta agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.
Si scrivano le equazioni di moto.
Soluzione
L'asta ha due gradi di libertà. Scegliamo come coordinate lagrangiane $y \in (0, +\infty)$ e $\varphi \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ tali che se

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

è la terna associata a $\mathcal{S}$, allora

$$\overrightarrow{OA} = y\boldsymbol{u}_1 + \lambda y^c \boldsymbol{u}_3\,, \qquad \overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{u}_3)\,.$$

Dunque in $\mathcal{S}$, se G denota il centro di massa di AB,

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(G)|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Inoltre

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(G) = \dot{y}\boldsymbol{u}_1 + \lambda c\dot{y}y^{c-1}\boldsymbol{u}_3 + L\dot{\varphi}(-\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{u}_3)\,,$$

e

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2\,.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
T_{\mathcal{S}} &= \frac{1}{2}M\{(\dot{y} - L\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (\lambda c\dot{y}y^{c-1} + L\dot{\varphi}\cos\varphi)^2\} + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2\\
&= \frac{1}{2}M\dot{y}^2(1 + \lambda^2c^2y^{2c-2}) + ML\dot{\varphi}\dot{y}(\lambda c y^{c-1}\cos\varphi - \sin\varphi) + \frac{1}{2}(ML^2 + I)\dot{\varphi}^2\,.
\end{aligned}$$

In $\mathcal{S}$ sull'asta agiscono il peso e le forze fittizie. La forza di Coriolis comunque ha componenti lagrangiane nulle in questo caso, come è noto. Quella di trascinamento vale su AB

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = \frac{M}{2L}\alpha^2 y_1\,.$$

Dunque essa ammette potenziale

$$\mathrm{d}U_{\scriptscriptstyle T} = \frac{M}{4L}\alpha^2 y_1^2\,,$$

che integrato dà

$$U_T = \int_0^{2L} \frac{M}{2L}\alpha^2 y_1^2 \, \mathrm{d}s = \frac{M}{4L}\alpha^2 \int_0^{2L} (y+s\cos\varphi)^2 \, \mathrm{d}s = M\alpha^2\Big[\frac{1}{2}y^2+Ly\cos\varphi+\frac{2}{3}L^2\cos^2\varphi\Big] .$$

Inoltre la forza peso ha potenziale

$$U_{\mathrm{peso}} = -Mgy_{3G} = -Mg(\lambda y^c + L\sin\varphi) .$$

R.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{y}^2(1+\lambda^2c^2y^{2c-2}) + ML\dot{\varphi}\dot{y}(\lambda c y^{c-1}\cos\varphi - \sin\varphi) + \frac{1}{2}(ML^2+I)\dot{\varphi}^2 + M\alpha^2\Big[\frac{1}{2}y^2 + Ly\cos\varphi + \frac{2}{3}L^2\cos^2\varphi\Big] - Mg(\lambda y^c + L\sin\varphi) .$$

57. [17/01/2017 (ex)I] Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere nel piano mobile $\Pi(t)$ di equazione

$$-x_1\sin(\alpha t) + x_2\cos(\alpha t) = 0 ;$$

qui $\alpha > 0$ è costante.
Sull'asta agiscono le forze

$$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{OA} , \qquad \boldsymbol{F}_{P_0} = -k\overrightarrow{OP_0} ,$$

applicate nei punti indicati, ove

$$\overrightarrow{AP_0} = r\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} .$$

Qui r, $k > 0$ sono costanti assegnate e O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Scrivere la lagrangiana del moto.
SOLUZIONE
L'asta ha tre gradi di libertà; scegliamo le coordinate lagrangiane

$$x, z \in \boldsymbol{R} , \qquad \varphi \in (-\pi, \pi) ,$$

tali che chiamando G il centro di massa dell'asta, si abbia

$$\overrightarrow{OG} = x\boldsymbol{u}_1 + z\boldsymbol{u}_3 ,$$
$$\overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{u}_3) .$$

Qui $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ è il sistema di riferimento mobile (non solidale) dato da

$$\boldsymbol{u}_1 = \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 ,$$
$$\boldsymbol{u}_2 = -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 ,$$
$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3 .$$

Dunque per il generico punto P su AB di ascissa $s \in [-L, L]$ si ha

$$\overrightarrow{OP}(s) = (x + s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_1 + (z + s\sin\varphi)\boldsymbol{u}_3 .$$

Scriviamo le equazioni di moto in $\mathcal{S}$. Dunque

$$T^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(G)|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 ,$$

where $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e $\mathcal{N}$ è una terna solidale con l'asta.
In $\mathcal{S}$ sull'asta agiscono le forze di Coriolis e di trascinamento, oltre a quelle assegnate. La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle in questo caso, come è noto. La forza di trascinamento

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{T} = -\rho\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}) = -\rho\alpha^2\boldsymbol{u}_3 \times [\boldsymbol{u}_3 \times (y_1\boldsymbol{u}_1 + y_3\boldsymbol{u}_3)]& \\ = \frac{M}{2L}\alpha^2 y_1\boldsymbol{u}_1 ;&\end{aligned}$$

qui (y_h) denota le coordinate in $\mathcal{S}$. Il potenziale della forza di trascinamento dunque è

$$\mathrm{d}U_{T} = \frac{M\alpha^2}{4L}y_1^2 .$$

Quindi

$$U_{T} = \int_{-L}^{L} \frac{M\alpha^2}{4L}(x + s\cos\varphi)^2 \,\mathrm{d}s = \frac{M\alpha^2}{2}x^2 + \frac{M\alpha^2}{6}L^2\cos^2\varphi .$$

Infine le forze elastiche hanno potenziale

$$\begin{aligned}U_{\mathrm{el}} &= -\frac{k}{2}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{k}{2}|\overrightarrow{OP_0}|^2 \\ &= -k[x^2 + z^2 + x(r - 2L)\cos\varphi + z(r - 2L)\sin\varphi + L^2 + (r - L)^2] .\end{aligned}$$

R.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{M\alpha^2}{2}x^2 + \frac{M\alpha^2}{6}L^2\cos^2\varphi& \\ - k[x^2 + z^2 + x(r - 2L)\cos\varphi + z(r - 2L)\sin\varphi] .&\end{aligned}$$

58. [17/01/2017 (ex)II] Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere nel piano mobile $\varPi(t)$ di equazione

$$-x_1\sin(\alpha t) + x_2\cos(\alpha t) = 0 ;$$

qui $\alpha > 0$ è costante.
Sull'asta agiscono le forze

$$\boldsymbol{F}_B = k\overrightarrow{OB} , \qquad \boldsymbol{F}_{P_0} = -k\overrightarrow{OP_0} ,$$

applicate nei punti indicati, ove

$$\overrightarrow{AP_0} = r\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\,.$$

Qui r, $k > 0$ sono costanti assegnate e O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Scrivere la lagrangiana del moto.
R.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{M\alpha^2}{2}x^2 + \frac{M\alpha^2}{6}L^2\cos^2\varphi \\ - k[x(r-2L)\cos\varphi + z(r-2L)\sin\varphi]\,.\end{aligned}$$

59. [8/02/2017 (ex)I] Un'asta AB di massa M e lunghezza $2L$ è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1\sin(\alpha t) + x_2\cos(\alpha t) = 0\,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante. Inoltre l'estremo A è vincolato ad appartenere alla circonferenza solidale al piano

$$(y_1 - R)^2 + y_3^2 = R^2\,, \qquad y_2 = 0\,,$$

ove $\mathcal{S} = (O, (y_h))$ è il sistema di riferimento mobile dato da O origine del sistema fisso e base

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

Sull'asta agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.
Si determini il potenziale lagrangiano del moto in $\mathcal{S}$, e si dimostri che l'asta non può avere posizioni di equilibrio relativo in cui è orizzontale.
Soluzione
Vogliamo dunque considerare il moto relativo a $\mathcal{S}$. Nelle equazioni di Lagrange come è noto le forze di Coriolis hanno componente lagrangiana nulla.
Rimangono la forza peso di potenziale

$$\mathrm{d}U_{\mathrm{peso}} = -\frac{M}{2L}gx_{3G}\,\mathrm{d}s = -\frac{M}{2L}gy_{3G}\,\mathrm{d}s\,,$$

e la forza di trascinamento di distribuzione

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_T = -\frac{M}{2L}\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OP})\,\mathrm{d}s = \frac{M}{2L}\alpha^2 y_1\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}s\,,$$

ove si è usato che

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha \boldsymbol{u}_3 \,.$$

Dunque anche la forza di trascinamento ammette potenziale

$$\mathrm{d}U_{\mathrm{T}} = \frac{M}{4L}\alpha^2 y_1^2 \,\mathrm{d}s \,.$$

Introduciamo ora due coordinate lagrangiane φ, $\theta \in (-\pi, \pi)$ tali che denotando con C il centro della circonferenza γ,

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} = R\boldsymbol{u}_1 + R\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{u}_3 \,,$$

e

$$\overrightarrow{AB} = 2L(\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + \sin\theta \boldsymbol{u}_3) \,.$$

Dunque per $P(s)$ punto generico dell'asta e $s \in [0{,}2L]$

$$\overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}(s) = [R(1+\cos\varphi) + s\cos\theta]\boldsymbol{u}_1 + [R\sin\varphi + s\sin\theta]\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Quindi

$$\mathrm{d}U^{\mathrm{L}} = -\frac{M}{2L} g[R\sin\varphi + s\sin\theta] + \frac{M}{4L}\alpha^2 [R(1+\cos\varphi) + s\cos\theta]^2 \,\mathrm{d}s \,,$$

e

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{L}} = \int_{AB} \mathrm{d}U^{\mathrm{L}} &= -Mg[R\sin\varphi + L\sin\theta] \\ &\quad + \frac{M}{2}\alpha^2 [R^2(1+\cos\varphi)^2 + 2RL(1+\cos\varphi)\cos\theta + \frac{4}{3}L^2\cos^2\theta] \,. \end{aligned}$$

B) Derivando in θ si trova

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} = -MgL\cos\theta - M\alpha^2 RL(1+\cos\varphi)\sin\theta - \frac{4}{3}\alpha^2 L^2 \sin\theta\cos\theta \,.$$

Se l'asta è orizzontale allora $\theta \in \{0, \pi\}$. Quindi

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} = -MgL\cos\theta \neq 0 \,.$$

Dunque queste posizioni non possono essere di equilibrio.
R.

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{L}} &= -Mg[R\sin\varphi + L\sin\theta] \\ &\quad + \frac{M}{2}\alpha^2 [R^2(1+\cos\varphi)^2 + 2RL(1+\cos\varphi)\cos\theta + \frac{4}{3}L^2\cos^2\theta] \,. \end{aligned}$$

60. [8/02/2017 (ex)II] Un'asta AB di massa m e lunghezza L è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1\sin(\alpha t) + x_2\cos(\alpha t) = 0 \,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante. Inoltre l'estremo A è vincolato ad appartenere alla circonferenza solidale al piano

$$(y_1 + R)^2 + y_3^2 = R^2 , \qquad y_2 = 0 ,$$

ove $\mathcal{S} = (O, (y_h))$ è il sistema di riferimento mobile dato da O origine del sistema fisso e base

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 . \end{aligned}$$

Sull'asta agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.
Si determini il potenziale lagrangiano del moto in $\mathcal{S}$, e si dimostri che l'asta non può avere posizioni di equilibrio relativo in cui è orizzontale.
R.

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{L}} = {}& -Mg[R\sin\varphi + L\sin\theta] \\ & + \frac{M}{2}\alpha^2[R^2(-1+\cos\varphi)^2 + 2RL(-1+\cos\varphi)\cos\theta + \frac{4}{3}L^2\cos^2\theta] . \end{aligned}$$

61. [06/06/2017 (ex)I] Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e densità variabile data da

$$\rho(P) = \rho_0 |\overrightarrow{AP}| ,$$

con $\rho_0 > 0$ costante, è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0 ,$$

ove $\alpha > 0$ è una costante assegnata.
Si scriva la lagrangiana del moto.
Soluzione
Introduciamo il sistema mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ove O è l'origine del sistema fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 . \end{aligned}$$

Per scrivere le equazioni di Lagrange in $\mathcal{S}$ introduciamo le coordinate lagrangiane x, $z \in \boldsymbol{R}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_3) , \quad \overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{u}_1 + z\boldsymbol{u}_3 .$$

Dunque per ogni $P(s)$ sull'asta, con $s = |\overrightarrow{AP}|$, si ha

$$\overrightarrow{OP} = (x + s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_1 + (z + s\sin\varphi)\boldsymbol{u}_3 .$$

Pertanto

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(s) = (\dot{x} - s\dot{\varphi}\sin\varphi)\boldsymbol{u}_1 + (\dot{z} + s\dot{\varphi}\cos\varphi)\boldsymbol{u}_3 ,$$

e

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{S}} &= \frac{1}{2}\int_0^{2L} \rho_0 s(\dot{x}^2 + s^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 - 2s\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + 2s\dot{z}\dot{\varphi}\cos\varphi)\,\mathrm{d}s \\ &= \rho_0\Big\{L^2(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + 2L^4\dot{\varphi}^2 - \frac{8}{3}L^3\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{8}{3}L^3\dot{z}\dot{\varphi}\cos\varphi\Big\} . \end{aligned}$$

In $\mathcal{S}$ sull'asta agiscono solo le forze di trascinamento e di Coriolis; la seconda però ha componenti lagrangiane nulle come è noto, in questo caso. La densità della forza di trascinamento è

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = \rho(P)\alpha^2\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1 = \rho_0 s\alpha^2(x + s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_1 .$$

Questa ammette la densità di potenziale

$$\mathrm{d}U_{\scriptscriptstyle T} = \frac{1}{2}\rho_0 s\alpha^2(x + s\cos\varphi)^2 .$$

Quindi

$$U_{\scriptscriptstyle T} = \frac{1}{2}\rho_0\alpha^2\int_0^{2L} s(x + s\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}s = \rho_0\alpha^2\Big\{L^2x^2 + \frac{4}{3}L^3x + 2L^4(\cos\varphi)^4\Big\} .$$

R.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \rho_0\Big\{L^2(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + 2L^4\dot{\varphi}^2 - \frac{8}{3}L^3\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{8}{3}L^3\dot{z}\dot{\varphi}\cos\varphi\Big\} \\ + \rho_0\alpha^2\Big\{L^2x^2 + \frac{4}{3}L^3x + 2L^4(\cos\varphi)^4\Big\} . \end{aligned}$$

62. [23/07/2018 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata al piano ruotante

$$x_1\sin(\alpha t) - x_2\cos(\alpha t) = 0 .$$

Su di essa agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e una forza elastica applicata in A

$$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{OA} ,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso $(O,(x_i))$. Qui α, k sono costanti positive assegnate.
Scrivere la lagrangiana del sistema.
Soluzione
A) Introduciamo la terna solidale con il piano ruotante

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 , \end{aligned}$$

e le coordinate lagrangiane $(x, z) \in \boldsymbol{R}^2$ *e* $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *tali che per* $P \in AB$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \,, \quad \overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{u}_1 + z\boldsymbol{u}_3 \,, \quad \overrightarrow{AP} = s\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + s\sin\varphi\boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $s = |\overrightarrow{AP}| \in (0{,}2L)$. *Questa terna servirà solo per la parametrizzazione lagrangiana, perché deriveremo la funzione lagrangiana nel sistema fisso.*
La velocità del generico punto $P(s)$ *dell'asta è data da*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(s) &= \dot{x}\boldsymbol{u}_1 + \dot{z}\boldsymbol{u}_3 + x\dot{\boldsymbol{u}}_1 + z\dot{\boldsymbol{u}}_3 \\ &\quad - s\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + s\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{u}_3 + s\cos\varphi\dot{\boldsymbol{u}}_1 + s\sin\varphi\dot{\boldsymbol{u}}_3 \\ &= (\dot{x} - s\dot{\varphi}\sin\varphi)\boldsymbol{u}_1 + (\alpha x + \alpha s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_2 + (\dot{z} + s\dot{\varphi}\cos\varphi)\boldsymbol{u}_3 \,.\end{aligned}$$

Dunque

$$|\boldsymbol{v}(s)|^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 + s^2\dot{\varphi}^2 + 2s\dot{\varphi}(\dot{z}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi) + (\alpha x + \alpha s\cos\varphi)^2 \,,$$

e

$$\begin{aligned}T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\int_0^{2L} \frac{M}{2L}|\boldsymbol{v}(s)|^2 \,\mathrm{d}s = \frac{M}{2}\Big\{&\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + \frac{4}{3}L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{\varphi}\dot{z}\cos\varphi - 2L\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi \\ &+ \alpha^2x^2 + 2L\alpha^2x\cos\varphi + \frac{4}{3}L^2\alpha^2\cos^2\varphi\Big\} \,.\end{aligned}$$

Le forze sono il peso e la forza elastica, entrambe conservative di potenziale complessivo

$$U = -Mgx_{3C} - \frac{k}{2}|\overrightarrow{OA}|^2 \,,$$

ove C *è il centro dell'asta. In coordinate lagrangiane*

$$U^{\mathrm{L}} = -Mg(z + L\sin\varphi) - \frac{k}{2}(x^2 + z^2) \,.$$

R.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{M}{2}\Big\{&\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + \frac{4}{3}L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{\varphi}\dot{z}\cos\varphi - 2L\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi \\ &+ \alpha^2x^2 + 2L\alpha^2x\cos\varphi + \frac{4}{3}L^2\alpha^2\cos^2\varphi\Big\} - Mg(z + L\sin\varphi) - \frac{k}{2}(x^2 + z^2) \,.\end{aligned}$$

63. [15/01/2019 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato al cilindro mobile

$$y_1^2 + y_2^2 = R^2 \,,$$

ove le (y_i) sono le coordinate nel sistema $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, con $\boldsymbol{X}_O(t) = L\boldsymbol{u}_1(t)$, e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.\end{aligned}$$

Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP}\,.$$

Qui L, R, α, k sono costanti positive assegnate.
Scegliere come coordinate lagrangiane $\varphi \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ e $z \in \boldsymbol{R}$ tali che

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{u}_2 + z\boldsymbol{u}_3\,.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange e determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$.

Soluzione

A) Scriviamo la lagrangiana nel sistema fisso. Si ha subito

$$U^{\mathrm{L}}(z,\varphi) = -\frac{k}{2}(R^2 + z^2)\,.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_P &= \boldsymbol{v}_O + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OP}\\ &= L\dot{\boldsymbol{u}}_1 + R\dot\varphi(-\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{u}_2) + R(\cos\varphi\dot{\boldsymbol{u}}_1 + \sin\varphi\dot{\boldsymbol{u}}_2) + \dot z\boldsymbol{u}_3\\ &= L\alpha\boldsymbol{u}_2 + R\dot\varphi(-\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{u}_2) + R\alpha(\cos\varphi\boldsymbol{u}_2 - \sin\varphi\boldsymbol{u}_1) + \dot z\boldsymbol{u}_3\,.\end{aligned}$$

Pertanto

$$|\boldsymbol{v}_P|^2 = R^2(\dot\varphi + \alpha)^2 + L^2\alpha^2 + 2LR\alpha(\dot\varphi + \alpha)\cos\varphi + \dot z^2\,.$$

Dunque si può scrivere

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\{R^2(\dot\varphi + \alpha)^2 + L^2\alpha^2 + 2LR\alpha(\dot\varphi + \alpha)\cos\varphi + \dot z^2\} - \frac{1}{2}kz^2\,.$$

Le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigl\{m[R^2(\dot\varphi + \alpha) + LR\alpha\cos\varphi]\bigr\} + mLR\alpha(\dot\varphi + \alpha)\sin\varphi = 0\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{m\dot z\} + kz = 0\,.\end{aligned}$$

B) Ricaviamo le equazioni di Lagrange in $\mathcal{S}$. In questo caso non usiamo la lagrangiana, perché in genere $\boldsymbol{F}_C$ non è conservativa in senso lagrangiano. Invece le componenti lagrangiane di $\boldsymbol{F}$ possono essere calcolate come le derivate parziali del potenziale U^{L} trovato sopra.
Iniziamo a calcolare $\boldsymbol{F}_C$: troviamo prima

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = R\dot\varphi(-\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{u}_2) + \dot z\boldsymbol{u}_3\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{F}_C = -m2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = 2mR\alpha\dot\varphi(\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{u}_2)\,.$$

Poiché

$$\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = -R\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + R\cos\varphi\boldsymbol{u}_2\,,\qquad \frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial z} = \boldsymbol{u}_3\,,$$

si ha

$$Q_{C\varphi} = \boldsymbol{F}_C\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = 0\,,\qquad Q_{Cz} = \boldsymbol{F}_C\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial z} = 0\,.$$

Dunque di fatto $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$ ha componenti lagrangiane nulle.
Consideriamo ora $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -m[\boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP})] = m\alpha^2\{(L + R\cos\varphi)\boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{u}_2\}\,.$$

Dunque

$$Q_{\mathrm{T}\varphi} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = -m\alpha^2 LR\sin\varphi\,, \qquad Q_{\mathrm{T}z} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial z} = 0\,.$$

Infine

$$T^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}|^2 = \frac{1}{2}m(R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2)\,.$$

Dunque le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot\varphi] &= -mLR\alpha^2\sin\varphi\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m\dot z] &= -kz\,,\end{aligned}$$

che sono facilmente riducibili a quelle trovate nella prima parte.
C) Per trovare le posizioni di equilibrio relativo, osserviamo che le componenti di $\overrightarrow{OP}$ in $(\boldsymbol{u}_h)$ sono costanti se e solo se lo sono le coordinate lagrangiane. Dunque basterà imporre che le soluzioni delle equazioni di Lagrange siano costanti, il che dà subito

$$\varphi = 0, \pi\,, \qquad z = 0\,.$$

R.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot\varphi] &= -mLR\alpha^2\sin\varphi\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m\dot z] &= -kz\,.\end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio relativo sono date da $(\varphi, z) = (0{,}0)$ e $(\varphi, z) = (\pi{,}0)$.

64. [15/01/2019 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato al cilindro mobile

$$y_1^2 + y_2^2 = L^2\,,$$

ove le (y_i) sono le coordinate nel sistema $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, con $\boldsymbol{X}_O(t) = R\boldsymbol{u}_2(t)$, e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{OP}\,.$$

Qui L, R, α, k sono costanti positive assegnate.

Scegliere come coordinate lagrangiane $\varphi \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ e $z \in \boldsymbol{R}$ tali che

$$\overrightarrow{OP} = L\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + L\sin\varphi \boldsymbol{u}_2 + z\boldsymbol{u}_3 .$$

Scrivere le equazioni di Lagrange e determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$.

65. [11/02/2019 (ex)I] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 .
\end{aligned}$$

Denotiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$ e con γ la circonferenza solidale a $\mathcal{S}$

$$(y_1 - c)^2 + y_3^2 = R^2 , \qquad y_2 = 0 .$$

Un punto materiale P di massa m è vincolato a γ, ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda y_3 \boldsymbol{T} ,$$

ove $\boldsymbol{T}$ è il versore tangente a γ. Qui α, c, R, λ sono costanti positive assegnate.
Scrivere le equazioni di Lagrange di P.
Soluzione
Usiamo la coordinata lagrangiana $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che, se C è il centro di γ, si ha

$$\overrightarrow{CP} = R\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{u}_3 .$$

Dunque

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} m R^2 \dot\varphi^2 .$$

Troviamo poi le componenti lagrangiane delle forze. Si ha

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \overrightarrow{CP}}{\partial \varphi} = -R\sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + R\cos\varphi \boldsymbol{u}_3 .$$

D'altronde

$$\boldsymbol{T} = -\sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{u}_3 ,$$

cosicché

$$\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = \lambda R^2 \sin\varphi .$$

La forza di Coriolis come è noto in questo caso ha componenti lagrangiane nulle.
La forza di trascinamento vale

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}) = m\alpha^2 (c + R\cos\varphi)\boldsymbol{u}_1 ,$$

per cui

$$\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\scriptscriptstyle L}}{\partial \varphi} = -m\alpha^2 R(c + R\cos\varphi)\sin\varphi \,.$$

L'equazione di Lagrange perciò è

$$mR^2\ddot{\varphi} = \lambda R^2 \sin\varphi - m\alpha^2 R(c + R\cos\varphi)\sin\varphi \,.$$

R.

$$mR^2\ddot{\varphi} = \lambda R \sin\varphi - m\alpha^2 R(c + R\cos\varphi)\sin\varphi \,.$$

66. [11/02/2019 (ex)I] Si consideri l'elica γ data da

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (R\cos(\alpha s)\,, R\sin(\alpha s)\,, hs)\,,$$

con R, α, $h > 0$ assegnati in modo che $s \in \boldsymbol{R}$ sia l'ascissa curvilinea.
Si consideri poi il sistema $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$, ove $\mathcal{M} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca di γ e O è il punto dato da

$$\boldsymbol{X}_O(t) = \boldsymbol{\psi}(s_O(t))\,,$$

con $s_O \in C^2(\boldsymbol{R})$ assegnata.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a stare sull'asse coordinato di $\mathcal{S}$ parallelo a $\boldsymbol{T}$.
Scegliere come coordinata lagrangiana per P la significativa coordinata cartesiana in $\mathcal{S}$ e calcolare la relativa componente lagrangiana della forza di trascinamento per P in $\mathcal{S}$.
Si ricordi che

$$\begin{gathered}\boldsymbol{T} = (-R\alpha\sin(\alpha s)\,, R\alpha\cos(\alpha s)\,, h)\,, \quad \boldsymbol{N} = -(\cos(\alpha s)\,, \sin(\alpha s)\,, 0)\,, \\ \boldsymbol{B} = (h\sin(\alpha s)\,, -h\cos(\alpha s)\,, R\alpha)\,, \quad k(s) = R\alpha^2\,, \quad \tau(s) = -\alpha h\,.\end{gathered}$$

Soluzione

Scegliamo come coordinata lagrangiana $x \in \boldsymbol{R}$ tale che

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{T}\,,$$

cosicché

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\scriptscriptstyle L}}{\partial x} = \boldsymbol{T}\,.$$

Cominciamo a scrivere la forza di trascinamento $\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T}$ in $\mathcal{S}$:

$$\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = -m[\boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP})]\,.$$

In effetti saremo interessati solo alla componente lagrangiana $\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} \cdot \boldsymbol{T}$.
Iniziamo a scrivere, come noto,

$$\boldsymbol{a}_O = \ddot{s}_O\boldsymbol{T} + k\dot{s}_O^2\boldsymbol{N}\,.$$

Ricordiamo poi la nota formula

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{s}_O[-\tau \boldsymbol{T} + k\boldsymbol{B}] .$$

Dunque

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \ddot{s}_O[-\tau \boldsymbol{T} + k\boldsymbol{B}] + \dot{s}_O[-\tau(k\boldsymbol{N})\dot{s}_O + k(\tau\boldsymbol{N})\dot{s}_O] \\ &= \ddot{s}_O[-\tau \boldsymbol{T} + k\boldsymbol{B}] .\end{aligned}$$

Pertanto

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{OP} = \ddot{s}_O k x \boldsymbol{N} .$$

Infine calcoliamo

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}) = -\dot{s}_O^2 k x(\tau \boldsymbol{B} + k\boldsymbol{T}) .$$

Dunque raccogliendo il materiale precedente

$$\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} \cdot \boldsymbol{T} = -m(\ddot{s}_O - k^2 \dot{s}_O^2 x) .$$

R.

$$\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} \cdot \boldsymbol{T} = -m(\ddot{s}_O - k^2 \dot{s}_O^2 x) .$$

67. [11/02/2019 (ex)II] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 .\end{aligned}$$

Denotiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$ e con γ la circonferenza solidale a $\mathcal{S}$

$$(y_1 + c)^2 + y_3^2 = R^2 , \qquad y_2 = 0 .$$

Un punto materiale P di massa m è vincolato a γ, ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda y_1 \boldsymbol{T} ,$$

ove $\boldsymbol{T}$ è il versore tangente a γ. Qui α, c, R, λ sono costanti positive assegnate.
Scrivere le equazioni di Lagrange di P.
R.

$$mR^2\ddot{\varphi} = \lambda R^2(-c + R\cos\varphi) - m\alpha^2 R(-c + R\cos\varphi)\sin\varphi .$$

68. [11/02/2019 (ex)II] Si consideri l'elica γ data da

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (R\cos(\alpha s)\, , R\sin(\alpha s)\, , hs) ,$$

con R, α, $h > 0$ assegnati in modo che $s \in \boldsymbol{R}$ sia l'ascissa curvilinea.
Si consideri poi il sistema $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$, ove $\mathcal{M} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca di γ e O è il punto dato da

$$\boldsymbol{X}_O(t) = \boldsymbol{\psi}(s_O(t))\,,$$

con $s_O \in C^2(\boldsymbol{R})$ assegnata.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a stare sull'asse coordinato di $\mathcal{S}$ parallelo a $\boldsymbol{N}$.
Scegliere come coordinata lagrangiana per P la significativa coordinata cartesiana in $\mathcal{S}$ e calcolare la relativa componente lagrangiana della forza di trascinamento per P in $\mathcal{S}$.
Si ricordi che

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= (-R\alpha\sin(\alpha s)\,, R\alpha\cos(\alpha s)\,, h)\,, \quad \boldsymbol{N} = -(\cos(\alpha s)\,, \sin(\alpha s)\,, 0)\,,\\ \boldsymbol{B} &= (h\sin(\alpha s)\,, -h\cos(\alpha s)\,, R\alpha)\,, \quad k(s) = R\alpha^2\,, \quad \tau(s) = -\alpha h\,.\end{aligned}$$

R.

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{N} = -m(k\dot{s}_O^2 - (k^2 + \tau^2)\dot{s}_O^2 x)\,.$$

69. [09/01/2020 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato al cilindro mobile di equazione

$$y_1^2 + y_3^2 = R^2\,,$$

ove (y_1, y_2, y_3) sono le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante.
Sul punto agisce il peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange.

Soluzione
A) Scegliamo la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(y, \varphi, t) = R\cos\varphi\boldsymbol{u}_1(t) + y\boldsymbol{u}_2(t) + R\sin\varphi\boldsymbol{u}_3(t)\,,$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *e* $y \in \boldsymbol{R}$.
Procediamo nel sistema mobile $\mathcal{S}$. *Quindi*

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \dot{y}\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{u}_3\,,$$

e

$$T^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2}(R^2\dot\varphi^2 + \dot y^2)\,.$$

Le forze che agiscono in $\mathcal{S}$ sono

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\text{peso}} &= -mg\boldsymbol{u}_3\,,\\
\boldsymbol{F}_{T} &= -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}) = m\alpha^2\left[\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}\right]_{\perp} = m\alpha^2(R\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2)\,,\\
\boldsymbol{F}_{C} &= -m2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = 2m\alpha(\dot y\boldsymbol{u}_1 + R\dot\varphi\sin\varphi\boldsymbol{u}_2)\,.
\end{aligned}$$

Dunque con un calcolo diretto si trovano le componenti lagrangiane delle forze:

$$Q_y = (\boldsymbol{F}_{\text{peso}} + \boldsymbol{F}_{T} + \boldsymbol{F}_{C})\cdot\boldsymbol{u}_2 = m\alpha^2 y + 2m\alpha R\dot\varphi\sin\varphi\,,$$

e

$$\begin{aligned}
Q_\varphi &= (\boldsymbol{F}_{\text{peso}} + \boldsymbol{F}_{T} + \boldsymbol{F}_{C})\cdot(-R\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + R\cos\varphi\boldsymbol{u}_3)\\
&= -mgR\cos\varphi - m\alpha^2R^2\cos\varphi\sin\varphi - 2m\alpha R\dot y\sin\varphi\,.
\end{aligned}$$

Si possono così scrivere subito le equazioni di Lagrange:

$$\begin{aligned}
mR^2\ddot\varphi &= -mgR\cos\varphi - m\alpha^2R^2\cos\varphi\sin\varphi - 2m\alpha R\dot y\sin\varphi\,,\\
m\ddot y &= m\alpha^2 y + 2m\alpha R\dot\varphi\sin\varphi\,.
\end{aligned}$$

R.

$$\begin{aligned}
mR^2\ddot\varphi &= -mgR\cos\varphi - m\alpha^2R^2\cos\varphi\sin\varphi - 2m\alpha R\dot y\sin\varphi\,,\\
m\ddot y &= m\alpha^2 y + 2m\alpha R\dot\varphi\sin\varphi\,.
\end{aligned}$$

70. [09/01/2020 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato al cilindro mobile di equazione

$$y_2^2 + y_3^2 = R^2\,,$$

ove (y_1, y_2, y_3) sono le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante.
Sul punto agisce la forza costante $k\boldsymbol{e}_3$, $k \neq 0$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange.

R.

$$
\begin{aligned}
mR^2\ddot{\varphi} &= kR\cos\varphi - m\alpha^2R^2\cos\varphi\sin\varphi - 2m\alpha R\dot{y}\sin\varphi\,, \\
m\ddot{y} &= m\alpha^2 y + 2m\alpha R\dot{\varphi}\sin\varphi\,.
\end{aligned}
$$

71. [13/01/2020 (ex)I] Si consideri il sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}
$$

e $\boldsymbol{X}_O$ è l'origine del sistema fisso. Le coordinate in $\mathcal{S}$ vengono denotate con (y_1, y_2, y_3).
Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante $y_2 = 0$; inoltre il centro di massa dell'asta è vincolato ad appartenere alla curva

$$
y_3 = \beta y_1^p + \gamma\,, \qquad y_2 = 0\,, \qquad y_1 \in \boldsymbol{R}\,.
$$

Qui α, β, $\gamma > 0$ e p è un intero positivo.
Sull'estremo A dell'asta è applicata la forza

$$
\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{AA'}\,,
$$

ove A' è la proiezione di A sull'asse y_1 e $k > 0$.

- Scrivere la lagrangiana dell'asta.
- Nel caso $p = 2$, trovare tutte le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ in cui AB si mantiene parallela a $\boldsymbol{u}_3$.

R.

$$
\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2\{1+\beta^2p^2x^{2p-2}\}+\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2+\frac{m\alpha^2}{2}\Big(x^2+\frac{L^2}{3}(\cos\varphi)^2\Big)+\frac{k}{2}(\beta x^p+\gamma-L\sin\varphi)^2\,.
$$

Posizioni di equilibrio:

$$
\varphi = \frac{\pi}{2}: \qquad x = 0\,, \quad \text{e} \quad x = \pm\sqrt{\frac{-m\alpha^2 - 2k(\gamma - L)\beta}{2k\beta^2}} \qquad \textit{se} \quad -m\alpha^2 - 2k(\gamma - L)\beta > 0\,;
$$

$$
\varphi = -\frac{\pi}{2}: \qquad x = 0\,.
$$

72. [13/01/2020 (ex)II] Si consideri il sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

e $\boldsymbol{X}_O$ è l'origine del sistema fisso. Le coordinate in $\mathcal{S}$ vengono denotate con (y_1, y_2, y_3).
Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante $y_2 = 0$; inoltre il centro di massa dell'asta è vincolato ad appartenere alla curva

$$y_3 = \beta y_1^p\,, \qquad y_2 = 0\,, \qquad y_1 \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui α, $\beta > 0$ e p è un intero positivo.
Sull'estremo B dell'asta è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_B = k\overrightarrow{BB'}\,,$$

ove B' è la proiezione di B sull'asse y_1 e $k > 0$.

- Scrivere la lagrangiana dell'asta.
- Nel caso $p = 2$, trovare tutte le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ in cui AB si mantiene parallela a $\boldsymbol{u}_3$.

SOLUZIONE
A) L'asta ha 2 gradi di libertà. Scegliamo come coordinate lagrangiane l'ascissa $x = y_1 \in \boldsymbol{R}$ di G e l'angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ in modo che la parametrizzazione del generico punto P dell'asta sia

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(z, \varphi, t, s) = x\boldsymbol{u}_1 + \beta x^p \boldsymbol{u}_3 + s\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + s\sin\varphi \boldsymbol{u}_3\,,$$

con $s \in [-L, L]$ ascissa su AB misurata a partire da G.
Procediamo nel sistema mobile $\mathcal{S}$. L'energia cinetica, ottenuta mediante il teorema di König, è data da

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}^G|^2 + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 = \frac{m}{2}\dot x^2\{1 + \beta^2 p^2 x^{2p-2}\} + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2\,.$$

Oltre a $\boldsymbol{F}_B$ sull'asta agiscono anche le forze di Coriolis e di trascinamento. Sappiamo però che la prima ha in questo caso componenti lagrangiane nulle. La distribuzione della seconda è

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -\frac{m}{2L}\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s = \frac{m}{2L}\alpha^2 y_1 \boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}s\,,$$

che risulta conservativa con potenziale

$$\mathrm{d}U_{\mathrm{T}} = \frac{m}{2L}\alpha^2 \frac{y_1^2}{2}\,\mathrm{d}s\,.$$

Il potenziale di trascinamento dunque è

$$U_{\mathrm{T}} = \int_{AB} \mathrm{d}U_{\mathrm{T}} = \frac{m\alpha^2}{4L} \int_{-L}^{L} (x + s\cos\varphi)^2 \,\mathrm{d}s = \frac{m\alpha^2}{2} \Big(x^2 + \frac{L^2}{3} (\cos\varphi)^2 \Big) \,.$$

La $\boldsymbol{F}_B$ si scrive come

$$\boldsymbol{F}_B = k\overrightarrow{BB'} = -ky_{3B}\boldsymbol{u}_3 \,,$$

con potenziale

$$U_B = -\frac{k}{2} y_{3B}^2 \,.$$

Dunque è possibile scrivere la lagrangiana come

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2\{1+\beta^2 p^2 x^{2p-2}\} + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{m\alpha^2}{2}\Big(x^2 + \frac{L^2}{3}(\cos\varphi)^2\Big) - \frac{k}{2}(\beta x^p + L\sin\varphi)^2 \,.$$

B) Le posizioni di equilibrio sono date dai punti critici di U^{L}, ossia sono le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} &= m\alpha^2 x - 2k\beta x(\beta x^2 + L\sin\varphi) = 0 \,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= -\frac{m\alpha^2 L^2}{3} \sin\varphi\cos\varphi - kL(\beta x^2 + L\sin\varphi)\cos\varphi = 0 \,. \end{aligned}$$

Se l'asta è parallela a $\boldsymbol{u}_3$, si ha $\varphi = \pm\pi/2$, quindi $\cos\varphi = 0$ e la seconda equazione è soddisfatta.
Se $\varphi = \pi/2$ la prima equazione diviene

$$(m\alpha^2 - 2kL\beta)x - 2k\beta^2 x^3 = 0 \,.$$

Questa ha soluzione nulla $x = 0$ e le soluzioni

$$x = \pm\sqrt{\frac{m\alpha^2 - 2kL\beta}{2k\beta^2}} \,,$$

se $m\alpha^2 - 2kL\beta > 0$.
Se $\varphi = -\pi/2$ la prima equazione diviene

$$(m\alpha^2 + 2kL\beta)x - 2k\beta^2 x^3 = 0 \,.$$

Questa ha soluzione nulla $x = 0$ e le soluzioni

$$x = \pm\sqrt{\frac{m\alpha^2 + 2kL\beta}{2k\beta^2}} \,.$$

R.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2\{1+\beta^2 p^2 x^{2p-2}\} + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{m\alpha^2}{2}\Big(x^2 + \frac{L^2}{3}(\cos\varphi)^2\Big) - \frac{k}{2}(\beta x^p + L\sin\varphi)^2 \,.$$

Posizioni di equilibrio:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} : \qquad x = 0 \,, \quad e \quad x = \pm\sqrt{\frac{m\alpha^2 - 2kL\beta}{2k\beta^2}} \quad se \quad m\alpha^2 - 2kL\beta > 0 \,;$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} : \qquad x = 0 \,, \quad oppure \quad x = \pm\sqrt{\frac{m\alpha^2 + 2kL\beta}{2k\beta^2}} \,.$$

73. [00/12/2022 (hw)I]
Il punto materiale $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$ è vincolato alla retta mobile r_1 e il punto materiale $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ è vincolato alla retta mobile r_2, ove r_1, r_2 sono date da

$$\begin{aligned} r_1 : \qquad & \lambda_2 = 0 \,, \quad \lambda_3 = 0 \,; \\ r_2 : \qquad & \lambda_1 = 0 \,, \quad \lambda_3 = H \,. \end{aligned}$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Su ciascun punto $\boldsymbol{X}_i$ agisce la forza elastica $\boldsymbol{F}_i$ data da

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) \,.$$

Qui α, H, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinate lagrangiane $(s_1, s_2) \in \boldsymbol{R}^2$ con

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(s_1, s_2, t) = s_1 \boldsymbol{u}_1(t) \,, \qquad \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(s_1, s_2, t) = s_2 \boldsymbol{u}_2(t) + H \boldsymbol{u}_3(t) \,.$$

1. Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2. Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3. Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:
$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = -\frac{k}{2}(s_1^2 + s_2^2 + H^2) + \frac{m_1}{2}\alpha^2 s_1^2 + \frac{m_2}{2}\alpha^2 s_2^2 \,.$$
4. Si assuma $k \neq m_1\alpha^2$, $m_2\alpha^2$. A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.

5. Si assuma $k > m_1\alpha^2$, $m_2\alpha^2$. Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}| + |\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6. Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X}_i = \sum_{h=1}^{3} z_{3(i-1)+h}\boldsymbol{e}_h\,, \qquad i = 1\,,2\,.$$

Soluzione

1) Si ha

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{L}} &= \frac{m_1}{2}|\dot{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{L}}{}_1|^2 + \frac{m_2}{2}|\dot{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{L}}{}_2|^2 \\ &= \frac{m_1}{2}|\dot{s}_1\boldsymbol{u}_1 + s_1\alpha\boldsymbol{u}_2|^2 + \frac{m_2}{2}|\dot{s}_2\boldsymbol{u}_2 - s_2\alpha\boldsymbol{u}_1|^2 \\ &= \frac{m_1}{2}(\dot{s}_1^2 + \alpha^2 s_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{s}_2^2 + \alpha^2 s_2^2)\,. \end{aligned}$$

Infatti $\dot{\boldsymbol{u}}_1 = \alpha\boldsymbol{u}_2$, $\dot{\boldsymbol{u}}_2 = -\alpha\boldsymbol{u}_1$.

2) Si ha

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}i} = \dot{s}_i\boldsymbol{u}_i\,, \qquad i = 1\,,2\,.$$

Quindi

$$T_{\mathcal{S}}^{\mathrm{L}} = \frac{m_1}{2}\dot{s}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{s}_2^2\,.$$

3) In $\mathcal{S}$ agiscono oltre alle $\boldsymbol{F}_i$ anche $\boldsymbol{F}_{Ti}$, $\boldsymbol{F}_{Ci}$. Poiché il campo di forza di trascinamento è

$$\boldsymbol{F}_T = m\alpha^2(\lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2)\,,$$

si ha

$$U_T^{\mathrm{L}} = \frac{m\alpha^2}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\,.$$

Resta da considerare la forza di Coriolis. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{C1} &= -2m_1\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}1} = -2m_1\alpha\dot{s}_1\boldsymbol{u}_2\,; \\ \boldsymbol{F}_{C2} &= -2m_2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}2} = 2m_2\alpha\dot{s}_2\boldsymbol{u}_1\,. \end{aligned}$$

Le componenti lagrangiane sono nulle:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{C1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}}{\partial s_1} &= -2m_1\alpha\dot{s}_1\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0\,, \\ \boldsymbol{F}_{C2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}}{\partial s_2} &= 2m_2\alpha\dot{s}_2\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0\,, \end{aligned}$$

per cui le forze di Coriolis, o meglio le loro componenti lagrangiane, hanno potenziale lagrangiano nullo. Pertanto

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{S}}^{\mathrm{L}} &= -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} - \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}|^2 + \frac{m_1}{2}\alpha^2(\lambda_{1\boldsymbol{X}_1}^{\mathrm{L}})^2 + \frac{m_2}{2}\alpha^2(\lambda_{2\boldsymbol{X}_2}^{\mathrm{L}})^2 \\ &= -\frac{k}{2}(s_1^2 + s_2^2 + H^2) + \frac{m_1}{2}\alpha^2 s_1^2 + \frac{m_2}{2}\alpha^2 s_2^2\,. \end{aligned}$$

4) Poiché in $\mathcal{S}$ i vincoli sono fissi, le posizioni di equilibrio relativo sono date dal sistema del gradiente

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}}{\partial s_1} = (m_1\alpha^2 - k)s_1 = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}}{\partial s_2} = (m_2\alpha^2 - k)s_2 = 0\,.$$

Nelle ipotesi fatte che $k \neq m_1\alpha^2$, $m_2\alpha^2$, segue che l'unica posizione di equilibrio è $(s_1, s_2) = 0$; in essa si ha l'hessiana

$$D^2 U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} m_1\alpha^2 - k & 0 \\ 0 & m_2\alpha^2 - k \end{pmatrix}\,.$$

Se $k > m_1\alpha^2$, $m_2\alpha^2$ la matrice è definita negativa, quindi il punto è di massimo isolato per $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ e quindi di equilibrio relativo stabile. In tutti gli altri casi la matrice è indefinita o definita positiva, perciò il punto è di equilibrio instabile.
5) In $\mathcal{S}$ i vincoli sono fissi e le forze conservative. Quindi si ha per la conservazione dell'energia

$$T^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} - U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{m_1}{2}\dot{s}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{s}_2^2 - U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = E\,,$$

e perciò

$$-U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} \leq E\,,$$

ossia lungo ciascun moto

$$(k - m_1\alpha^2)s_1^2 + (k - m_2\alpha^2)s_2^2 \leq \text{ costante.}$$

Pertanto s_1 e s_2 sono limitate su ciascun moto.
6) Imponiamo i vincoli su $\boldsymbol{X}_1$; $\lambda_2 = 0$ equivale a $(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_O)\cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$ ossia (essendo $\boldsymbol{X}_O = 0$) a

$$\lambda_2 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h = -z_1 \sin(\alpha t) + z_2 \cos(\alpha t) = 0\,.$$

Invece $\lambda_3 = 0$ equivale a

$$\lambda_3 = \boldsymbol{u}_3 \cdot \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h = z_3 = 0\,.$$

Passiamo ai vincoli su $\boldsymbol{X}_2$; analogamente al caso di $\boldsymbol{X}_1$ otteniamo che il vincolo $\lambda_1 = 0$ equivale a

$$\lambda_1 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \sum_{h=1}^{3} z_{3+h} \boldsymbol{e}_h = z_4 \cos(\alpha t) + z_5 \sin(\alpha t) = 0\,,$$

mentre l'altro vincolo $\lambda_3 = H$ equivale a

$$\lambda_3 = \boldsymbol{u}_3 \cdot \sum_{h=1}^{3} z_{3+h} \boldsymbol{e}_h = z_6 = H\,.$$

R. *1)*

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m_1}{2}(\dot{s}_1^2 + \alpha^2 s_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{s}_2^2 + \alpha^2 s_2^2)\,.$$

2)

$$T^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{m_1}{2}\dot{s}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{s}_2^2 \,.$$

4) L'unica posizione di equilibrio relativo è (0,0). Se $k > m_1\alpha^2$, $m_2\alpha^2$ è stabile. In tutti gli altri casi è instabile.
5) Segue dalla conservazione dell'energia.
6)

$$\begin{aligned} -z_1\sin(\alpha t) + z_2\cos(\alpha t) &= 0\,,\\ z_3 &= 0\,,\\ z_4\cos(\alpha t) + z_5\sin(\alpha t) &= 0\,,\\ z_6 &= H\,. \end{aligned}$$

74. [03/02/2023 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di centro G, massa m e raggio R è vincolata al piano mobile $y_2 = 0$, ove le y_i sono le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, con $\boldsymbol{X}_O$ origine del sistema fisso e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$, con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{w}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

ove $\alpha > 0$ è una costante assegnata. Inoltre un punto solidale alla circonferenza $A \in \gamma$ è vincolato alla circonferenza mobile

$$y_1^2 + y_3^2 = L^2\,, \qquad y_2 = 0\,.$$

Sulla circonferenza γ non agiscono forze direttamente applicate.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi/2, 3\pi/2) \times (-\pi/2, 3\pi/2)$, ove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_A(\varphi, \theta, t) &= L\cos\varphi \boldsymbol{w}_1(t) + L\sin\varphi \boldsymbol{w}_3(t)\,,\\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_G(\varphi, \theta, t) &= \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_A(\varphi, \theta, t) + R\cos\theta \boldsymbol{w}_1(t) + R\sin\theta \boldsymbol{w}_3(t)\,. \end{aligned}$$

Si usi come sistema solidale alla circonferenza $(\boldsymbol{X}_G, \mathcal{M})$, con $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\theta\,\boldsymbol{w}_1 + \sin\theta\,\boldsymbol{w}_3\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\theta\,\boldsymbol{w}_1 + \cos\theta\,\boldsymbol{w}_3\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{w}_2\,. \end{aligned}$$

1) Si calcoli la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}}$ della circonferenza relativa alla terna fissa $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$ (espressa in una terna qualsiasi).
2) Calcolare l'energia cinetica in forma lagrangiana della circonferenza γ

relativa al sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Si calcoli la distribuzione della forza di trascinamento in $\mathcal{S}$ agente su γ, in forma lagrangiana, ossia la funzione vettoriale

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}}(\varphi,\theta,t,s)\,,$$

espressa nella base $\mathcal{N}$ di $\mathcal{S}$. Si noti che s deve essere una coordinata solidale a γ.
4) Calcolare il momento delle quantità di moto di polo G, relativo al sistema di riferimento fisso, in funzione delle coordinate lagrangiane e delle loro derivate in t (espresso in una base qualunque).
5) Sapendo che il potenziale lagrangiano della forza di trascinamento agente su γ è

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta)=\frac{m\alpha^2}{2}(L\cos\varphi+R\cos\theta)^2\,,$$

dimostrare che il sistema ha almeno 5 posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ (nel dominio di variabilità assegnato per (φ,θ)).
6) Si dia per noto il potenziale lagrangiano della forza di trascinamento agente su γ dato sopra. Si dimostri che nella posizione $(\varphi,\theta)=(0{,}0)$ di equilibrio relativo si possono definire le piccole oscillazioni (relative a $\mathcal{S}$), e se ne scriva il potenziale ridotto U^*.
Soluzione
1) Usiamo il teorema di composizione delle velocità angolari. Vale

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}}=\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}}+\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}=\alpha\boldsymbol{w}_3-\dot\theta\boldsymbol{w}_2\,;$$

infatti

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}\cdot\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}\cdot\boldsymbol{u}_2=\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_3}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}}\cdot\boldsymbol{u}_1=-\dot\theta\,.$$

2) Usiamo il teorema di König

$$T^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}=\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}_{G\mathcal{S}}|^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}\,.$$

Quindi calcoliamo

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}_{G\mathcal{S}}=\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_G}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}}=(-L\dot\varphi\sin\varphi-R\dot\theta\sin\theta)\boldsymbol{w}_1+(L\dot\varphi\cos\varphi+R\dot\theta\cos\theta)\boldsymbol{w}_3\,.$$

Quindi

$$|\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}_{G\mathcal{S}}|^2=L^2\dot\varphi^2+R^2\dot\theta^2+2LR\dot\varphi\dot\theta\cos(\varphi-\theta)\,.$$

Inoltre, denotando con I il momento d'inerzia diametrale della circonferenza γ,

$$\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}=\boldsymbol{\sigma}^{\mathcal{M}}_G\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{NM}}\cdot\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{NM}}=\begin{pmatrix}I&0&0\\0&2I&0\\0&0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-\dot\theta\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-\dot\theta\\0\end{pmatrix}=2I\dot\theta^2\,.$$

3) La distribuzione della forza di trascinamento agente su γ è

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}=-\frac{m}{2\pi R}\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}s=-\frac{m}{2\pi R}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}}\times(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}}\times\boldsymbol{X})\,\mathrm{d}s=\frac{m\alpha^2}{2\pi R}y_1\boldsymbol{w}_1\,\mathrm{d}s\,.$$

Usiamo la parametrizzazione di γ

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta,t,s)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_G(\varphi,\theta,t)+R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1+R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3\,,\qquad s\in[-\pi R,\pi R)\,.$$

Si noti che s *è un'ascissa curvilinea solidale alla circonferenza* ($s_A=-\pi R$)*. Pertanto con i calcoli*

$$y_1^{\mathrm{L}}=L\cos\varphi+R\cos\theta+R\cos\Big(\frac{s}{R}+\theta\Big)\,.$$

4) È noto dalla teoria che

$$\boldsymbol{L}_G=\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}}=\boldsymbol{\sigma}_G(\alpha\boldsymbol{w}_3-\dot\theta\boldsymbol{w}_2)\,.$$

In componenti

$$(\boldsymbol{\sigma}_G(\alpha\boldsymbol{w}_3-\dot\theta\boldsymbol{w}_2))^{\mathcal{N}}=\begin{pmatrix}I&0&0\\0&2I&0\\0&0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-\dot\theta\\\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2I\dot\theta\\\alpha I\end{pmatrix}\,.$$

Infatti nonostante $\mathcal{N}$ *non sia solidale a* γ *(solo* $\boldsymbol{w}_2$ *lo è), in ogni istante è principale in* G *e la matrice di* $\boldsymbol{\sigma}_G$ *rispetto a* $\mathcal{N}$ *è costante, per le proprietà di simmetria della circonferenza materiale.*
5) In $\mathcal{S}$ *su* γ *agiscono solo le forze fittizie, ma quella di Coriolis non contribuisce alle equazioni di moto (noto dalla teoria perché i moti avvengono su un piano che contiene* $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}}$*). Quindi le posizioni di equilibrio si ottengono dal sistema del gradiente del potenziale lagrangiano, che si riduce a quello della forza di trascinamento:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}}}{\partial\varphi}&=-m\alpha^2(L\cos\varphi+R\cos\theta)L\sin\varphi=0\,,\\\frac{\partial U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}}}{\partial\varphi}&=-m\alpha^2(L\cos\varphi+R\cos\theta)R\sin\theta=0\,.\end{aligned}$$

Le soluzioni sono quelle che annullano i seni, ossia

$$(0{,}0)\,,\quad(0,\pi)\,,\quad(\pi{,}0)\,,\quad(\pi,\pi)\,,$$

più quelle ove

$$L\cos\varphi+R\cos\theta=0\,.$$

Di queste ne esistono infinite, perché basta che

$$\left|\frac{R}{L}\cos\theta\right|<1\,.$$

In particolare esiste tra queste $(\pi/2,\pi/2)$*.*
6) In $(0{,}0)$ *si ha che*

$$D^2U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}}(0{,}0)=\begin{pmatrix}-m\alpha^2(L+R)L&0\\0&-m\alpha^2(L+R)R\end{pmatrix}\,,$$

che è definita negativa. Quindi la posizione di equilibrio è di massimo isolato per $U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}}$*; inoltre vi si possono definire le piccole oscillazioni, perché in* $\mathcal{S}$ *i vincoli sono fissi e le forze (ossia* $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T}$*) sono conservative.*
Il potenziale ridotto U^* *è dato dalla forma hessiana.*

R. *1)* $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} = \alpha \boldsymbol{w}_3 - \dot\theta \boldsymbol{w}_2$.
2)

$$T^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2}(L^2\dot\varphi^2 + R^2\dot\theta^2 + 2LR\dot\varphi\dot\theta\cos(\varphi-\theta)) + I\dot\theta^2 .$$

3)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{\mathrm{L}}_{T} = \frac{m\alpha^2}{2\pi R}\Big[L\cos\varphi + R\cos\theta + R\cos\Big(\frac{s}{R}+\theta\Big)\Big]\boldsymbol{w}_1\,\mathrm{d}s .$$

4)

$$\boldsymbol{L}_G = -2I\dot\theta\boldsymbol{w}_2 + \alpha I\boldsymbol{w}_3 .$$

5) Ne esistono infinite in particolare

$$(0,0), \quad (0,\pi), \quad (\pi,0), \quad (\pi,\pi), \quad (\pi/2,\pi/2).$$

6)

$$U^*(\varphi,\theta) = -\frac{m\alpha^2}{2}(L+R)(L\varphi^2 + R\theta^2).$$

75. [07/07/2023 (ex)I] Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ sono vincolati al piano mobile $\lambda_2 = 0$ del sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 ,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 ,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 , \end{aligned}$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Qui $\boldsymbol{\lambda}$ indica le coordinate in $\mathcal{S}$.
I punti sono soggetti ai vincoli ulteriori: $\boldsymbol{X}_1$ appartiene alla circonferenza solidale con $\mathcal{S}$, di centro $\boldsymbol{X}_O$, raggio $R > 0$ e giacente sul piano $\lambda_2 = 0$; $\boldsymbol{X}_2$ ha la stessa quota λ_3 di $\boldsymbol{X}_1$.
Sui due punti sono direttamente applicate le forze

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &= -k|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^2(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2), \quad \text{su } \boldsymbol{X}_1;\\ \boldsymbol{F}_2 &= -k|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^2(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1), \quad \text{su } \boldsymbol{X}_2. \end{aligned}$$

Qui $k > 0$ è costante.
Si usino le coordinate lagrangiane $(\varphi, x) \in (-\pi/4, 7\pi/4) \times \boldsymbol{R}$ tali che

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_1(\varphi,t) = R\cos\varphi\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\varphi\boldsymbol{u}_3(t)\,,\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_2(\varphi,x,t) = x\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\varphi\boldsymbol{u}_3(t)\,.$$

1) Determinare il potenziale lagrangiano del sistema di forze $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$.
2) Determinare l'energia cinetica lagrangiana nel sistema di riferimento fisso.
3) Le equazioni di Lagrange del sistema sono:

$$\begin{aligned} \ddot\varphi[m_1 + m_2(\cos\varphi)^2] &= \sin\varphi[(m_2\dot\varphi^2 - m_1\alpha^2)\cos\varphi + kR^{-1}(R\cos\varphi - x)^3]\,,\\ m_2\ddot x &= m_2\alpha^2 x + k(R\cos\varphi - x)^3 . \end{aligned}$$

Dimostrare che esistono moti in cui φ è costante, ma x non lo è, determinando i possibili valori di φ.
4) Dimostrare che esistono almeno due diverse posizioni (φ_1, x_1) e (φ_2, x_2) di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$.
5) Si dimostri che tutti i moti sono limitati (da una costante dipendente dal moto stesso).
6) Se per le (nuove) coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q$ si ha

$$\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(q_1, q_2, t) = q_1 \boldsymbol{u}_1(t) + q_2 \boldsymbol{u}_3(t)\,,$$

completare la parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}$, specificando il dominio Q delle coordinate lagrangiane.

Soluzione

1) Il sistema $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ è conservativo (per esempio in $\mathcal{S}$), con potenziale

$$U_F(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2) = -\frac{k}{4}|\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2|^4\,,$$

come è facile verificare calcolando che $\nabla_{\boldsymbol{\lambda}_i} U = \boldsymbol{F}_i$, $i = 1, 2$. Quindi

$$U_F^{\mathrm{L}}(\varphi, x) = -\frac{k}{4}|\boldsymbol{\lambda}_1^{\mathrm{L}} - \boldsymbol{\lambda}_2^{\mathrm{L}}|^4 = -\frac{k}{4}(R\cos\varphi - x)^4\,.$$

2) Si ha per ciascuno dei due punti $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{Ti} + \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}i}$, con $\boldsymbol{\omega} = \alpha \boldsymbol{u}_3$ e quindi

$$\boldsymbol{v}_{T1} = R\alpha\cos\varphi \boldsymbol{u}_2\,, \quad \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}1} = R\dot\varphi(-\sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{u}_3)\,,$$
$$\boldsymbol{v}_{T2} = \alpha x \boldsymbol{u}_2\,, \quad \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}2} = \dot x \boldsymbol{u}_1 + R\dot\varphi\cos\varphi \boldsymbol{u}_3\,.$$

Quindi

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m_1}{2}[R^2\alpha^2(\cos\varphi)^2 + R^2\dot\varphi^2] + \frac{m_2}{2}[\alpha^2x^2 + \dot x^2 + R^2\dot\varphi^2(\cos\varphi)^2]\,.$$

3) Se φ è costante, nella prima equazione di Lagrange il membro di sinistra, e quindi anche quello di destra, si annullano. Se fosse $\sin\varphi \neq 0$ si avrebbe che anche x sarebbe costante, contro l'ipotesi. Quindi $\sin\varphi = 0$, ossia $\varphi \in \{0, \pi\}$. In corrispondenza, dalla seconda equazione di Lagrange, si ottengono per x le equazioni differenziali

$$\varphi = 0: \qquad m_2\ddot x = m_2\alpha^2 x + k(R - x)^3\,;$$
$$\varphi = \pi: \qquad m_2\ddot x = m_2\alpha^2 x + k(-R - x)^3\,,$$

che hanno unica soluzione, con gli opportuni dati iniziali.
4) In $\mathcal{S}$ il sistema di forze (le $\boldsymbol{F}_i$ e quelle di trascinamento) è conservativo con potenziale lagrangiano

$$U_{\mathcal{S}}^{\mathrm{L}} = -\frac{k}{4}(R\cos\varphi - x)^4 + \frac{m_1}{2}\alpha^2R^2(\cos\varphi)^2 + \frac{m_2}{2}\alpha^2x^2\,.$$

Il sistema del gradiente è

$$[kR(R\cos\varphi - x)^3 - m_1\alpha^2R^2\cos\varphi]\sin\varphi = 0\,,$$
$$k(R\cos\varphi - x)^3 + m_2\alpha^2 x = 0\,.$$

La prima equazione sicuramente è soddisfatta se $\sin\varphi = 0$*, ossia* $\varphi \in \{0, \pi\}$*. In corrispondenza di questi due valori, la seconda equazione diviene una delle due*

$$k(R-x)^3 + m_2\alpha^2 x = 0\,, \qquad k(-R-x)^3 + m_2\alpha^2 x = 0\,,$$

che sicuramente hanno almeno una soluzione (di fatto non nulla) perché sono di grado dispari. Si vede che se x_1 *risolve la prima allora* $-x_1$ *risolve la seconda, ma questo non è neanche necessario per rispondere al quesito perché i valori di* φ *sono comunque diversi.*
5) Come osservato sopra, in $\mathcal{S}$ *vale la conservazione dell'energia nella forma*

$$E = T^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} - U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} \geq -U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{k}{4}(R\cos\varphi - x)^4 - \frac{m_1}{2}\alpha^2 R^2 (\cos\varphi)^2 - \frac{m_2}{2}\alpha^2 x^2\,.$$

Poiché l'ultimo membro sopra è un polinomio di quarto grado in x *con coefficiente positivo del termine di ordine 4, esso diverge a* $+\infty$ *se* $|x| \to +\infty$*. Invece è limitato da* E *per ogni istante, quindi ne segue che il moto resta limitato.*
6) Si deve avere necessariamente per i vincoli

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_1(\boldsymbol{q}, t) = \lambda^{\mathrm{L}}_{11}\boldsymbol{u}_1 + q_2\boldsymbol{u}_3\,, \qquad (\lambda^{\mathrm{L}}_{11})^2 + q_2^2 = R^2\,.$$

Quindi va scelto uno dei due segni in

$$\lambda^{\mathrm{L}}_{11} = \pm\sqrt{R^2 - q_2^2}\,,$$

restringendo q_2 *a* $(-R, R)$ *per avere la regolarità necessaria.*
R. *1)*

$$U^{\mathrm{L}}_F(\varphi, x) = -\frac{k}{4}(R\cos\varphi - x)^4\,.$$

2)

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m_1}{2}[R^2\alpha^2(\cos\varphi)^2 + R^2\dot\varphi^2] + \frac{m_2}{2}[\alpha^2 x^2 + \dot x^2 + R^2\dot\varphi^2(\cos\varphi)^2]\,.$$

3) $\varphi \in \{0, \pi\}$*.*
6) Una delle due

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_1(\boldsymbol{q}, t) = \sqrt{R^2 - q_2^2}\boldsymbol{u}_1(t) + q_2\boldsymbol{u}_3(t)\,, \qquad \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_1(\boldsymbol{q}, t) = -\sqrt{R^2 - q_2^2}\boldsymbol{u}_1(t) + q_2\boldsymbol{u}_3(t)\,,$$

con $Q = \boldsymbol{R} \times (-R, R)$*.*

76. [02/02/2024 (ex)I] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante e $\boldsymbol{X}_O = 0$ origine del sistema di riferimento fisso. Denotiamo con (x_h) le coordinate nel sistema di riferimento fisso, e con (y_h) le

coordinate in $\mathcal{S}$.
Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio alla parabola solidale con $\mathcal{S}$, di asse y_1,

$$y_2 = 0 \,, \qquad y_1 = \beta y_3^2 \,,$$

ove $\beta > 0$ è una costante. Sul punto agisce la forza peso

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Si usi come coordinata lagrangiana $z \in \boldsymbol{R}$ tale che

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(z,t) = \beta z^2 \boldsymbol{u}_1(t) + z\boldsymbol{u}_3(t) \,.$$

1) Si calcoli l'energia cinetica lagrangiana del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Si calcoli il potenziale lagrangiano del sistema, relativo alle forze presenti nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Si determinino le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e se ne studi la stabilità.
4) Si calcoli la forza di Coriolis che agisce su $\boldsymbol{X}$ in un moto generico.
5) Si scrivano i vincoli nelle coordinate (x_h) del sistema di riferimento fisso, ossia come due equazioni

$$f_1(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \,.$$

6) Si scriva l'equazione di Lagrange del moto e si dimostri che se $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, allora $\dot{z}(t) < 0$ almeno in un intervallo $(0, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$ opportuno.
Soluzione
1) Dalla definizione di $\boldsymbol{u}_h$ si ha

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = 2\beta z\dot{z}\boldsymbol{u}_1 + \dot{z}\boldsymbol{u}_3 + \beta z^2 \dot{\boldsymbol{u}}_1 = 2\beta z\dot{z}\boldsymbol{u}_1 + \alpha\beta z^2 \boldsymbol{u}_2 + \dot{z}\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Quindi

$$|\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}|^2 = \dot{z}^2(1 + 4\beta^2 z^2) + \alpha^2\beta^2 z^4 \,.$$

2) In $\mathcal{S}$ vanno considerate anche le forze apparenti $\boldsymbol{F}_{T}$ e $\boldsymbol{F}_{C}$. Ma dalla teoria sappiamo che $\boldsymbol{F}_{C}$ ha componenti lagrangiane nulle in questo caso. Inoltre

$$\boldsymbol{F}_{T} = -m\boldsymbol{a}_{T} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{X}) = m\alpha^2 y_1 \boldsymbol{u}_1 \,,$$

poiché $\boldsymbol{\omega} = \alpha\boldsymbol{u}_3$. Perciò la forza di trascinamento ammette il potenziale

$$U_{T} = m\alpha^2 \frac{y_1^2}{2} \,.$$

Quindi il potenziale lagrangiano di trascinamento vale

$$U_{T}^{\mathrm{L}} = m\alpha^2 \frac{\beta^2 z^4}{2} \,.$$

Il potenziale lagrangiano del peso è

$$-mgz\,.$$

3) Si ha

$$\frac{\mathrm{d}U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}z} = 2m\alpha^2\beta^2 z^3 - mg\,,$$

per cui l'unico punto critico ossia l'unica posizione di equilibrio è

$$z_0 = \sqrt[3]{\frac{g}{2\alpha^2\beta^2}}\,.$$

D'altra parte

$$\frac{\mathrm{d}^2U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}z^2} = 6m\alpha^2\beta^2 z^2\,,$$

e quindi z_0 è di equilibrio instabile.
4) Per definizione

$$\boldsymbol{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = -2m(\alpha\boldsymbol{u}_3)\times(2\beta z\dot{z}\boldsymbol{u}_1 + \dot{z}\boldsymbol{u}_3) = -4m\alpha\beta z\dot{z}\boldsymbol{u}_2\,.$$

5) Il vincolo $y_2 = 0$ si scrive come

$$y_2 = \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{u}_2 = \Big(\sum_{h=1}^{3} x_h\boldsymbol{e}_h\Big)\cdot\Big(-\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2\Big)$$
$$= -x_1\sin(\alpha t) + x_2\cos(\alpha t) = 0\,.$$

Il secondo vincolo si calcola usando

$$y_1 = \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{u}_1 = \Big(\sum_{h=1}^{3} x_h\boldsymbol{e}_h\Big)\cdot\Big(\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2\Big) = x_1\cos(\alpha t) + x_2\sin(\alpha t)\,,$$

e $y_3 = x_3$.
6) Dai calcoli dei punti 2) e 4) si ottiene la lagrangiana

$$\mathcal{L} = T^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} + U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2}\dot{z}^2(1+4\beta^2z^2) + \frac{m}{2}\alpha^2\beta^2z^4 - mgz\,.$$

Quindi si ottiene l'equazione di Lagrange

$$\ddot{z}(1+4\beta^2z^2) + 4\beta^2\dot{z}^2z - 2\alpha^2\beta^2z^3 + g = 0\,.$$

Se $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$ si ha quindi $\ddot{z}(0) = -g < 0$ e perciò vale $\dot{z}(t) < 0$ per tutti i $t \in (0,\bar{t})$ con $\bar{t} > 0$ opportuno. In realtà si può vedere che questo avviene per ogni t per cui il moto è definito, perché altrimenti si avrebbe $\dot{z}(\bar{t}) = 0$, da cui per l'equazione $\ddot{z}(\bar{t}) < 0$, un assurdo.
R.

1) $T^{\mathrm{L}} = \dfrac{m}{2}[\dot{z}^2(1+4\beta^2z^2) + \alpha^2\beta^2z^4]\,.$
2) $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(z) = \dfrac{m}{2}\alpha^2\beta^2z^4 - mgz\,.$
3) $z_0 = \sqrt[3]{\dfrac{g}{2\alpha^2\beta^2}}\,,$ *instabile.*
4) $\boldsymbol{F}_c = -4m\alpha\beta z\dot{z}\boldsymbol{u}_2\,.$
5) $-x_1\sin(\alpha t) + x_2\cos(\alpha t) = 0\,,\quad x_1\cos(\alpha t) + x_2\sin(\alpha t) = \beta x_3^2\,.$
6) $\ddot{z}(1+4\beta^2z^2) + 4\beta^2\dot{z}^2z - 2m\alpha^2\beta^2z^3 + g = 0\,.$

77. [05/07/2024 (ex)I] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ ove $\boldsymbol{X}_O = 0$ è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante. Indichiamo con (y_h) le coordinate in $\mathcal{S}$.
Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m)$ e $(\boldsymbol{X}_2, m)$ di uguale massa sono vincolati a rimanere sul piano $y_2 = 0$ a uguale quota y_3, in modo che il punto $(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2)/2$ appartenga alla circonferenza solidale con $\mathcal{S}$ di equazioni

$$y_1^2 + y_3^2 = R^2\,, \qquad y_2 = 0\,,$$

con $R > 0$ costante.
I due punti si scambiano l'attrazione elastica

$$\boldsymbol{F}_1 = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2)\,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = -k(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1)\,,$$

con $k > 0$ costante.
Si usi la parametrizzazione lagrangiana

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(s,\varphi) &= R\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{u}_3 + s\boldsymbol{u}_1\,,\\ \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(s,\varphi) &= R\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{u}_3 - s\boldsymbol{u}_1\,,\end{aligned}$$

con $(s,\varphi) \in (-\infty,+\infty) \times (-\pi/4, 7\pi/4)$.
1) Si scriva l'energia cinetica lagrangiana relativa a $\mathcal{S}$ del sistema.
2) Si scriva il potenziale lagrangiano relativo a $\mathcal{S}$ del sistema.
3) Si scrivano le equazioni di Lagrange e si determini se esistono moti in cui s è costante e φ non lo è, e viceversa.
4) Si determinino le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e la loro stabilità. Si assuma in questo quesito $2k > m\alpha^2$.
5) Nel caso $m\alpha^2 = 2k$ si stabilisca se esistono posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ stabile.
6) Si dia una condizione su k, m, α tale che in ciascun moto s si mantenga limitato (in dipendenza delle condizioni iniziali).
SOLUZIONE
1) Derivando relativamente a $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ si ottiene

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}1}^{\mathrm{L}} &= -R\dot\varphi\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + R\dot\varphi\cos\varphi\boldsymbol{u}_3 + \dot s\boldsymbol{u}_1\,,\\ \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}2}^{\mathrm{L}} &= -R\dot\varphi\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + R\dot\varphi\cos\varphi\boldsymbol{u}_3 - \dot s\boldsymbol{u}_1\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}T_{\mathcal{S}}^{\mathrm{L}} &= \frac{m}{2}\big[(-R\dot\varphi\sin\varphi + \dot s)^2 + R^2\dot\varphi^2(\cos\varphi)^2\\ &\quad + (-R\dot\varphi\sin\varphi - \dot s)^2 + R^2\dot\varphi^2(\cos\varphi)^2\big]\\ &= m[R^2\dot\varphi^2 + \dot s^2]\,.\end{aligned}$$

2) Come è noto dalla teoria la forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle in questo caso. La forza di trascinamento è (su ciascun punto)

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = -m\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{X}) = m\alpha^2 y_1 \boldsymbol{u}_1 \,,$$

perché $\boldsymbol{\omega} = \alpha \boldsymbol{u}_3$. Dunque il potenziale totale di trascinamento è

$$U_{\mathrm{T}} = \frac{m\alpha^2}{2}(y_{1\boldsymbol{X}_1}^2 + y_{1\boldsymbol{X}_2}^2) \,.$$

Il potenziale lagrangiano pertanto vale

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}} &= \frac{m\alpha^2}{2}\big[(R\cos\varphi + s)^2 + (R\cos\varphi - s)^2\big] \\ &= m\alpha^2[R^2(\cos\varphi)^2 + s^2] \,. \end{aligned}$$

A questo va aggiunto il potenziale elastico, ossia

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^2 \,,$$

cioè in forma lagrangiana

$$U_{\mathrm{el}}^{\mathrm{L}} = -\frac{k}{2}(2s)^2 = -2ks^2 \,.$$

3) Si hanno per i punti 1) e 2)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[2m\dot{s}] &= 2(m\alpha^2 - 2k)s \,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[2mR^2\dot{\varphi}] &= -2m\alpha^2 R^2 \cos\varphi \sin\varphi \,. \end{aligned}$$

Quindi se $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$ si ha $s(t) = 0$ per ogni t, mentre φ può non essere costante, se $\dot{\varphi}(0) \neq 0$.
Viceversa, se $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, si ha $\varphi(t) = 0$ per ogni t, mentre s può non essere costante, se $\dot{s}(0) \neq 0$.
4) Il sistema del gradiente è

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{\mathcal{S}}^{\mathrm{L}}}{\partial s} &= 2s(m\alpha^2 - 2k) = 0 \,, \\ \frac{\partial U_{\mathcal{S}}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= -2m\alpha^2 R^2 \cos\varphi \sin\varphi = 0 \,. \end{aligned}$$

Quindi i punti critici (s, φ) di $U_{\mathcal{S}}^{\mathrm{L}}$ nel dominio Q delle coordinate lagrangiane sono

$$(0{,}0) \,, \quad \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \,, \quad (0, \pi) \,, \quad \Big(0, \frac{3\pi}{2}\Big) \,.$$

Calcoliamo l'hessiana

$$D^2 U_{\mathcal{S}}^{\mathrm{L}}(s, \varphi) = \begin{pmatrix} m\alpha^2 - 2k & 0 \\ 0 & -2m\alpha^2 R^2 \cos(2\varphi) \end{pmatrix} \,.$$

Quindi in $(0{,}0)$ e in $(0, \pi)$ l'hessiana è definita negativa e l'equilibrio è stabile. Invece in $(0, \pi/2)$ e $(0{,}3\pi/2)$ l'hessiana è indefinita e l'equilibrio è instabile.

5) In questo caso la prima equazione di Lagrange dà $\ddot{s} = 0$. Dunque si ha per ogni moto

$$s(t) = s(0) + \dot{s}(0)t\,, \qquad \text{per ogni } t,$$

che non permette di avere

$$|s(t) - s(0)| \leq \varepsilon\,, \qquad \text{per ogni } t > 0,$$

qualunque sia $\varepsilon > 0$, se $\dot{s}(0) \neq 0$.
6) Di nuovo dalla prima equazione di Lagrange

$$\ddot{s} + \frac{2k - m\alpha^2}{m} s = 0\,,$$

da cui se $2k > m\alpha^2$ si trova

$$s(t) = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)\,, \qquad \beta = \sqrt{\frac{2k - m\alpha^2}{m}}\,,$$

con c_i dipendenti dalle condizioni iniziali.
R.

1) $T^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = m[R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2]\,.$
2) $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = m\alpha^2[R^2(\cos\varphi)^2 + s^2] - 2ks^2\,.$
3) $m\ddot{s} = (m\alpha^2 - 2k)s\,, \quad \ddot{\varphi} = -\alpha^2\cos\varphi\sin\varphi\,.$
4) $(0{,}0)\,,(0,\pi)\,,$ *stabili;* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ *instabili.*
5) *No.*
6) $2k > m\alpha^2\,.$

660. Equazioni di Lagrange: equilibrio

1. [4/7/2005 (ex)I] Due aste rigide omogenee AB e BC, ciascuna di lunghezza $2L$ e massa m, sono così vincolate nel sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3):

- entrambe giacciono nel piano $x_3 = 0$;
- hanno in comune l'estremo B;
- $A = O$, ossia $x_{1A} = x_{2A} = x_{3A} = 0$;
- $x_{2C} = d$, ove $2L < d < 4L$ (cioè C appartiene alla retta $x_2 = d$); qui d è una costante assegnata.

Si considerino solo configurazioni con $0 < x_{1B} < x_{1C}$.
Ciascun punto delle due aste è soggetto a una densità di forza data da

$$-\frac{\mu}{2L}\boldsymbol{e}_1\,, \quad \text{per l'asta } AB; \qquad \frac{\mu}{2L}\boldsymbol{e}_1\,, \quad \text{per l'asta } BC,$$

con $\mu \in \boldsymbol{R}$ costante.
Trovare le configurazioni di equilibrio.
(Si usi $y = x_{2B}$ come coordinata lagrangiana.)
Soluzione
1) Le forze sono conservative. Dunque le configurazioni di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale.
2) Calcoliamo il potenziale U. Parametrizziamo la sbarra AB:

$$P(s) = \Big(s\frac{x_{1B}}{2L}, s\frac{x_{2B}}{2L}, 0\Big)\,, \qquad 0 < s < 2L\,.$$

Quindi il contributo di AB sarà

$$U_{AB} = \int_0^{2L} \Big(-\frac{\mu}{2L} s\frac{x_{1B}}{2L}\Big)\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\mu x_{1B}\,.$$

Parametrizziamo la sbarra BC:

$$P(s) = \Big(x_{1B} + s\frac{x_{1C} - x_{1B}}{2L}, x_{2B} + s\frac{x_{2C} - x_{2B}}{2L}, 0\Big)\,, \qquad 0 < s < 2L\,.$$

Quindi il contributo di BC sarà

$$U_{BC} = \int_0^{2L} \Big(\frac{\mu}{2L}\Big[x_{1B} + s\frac{x_{1C} - x_{1B}}{2L}\Big]\Big)\,\mathrm{d}s = \mu\Big(x_{1B} + \frac{1}{2}(x_{1C} - x_{1B})\Big)\,.$$

Sommando si ottiene il potenziale completo

$$U(x_{2B}) = \frac{\mu}{2}\Big(x_{1B} + (x_{1C} - x_{1B})\Big) = \frac{\mu}{2}x_{1C}\,.$$

Ora dobbiamo esprimere la variabile x_{1C} in funzione dell'unica coordinata lagrangiana x_{2B}. Per il vincolo

$$(x_{1B} - x_{1C})^2 + (x_{2B} - x_{2C})^2 = 4L^2\,,$$

si ha (essendo $x_{1C} - x_{1B} > 0$ per ipotesi)

$$x_{1C} - x_{1B} = \sqrt{4L^2 - (d - x_{2B})^2}\,.$$

Inoltre

$$x_{1B}^2 + x_{2B}^2 = 4L^2\,,$$

da cui (essendo $x_{1B} > 0$ per ipotesi)

$$x_{1B} = \sqrt{4L^2 - x_{2B}^2}\,.$$

Pertanto

$$U(x_{2B}) = \frac{\mu}{2}\Big(\sqrt{4L^2 - x_{2B}^2} + \sqrt{4L^2 - (d - x_{2B})^2}\Big)\,.$$

3) Infine, derivando in x_{2B}:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x_{2B}} = \frac{\mu}{2}\Big(\frac{-x_{2B}}{\sqrt{4L^2 - x_{2B}^2}} + \frac{(d - x_{2B})}{\sqrt{4L^2 - (d - x_{2B})^2}}\Big)$$
$$= \frac{\mu}{2}\frac{-x_{2B}\sqrt{4L^2 - (d - x_{2B})^2} + (d - x_{2B})\sqrt{4L^2 - x_{2B}^2}}{\sqrt{4L^2 - x_{2B}^2}\sqrt{4L^2 - (d - x_{2B})^2}} .$$

Dunque i punti critici di U risolvono l'equazione

$$x_{2B}^2(4L^2 - (d - x_{2B})^2) = (d - x_{2B})^2(4L^2 - x_{2B}^2) ,$$

che ha come unica soluzione nel campo ammissibile di variazione di x_{2B}, cioè $0 < x_{2B} < 2L < d < 4L$,

$$x_{2B} = \frac{d}{2} .$$

2. [4/7/2005 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato a un piano liscio $\pi(t)$, ruotante intorno a un suo asse fisso r con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$. Se denotiamo con x la distanza di P da r, P è soggetto a forze conservative di potenziale

$$U(x) = a(x - d)^2 - bx^2 ,$$

ove a, b, $d > 0$ sono costanti assegnate.
Per quali valori di $|\boldsymbol{\omega}|$ la posizione $x = d$ è di equilibrio relativo al piano ruotante?
SOLUZIONE
Scegliamo un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ solidale con il piano ruotante, con l'origine O coincidente con un punto fisso sull'asse di rotazione, e l'asse x_1 diretto lungo r. Sia poi x_2 giacente sul piano ruotante, cosicché la retta $x = d$ coincida con $x_2 = d$. In $\mathcal{S}$ va tenuto conto anche delle forze fittizie $\boldsymbol{F}_C$ e $\boldsymbol{F}_T$. Tuttavia $\boldsymbol{F}_C$ è nulla all'equilibrio relativo e nel caso presente

$$\boldsymbol{F}_T = -m\boldsymbol{a}_T = -m\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}] = m|\boldsymbol{\omega}|^2 x_2 \boldsymbol{u}_2 .$$

Dunque il potenziale complessivo in $\mathcal{S}$ è

$$U_{\mathcal{S}}(x_2) = U(x_2) + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega}|^2 x_2^2 ,$$

almeno finché $x_2 > 0$. Imponiamo che $x_2 = d$ sia una posizione di equilibrio, cioè che

$$\frac{\mathrm{d}U_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}x_2} = 2a(x_2 - d) - 2bx_2 + m|\boldsymbol{\omega}|^2 x_2 = 0$$

quando $x_2 = d > 0$. È ovvio che questo accade se e solo se

$$|\boldsymbol{\omega}|^2 = 2\frac{b}{m} .$$

3. [4/7/2005 (ex)II] Due aste rigide omogenee AB e BC, ciascuna di lunghezza $2L$ e massa m, sono così vincolate nel sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3):

- entrambe giacciono nel piano $x_3 = 0$;
- hanno in comune l'estremo B;
- $A = O$, ossia $x_{1A} = x_{2A} = x_{3A} = 0$;
- $x_{1C} = d$, ove $2L < d < 4L$ (cioè C appartiene alla retta $x_1 = d$).

Si considerino solo configurazioni con $0 > x_{2B} > x_{2C}$.
Ciascun punto delle due aste è soggetto a una densità di forza data da

$$\frac{\lambda}{2L}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \text{per l'asta } AB; \qquad -\frac{\lambda}{2L}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \text{per l'asta } BC,$$

con $\lambda \in \boldsymbol{R}$ costante.
Trovare le configurazioni di equilibrio.
(Si usi $x = x_{1B}$ come coordinata lagrangiana.)
R.

$$x = d/2$$

4. [4/7/2005 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato a un piano liscio $\pi(t)$, ruotante intorno a un suo asse fisso r con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$. Se denotiamo con x la distanza di P da r, P è soggetto a forze conservative di potenziale

$$U(x) = -a(x-d)^2 - 2bx^2\,,$$

ove a, b, $d > 0$ sono costanti assegnate.
Per quali valori di $|\boldsymbol{\omega}|$ la posizione $x = d$ è di equilibrio relativo al piano ruotante?
R.

$$|\boldsymbol{\omega}|^2 = 4b/m$$

5. [12/9/2005 (ex)I] Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza $2L$ e massa m ha il centro coincidente con l'origine del sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3). È inoltre vincolata a giacere su un piano mobile $\pi(t)$ che passa per l'asse x_3 e ruota con velocità $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_3$, con $\omega > 0$ costante.
Il punto A [rispettivamente il punto B] è richiamato dal punto fisso $P_1 = (0,0,R)$ [rispettivamente dal punto fisso $P_2 = (0,0,-R)$], con forza elastica di costante $k > 0$. Qui $R > 0$ è costante.
Si trovino le posizioni di equilibrio relativo a $\pi(t)$.

Soluzione

In un sistema $(O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ solidale con $\pi(t)$ le forze che agiscono su AB e che compiono lavoro sono quelle elastiche e quella fittizia di trascinamento. La densità di quest'ultima è

$$\frac{m}{2L}\omega^2 \xi_1 \boldsymbol{u}_1 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_1$ è un versore solidale a $\pi(t)$ e ortogonale a x_3, e ξ_1 è la relativa ascissa. Dunque il potenziale della forza di trascinamento si calcola come

$$U_{\scriptscriptstyle T} = \int_{-L}^{L} \frac{m}{4L}\omega^2 \xi_1(s)^2 \,\mathrm{d}s = \int_{-L}^{L} \frac{m}{4L}\omega^2 s^2 \cos^2\theta \,\mathrm{d}s = \frac{m}{6}L^2\omega^2\cos^2\theta \,,$$

se θ è l'angolo compreso tra $\overrightarrow{BA}$ e $\boldsymbol{u}_1$. Il potenziale delle due forze elastiche è

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}\left|\overrightarrow{AP_1}\right|^2 - \frac{k}{2}\left|\overrightarrow{BP_2}\right|^2 = k(2RL\sin\theta - R^2 - L^2) \,.$$

Dunque il potenziale totale è

$$U(\theta) = \frac{m}{6}L^2\omega^2\cos^2\theta + 2kRL\sin\theta + \text{costante} \,.$$

I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici di U, ossia ai punti ove

$$0 = U'(\theta) = L\cos\theta\Big[2kR - \frac{m}{3}L\omega^2\sin\theta\Big] \,.$$

Perciò i punti di equilibrio sono

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \,, \qquad \theta_2 = \frac{3}{2}\pi \,,$$

e, se

$$\frac{6kR}{m\omega^2 L} < 1 \,,$$

anche θ corrispondente a

$$\sin\theta = \frac{6kR}{m\omega^2 L} \,,$$

ossia

$$\theta_3 = \arcsin\frac{6kR}{m\omega^2 L} \,, \qquad \theta_4 = \pi - \arcsin\frac{6kR}{m\omega^2 L} \,.$$

R.

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \,, \qquad \theta_2 = \frac{3}{2}\pi \,;$$

$$\textit{se} \quad \frac{6kR}{m\omega^2 L} < 1 \,, \qquad \theta_3 = \arcsin\frac{6kR}{m\omega^2 L} \,, \qquad \theta_4 = \pi - \arcsin\frac{6kR}{m\omega^2 L} \,.$$

6. [12/9/2005 (ex)II] Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza $2L$ e massa m ha il centro coincidente con l'origine del sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3). È inoltre vincolata a giacere su un piano mobile $\pi(t)$ che passa per l'asse x_1 e ruota con velocità $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_1$, con $\omega > 0$ costante.

Il punto A [rispettivamente il punto B] è richiamato dal punto fisso $P_1 = (R{,}0{,}0)$ [rispettivamente dal punto fisso $P_2 = (-R{,}0{,}0)$], con forza elastica di costante $k > 0$. Qui $R > 0$ è costante.
Si trovino le posizioni di equilibrio relativo a $\pi(t)$.
R.

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}\,, \quad \theta_2 = \frac{3}{2}\pi\,;$$
$$\mathit{se} \quad \frac{6kR}{m\omega^2 L} < 1\,, \qquad \theta_3 = \arcsin\frac{6kR}{m\omega^2 L}\,, \qquad \theta_4 = \pi - \arcsin\frac{6kR}{m\omega^2 L}\,.$$

7. [15/12/2005 (ex)I] Un punto materiale di massa m, soggetto a vincoli lisci e fissi, si muove con lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\bigl(L^2\dot\varphi^2 + R^2\dot\psi^2\bigr) + k\cos(\varphi+\psi) - h\sin\varphi\,.$$

Qui $\varphi \in (0,\pi)$ e $\psi \in (0,\pi)$ sono le coordinate lagrangiane e L, R, k e h sono costanti positive.
Studiare le posizioni di equilibrio del punto e la loro stabilità.
SOLUZIONE
Il potenziale è

$$U(\varphi,\psi) = k\cos(\varphi+\psi) - h\sin\varphi\,.$$

Le posizioni di equilibrio sono date da

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi} = -k\sin(\varphi+\psi) - h\cos\varphi = 0\,,$$
$$\frac{\partial U}{\partial\psi} = -k\sin(\varphi+\psi) = 0\,.$$

Quindi

$$\cos\varphi = 0\,,$$

per cui $\varphi = \pi/2$, *e*

$$\varphi + \psi = n\pi\,, \qquad n \in \boldsymbol{Z}\,.$$

Dato però che deve essere

$$0 < \varphi + \psi < 2\pi\,,$$

deve essere $n = 1$, *e*

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \psi = \frac{\pi}{2}\,,$$

risulta l'unica posizione di equilibrio.
Per studiarne la stabilità, calcoliamo l'Hessiana

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = -k\cos(\varphi+\psi) + h\sin\varphi\,,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi\partial\psi} = -k\cos(\varphi+\psi)\,,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2} = -k\cos(\varphi+\psi)\,.$$

Per cui

$$D^2U\Big(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)=\begin{pmatrix}k+h & k\\ k & k\end{pmatrix},$$

che è definita positiva. Pertanto la posizione di equilibrio corrisponde a un punto di minimo per il potenziale, ed è quindi instabile.
R. *L'unica posizione di equilibrio è $(\varphi,\psi)=(\pi/2,\pi/2)$, che è instabile.*

8. [7/4/2006 (ex)I] Un punto materiale P di massa $m>0$ è vincolato alla superficie ottenuta ruotando intorno all'asse z la curva

$$z=a(x^2-bx)\,,\qquad x>0\,,\qquad y=0\,,$$

ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}=-k(x,y,0)-\lambda(0,0,1)\,,$$

con a, b, k, $\lambda>0$ costanti.
Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.
Soluzione
Usiamo come coordinate lagrangiane le coordinate cilindriche $r>0$ e $\varphi\in(0,2\pi)$. Allora P è dato nella terna fissa da

$$P=\big(r\cos\varphi,r\sin\varphi,a(r^2-br)\big)\,.$$

Il potenziale dunque è

$$U(r,\varphi)=-\frac{k}{2}(x^2+y^2)-\lambda z=-\frac{k}{2}r^2-\lambda a(r^2-br)\,.$$

Per trovare i punti di equilibrio imponiamo $\nabla U=0$, ossia

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial r}&=-kr-\lambda a(2r-b)=0\,,\\ \frac{\partial U}{\partial\varphi}&=0=0\,.\end{aligned}$$

Le soluzioni di questo sistema sono date da

$$r=\frac{\lambda ab}{k+2\lambda a}\,,\qquad 0<\varphi<2\pi\,.$$

Dato che i punti stazionari trovati non sono isolati e costituiscono una circonferenza, l'equilibrio non è stabile in nessuno di essi.
R.

$$x^2+y^2=\frac{(\lambda ab)^2}{(k+2\lambda a)^2}\,,\qquad \text{equilibrio non stabile.}$$

9. [7/7/2006 (ex)I] Consideriamo un sistema a vincoli olonomi lisci e fissi, la cui lagrangiana sia

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\alpha\dot\theta^2+\beta\dot\psi^2)-k(e^{\psi-\theta}-\cos\psi+\frac{\theta}{2})\,,$$

ove α, β, k sono costanti positive, e

$$-\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\,, \qquad -\pi < \psi < \pi\,.$$

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
SOLUZIONE
Il potenziale è

$$U(\theta,\psi) = -k(e^{\psi-\theta} - \cos\psi + \frac{\theta}{2})\,,$$

da cui

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \theta} &= ke^{\psi-\theta} - \frac{k}{2}\,,\\ \frac{\partial U}{\partial \psi} &= -ke^{\psi-\theta} - k\sin\psi\,.\end{aligned}$$

Uguagliando a zero entrambe le derivate, si ottiene

$$\begin{aligned}\psi - \theta &= -\ln 2,\,,\\ \sin\psi &= -\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Tenuto conto degli intervalli di variazione di θ e ψ si trovano le due soluzioni

$$\theta = -\frac{\pi}{6} + \ln 2\,, \qquad \psi = -\frac{\pi}{6}\,,$$

e

$$\theta = -\frac{5\pi}{6} + \ln 2\,, \qquad \psi = -\frac{5\pi}{6}\,.$$

Per studiare la stabilità di queste due posizioni di equilibrio calcoliamo l'Hessiana D^2U del potenziale:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} &= -ke^{\psi-\theta}\,,\\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \psi} &= ke^{\psi-\theta}\,,\\ \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} &= -ke^{\psi-\theta} - k\cos\psi\,.\end{aligned}$$

Dunque:

$$D^2U\Big(-\frac{5\pi}{6} + \ln 2, -\frac{5\pi}{6}\Big) = k\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\,.$$

Dato che

$$\det D^2U\Big(-\frac{5\pi}{6} + \ln 2, -\frac{5\pi}{6}\Big) = -k^2\frac{\sqrt{3}}{4} < 0\,,$$

l'Hessiana non è definita in

$$\Big(-\frac{5\pi}{6} + \ln 2, -\frac{5\pi}{6}\Big)\,,$$

e quindi questo punto non è di equilibrio stabile.

Inoltre:

$$D^2U\Big(-\frac{\pi}{6}+\ln 2,-\frac{\pi}{6}\Big)=k\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

Dato che

$$\det D^2U\Big(-\frac{\pi}{6}+\ln 2,-\frac{\pi}{6}\Big)=k^2\frac{\sqrt{3}}{4}>0\,,$$

l'Hessiana è definita in

$$\Big(-\frac{\pi}{6}+\ln 2,-\frac{\pi}{6}\Big)\,,$$

e in particolare è definita negativa, poiché gli elementi della diagonale principale sono negativi. Quindi il punto è di equilibrio stabile.
R.

$$\begin{aligned}(\theta,\psi)&=\Big(-\frac{5\pi}{6}+\ln 2,-\frac{5\pi}{6}\Big)\,, &&\textit{equilibrio instabile;}\\ (\theta,\psi)&=\Big(-\frac{\pi}{6}+\ln 2,-\frac{\pi}{6}\Big)\,, &&\textit{equilibrio stabile.}\end{aligned}$$

10. [7/7/2006 (ex)II] Consideriamo un sistema a vincoli olonomi lisci e fissi, la cui lagrangiana sia

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\alpha\dot\theta^2+\beta\dot\varphi^2)-k(e^{\varphi-\theta}-\cos\varphi+\frac{\theta}{2})\,,$$

ove α, β, k sono costanti positive, e

$$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5\pi}{2}\,,\qquad 0<\varphi<2\pi\,.$$

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
R.

$$\begin{aligned}(\theta,\psi)&=\Big(\frac{7\pi}{6}+\ln 2,\frac{7\pi}{6}\Big)\,, &&\textit{equilibrio instabile;}\\ (\theta,\psi)&=\Big(\frac{11\pi}{6}+\ln 2,\frac{11\pi}{6}\Big)\,, &&\textit{equilibrio stabile.}\end{aligned}$$

11. [19/7/2006 (ex)I] Consideriamo un sistema a vincoli olonomi lisci e fissi, la cui lagrangiana sia

$$\mathcal{L}=(1+\theta^2)\dot\theta^2+3\dot\varphi^2-4k\big(\cos(\theta-\varphi)+\varphi^3-\varphi^2\big)\,,$$

ove k è una costante positiva, e

$$-1<\theta<1\,,\qquad -1<\varphi<1\,.$$

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
SOLUZIONE

Il potenziale è

$$U(\theta,\varphi) = -4k\big(\cos(\theta-\varphi) + \varphi^3 - \varphi^2\big)\,,$$

da cui

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \theta} &= 4k\sin(\theta-\varphi)\,,\\ \frac{\partial U}{\partial \psi} &= -4k\big(\sin(\theta-\varphi) + 3\varphi^2 - 2\varphi\big)\,.\end{aligned}$$

Uguagliando a zero entrambe le derivate, si ottiene

$$\begin{aligned}\sin(\theta-\varphi) &= 0\,,\\ \sin(\theta-\varphi) + 3\varphi^2 - 2\varphi &= 0\,.\end{aligned}$$

Tenuto conto degli intervalli di variazione di θ e φ si trovano le due soluzioni

$$\theta = 0\,, \qquad \varphi = 0\,,$$

e

$$\theta = \frac{2}{3}\,, \qquad \psi = \frac{2}{3}\,.$$

Per studiare la stabilità di queste due posizioni di equilibrio calcoliamo l'Hessiana D^2U del potenziale:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} &= 4k\cos(\theta-\varphi)\,,\\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta\partial\varphi} &= -4k\cos(\theta-\varphi)\,,\\ \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} &= 4k\big(\cos(\theta-\varphi) - 6\varphi + 2\big)\,.\end{aligned}$$

Dunque:

$$D^2U(0,0) = 4k\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\,,$$

che ha determinante positivo e termini diagonali positivi. Perciò $D^2U(0,0)$ è definita positiva, e (0,0) risulta instabile.
Infine

$$D^2U\Big(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\Big) = 4k\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\,,$$

ha determinante negativo, quindi è indefinita e (2/3,2/3) è instabile.
R.

$$(\theta,\varphi) = (0{,}0)\,, \qquad \textit{equilibrio instabile;}$$

$$(\theta,\varphi) = \Big(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\Big)\,, \qquad \textit{equilibrio instabile.}$$

12. [19/7/2006 (ex)II] Consideriamo un sistema a vincoli olonomi lisci e fissi, la cui lagrangiana sia

$$\mathcal{L} = (3+\varphi^2)\dot\theta^2 + (4+\theta^2)\dot\varphi^2 - k\big(\cos(\varphi-\theta) - 2\theta^2 + 2\theta^3\big)\,,$$

ove k è una costante positiva, e

$$-1 < \theta < 1\,, \qquad -1 < \varphi < 1\,.$$

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
R.

$$(\theta,\varphi) = (0{,}0)\,, \qquad \textit{equilibrio instabile;}$$
$$(\theta,\varphi) = \Big(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\Big)\,, \qquad \textit{equilibrio instabile.}$$

13. [13/12/2006 (ex)I] Un'asta AB di massa m e lunghezza R è vincolata in modo che A abbia coordinate

$$\big(L\cos(\omega t), L\sin(\omega t), 0\big)\,,$$

nel sistema di riferimento fisso $(O,\boldsymbol{e}_i)$.
Sull'asta agisce il peso, diretto nel verso negativo dell'asse x_3.
Si scrivano le equazioni che determinano le posizioni di equilibrio di AB relative al sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O,\boldsymbol{u}_i)$, ove $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t, e che ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_3$; in particolare

$$\overrightarrow{OA} = L\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

Soluzione
In $\mathcal{S}$, su AB agiscono la forza peso e le forze di trascinamento e di Coriolis. Tuttavia quest'ultima si annulla all'equilibrio. Quindi l'equilibrio può essere studiato mediante il potenziale

$$U = U_{\text{peso}} + U_{\scriptscriptstyle T}\,.$$

Sia C il punto medio dell'asta; allora, se indichiamo

$$\overrightarrow{OC} = x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2 + z\boldsymbol{u}_3\,,$$

vale

$$U_{\text{peso}} = -mgz\,.$$

La distribuzione di forza di trascinamento è data da

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = -\frac{m}{R}[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OP})]\,\mathrm{d}s = -\frac{m}{R}\omega^2(x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2)\,\mathrm{d}s\,.$$

Qui le x_i indicano le coordinate in $\mathcal{S}$. Dunque, per calcolare $U_{\scriptscriptstyle T}$ dobbiamo integrare su AB la distribuzione di potenziale

$$\frac{m}{R}\frac{\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2)\,\mathrm{d}s\,.$$

Conviene introdurre una parametrizzazione di AB in termini delle coordinate lagrangiane φ, θ, che possono essere pensate come le coordinate sferiche di B nella sfera di centro A e raggio R:

$$\overrightarrow{AP(s)} = s(\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + \cos\theta\boldsymbol{u}_3)\,, \qquad 0 \le s \le R\,.$$

ove l'intervallo di variazione di φ sarà di lunghezza 2π, e quello di θ sarà $(0,\pi)$. Quindi

$$
\begin{aligned}
x_1(s)^2 + x_2(s)^2 &= (L + s\cos\varphi\sin\theta)^2 + (s\sin\varphi\sin\theta)^2 \\
&= L^2 + s^2\sin^2\theta + 2Ls\cos\varphi\sin\theta\,,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{T}} &= \int_0^R \frac{m}{R}\frac{\omega^2}{2}[L^2 + s^2\sin^2\theta + 2Ls\cos\varphi\sin\theta]\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{m}{2R}\omega^2[L^2R + \frac{R^3}{3}\sin^2\theta + LR^2\cos\varphi\sin\theta]\,.
\end{aligned}
$$

Infine

$$
U = -mg\frac{R}{2}\cos\theta + m\omega^2\frac{R^2}{6}\sin^2\theta + m\omega^2\frac{LR}{2}\cos\varphi\sin\theta + m\omega^2\frac{L^2}{2}\,,
$$

e le equazioni cercate si trovano nella forma $U_\varphi = 0$, $U_\theta = 0$.
R.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial\varphi} &= -m\omega^2\frac{LR}{2}\sin\varphi\sin\theta = 0\,, \\
\frac{\partial U}{\partial\theta} &= mg\frac{R}{2}\sin\theta + m\omega^2\frac{R^2}{3}\sin\theta\cos\theta + m\omega^2\frac{LR}{2}\cos\varphi\cos\theta = 0\,.
\end{aligned}
$$

14. [19/7/2007 (ex)I] Un sistema vincolato ha lagrangiana

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2) - \alpha\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big)^4 + \beta\cos(\varphi - \theta)\,,
$$

ove le coordinate lagrangiane sono

$$
(\varphi,\theta) \in (0,\pi)\times(0,\pi)\,,
$$

e α, β, m e R sono costanti positive.
Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema, studiandone la stabilità.
Soluzione
Il potenziale è

$$
U^{\mathrm{L}} = -\alpha\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big)^4 + \beta\cos(\varphi - \theta)\,.
$$

Dunque

$$
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = -\beta\sin(\varphi - \theta)\,, \tag{1}
$$

$$
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} = -4\alpha\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big)^3 + \beta\sin(\varphi - \theta)\,. \tag{2}
$$

Segue che all'equilibrio

$$
\sin(\varphi - \theta) = 0\,,
$$

ossia, visto l'insieme di variazione delle (φ, θ),

$$\varphi = \theta \,, \qquad o \qquad \varphi = \pi - \theta \,.$$

Per la (2) *si ha dunque equilibrio se e solo se*

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \,, \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \,.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U^{\text{L}}}{\partial \varphi^2} &= -\beta \cos(\varphi - \theta) \,, \\
\frac{\partial^2 U^{\text{L}}}{\partial \varphi \partial \theta} &= \beta \cos(\varphi - \theta) \,, \\
\frac{\partial^2 U^{\text{L}}}{\partial \theta^2} &= -12\alpha \Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big)^2 - \beta \cos(\varphi - \theta) \,.
\end{aligned}$$

Quindi nel punto di equilibrio la matrice hessiana del potenziale è

$$D^2 U^{\text{L}} \Big(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \,,$$

che ha determinante nullo.
Tuttavia si verifica subito che

$$U^{\text{L}} \Big(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) = \beta \geq -\alpha \Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big)^4 + \beta \cos(\varphi - \theta) = U^{\text{L}}(\varphi, \theta) \,,$$

e vale l'uguaglianza solo se

$$\varphi = \theta = \frac{\pi}{2} \,.$$

Perciò $(\pi/2, \pi/2)$ *è un punto di massimo isolato per* U^{L} *e quindi è un punto di equilibrio stabile.*
R.

$$(\varphi, \theta) = \Big(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \,, \qquad \textit{stabile.}$$

15. [19/7/2007 (ex)II] Un sistema vincolato ha lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m R^2 (\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 + \dot\varphi \dot\theta) - \gamma \Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big)^6 + \delta \cos(\theta - \varphi) \,,$$

ove le coordinate lagrangiane sono

$$(\varphi, \theta) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \,,$$

e γ, δ, m e R sono costanti positive.
Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema, studiandone la stabilità.
R.

$$\Big(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \,, \qquad \textit{stabile}.$$

16. [17/9/2007 (ex)I] Due aste rigide AB e CD ciascuna di lunghezza $2L$ e massa m sono sottoposte ai vincoli

- A coincide con l'origine O del sistema fisso;
- gli estremi B e C coincidono;
- le due aste giacciono sul piano $x_3 = 0$.

Sulle due aste agiscono la forza peso (diretta nel verso negativo dell'asse x_2), e una coppia di azione e reazione di forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_D = -k\overrightarrow{PD}\,, \qquad \boldsymbol{F}_P = -k\overrightarrow{DP}\,,$$

ove $k > 0$ è costante, e P è il punto medio di AB ($\boldsymbol{F}_D$ [rispettivamente, $\boldsymbol{F}_P$] è applicata in D [rispettivamente, in P]).
Trovare le equazioni che danno le posizioni di equilibrio, e ricavarne che in tali posizioni il centro di massa del sistema appartiene all'asse x_2.
Soluzione
Dato che tutte le forze sono conservative, troviamo le posizioni di equilibrio come punti critici del potenziale.
Scegliamo come coordinate lagrangiane gli angoli φ, e rispettivamente θ, formati da $\overrightarrow{AB}$, e rispettivamente da $\overrightarrow{CD}$, con $\boldsymbol{e}_1$, con

$$\varphi\,,\theta \in (0,2\pi)\,.$$

Allora, se M è il punto medio di $\overrightarrow{CD}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= L(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,,\\
\overrightarrow{OD} &= 2L(\cos\varphi + \cos\theta, \sin\varphi + \sin\theta, 0)\,,\\
\overrightarrow{OM} &= L(2\cos\varphi + \cos\theta, 2\sin\varphi + \sin\theta, 0)\,.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\overrightarrow{PD} = L(\cos\varphi + 2\cos\theta, \sin\varphi + 2\sin\theta, 0)\,,$$

e

$$\begin{aligned}
U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) &= -mgL\sin\varphi - mgL(2\sin\varphi + \sin\theta)\\
&\qquad - \frac{1}{2}kL^2\big[(\cos\varphi + 2\cos\theta)^2 + (\sin\varphi + 2\sin\theta)^2\big]\\
&= -mgL(3\sin\varphi + \sin\theta) - \frac{1}{2}kL^2[5 + 4\cos(\varphi - \theta)]\,.
\end{aligned}$$

Quindi le equazioni cercate sono

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= -3mgL\cos\varphi + 2kL^2\sin(\varphi - \theta) = 0\,,\\
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= -mgL\cos\theta - 2kL^2\sin(\varphi - \theta) = 0\,.
\end{aligned}$$

Sommando le due equazioni si ha

$$3\cos\varphi + \cos\theta = 0\,,$$

e infatti il centro di massa del sistema è

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}) = \frac{L}{2}(3\cos\varphi + \cos\theta, 3\sin\varphi + \sin\theta, 0)\,.$$

R.

$$\begin{aligned} -3mgL\cos\varphi + 2kL^2\sin(\varphi - \theta) = 0\,, \\ -mgL\cos\theta - 2kL^2\sin(\varphi - \theta) = 0\,. \end{aligned}$$

17. [17/9/2007 (ex)I] Un sistema vincolato da vincoli olonomi è soggetto a forze di potenziale

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = (\theta - \pi)^2\cos\varphi + \sin^2\varphi\,,$$

con $\theta \in (0,2\pi)$, $\varphi \in (\pi/2,3\pi/2)$ opportune coordinate lagrangiane.
Determinare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
SOLUZIONE
Si tratta di impostare il sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= 2(\theta - \pi)\cos\varphi = 0\,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= -(\theta - \pi)^2\sin\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi = 0\,, \end{aligned}$$

che ha, nel dominio prescritto per (θ, φ) l'unica soluzione

$$(\theta, \varphi) = (\pi, \pi)\,.$$

La matrice hessiana è data da

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta^2} &= 2\cos\varphi\,, \\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta\partial\varphi} &= -2(\theta - \pi)\sin\varphi\,, \\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi^2} &= -(\theta - \pi)^2\cos\varphi + 2\cos 2\varphi\,, \end{aligned}$$

e quindi in (π, π) si ha

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\pi, \pi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Perciò (π, π) è un punto sella, e pertanto corrisponde a un equilibrio instabile.
R.

$$(\theta, \varphi) = (\pi, \pi)\,, \qquad \textit{instabile.}$$

18. [17/9/2007 (ex)II] Due aste rigide AB e CD ciascuna di lunghezza $2L$ e massa m sono sottoposte ai vincoli

- A soddisfa
$$\overrightarrow{OA} = L\boldsymbol{e}_3\,,$$
ove O è l'origine del sistema fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$;
- gli estremi B e C coincidono;
- le due aste giacciono sul piano $x_2 = 0$.

Sulle due aste agiscono la forza peso (diretta nel verso negativo dell'asse x_3), e una coppia di azione e reazione di forze
$$\boldsymbol{F}_D = k\overrightarrow{PD}\,, \qquad \boldsymbol{F}_P = k\overrightarrow{DP}\,,$$
ove $k > 0$ è costante, e P è il punto medio di AB ($\boldsymbol{F}_D$ [rispettivamente, $\boldsymbol{F}_P$] è applicata in D [rispettivamente, in P]).
Trovare le equazioni che danno le posizioni di equilibrio, e ricavarne che in tali posizioni il centro di massa del sistema appartiene all'asse x_3.
R.
$$\begin{aligned} -3mgL\cos\varphi - 2kL^2\sin(\varphi - \theta) &= 0\,, \\ -mgL\cos\theta + 2kL^2\sin(\varphi - \theta) &= 0\,. \end{aligned}$$

19. [17/9/2007 (ex)II] Un sistema vincolato da vincoli olonomi è soggetto a forze di potenziale
$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = 2 - (\theta - \pi)^2\cos\varphi - \sin^2\varphi\,,$$
con $\theta \in (0{,}2\pi)$, $\varphi \in (\pi/2{,}3\pi/2)$ opportune coordinate lagrangiane.
Determinare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
R.
$$(\theta, \varphi) = (\pi, \pi)\,, \qquad \textit{instabile.}$$

20. [1/4/2008 (ex)I] Segnaposto.

21. [1/7/2008 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso (O, x_i) e inoltre ad avere l'estremo A sulla curva
$$x_2 = ax_1^2\,,$$
con $a > 0$ costante.
All'estremo B è applicata la forza elastica
$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{QB}\,,$$

ove $Q = (0, R, 0)$, e $k > 0$ è costante. Inoltre agisce la forza peso diretta nel verso negativo dell'asse x_2.
Scrivere il sistema che fornisce le posizioni di equilibrio.
SOLUZIONE
Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1A}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

e l'angolo φ tale che

$$\overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2)\,, \qquad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Allora

$$U^{\text{L}}_{\text{peso}} = -mg(L\sin\varphi + ax^2)\,,$$

e

$$U^{\text{L}}_{\text{el}} = -\frac{k}{2}\left|\overrightarrow{QB}\right|^2 = -\frac{k}{2}\Big[(x + 2L\cos\varphi)^2 + (R - ax^2 - 2L\sin\varphi)^2\Big]$$
$$= -\frac{k}{2}\Big[R^2 + 4L^2 + (1 - 2Ra)x^2 + a^2x^4 + 4Lx\cos\varphi + 4aLx^2\sin\varphi - 4RL\sin\varphi\Big]\,.$$

Infine le posizioni desiderate si ottengono come punti critici del potenziale

$$U^{\text{L}}(x, \varphi) = U^{\text{L}}_{\text{peso}}(x, \varphi) + U^{\text{L}}_{\text{el}}(x, \varphi)\,.$$

R.

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial x} = -2amgx - k(1 - 2Ra)x - 2ka^2x^3 - 2kL\cos\varphi - 4kaLx\sin\varphi = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} = -mgL\cos\varphi + 2kLx\sin\varphi - 2akLx^2\cos\varphi + 2kRL\cos\varphi = 0\,.$$

22. [1/7/2008 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso (O, x_i) e inoltre ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2 = -ax_1^2\,,$$

con $a > 0$ costante.
All'estremo B è applicata la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{QB}\,,$$

ove $Q = (0, -R, 0)$, e $k > 0$ è costante. Inoltre agisce la forza peso diretta nel verso positivo dell'asse x_2.
Scrivere il sistema che fornisce le posizioni di equilibrio.
R. *Se* $\overrightarrow{AB} = 2L(cos\varphi \boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi \boldsymbol{e}_2)$, *si ha*

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial x} = -2amgx - k(1 - 2Ra)x - 2ka^2x^3 - 2kL\cos\varphi - 4kaLx\sin\varphi = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} = -mgL\cos\varphi + 2kLx\sin\varphi - 2akLx^2\cos\varphi + 2kRL\cos\varphi = 0\,.$$

23. [12/1/2009 (ex)I] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot\varphi^2 + \alpha\beta\dot\varphi\dot\theta + \beta^2\dot\theta^2\Big] - \gamma e^{\theta^2}\cos^2\varphi\,,$$

con α, β, $\gamma > 0$ costanti e $\varphi \in (-\pi,\pi)$, $\theta \in (-\infty,\infty)$ coordinate lagrangiane. Determinare i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.

Soluzione

Il potenziale è

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = -\gamma e^{\theta^2}\cos^2\varphi\,.$$

I punti di equilibrio sono quindi le soluzioni del sistema

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = \gamma e^{\theta^2}\sin 2\varphi = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} = -2\gamma\theta e^{\theta^2}\cos^2\varphi = 0\,.$$

Le soluzioni sono quindi

$$\Big(-\frac{\pi}{2},\theta\Big)\,,\quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,,\qquad (0{,}0)\,,\qquad \Big(\frac{\pi}{2},\theta\Big)\,,\quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,.$$

La matrice hessiana è

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = 2\gamma\begin{pmatrix} e^{\theta^2}\cos 2\varphi & \theta e^{\theta^2}\sin 2\varphi \\ \theta e^{\theta^2}\sin 2\varphi & (1+2\theta^2)e^{\theta^2}\cos^2\varphi\end{pmatrix}\,.$$

Dunque

$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(-\frac{\pi}{2},\theta\Big) = 2\gamma e^{\theta^2}\operatorname{diag}(-1{,}0)\,,\quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,,\qquad D^2U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = 2\gamma\operatorname{diag}(1,-1)\,,$$
$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{\pi}{2},\theta\Big) = 2\gamma e^{\theta^2}\operatorname{diag}(1{,}0)\,,\quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,.$$

Nessuno dei punti è di equilibrio stabile: in $(0{,}0)$ *l'hessiana è indefinita; poi*

$$U^{\mathrm{L}}\Big(\pm\frac{\pi}{2},\theta\Big) = 0\,,\quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,,$$

per cui i punti $(\pm\pi/2,\theta)$ *non sono di massimo isolato.*

R.

$$\Big(-\frac{\pi}{2},\theta\Big)\,,\quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,,\qquad (0{,}0)\,,\qquad \Big(\frac{\pi}{2},\theta\Big)\,,\quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,.$$

Non ci sono punti di equilibrio stabile.

24. [12/1/2009 (ex)II] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot\varphi^2 + \alpha\beta\dot\varphi\dot\theta + \beta^2\dot\theta^2\Big] - \gamma e^{-\theta^2}\cos^2\varphi\,,$$

con α, β, $\gamma > 0$ costanti e $\varphi \in (-\pi,\pi)$, $\theta \in (-\infty,\infty)$ coordinate lagrangiane.

Determinare i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
R.

$$\Big(-\frac{\pi}{2},\theta\Big)\,, \quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,, \qquad (0{,}0)\,, \qquad \Big(\frac{\pi}{2},\theta\Big)\,, \quad \forall\theta\in\boldsymbol{R}\,.$$

Non ci sono punti di equilibrio stabile.

25. [15/7/2009 (ex)I] Una circonferenza γ di raggio R e centro C non omogenea ha densità ρ data da

$$\rho(P)=\rho_0\Big(1+\alpha\frac{\operatorname{dist}(P,P_0P_1)^2}{R^2}\Big)\,,$$

ove P_0 e P_1 sono punti fissati su γ, solidali con essa e diametralmente opposti, ossia P_0P_1 è un diametro solidale con γ. Qui α e ρ_0 sono costanti positive. Inoltre γ è vincolata:

- ad avere il centro C coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso;
- a giacere sul piano ruotante $\mathit{\Pi}$ di equazione

  $$x_1\sin\omega t-x_2\cos\omega t=0\,,$$

  ove $\omega>0$ è costante, e (x_i) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso.

Su γ agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_{P_0}=-k\overrightarrow{AP_0}\,,$$

applicata in P_0, ove A è il punto

$$\overrightarrow{OA}=R\boldsymbol{e}_3\,.$$

Trovare tutte le posizioni di equilibrio di γ rispetto al sistema $\mathcal{S}=(O,\boldsymbol{u}_i)$ ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1&=\cos\omega t\,\boldsymbol{e}_1+\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2&=-\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_1+\cos\omega t\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3&=\boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Soluzione

La normale a $\mathit{\Pi}$ coincide con $\boldsymbol{u}_2$. In $\mathcal{S}$ su γ agiscono la forza elastica $\boldsymbol{F}_{P_0}$ e quella di trascinamento $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$, oltre a quella di Coriolis che però è nulla all'equilibrio e perciò può venire qui ignorata.
Scriveremo dunque il potenziale in $\mathcal{S}$, visto che $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ risulterà conservativa. Scegliamo come coordinata lagrangiana l'angolo $\varphi\in(-\pi,\pi)$ formato da $\overrightarrow{CP_0}$ con $\boldsymbol{u}_1$: dunque la circonferenza è parametrizzata da

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi;\theta)=R\cos(\varphi+\theta)\boldsymbol{u}_1+R\sin(\varphi+\theta)\boldsymbol{u}_3\,,$$

ove θ indica l'angolo formato da $\overrightarrow{CP}$ con $\overrightarrow{CP_0}$: si noti che θ (al contrario di φ) riveste il ruolo di coordinata solidale con γ.
In particolare

$$\overrightarrow{AP_0} = R\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + R(\sin\varphi - 1)\boldsymbol{u}_3 \,,$$

per cui

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}\left|AP_0\right|^2 = -kR^2(1-\sin\varphi) \,.$$

Per calcolare la forza di trascinamento osserviamo che

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T}(\varphi;\theta) = \rho\omega^2 y_1 \,\mathrm{d}\mu \,,$$

ove (y_i) indica le coordinate in $\mathcal{S}$. Dunque

$$\mathrm{d}U_{\scriptscriptstyle T} = \rho\frac{\omega^2}{2}y_1^2\,\mathrm{d}\mu = \rho(\theta)\frac{\omega^2}{2}R^3\cos^2(\varphi+\theta)\,\mathrm{d}\theta = \rho_0\frac{\omega^2}{2}R^3(1+\alpha\sin^2\theta)\cos^2(\varphi+\theta)\,\mathrm{d}\theta \,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} U_{\scriptscriptstyle T}(\varphi) &= \rho_0\frac{\omega^2}{2}R^3\Big\{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(\varphi+\theta)\,\mathrm{d}\theta + \alpha\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta\cos^2(\varphi+\theta)\,\mathrm{d}\theta\Big\} \\ &= \rho_0\frac{\omega^2}{2}R^3\Big\{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos(2\varphi+2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta + \alpha\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,\frac{1+\cos(2\varphi+2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta\Big\} \\ &= \rho_0\frac{\omega^2}{2}R^3\Big\{\pi + \alpha\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2\theta\cos(2\varphi+2\theta)\,\mathrm{d}\theta\Big\} \\ &= \rho_0\frac{\omega^2}{2}R^3\Big\{\pi + \alpha\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{8}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(2\varphi+4\theta)+\cos 2\varphi]\,\mathrm{d}\theta\Big\} \\ &= \rho_0\frac{\omega^2}{2}R^3\Big\{\pi + \alpha\frac{\pi}{2} - \alpha\frac{\pi}{4}\cos 2\varphi\Big\} \,. \end{aligned}$$

Infine si può dunque porre

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = kR^2\sin\varphi - \frac{\omega^2}{8}\alpha R^3\rho_0\pi\cos 2\varphi \,.$$

Le posizioni di equilibrio corrispondono alle soluzioni della

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = kR^2\cos\varphi + \frac{\omega^2}{4}\alpha R^3\rho_0\pi\sin 2\varphi = 0 \,,$$

ossia alle soluzioni di

$$\Big(k + \frac{\omega^2}{4}\alpha R^3\rho_0\pi\sin\varphi\Big)\cos\varphi = 0 \,.$$

Queste sono

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \,, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \,, \qquad \varphi = \varphi_0 \,, \qquad \varphi = -\pi - \varphi_0 \,,$$

ove

$$\varphi_0 = -\arcsin\frac{4k}{\omega^2\alpha R\rho_0\pi} \,,$$

nel caso che le due ultime soluzioni siano ammissibili, cioè se

$$4k < \omega^2 \alpha R \rho_0 \pi \,.$$

R.

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \,, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \,.$$

Se

$$4k < \omega^2 \alpha R \rho_0 \pi \,,$$

allora posto

$$\varphi_0 = -\arcsin \frac{4k}{\omega^2 \alpha R \rho_0 \pi} \,,$$

si hanno anche le soluzioni

$$\varphi = \varphi_0 \,, \qquad \varphi = -\pi - \varphi_0 \,.$$

26. [15/7/2009 (ex)II] Una circonferenza γ di raggio R e centro C non omogenea ha densità ρ data da

$$\rho(P) = \rho_0 \Big(1 - \alpha \frac{\operatorname{dist}(P, P_0P_1)^2}{R^2} \Big) \,,$$

ove P_0 e P_1 sono punti fissati su γ, solidali con essa e diametralmente opposti, ossia P_0P_1 è un diametro solidale con γ. Qui $0 < \alpha < 1$ e $\rho_0 > 0$ sono costanti.
Inoltre γ è vincolata:

- ad avere il centro C coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso;
- a giacere sul piano ruotante $\mathit{\Pi}$ di equazione

  $$x_1 \sin \omega t - x_2 \cos \omega t = 0 \,,$$

  ove $\omega > 0$ è costante, e (x_i) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso.

Su γ agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_{P_0} = -k \overrightarrow{AP_0} \,,$$

applicata in P_0, ove A è il punto

$$\overrightarrow{OA} = R \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Trovare tutte le posizioni di equilibrio di γ rispetto al sistema $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove

$$\boldsymbol{u}_1 = \cos \omega t \, \boldsymbol{e}_1 + \sin \omega t \, \boldsymbol{e}_2 \,,$$
$$\boldsymbol{u}_2 = -\sin \omega t \, \boldsymbol{e}_1 + \cos \omega t \, \boldsymbol{e}_2 \,,$$
$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3 \,.$$

R.
$$\varphi = -\frac{\pi}{2}\,, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}\,.$$
Se
$$4k < \omega^2 \alpha R \rho_0 \pi\,,$$
allora posto
$$\varphi_0 = \arcsin \frac{4k}{\omega^2 \alpha R \rho_0 \pi}\,,$$
si hanno anche le soluzioni
$$\varphi = \varphi_0\,, \qquad \varphi = \pi - \varphi_0\,.$$

27. [20/11/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie
$$x_3 = -\alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, \qquad x_1^2 + x_2^2 > 0\,.$$
Il punto è soggetto alla forza peso
$$-mg\boldsymbol{e}_3\,,$$
e alla forza elastica
$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{AP}\,,$$
ove A è individuato da
$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_1\,.$$
Trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
SOLUZIONE
Scegliamo x_1 e x_2 come coordinate lagrangiane.
Allora i potenziali delle forze sono:
$$\begin{aligned} U_{\text{peso}} &= -mgx_3 = mg\alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, \\ U_{\text{el}} &= -\frac{k}{2}\left|\overrightarrow{AP}\right|^2 = -\frac{k}{2}[(x_1 - R)^2 + x_2^2 + \alpha^2(x_1^2 + x_2^2)]\,. \end{aligned}$$
Quindi, posto $U = U_{\text{peso}} + U_{\text{el}}$, si ha all'equilibrio
$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= mg\alpha\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - k(x_1 - R) - k\alpha^2 x_1 = 0\,, \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= mg\alpha\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - kx_2 - k\alpha^2 x_2 = 0\,. \end{aligned}$$
Moltiplicando la prima [seconda] di queste equazioni per x_2 [x_1] e sottraendo le due uguaglianze si ha $x_2 = 0$.
La prima equazione dà allora
$$mg\alpha\,\mathrm{sign}(x_1) - kx_1 + kR - k\alpha^2 x_1 = 0\,.$$

Si hanno allora due possibilità:

$$x_1 > 0\,, \qquad mg\alpha - kx_1 + kR - k\alpha^2 x_1 = 0\,, \tag{1}$$

e

$$x_1 < 0\,, \qquad -mg\alpha - kx_1 + kR - k\alpha^2 x_1 = 0\,. \tag{2}$$

La (1) *dà*

$$x_1 = \frac{mg\alpha + kR}{k + k\alpha^2} > 0\,.$$

Invece la (2) *dà*

$$x_1 = \frac{-mg\alpha + kR}{k + k\alpha^2} < 0$$

purché

$$mg\alpha > kR\,.$$

Per studiare la stabilità dell'equilibrio calcoliamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} &= mg\alpha\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - mg\alpha\frac{x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} - k - k\alpha^2\,,\\
\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} &= -mg\alpha\frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\\
\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} &= mg\alpha\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - mg\alpha\frac{x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} - k - k\alpha^2\,.
\end{aligned}$$

Quindi nella soluzione con $x_1 > 0$ *si ha*

$$D^2 U(x_1,0) = \begin{pmatrix} -k - k\alpha^2 & 0 \\ 0 & \frac{mg\alpha}{x_1} - k - k\alpha^2 \end{pmatrix}\,,$$

che risulta subito definita negativa per la definizione della soluzione $(x_1,0)$.
Nella eventuale soluzione con $x_1 < 0$ *si ha*

$$D^2 U(x_1,0) = \begin{pmatrix} -k - k\alpha^2 & 0 \\ 0 & \frac{mg\alpha}{|x_1|} - k - k\alpha^2 \end{pmatrix}\,,$$

che risulta subito indefinita per la definizione della soluzione $(x_1,0)$.
R.

$$x_1 = \frac{mg\alpha + kR}{k + k\alpha^2}\,, \quad x_2 = 0\,; \qquad \textit{stabile;}$$

$$x_1 = \frac{-mg\alpha + kR}{k + k\alpha^2}\,, \quad x_2 = 0\,, \quad \textit{solo se } mg\alpha > kR; \qquad \textit{instabile.}$$

28. [25/1/2010 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di raggio R, centro C e massa M è vincolata a giacere sul piano fisso

$$x_3 = 0\,.$$

Su di essa agiscono le forze

$$\boldsymbol{F}_A = -k_1\overrightarrow{OA}\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k_2\overrightarrow{OB}\,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e i punti A e B, solidali con γ, sono tali che

$$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} = \frac{R}{2}\boldsymbol{u}_1\,;$$

qui $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con γ tale che $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$. Infine le costanti k_i soddisfano

$$0 < k_1 < k_2\,.$$

- Si scriva la lagrangiana della circonferenza.
- Si determinino tutte le posizioni di equilibrio della circonferenza.

Soluzione

A) Usiamo come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1C} \in \boldsymbol{R}\,, \qquad y = x_{2C} \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi)\,,$$

tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

L'energia cinetica, per il teorema di König, è

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2\,.$$

Il potenziale è

$$\begin{aligned}
U^{\text{L}} = -\frac{k_1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 - \frac{k_2}{2}\left|\overrightarrow{OB}\right|^2&\\
&= -\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\beta}{2}R(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + \text{costante}\,,
\end{aligned}$$

ove si sono definite le costanti positive

$$\alpha = k_1 + k_2\,, \qquad \beta = k_2 - k_1\,.$$

B) Per determinare le posizioni di equilibrio dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial x} &= -\alpha x + \frac{\beta}{2}R\cos\varphi = 0\,,\\
\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial y} &= -\alpha y + \frac{\beta}{2}R\sin\varphi = 0\,,\\
\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} &= \frac{\beta}{2}R(-x\sin\varphi + y\cos\varphi) = 0\,.
\end{aligned}$$

Le prime due equazioni danno

$$x = \frac{\beta R}{2\alpha} \cos\varphi \,, \qquad y = \frac{\beta R}{2\alpha} \sin\varphi \,,$$

che sostituite nella terza la soddisfano identicamente, per ogni valore di φ. Quindi le posizioni di equilibrio sono tutte e sole quelle con C sulla circonferenza di centro O e raggio $\beta R/(2\alpha)$ (che è minore di $R/2$), e tali che A e B siano allineati con $\overrightarrow{OC}$, con O tra B e C.

R.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\beta}{2} R(x\cos\varphi + y\sin\varphi) \,.$$

Qui $\alpha = k_1 + k_2$, $\beta = k_2 - k_1$.
Le posizioni di equilibrio sono tutte e sole quelle con

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\beta R}{2\alpha} \boldsymbol{u}_1 \,.$$

29. [25/1/2010 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = \alpha \cos\left[\beta \sqrt{x^2 + y^2}\right] , \qquad x^2 + y^2 > 0 \,,$$

ove $\alpha > 0$, $\beta > 1$ sono costanti. P è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 \,,$$

e alla forza

$$\boldsymbol{F}_1 = k\boldsymbol{e}_1 \,,$$

con $k > 0$ costante.
Determinare tutte le posizioni di equilibrio per P, e studiarne la stabilità.
Soluzione
Usiamo le coordinate cilindriche

$$r \in (0, \infty) \,, \qquad \varphi \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \Big) \,,$$

come coordinate lagrangiane, cosicché

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(r, \varphi) = r\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + \alpha\cos(\beta r)\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Il potenziale è

$$U = -mgx_3 + kx_1 \,,$$

e quindi in coordinate lagrangiane

$$U^{\mathrm{L}}(r, \varphi) = -mg\alpha\cos(\beta r) + kr\cos\varphi \,.$$

Dunque i punti di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial r} = mg\alpha\beta\sin(\beta r) + k\cos\varphi = 0 \,,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = -kr\sin\varphi = 0 \,.$$

Le soluzioni sono quindi date da

$$\sin(\beta r) = -\frac{k}{mg\alpha\beta}\,, \qquad \varphi = 0\,;$$
$$\sin(\beta r) = \frac{k}{mg\alpha\beta}\,, \qquad \varphi = \pi\,.$$

Dobbiamo quindi assumere, per l'esistenza di punti di equilibrio, che

$$\frac{k}{mg\alpha\beta} \le 1\,,$$

caso in cui tali punti sono dati da

$$(-r_0, 0)\,, \qquad \Big(\frac{\pi}{\beta} + r_0, 0\Big)\,;$$
$$(r_0, \pi)\,, \qquad \Big(\frac{\pi}{\beta} - r_0, \pi\Big)\,;$$

qui si è posto

$$r_0 = \frac{1}{\beta} \arcsin \frac{k}{mg\alpha\beta} \in \Big(0, \frac{\pi}{2\beta}\Big]\,.$$

La matrice hessiana è

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} mg\alpha\beta^2 \cos(\beta r) & -k \sin\varphi \\ -k \sin\varphi & -kr \cos\varphi \end{pmatrix}\,.$$

Dunque si ha nei vari punti di equilibrio:

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(-r_0, 0) = \begin{pmatrix} mg\alpha\beta^2 \cos(\beta r_0) & 0 \\ 0 & -kr_0 \end{pmatrix}\,,$$

matrice indefinita, equilibrio instabile.

$$D^2 U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{\pi}{\beta} + r_0, 0\Big) = \begin{pmatrix} -mg\alpha\beta^2 \cos(\beta r_0) & 0 \\ 0 & -kr_0 \end{pmatrix}\,,$$

matrice definita negativa, equilibrio stabile.

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(r_0, \pi) = \begin{pmatrix} mg\alpha\beta^2 \cos(\beta r_0) & 0 \\ 0 & kr_0 \end{pmatrix}\,,$$

matrice definita positiva, equilibrio instabile.

$$D^2 U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{\pi}{\beta} - r_0, \pi\Big) = \begin{pmatrix} -mg\alpha\beta^2 \cos(\beta r_0) & 0 \\ 0 & kr_0 \end{pmatrix}\,,$$

matrice indefinita, equilibrio instabile.
R. *I punti di equilibrio esistono se*

$$\frac{k}{mg\alpha\beta} \le 1\,;$$

in questa ipotesi, posto

$$r_0 = \frac{1}{\beta} \arcsin \frac{k}{mg\alpha\beta} \in \Big(0, \frac{\pi}{2\beta}\Big]\,,$$

i punti di equilibrio sono

$$(-r_0, 0)\,, \qquad \Big(\frac{\pi}{\beta} + r_0, 0\Big)\,;$$
$$(r_0, \pi)\,, \qquad \Big(\frac{\pi}{\beta} - r_0, \pi\Big)\,;$$

solo il punto $(r_0 + \pi/\beta{,}0)$ *è stabile.*

30. [25/1/2010 (ex)II] Una circonferenza materiale γ di raggio R, centro C e massa M è vincolata a giacere sul piano fisso

$$x_3 = 0\,.$$

Su di essa agiscono le forze

$$\boldsymbol{F}_A = -k_1\overrightarrow{OA}\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k_2\overrightarrow{OB}\,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e i punti A e B, solidali con γ, sono tali che

$$-\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} = \frac{3}{2}R\boldsymbol{u}_1\,;$$

qui $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con γ tale che $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$. Infine le costanti k_i soddisfano

$$0 < k_1 < k_2\,.$$

- Si scriva la lagrangiana della circonferenza.
- Si determinino tutte le posizioni di equilibrio della circonferenza.

R.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2) + \frac{3\beta}{2}R(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\,.$$

Qui $\alpha = k_1 + k_2$, $\beta = k_2 - k_1$.
Le posizioni di equilibrio sono tutte e sole quelle con

$$\overrightarrow{OC} = -\frac{3\beta R}{2\alpha}\boldsymbol{u}_1\,.$$

31. [25/1/2010 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = -\alpha\cos\big[\beta\sqrt{x^2 + y^2}\big]\,, \qquad x^2 + y^2 > 0\,,$$

ove $\alpha > 0$, $\beta > 1$ sono costanti. P è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,,$$

e alla forza

$$\boldsymbol{F}_1 = k\boldsymbol{e}_1 \,,$$

con $k > 0$ costante.
Determinare tutte le posizioni di equilibrio per P, e studiarne la stabilità.
R. *I punti di equilibrio esistono se*

$$\frac{k}{mg\alpha\beta} \leq 1 \,;$$

in questa ipotesi, posto

$$r_0 = \frac{1}{\beta} \arcsin \frac{k}{mg\alpha\beta} \in \Big[-\frac{\pi}{2\beta}, 0 \Big) \,,$$

i punti di equilibrio sono

$$(-r_0, 0) \,, \qquad \Big(\frac{\pi}{\beta} + r_0, 0 \Big) \,;$$
$$(r_0, \pi) \,, \qquad \Big(\frac{\pi}{\beta} - r_0, \pi \Big) \,;$$

solo il punto (r_0, π) *è stabile.*

32. [22/2/2010 (ex)I] Un'asta AB di massa M e lunghezza $2L$ è vincolata ad avere l'estremo A sulla parabola

$$x_2 = \alpha x_1^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

e a giacere sul piano $x_3 = 0$. Qui α è una costante positiva.
Sull'asta agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_2.
Trovare tutte le posizioni di equilibrio dell'asta, e studiarne la stabilità.
Soluzione
Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1A} \in \boldsymbol{R} \,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi) \,,$$

tale che

$$\overrightarrow{AB} = 2L \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + 2L \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Il potenziale del peso è

$$U^{\mathrm{L}} = -mgx_{2G} = -mg(\alpha x^2 + 2L \sin\varphi) \,.$$

Troviamone i punti critici; dato che

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} = -2mg\alpha x \,,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = -2mgL \cos\varphi \,,$$

i punti critici sono

$$\Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \,, \qquad \Big(0, -\frac{\pi}{2}\Big) \,.$$

È poi facile vedere in modo diretto per la forma di $U^{\mathrm{L}}(x,\varphi)$ che $(0,-\pi/2)$ è un punto di massimo isolato, mentre $(0,\pi/2)$ è un punto sella. Quindi solo il primo è di equilibrio stabile.
R.

$$\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \textit{(instabile);}\qquad \Big(0,-\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \textit{(stabile).}$$

33. [22/2/2010 (ex)II] Un'asta AB di massa M e lunghezza $2L$ è vincolata ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2=\alpha x_1^4\,,\qquad x_3=0\,,$$

e a giacere sul piano $x_3=0$. Qui α è una costante positiva.
Sull'asta agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_2.
Trovare tutte le posizioni di equilibrio dell'asta, e studiarne la stabilità.
R.

$$\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \textit{(instabile);}\qquad \Big(0,-\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \textit{(stabile).}$$

34. [9/4/2010 (ex)I] Un sistema olonomo ha potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta)=\frac{\alpha\varphi^2}{\beta+\theta^2}+\frac{\beta\theta^2}{\alpha+\varphi^2}\,,$$

con $\varphi\in\boldsymbol{R}$, $|\theta|<\sqrt{|\beta|}$. Qui $\alpha>0$ e $\beta<0$ sono costanti.
Determinare tutte le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
Soluzione
Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi}&=\frac{2\alpha\varphi}{\beta+\theta^2}-\frac{2\beta\theta^2\varphi}{(\alpha+\varphi^2)^2}\,,\\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta}&=-\frac{2\alpha\varphi^2\theta}{(\beta+\theta^2)^2}+\frac{2\beta\theta}{\alpha+\varphi^2}\,.\end{aligned}$$

Uguagliando a zero entrambe le derivate si ottiene, se $\theta=0$,

$$(\varphi,\theta)=(0{,}0)\,.$$

Se invece $\theta\neq 0$,

$$\frac{2\beta}{\alpha+\varphi^2}=\frac{2\alpha\varphi^2}{(\beta+\theta^2)^2}\,,$$

che è impossibile per le ipotesi sul segno di α e β, e sul dominio di θ.
Dunque l'unica soluzione è $(0{,}0)$. Per la matrice Hessiana si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi^2}&=\frac{2\alpha}{\beta+\theta^2}-\frac{2\beta\theta^2}{(\alpha+\varphi^2)^2}+\frac{8\beta\varphi^2\theta^2}{(\alpha+\varphi^2)^3}\,,\\ \frac{\partial^2U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi\partial\theta}&=-\frac{4\alpha\varphi\theta}{(\beta+\theta^2)^2}-\frac{4\beta\varphi\theta}{(\alpha+\varphi^2)^2}\,,\\ \frac{\partial^2U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta^2}&=\frac{2\beta}{\alpha+\varphi^2}-\frac{2\alpha\varphi^2}{(\beta+\theta^2)^2}+\frac{8\alpha\varphi^2\theta^2}{(\beta+\theta^2)^3}\,,\end{aligned}$$

da cui

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} 2\alpha\beta^{-1} & 0 \\ 0 & 2\alpha^{-1}\beta \end{pmatrix},$$

che è definita negativa. Dunque la posizione di equilibrio è stabile.
R. *L'unica posizione di equilibrio è* $(\varphi, \theta) = (0{,}0)$, *che è stabile.*

35. [8/7/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 x_2 .$$

Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_3$, e su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP},$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso. Qui α e k sono costanti positive.
Trovare condizioni su k, m, g, α perché il punto O sia di equilibrio stabile.
Soluzione
Il potenziale è

$$U = -\frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \alpha^2 x_1^2 x_2^2) - mg\alpha x_1 x_2 .$$

Dunque

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -kx_1 - k\alpha^2 x_1 x_2^2 - mg\alpha x_2 ,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = -kx_2 - k\alpha^2 x_1^2 x_2 - mg\alpha x_1 ,$$

e

$$D^2U(0{,}0) = \begin{pmatrix} -k & -mg\alpha \\ -mg\alpha & -k \end{pmatrix}.$$

Dunque la matrice hessiana è definita negativa se e solo se

$$\det D^2U(0{,}0) = k^2 - m^2 g^2 \alpha^2 > 0 .$$

R.

$$k > mg\alpha .$$

36. [7/9/2010 (ex)I] Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata ad avere l'estremo A sulla superficie

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 ,$$

e a rimanere ortogonale a tale superficie, in modo che

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = R < \left|\overrightarrow{OB}\right| = R + 2L ,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Sull'asta agiscono il peso, diretto come $-\boldsymbol{e}_3$, e la forza

$$\boldsymbol{F}_B = k\boldsymbol{e}_1 \,,$$

applicata in B. Qui R e k sono costanti positive.

1. Scrivere la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di AB in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

2. Trovare le posizioni di equilibrio dell'asta.

SOLUZIONE
Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$\varphi \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \Big) \,, \qquad \theta \in (0, \pi) \,,$$

in modo che

$$\overrightarrow{OA} = R\cos\varphi \sin\theta \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \sin\theta \boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Il versore di $\overrightarrow{AB}$ *è dunque*

$$\boldsymbol{u} = \cos\varphi \sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \sin\theta \boldsymbol{e}_2 + \cos\theta \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{u} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{u} \times \dot\varphi(-\sin\varphi \sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \sin\theta \boldsymbol{e}_2) \\
&\quad + \boldsymbol{u} \times \dot\theta(\cos\varphi \cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \cos\theta \boldsymbol{e}_2 - \sin\theta \boldsymbol{e}_3) \\
= \dot\varphi(-\cos\varphi\cos\theta\sin\theta \boldsymbol{e}_1 &- \sin\varphi\cos\theta\sin\theta \boldsymbol{e}_2 + \sin^2\theta \boldsymbol{e}_3) + \dot\theta(-\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2) \,.
\end{aligned}$$

B) Calcoliamo il potenziale delle forze. Si ha

$$U_{\mathrm{peso}} = -mgx_{3C} = -mg[R\cos\theta + L\cos\theta] \,,$$

ove C è il centro dell'asta. Poi si ha

$$U_{\boldsymbol{F}} = kx_{1B} = k[R\cos\varphi\sin\theta + 2L\cos\varphi\sin\theta] \,.$$

Dunque

$$U = -mg(R+L)\cos\theta + k(R+2L)\cos\varphi\sin\theta \,.$$

Cerchiamo i punti critici

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \theta} &= mg(R+L)\sin\theta + k(R+2L)\cos\varphi\cos\theta \,, \\
\frac{\partial U}{\partial \varphi} &= -k(R+2L)\sin\varphi\sin\theta \,.
\end{aligned}$$

Dato che $\sin\theta = 0$ è escluso dal dominio di variabilità di θ, si ha dalla seconda equazione

$$\sin\varphi = 0 \qquad \textit{ossia} \qquad \varphi \in \{0, \pi\} \,.$$

Usando la prima equazione si ottiene allora nei due casi

$$
\begin{aligned}
\varphi = 0\,, &\qquad \operatorname{tg}\theta = -\frac{k(R+2L)}{mg(R+L)}\,;\\
\varphi = \pi\,, &\qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{k(R+2L)}{mg(R+L)}\,.
\end{aligned}
$$

R.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi(-\cos\varphi\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + \sin^2\theta\boldsymbol{e}_3)&\\
+\dot\theta(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2)\,.&
\end{aligned}
$$

Posizioni di equilibrio:

$$
\begin{aligned}
\varphi = 0\,, &\qquad \theta = \pi - \operatorname{arctg}\frac{k(R+2L)}{mg(R+L)}\,;\\
\varphi = \pi\,, &\qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{k(R+2L)}{mg(R+L)}\,.
\end{aligned}
$$

37. [20/1/2014 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere sul piano ruotante (y_1, y_3) e ad avere l'estremo A sulla parabola solidale con tale piano

$$
y_3 = \alpha y_1^2\,, \qquad y_1 \in \boldsymbol{R}\,,
$$

ove $\alpha > 0$ è una costante assegnata e (y_h) denota le coordinate del sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$. Qui O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}
$$

con $\omega > 0$ costante. Sull'asta agisce una forza elastica di richiamo applicata nel suo centro di massa C

$$
\boldsymbol{F}_C = -k\overrightarrow{C'C}\,,
$$

ove C' è la proiezione ortogonale di C sull'asse y_1 e $k > 0$ è costante.
Si scrivano le equazioni che danno le eventuali posizioni di equilibrio rispetto a $\mathcal{S}$.
R.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} &= -k\alpha(\alpha x^2 + L\sin\theta)x + M\omega^2(x + L\cos\theta) = 0\,,\\
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} &= -kL(\alpha x^2 + L\sin\theta)\cos\theta + M\omega^2\Big(-Lx\sin\theta - \frac{2}{3}L^2\sin 2\theta\Big) = 0\,.
\end{aligned}
$$

38. [20/1/2014 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere sul piano ruotante (y_1, y_3) e ad avere l'estremo A sulla parabola solidale con tale piano

$$y_3 = \alpha y_1^2 \,, \qquad y_1 \in \boldsymbol{R} \,,$$

ove $\alpha > 0$ è una costante assegnata e (y_h) denota le coordinate del sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$. Qui O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

con $\omega > 0$ costante. Sull'asta agisce il peso nel verso negativo dell'asse y_3. Si scrivano le equazioni che danno le eventuali posizioni di equilibrio rispetto a $\mathcal{S}$.

Soluzione

Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$x = y_{1A} \in \boldsymbol{R} \,, \qquad \theta \in (-\pi, \pi) \,,$$

tali che

$$\overrightarrow{AB} = 2L \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + 2L \sin\theta \boldsymbol{u}_3 \,.$$

Nel sistema $\mathcal{S}$ all'equilibrio agiscono la forza peso e la forza di trascinamento. La distribuzione di potenziale in coordinate lagrangiane è data da

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U^{\mathrm{L}}(x, \theta; s) = -\frac{M}{2L} g y_3 \,\mathrm{d}s + \frac{M}{2L} \omega^2 y_1^2 \,\mathrm{d}s \\ = -\frac{M}{2L} g(\alpha x^2 + s \sin\theta) \,\mathrm{d}s + \frac{M}{4L} \omega^2 (x + s\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}s \,, \end{aligned}$$

ove $s \in [0{,}2L]$ è l'ascissa lungo AB.
Il potenziale si ottiene integrando

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{L}}(x, \theta) = \int_0^{2L} \mathrm{d}U^{\mathrm{L}}(x, \theta; s) = -Mg(\alpha x^2 + L \sin\theta) \\ + M\omega^2 \Big(\frac{x^2}{2} + Lx \cos\theta + \frac{2}{3} L^2 \cos^2\theta \Big) \,. \end{aligned}$$

Come è noto le equazioni che danno le posizioni di equilibrio sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} &= -2Mg\alpha x + M\omega^2 x + M\omega^2 L \cos\theta = 0 \,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} &= -MgL\cos\theta - M\omega^2 Lx \sin\theta - \frac{2}{3} M\omega^2 L^2 \sin 2\theta = 0 \,. \end{aligned}$$

L'esercizio è risolto; comunque proseguiamo ancora l'indagine del sistema ottenuto.

A) Supponiamo $\omega^2 \neq 2\alpha g$. *Allora la prima equazione dà*

$$x = \frac{\omega^2 L \cos\theta}{2\alpha g - \omega^2} .$$

Sostituendo nella seconda si ottiene

$$\cos\theta \Big[g + \frac{\omega^4 L}{2\alpha g - \omega^2} \sin\theta + \frac{4}{3} \omega^2 L \sin\theta \Big] = 0 . \qquad (1)$$

A.1) Se $\cos\theta = 0$ *si ottengono le soluzioni* (x, θ):

$$\Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) , \qquad \Big(0, -\frac{\pi}{2}\Big) .$$

A.2) Se $\cos\theta \neq 0$ *e se il coefficiente di* $\sin\theta$ *in* (1) *non è nullo, si ottengono anche le soluzioni*

$$\sin\theta = \frac{g}{\frac{\omega^4 L}{\omega^2 - 2\alpha g} - \frac{4}{3}\omega^2 L} =: z_0 .$$

Dobbiamo supporre perché esistano soluzioni a questa equazione che $|z_0| \leq 1$.
B) Se invece $\omega^2 = 2\alpha g$ *dalla prima equazione si ottiene* $\cos\theta = 0$ *e dalla seconda quindi* $x = 0$. *Perciò le soluzioni coincidono con quelle trovate nel caso A.1.*
R.

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial x} = -2Mg\alpha x + M\omega^2 x + M\omega^2 L \cos\theta = 0 ,$$
$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \theta} = -MgL\cos\theta - M\omega^2 L x \sin\theta - \frac{2}{3} M\omega^2 L^2 \sin 2\theta = 0 .$$

39. [19/6/2014 (ex)I] Un sistema olonomo è soggetto al potenziale

$$U^{\text{L}}(\varphi, \theta) = \alpha\varphi^4 - 2\alpha\beta\varphi^2 \cos\theta + \beta\cos^2\theta ,$$

con

$$\theta \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \Big) , \qquad \varphi \in \boldsymbol{R} ,$$

e α, $\beta > 1$.
Si trovino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.
Soluzione
Si ha

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} = 4\alpha\varphi^3 - 4\alpha\beta\varphi\cos\theta ,$$
$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \theta} = 2\alpha\beta\varphi^2 \sin\theta - 2\beta\cos\theta\sin\theta .$$

I punti critici del potenziale, che corrispondono alle posizioni di equilibrio, si trovano come segue. La prima equazione $U^{\text{L}}_{\varphi} = 0$ *è risolta per:*

$$\textit{i)} \quad \varphi = 0 , \qquad \textit{oppure} \qquad \textit{ii)} \quad \cos\theta = \beta^{-1}\varphi^2 .$$

Nel caso i), la seconda equazione $U^{\rm L}_\theta = 0$ *dà*

$$\sin(2\theta) = 0\,, \qquad \textit{ossia} \qquad \theta = 0\,.$$

Nel caso ii) la seconda equazione dà invece

$$(\alpha\beta - 1)\cos\theta\sin\theta = 0\,,$$

che implica, poiché $\alpha\beta > 1$, *di nuovo* $\theta = 0$. *Perciò le posizioni di equilibrio sono*

$$(0{,}0)\,, \qquad (\sqrt{\beta}{,}0)\,, \qquad (-\sqrt{\beta}{,}0)\,.$$

Troviamo la matrice hessiana

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U^{\rm L}}{\partial\varphi^2} &= 12\alpha\varphi^2 - 4\alpha\beta\cos\theta\,, \\ \frac{\partial^2 U^{\rm L}}{\partial\varphi\partial\theta} &= -4\alpha\beta\varphi\sin\theta\,, \\ \frac{\partial^2 U^{\rm L}}{\partial\theta^2} &= 2\alpha\beta\varphi^2\cos\theta - 2\beta\cos(2\theta)\,. \end{aligned}$$

Dunque

$$D^2U^{\rm L}(0{,}0) = \begin{pmatrix} -4\alpha\beta & 0 \\ 0 & -2\beta \end{pmatrix}\,,$$

che è definita negativa e quindi la posizione è di equilibrio stabile. Poi

$$D^2U^{\rm L}(\pm\sqrt{\beta}{,}0) = \begin{pmatrix} 8\alpha\beta & 0 \\ 0 & 2\beta(\alpha\beta - 1) \end{pmatrix}\,,$$

che è definita positiva; quindi le posizioni sono di equilibrio instabile.
R. $(0{,}0)$: *stabile;* $(\pm\sqrt{\beta}{,}0)$: *instabile.*

40. [10/2/2015 (ex)I] Due punti materiali P_1 e P_2 di massa rispettivamente m_1 e m_2 sono vincolati alla circonferenza verticale

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

e anche a mantenersi sulla stessa retta verticale, ossia a rispettare

$$x_{1P_1} = x_{1P_2}\,.$$

Si assuma $x_{2P_1} \neq x_{2P_2}$.
Il peso ha direzione $-\boldsymbol{e}_2$.
Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità in dipendenza dei valori di m_1 e m_2.
Soluzione
Introduciamo le parametrizzazioni lagrangiane con coordinata $\varphi \in (0,\pi)$, *o* $\varphi \in (-\pi{,}0)$, *tali che*

$$\overrightarrow{OP_i} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + (-1)^i R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

Allora

$$U = -m_1 g x_{2P_1} - m_2 g x_{2P_2} \,,$$

ossia

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = (m_1 - m_2) g R \sin\varphi \,.$$

Dunque

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = (m_1 - m_2) g R \cos\varphi \,.$$

A) Se $m_1 = m_2$ tutti i punti sono di equilibrio instabile.
B) Se $m_1 \neq m_2$ i punti di equilibrio sono

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \,, \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2} \,.$$

Si osserva poi

$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi^2}(\varphi) = -(m_1 - m_2) g R \sin\varphi \,.$$

R. *Se $m_1 = m_2$ tutte le posizioni sono di equilibrio instabile. Altrimenti:*

- *$m_1 > m_2$: $\varphi = -\pi/2$ instabile, $\varphi = \pi/2$ stabile;*
- *$m_1 < m_2$: $\varphi = -\pi/2$ stabile, $\varphi = \pi/2$ instabile.*

41. [10/2/2015 (ex)II] Due punti materiali P_1 e P_2 di massa rispettivamente m_1 e m_2 sono vincolati alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

e anche a mantenersi sulla stessa retta parallela all'asse x_2, ossia a rispettare

$$x_{1P_1} = x_{1P_2} \,.$$

Si assuma $x_{2P_1} \neq x_{2P_2}$.
Sui punti agiscono rispettivamente le forze

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = k_1 \overrightarrow{P_1' P_1} \,, \qquad \boldsymbol{F}_{P_2} = -k_2 \overrightarrow{P_2' P_2} \,,$$

ove P_i' è la proiezione di P_i sull'asse X_1, e $k_i > 0$ sono costanti.
Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità in dipendenza dei valori di k_1 e k_2.
R. *Se $k_1 = k_2$ tutte le posizioni sono di equilibrio instabile. Altrimenti:*

- *$k_1 > k_2$: $\varphi = \pm\pi/2$ stabile; $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ instabile;*
- *$k_1 < k_2$: $\varphi = \pm\pi/2$ instabile; $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ stabile.*

42. [4/6/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = f(x_1, x_2) \,, \qquad f \in C^2(\boldsymbol{R}^2) \,,$$

e soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = g(x_3)\boldsymbol{e}_3\,, \qquad g \in C^1(\boldsymbol{R})\,.$$

Si determinino gli eventuali punti di equilibrio in cui si possono definire le piccole oscillazioni.

Soluzione

Usiamo come coordinate lagrangiane (con abuso di notazione) $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$. Il potenziale lagrangiano quindi è dato da

$$U^{\mathrm{L}}(x_1, x_2) = G(f(x_1, x_2))\,,$$

ove G è definita da

$$G(x_3) = \int_{x_{30}}^{x_3} g(s)\,\mathrm{d}s\,, \qquad x_3 \in \boldsymbol{R}\,,$$

e $x_{30} \in \boldsymbol{R}$ fissato ad arbitrio. Occorre trovare intanto i punti critici di U^{L}, che si ottengono da

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x_1} = g(f)\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x_2} = g(f)\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0\,.$$

Dunque i punti critici di U^{L} sono quelli in cui vale una delle due alternative:

1. *$f(x_1, x_2) = z$ con $g(z) = 0$;*
2. *(x_1, x_2) è punto critico di f.*

Resta da studiare la matrice hessiana di U^{L}, che deve essere definita negativa. Essa è

$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial x_1^2} = g'(f)\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)^2 + g(f)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\,,$$
$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial x_1 \partial x_2} = g'(f)\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} + g(f)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\,,$$
$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial x_2^2} = g'(f)\Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)^2 + g(f)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\,.$$

Dunque nel caso 1 l'hessiana vale

$$D^2 U^{\mathrm{L}} = g'(f)\begin{pmatrix} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)^2 & \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} & \Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)^2 \end{pmatrix}\,,$$

che ha sempre determinante nullo, e quindi non rientra nei casi richiesti.
Nel caso 2 la matrice hessiana vale invece

$$D^2 U^{\mathrm{L}} = g(f) D^2 f\,.$$

Dunque l'hessiana è definita negativa se $g(f)$ è positiva e $D^2 f$ è definita negativa, o viceversa se $g(f)$ è negativa e $D^2 f$ è definita positiva.

R. *Sono i punti ove* $g(f) > 0$ *e* $D^2 f$ *è definita negativa, e quelli ove* $g(f) < 0$ *e* $D^2 f$ *è definita positiva.*

43. [4/6/2015 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = \frac{\alpha(x_1^2 + x_2^2)}{1 + \alpha^2(x_1^2 + x_2^2)^2}\,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2\,,$$

ove $\alpha > 0$, ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{e}_3\,, \qquad k \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}\,.$$

Si determinino gli eventuali punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
R. *Punti di equilibrio:*

$$(0{,}0)\,, \quad \{x_1^2 + x_2^2 = \alpha^{-2}\}\,.$$

L'unico caso si equilibrio stabile si ha per $k < 0$ *in* (0,0).

44. [12/1/2015 (ex)I] Un disco di raggio R e massa M è vincolato ad avere il centro C sull'asse x_3, a mantenersi ortogonale all'asse x_3, e ad avere il punto solidale A, appartenente al suo bordo, sull'elica cilindrica

$$x_1 = R\cos\varphi\,, \quad x_2 = R\sin\varphi\,, \quad x_3 = h\varphi\,, \qquad \varphi \in \boldsymbol{R}.$$

Sul disco agiscono il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata in A

$$\boldsymbol{F}_A = kx_3^2\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{CA}\,.$$

Qui h, k sono costanti positive assegnate.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Studiare la stabilità degli eventuali punti di equilibrio.

SOLUZIONE
A) Il disco ha un solo grado di libertà. Scegliamo come coordinata lagrangiana

$$\theta = \frac{x_{3C}}{h} \in \boldsymbol{R}.$$

In particolare ci serviranno le parametrizzazioni

$$\boldsymbol{X}_C(\theta) = h\theta\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_A(\theta) = R\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + h\theta\boldsymbol{e}_3\,.$$

L'energia cinetica del disco è data secondo il teorema di König da

$$T = \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_C|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_C\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

La terna

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{CA}}{R}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3\,,$$

solidale con il disco ha velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_3 ;$$

pertanto

$$T^{\mathrm{L}}(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}Mh^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 .$$

La componente lagrangiana delle forze è data da

$$Q_\theta = -Mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_C}{\partial \theta} + \boldsymbol{F}_A \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_A}{\partial \theta}$$
$$= -Mgh + k(\theta h)^2 R\boldsymbol{u}_2 \cdot (R\boldsymbol{u}_2 + h\boldsymbol{u}_3) = -Mgh + kh^2R^2\theta^2 .$$

B) Le forze pertanto sono conservative in senso lagrangiano e ammettono il potenziale

$$U^{\mathrm{L}}(\theta) = -Mgh\theta + \frac{1}{3}kh^2R^2\theta^3 .$$

Dunque i punti di equilibrio sono dati dalle soluzioni di

$$\frac{\mathrm{d}U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = -Mgh + kh^2R^2\theta^2 = 0 ,$$

ossia

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{Mg}{khR^2}} , \qquad \theta_2 = -\theta_1 .$$

La stabilità può essere indagata con lo studio della derivata seconda

$$\frac{\mathrm{d}^2U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta) = 2kh^2R^2\theta .$$

Dunque θ_1 risulta un minimo isolato e quindi instabile, mentre θ_2 è un massimo isolato e quindi è stabile.
R.

$$(Mh^2 + I)\ddot{\theta} = -Mgh + kR^2h^2\theta^2 ,$$
$$\theta_1 = \sqrt{\frac{Mg}{khR^2}} , \quad \textit{instabile;} \qquad \theta_2 = -\theta_1 , \quad \textit{stabile.}$$

45. [12/1/2015 (ex)II] Un disco di raggio R e massa M è vincolato ad avere il centro C sull'asse x_3, a mantenersi ortogonale all'asse x_3, e ad avere il punto solidale A, appartenente al suo bordo, sull'elica cilindrica

$$x_1 = R\cos\varphi , \quad x_2 = R\sin\varphi , \quad x_3 = h\varphi , \qquad \varphi \in \boldsymbol{R} .$$

Sul disco agiscono il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata in A

$$\boldsymbol{F}_A = k[a - x_3^2]\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{CA} .$$

Qui h, k, a sono costanti positive assegnate.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Dare una condizione su a perché esistano due punti di equilibrio.

R.

$$
(Mh^2 + I)\ddot{\theta} = -Mgh + kR^2[a - h^2\theta^2]\,,
$$
$$
a > \frac{Mgh}{kR^2}\,.
$$

46. [19/3/2016 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie ottenuta ruotando intorno all'asse z la curva

$$
z = a(bx - x^2)\,, \qquad x > 0\,,
$$

ed è soggetto alla forza

$$
\boldsymbol{F} = -kx\boldsymbol{e}_1 - \lambda\boldsymbol{e}_3\,.
$$

Qui a, b, k, λ sono costanti positive assegnate.
Si determinino le posizioni di equilibrio di P e se ne studi la stabilità in dipendenza dei parametri.

Soluzione

Usiamo le coordinate lagrangiane

$$
r \in (0, +\infty)\,, \qquad \varphi \in \Big(-\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\Big)\,,
$$

in modo che

$$
\overrightarrow{OP} = r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + a(br - r^2)\boldsymbol{e}_3\,.
$$

La forza $\boldsymbol{F}$ *è conservativa con potenziale*

$$
U(x, y, z) = -\frac{k}{2}x^2 - \lambda z\,,
$$

che dunque in forma lagrangiana è dato da

$$
U^{\mathrm{L}}(r, \varphi) = -\frac{k}{2}r^2\cos^2\varphi - \lambda a(br - r^2)\,.
$$

Le posizioni di equilibrio sono pertanto le soluzioni del sistema

$$
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial r} = -kr\cos^2\varphi - \lambda a(b - 2r) = 0\,,
$$
$$
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = kr^2\cos\varphi\sin\varphi = 0\,.
$$

La seconda equazione è soddisfatta se e solo se $\varphi \in \{-\pi/2, 0, \pi/2, \pi)$. *I corrispondenti valori di* r *si ottengono dalla prima equazione. Si trovano i punti di equilibrio*

$$
\Big(\frac{b}{2}, -\frac{\pi}{2}\Big)\,, \quad \Big(\frac{\lambda ab}{2\lambda a - k}, 0\Big)\,, \quad \Big(\frac{b}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)\,, \quad \Big(\frac{\lambda ab}{2\lambda a - k}, \pi\Big)\,,
$$

ove i punti con $\varphi = 0$, π sono presenti solo se $2\lambda a > k$.
Per studiare la stabilità dell'equilibrio troviamo l'hessiana

$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial r^2} = 2\lambda a - k\cos^2\varphi\,,$$
$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial r\partial\varphi} = -2kr\cos\varphi\sin\varphi\,,$$
$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi^2} = kr^2\cos 2\varphi\,.$$

Quindi si ha

$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{b}{2},-\frac{\pi}{2}\Big) = D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{b}{2},\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} 2\lambda a & 0 \\ 0 & -k\frac{b^2}{4} \end{pmatrix}.$$

Pertanto questi due punti sono di equilibrio instabile, essendo punti sella. Poi si ha se $2\lambda a > k$

$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{\lambda ab}{2\lambda a-k},0\Big) = D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{\lambda ab}{2\lambda a-k},\pi\Big) = \begin{pmatrix} 2\lambda a-k & 0 \\ 0 & k\Big(\frac{\lambda ab}{2\lambda a-k}\Big)^2 \end{pmatrix}.$$

Anche questi due punti perciò sono instabili, essendo punti di minimo.
R.

$$\Big(\frac{b}{2},-\frac{\pi}{2}\Big)\,,\qquad \Big(\frac{b}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\,.$$

Se $2\lambda a > k$ si hanno anche

$$\Big(\frac{\lambda ab}{2\lambda a-k},0\Big)\,,\qquad \Big(\frac{\lambda ab}{2\lambda a-k},\pi\Big)\,.$$

Tutti i punti sono di equilibrio instabile.

47. [7/6/2016 (ex)I] Si consideri un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi fissi e a sollecitazioni conservative il cui potenziale in forma lagrangiana è dato da

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\lambda(x-a)^2(x+a)^4 - \mu e^{y^2}\,,$$

ove $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate lagrangiane. Qui a, λ, μ sono costanti positive assegnate.
Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
Si determinino anche le eventuali posizioni ove è possibile definire le piccole oscillazioni.
Soluzione
Le posizioni di equilibrio corrispondono alle soluzioni del sistema

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} = -2\lambda(x-a)(x+a)^4 - 4\lambda(x-a)^2(x+a)^3 = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial y} = -2\mu y e^{y^2} = 0\,.$$

Si vede facilmente che il sistema (che è disaccoppiato) ha le soluzioni

$$(a{,}0)\,,\qquad (-a{,}0)\,,\qquad \Big(\frac{a}{3},0\Big)\,.$$

Per studiarne la stabilità proviamo intanto a calcolare la matrice hessiana

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial x^2}&=-2\lambda(x+a)^2\big[(x+a)^2+8(x-a)(x+a)+6(x-a)^2\big]\,,\\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial x\partial y}&=0\,,\\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial y^2}&=-2\mu e^{y^2}-4\mu y^2 e^{y^2}\,.\end{aligned}$$

Si ottiene pertanto nei punti di equilibrio:

$$D^2U^{\mathrm{L}}(a{,}0)=\begin{pmatrix}-32\lambda a^4 & 0\\ 0 & -2\mu\end{pmatrix}\qquad \textit{definita negativa;}$$

dunque $(a{,}0)$ è una posizione di equilibrio stabile, e in essa sono definite le piccole oscillazioni.
Poi si ha

$$D^2U^{\mathrm{L}}(-a{,}0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\mu\end{pmatrix}\qquad \textit{semidefinita negativa;}$$

nonostante che non si possa concludere dall'esame dell'hessiana, $(-a{,}0)$ è un punto di massimo isolato per U^{L} in quanto

$$U^{\mathrm{L}}(-a{,}0)=-\mu\,;\qquad U^{\mathrm{L}}(x,y)<-\mu\,,\quad (x,y)\in\boldsymbol{R}^2\setminus\{(a{,}0),(-a{,}0)\}\,.$$

Pertanto $(-a{,}0)$ è una posizione di equilibrio stabile, ma in essa non sono definite le piccole oscillazioni.
Infine

$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{a}{3},0\Big)=\begin{pmatrix}\frac{256}{27}\lambda a^4 & 0\\ 0 & -2\mu\end{pmatrix}\qquad \textit{indefinita;}$$

quindi $(a/3{,}0)$ è un punto sella e pertanto è di equilibrio instabile.
R.

$$(a{,}0)\,,\quad \textit{stabile con p.o.;}\qquad (-a{,}0)\,,\quad \textit{stabile senza p.o.;}\qquad \Big(\frac{a}{3},0\Big)\,,\quad \textit{instabile.}.$$

48. [12/7/2016 (ex)I] Due punti materiali P_1 e P_2 di uguale massa m sono vincolati alla circonferenza

$$x_1^2+x_2^2=R^2\,,\qquad x_3=0\,.$$

Sui punti agiscono le seguenti forze

$$\boldsymbol{F}_{P_1}=-k_1\overrightarrow{AP_1}-k_2\overrightarrow{P_2P_1}\,,\qquad \boldsymbol{F}_{P_2}=-k_1\overrightarrow{AP_2}-k_2\overrightarrow{P_1P_2}\,,$$

ove k_1, $k_2>0$ sono costanti assegnate e $\overrightarrow{OA}=R\boldsymbol{e}_1$.

- Si scriva il sistema che dà le posizioni di equilibrio.
- Si dimostri che se $k_1 = k_2$ una posizione di equilibrio si ottiene per A, P_1, P_2 che formano un triangolo equilatero.

SOLUZIONE
A) Introduciamo le due coordinate lagrangiane

$$\varphi_1\,,\varphi_2 \in \Big(-\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi\Big)$$

tali che

$$\overrightarrow{OP_i} = R\cos\varphi_i \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi_i \boldsymbol{e}_2\,, \qquad i = 1,\,2\,.$$

Allora il potenziale delle forze è

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{L}}(\varphi_1, \varphi_2) &= -\frac{k_1}{2}|\overrightarrow{AP_1}|^2 - \frac{k_1}{2}|\overrightarrow{AP_2}|^2 - \frac{k_2}{2}|\overrightarrow{P_1P_2}|^2 \\ &= -k_1R^2(1-\cos\varphi_1) - k_1R^2(1-\cos\varphi_2) - k_2R^2(1-\cos(\varphi_1-\varphi_2))\,. \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere a meno di costanti additive inessenziali

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi_1, \varphi_2) = R^2[k_1(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) + k_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)]\,.$$

Perciò le posizioni di equilibrio sono le soluzioni di

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi_1} &= R^2[-k_1\sin\varphi_1 - k_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)] = 0\,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi_2} &= R^2[-k_1\sin\varphi_2 + k_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)] = 0\,. \end{aligned}$$

B) Le uniche posizioni possibili per avere AP_1P_2 equilatero sono quelle in cui P_1 e P_2 occupano le posizioni

$$R\Big(-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_2\Big)\,.$$

Verifichiamone una, l'altra essendo analoga. Sia cioè

$$\varphi_1 = \frac{2}{3}\pi\,, \qquad \varphi_2 = \frac{4}{3}\pi\,.$$

Allora

$$\begin{aligned} -\sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1-\varphi_2) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\Big(-\frac{2}{3}\pi\Big) = 0\,, \\ -\sin\varphi_2 + \sin(\varphi_1-\varphi_2) &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\Big(-\frac{2}{3}\pi\Big) = 0\,. \end{aligned}$$

49. [11/07/2017 (ex)I] Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli lisci e fissi e a forze di potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\theta, \varphi, \psi) = -\theta(\theta - 1) + (\varphi^2 - 1)(\psi^2 - 1)\,,$$

ove $(\theta, \varphi, \psi) \in \boldsymbol{R}^3$ sono le coordinate lagrangiane.
Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità, individuando quelli ove è possibile definire le piccole oscillazoni.
SOLUZIONE
I punti di equilibrio sono dati dai punti critici di $U^{\mathrm{L}} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$, che sono le soluzioni del sistema

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} &= -2\theta + 1 = 0\,,\\
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= 2\varphi(\psi^2 - 1) = 0\,,\\
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \psi} &= 2\psi(\varphi^2 - 1) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Dunque si hanno le soluzioni

$$
\Big(\frac{1}{2}, 0, 0\Big)\,, \qquad \Big(\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 1\Big)\,,
$$

con qualsiasi scelta dei segni. Calcoliamo poi la matrice hessiana

$$
D^2 U^{\mathrm{L}}(\theta, \varphi, \psi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(\psi^2 - 1) & 4\psi\varphi \\ 0 & 4\psi\varphi & 2(\varphi^2 - 1) \end{pmatrix}\,.
$$

Si ha

$$
D^2 U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{1}{2}, 0, 0\Big) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\,.
$$

Perciò $(1/2,0,0)$ è di equilibrio stabile e in esso si possono definire le piccole oscillazioni, essendo la matrice hessiana del potenziale definita negativa.
Inoltre

$$
D^2 U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 1\Big) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 4 \\ 0 & \pm 4 & 0 \end{pmatrix}\,,
$$

ove i segni nella matrice sono $+1$ se $\varphi = \psi$ e -1 se $\varphi = -\psi$. In ogni caso il determinante della matrice vale

$$
-2(0 - 16) = 32 > 0\,,
$$

e pertanto la matrice hessiana ha almeno un autovalore positivo. Dunque il punto non può essere un massimo e l'equilibrio non è stabile.
R.

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{2}, 0, 0\Big)\,, &&\text{stabile; piccole oscillazioni;}\\
&\Big(\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 1\Big) &&\text{(qualsiasi scelta dei segni); instabili.}
\end{aligned}
$$

50. [15/01/2018 (ex)I] Un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conservative ha potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -y^2 - \frac{1}{3}x^3 y + 4xy\,, \qquad x > 0\,, y \in \boldsymbol{R}\,.$$

Determinare i punti di equilibrio studiandone la stabilità.
SOLUZIONE
Si ha

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} = -x^2 y + 4y\,,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial y} = -2y - \frac{1}{3}x^3 + 4x\,.$$

All'equilibrio la I dà

$$y = 0 \quad o \quad x = 2\,.$$

Se $y = 0$ *la II dà* $x = 2\sqrt{3}$.
Se $x = 2$ *la II dà* $y = 8/3$.
Perciò si ottengono i punti di equilibrio

$$(2\sqrt{3},0)\,, \qquad \Big(2, \frac{8}{3}\Big)\,.$$

Calcoliamo l'hessiana del potenziale:

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(x,y) = \begin{pmatrix} -2xy & -x^2+4 \\ -x^2+4 & -2 \end{pmatrix}.$$

In particolare

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(2\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & -2 \end{pmatrix},$$

con determinante negativo; l'hessiana pertanto è indefinita e $(2\sqrt{3},0)$ *è instabile.*
Inoltre

$$D^2 U^{\mathrm{L}}\Big(2, \frac{8}{3}\Big) = \begin{pmatrix} -\frac{16}{3} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'hessiana è definita negativa e l'equilibrio è stabile.
R.

$$(2\sqrt{3},0)\,, \qquad \textit{instabile;}$$
$$\Big(2, \frac{8}{3}\Big)\,, \qquad \textit{stabile.}$$

51. [15/01/2018 (ex)II] Un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conservative ha potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = \frac{1}{3}xy^3 - 2x^2 - 4xy\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,, y > 0\,.$$

Determinare i punti di equilibrio studiandone la stabilità.

R.

$$\begin{aligned} &(0{,}2\sqrt{3})\,, && \textit{instabile;}\\ &\Big(-\frac{4}{3}{,}2\Big)\,, && \textit{stabile.} \end{aligned}$$

52. [23/07/2018 (ex)I] Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli lisci e fissi e a forze conservative di potenziale

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = e^{x^2(1-x)} - y^4\,,$$

ove $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate lagrangiane.
Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
SOLUZIONE
A) Troviamo il sistema dei punti critici

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} &= (2x-3x^2)e^{x^2(1-x)} = 0\,,\\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial y} &= -4y^3 = 0\,. \end{aligned}$$

Le soluzioni sono

$$(0{,}0)\,, \qquad \Big(\frac{2}{3}{,}0\Big)\,.$$

B) Troviamo la matrice hessiana

$$D^2U^{\mathrm{L}}(x,y) = \begin{pmatrix} (2-6x)e^{x^2(1-x)} + R(x) & 0\\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}\,,$$

ove $R(x) = 0$ *per* $x = 0$, $x = 2/3$.
Si ha

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

perciò $(0{,}0)$ *è un minimo o un punto sella, quindi è instabile.*
Poi

$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{2}{3}{,}0\Big) = \begin{pmatrix} -2e^{\frac{4}{27}} & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

L'hessiana è qui semidefinita negativa. Dobbiamo studiare direttamente la funzione.
Si ha

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) - U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{2}{3}{,}0\Big) = e^{x^2(1-x)} - e^{\frac{4}{27}} - y^4\,.$$

Si noti che

$$U^{\mathrm{L}}(x{,}0) - U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{2}{3}{,}0\Big) < 0\,, \qquad x \textit{ vicino a } 2/3,$$

perché

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x}\Big(\frac{2}{3}{,}0\Big) = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial x^2}\Big(\frac{2}{3}{,}0\Big) < 0\,.$$

Perciò se $(x, y) \neq (2/3,0)$, x *vicino a* $2/3$, *si ha in ogni caso*

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) < U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{2}{3},0\Big) ,$$

e $(2/3,0)$ *risulta stabile.*
R. *I punti di equilibrio sono:* $(0,0)$ *instabile;* $(2/3,0)$ *stabile.*

53. [11/02/2019 (ex)I] Un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi fissi ha 2 gradi di libertà e coordinate lagrangiane φ, $\theta \in (-\pi, \pi)$.
Le componenti lagrangiane delle forze sono

$$Q_\varphi = \varphi\theta e^{\varphi^2} , \qquad Q_\theta = \frac{1}{2}e^{\varphi^2} + \frac{\theta}{1+\theta^2} .$$

Trovare il potenziale lagrangiano e i punti di equilibrio.
SOLUZIONE
Deve essere

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = Q_\varphi = \varphi\theta e^{\varphi^2} ,$$

per cui

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = \frac{1}{2}\theta e^{\varphi^2} + g(\theta) ,$$

con $g \in C^2((-\pi, \pi))$ *da determinare. Si deve infatti imporre*

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} = Q_\theta = \frac{1}{2}e^{\varphi^2} + \frac{\theta}{1+\theta^2} ,$$

ossia

$$\frac{1}{2}e^{\varphi^2} + \frac{\theta}{1+\theta^2} = \frac{1}{2}e^{\varphi^2} + g'(\theta) ,$$

che dà

$$g(\theta) = \frac{1}{2}\ln(1+\theta^2) + C ,$$

con $C \in \boldsymbol{R}$.
All'equilibrio si deve avere

$$\varphi\theta e^{\varphi^2} = 0 ,$$
$$\frac{1}{2}e^{\varphi^2} + \frac{\theta}{1+\theta^2} = 0 .$$

La I dà

$$\varphi = 0 , \qquad \textit{oppure} \qquad \theta = 0 .$$

Se $\varphi = 0$, *la II dà*

$$\frac{\theta}{1+\theta^2} = -\frac{1}{2} ,$$

da cui si ricava $\theta = -1 \in (-\pi, \pi)$. *Si è trovato perciò il punto di equilibrio*

$$(\varphi, \theta) = (0, -1) .$$

Se invece $\theta = 0$, *la II diviene impossibile.*

R.

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = \frac{1}{2}\theta e^{\varphi^2} + \frac{1}{2}\ln(1+\theta^2)\,, \qquad (\varphi,\theta) \in (-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)\,;$$
$$(0,-1)\,.$$

54. [11/02/2019 (ex)II] Un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi fissi ha 2 gradi di libertà e coordinate lagrangiane φ, $\theta \in (-\pi,\pi)$.
Le componenti lagrangiane delle forze sono

$$Q_\varphi = \theta e^{\varphi\theta}\,, \qquad Q_\theta = \varphi e^{\varphi\theta} + \frac{1}{1+\theta^2}\,.$$

Trovare il potenziale lagrangiano e i punti di equilibrio.
R.

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = e^{\varphi\theta} + \operatorname{arctg}(\theta)\,, \qquad (\varphi,\theta) \in (-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)\,;$$
$$(-1,0)\,.$$

55. [09/01/2020 (ex)I] Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli olonomi e forze conservative di potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = (1-\varphi^2)\cos\theta\,,$$

ove $\varphi \in \boldsymbol{R}$, $\theta \in (-\pi,\pi)$ sono le coordinate lagrangiane.
Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.
Soluzione
A) Troviamo i punti di equilibrio come punti critici di U^{L}, risolvendo il sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= -2\varphi\cos\theta = 0\,,\\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= -(1-\varphi^2)\sin\theta = 0\,.\end{aligned}$$

La I dà $\varphi = 0$ o $\theta = \pm\pi/2$.
La II dà $\varphi = \pm 1$ o $\theta = 0$.
Quindi i punti di equilibrio sono

$$(0,0)\,, \qquad \Big(\pm 1, \pm\frac{\pi}{2}\Big)\,,$$

con ogni scelta dei segni.
B) Per studiare la stabilità, troviamo l'hessiana

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} -2\cos\theta & 2\varphi\sin\theta \\ 2\varphi\sin\theta & -(1-\varphi^2)\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0{,}0)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

che è definita negativa. Perciò in (0,0) U^{L} *ha un massimo isolato e quindi questa è una posizione di equilibrio stabile.*
Poi si calcola

$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\pm 1,\pm\frac{\pi}{2}\Big)=\begin{pmatrix}0 & \pm 2\\ \pm 2 & 0\end{pmatrix},$$

ove nella matrice i segni sono positivi se in $(\pm 1,\pm\pi/2)$ *i segni sono concordi, e negativi altrimenti. In ogni caso:*

$$\det D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\pm 1,\pm\frac{\pi}{2}\Big)=-4<0\,,$$

quindi U^{L} *ha un punto di sella e l'equilibrio è instabile.*
R.

$$\begin{aligned}&(0{,}0)\,, && \textit{stabile;}\\ &\Big(\pm 1,\pm\frac{\pi}{2}\Big)\,, && \textit{instabile.}\end{aligned}$$

56. [09/01/2020 (ex)II] Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli olonomi e forze conservative di potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\theta,\varphi)=(4-\theta^2)\sin\varphi\,,$$

ove $\theta\in\boldsymbol{R}$, $\varphi\in(-\pi/2{,}3\pi/2)$ sono le coordinate lagrangiane.
Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.
R.

$$\begin{aligned}&\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big)\,, && \textit{equilibrio stabile;}\\ &(\pm 2{,}0)\,,\quad(\pm 2,\pi)\,, && \textit{equilibrio instabile.}\end{aligned}$$

57. [10/02/2020 (ex)I] Un disco C di raggio R e massa M è vincolato a giacere sul piano $x_3=0$.
Denotiamo con G il centro del disco e scegliamo un sistema di riferimento solidale $\mathcal{S}=(\boldsymbol{X}_G,(\boldsymbol{u}_h))$ in modo che, se $\boldsymbol{\lambda}$ indica le coordinate solidali, allora

$$C=\{\boldsymbol{\lambda}\in\boldsymbol{R}^3\mid\lambda_3=0\,,\lambda_1^2+\lambda_2^2\le R^2\}\,.$$

Sul disco agisce la distribuzione di forze elastiche

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=-K(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}\,,$$

ove $\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$ è la misura di area e

$$K(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} k\,, & \lambda_2 > 0\,, \\ 0\,, & \lambda_2 \leq 0\,. \end{cases}$$

Qui $k > 0$ è una costante assegnata, $\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda})$ denota il moto solidale di coordinate $\boldsymbol{\lambda}$, e si intende che $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0$ fuori di C.
Calcolare il potenziale lagrangiano totale della distribuzione di forze, dimostrare che esiste qualche posizione di equilibrio e che in esse

$$\boldsymbol{X}_G \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0\,.$$

[*Si scelgano le coordinate lagrangiane* $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *tali che* $\boldsymbol{X}_G = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ *e*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Gli integrali doppi in coordinate solidali non nulli si possono lasciare indicati.]
SOLUZIONE
A) Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$(x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi)\,,$$

tali che

$$\boldsymbol{X}_G = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2\,,$$

e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

La distribuzione di forze $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ *ha una distribuzione di potenziale*

$$\mathrm{d}U = -\frac{1}{2} K(\boldsymbol{\lambda}) |\boldsymbol{x}|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}\,.$$

Calcoliamo, sostituendo le espressioni di $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$*:*

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}|^2 &= |x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + \lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2|^2 \\ &= x^2 + y^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1(2x\cos\varphi + 2y\sin\varphi) + \lambda_2(2y\cos\varphi - 2x\sin\varphi)\,. \end{aligned}$$

Poniamo $C_+ = C \cap \{\lambda_2 > 0\}$. *Allora il potenziale totale è dato da*

$$\begin{aligned} &U^{\mathrm{L}}(x, y, \varphi) = \int_C \mathrm{d}U = -\iint_{C_+} \frac{k}{2} |\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} \\ &= -\frac{k\pi R^2}{4}(x^2 + y^2) - \frac{k}{2} \iint_{C_+} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} - k(y\cos\varphi - x\sin\varphi) \iint_{C_+} \lambda_2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}\,. \end{aligned}$$

Infatti l'integrale del termine di primo grado in λ_1 si annulla per motivi di simmetria. Si ha passando a coordinate polari

$$\iint_{C_+} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \frac{\pi}{4} R^4 \,, \qquad \iint_{C_+} \lambda_2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \frac{2}{3} R^3 \,.$$

Infine si ha

$$U^{\mathrm{L}} = -\frac{k\pi R^2}{4}(x^2+y^2) - \frac{2k}{3}R^3(y\cos\varphi - x\sin\varphi) - \frac{k\pi}{8}R^4 \,,$$

ove l'ultimo termine costante è in realtà inessenziale.
B) Scriviamo il sistema del gradiente del potenziale lagrangiano:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} &= -\frac{k\pi R^2}{2}x + \frac{2k}{3}R^3 \sin\varphi = 0 \,, \\
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial y} &= -\frac{k\pi R^2}{2}y - \frac{2k}{3}R^3 \cos\varphi = 0 \,, \\
\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= \frac{2k}{3}R^3(y\sin\varphi + x\cos\varphi) = 0 \,.
\end{aligned}$$

Notiamo subito che la terza equazione dà nelle posizioni di equilibrio

$$\boldsymbol{X}_G \cdot \boldsymbol{u}_1 = x\cos\varphi + y\sin\varphi = 0 \,,$$

come richiesto. Quanto all'esistenza di posizioni di equilibrio, basta scegliere ad arbitrio φ, e ricavare dalle prime due equazioni

$$x = \frac{4R}{3\pi}\sin\varphi \,, \qquad y = -\frac{4R}{3\pi}\cos\varphi \,,$$

perché la terza sia automaticamente soddisfatta.
R.

$$U^{\mathrm{L}} = -\frac{k\pi R^2}{4}(x^2+y^2) - \frac{2k}{3}R^3(y\cos\varphi - x\sin\varphi) - \frac{k\pi}{8}R^4 \,.$$

Si ha equilbrio per ogni $\varphi \in (-\pi, \pi)$ e

$$x = \frac{4R}{3\pi}\sin\varphi \,, \qquad y = -\frac{4R}{3\pi}\cos\varphi \,.$$

58. [10/02/2020 (ex)II] Un disco C di raggio R e massa M è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Denotiamo con G il centro del disco e scegliamo un sistema di riferimento solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_G, (\boldsymbol{u}_h))$ in modo che, se $\boldsymbol{\lambda}$ indica le coordinate solidali, allora

$$C = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \lambda_3 = 0 \,, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \le R^2\} \,.$$

Sul disco agisce la distribuzione di forze elastiche

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -K(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} \,,$$

ove $\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$ è la misura di area e

$$K(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} k\,, & \lambda_1 > 0\,, \\ 0\,, & \lambda_1 \le 0\,. \end{cases}$$

Qui $k > 0$ è una costante assegnata, $\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda})$ denota il moto solidale di coordinate $\boldsymbol{\lambda}$, e si intende che $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0$ fuori di C.
Calcolare il potenziale lagrangiano totale della distribuzione di forze, dimostrare che esiste qualche posizione di equilibrio e che in esse

$$\boldsymbol{X}_G \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0\,.$$

[*Si scelgano le coordinate lagrangiane* $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *tali che* $\boldsymbol{X}_G = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Gli integrali doppi in coordinate solidali non nulli si possono lasciare indicati.]
R.

$$U^{\mathrm{L}} = -\frac{k\pi R^2}{4}(x^2 + y^2) - \frac{2k}{3}R^3(x\cos\varphi + y\sin\varphi) - \frac{k\pi}{8}R^4\,.$$

Si ha equilibrio per ogni $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *e*

$$x = -\frac{4R}{3\pi}\cos\varphi\,, \qquad y = -\frac{4R}{3\pi}\sin\varphi\,.$$

680. Equazioni di Lagrange: piccole oscillazioni

1. [4/7/2005 (ex)I] Si consideri un sistema con lagrangiana

$$\mathcal{L} = T + U\,, \quad T = \alpha^2\dot\theta^2 + \alpha\beta\dot\theta\dot\varphi + \beta^2\dot\varphi^2\,, \quad U = \lambda\cos(\theta - \varphi) - \mu\theta^2 + \gamma\sin^2\varphi\,,$$

ove α, β, γ, λ, $\mu > 0$ sono costanti, con $\gamma < \lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$.
Si riconosca che $\theta = 0$, $\varphi = 0$ è una posizione di equilibrio stabile e si scrivano le relative equazioni delle piccole oscillazioni.
Soluzione
1) Calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial\theta} &= -\lambda\sin(\theta - \varphi) - 2\mu\theta\,, \\ \frac{\partial U}{\partial\varphi} &= \lambda\sin(\theta - \varphi) + 2\gamma\sin\varphi\cos\varphi\,, \end{aligned}$$

cosicché

$$\nabla U(0{,}0) = (0{,}0)\,,$$

e $\theta = 0$, $\varphi = 0$ *è una posizione di equilibrio. Per studiarne la stabilità calcoliamo la matrice hessiana di* U*:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} &= -\lambda \cos(\theta - \varphi) - 2\mu\,,\\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} &= \lambda \cos(\theta - \varphi)\,,\\ \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} &= -\lambda \cos(\theta - \varphi) + 2\gamma \cos(2\varphi)\,,\end{aligned}$$

da cui

$$D^2 U(0{,}0) = \begin{pmatrix} -\lambda - 2\mu & \lambda \\ \lambda & -\lambda + 2\gamma \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$\det D^2 U(0{,}0) = -(\lambda + 2\mu)(-\lambda + 2\gamma) - \lambda^2 = -(\lambda + 2\mu)\Big[2\gamma - \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}\Big] > 0\,,$$

per le ipotesi fatte sui parametri, $D^2 U(0{,}0)$ *è definita. Poiché l'elemento*

$$(D^2 U(0{,}0))_{11}$$

è negativo, $D^2 U(0{,}0)$ *è definita negativa (*stiamo usando che $D^2 U(0{,}0)$ è 2x2*).*
Quindi $(0{,}0)$ *è un massimo isolato per* U*, e quindi una posizione di equilibrio stabile.*
2) La lagrangiana ridotta è $\mathcal{L}^* = T^* + U^*$*, ove per definizione*

$$\begin{aligned}T^*(\dot\theta, \dot\varphi) &= T(0{,}0, \dot\theta, \dot\varphi) = \alpha^2 \dot\theta^2 + \alpha\beta \dot\theta \dot\varphi + \beta^2 \dot\varphi^2\,,\\ U^*(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} D^2 U(0{,}0)(\theta, \varphi)^{\mathrm{t}} \cdot (\theta, \varphi)^{\mathrm{t}} = \frac{1}{2}\Big[-(\lambda + 2\mu)\theta^2 + 2\lambda\theta\varphi + (-\lambda + 2\gamma)\varphi^2 \Big].\end{aligned}$$

Le corrispondenti equazioni di Lagrange sono perciò

$$\begin{aligned}2\alpha^2 \ddot\theta + \alpha\beta\ddot\varphi + (\lambda + 2\mu)\theta - \lambda\varphi &= 0\,,\\ \alpha\beta\ddot\theta + 2\beta^2\ddot\varphi - \lambda\theta - (-\lambda + 2\gamma)\varphi &= 0\,.\end{aligned}$$

2. [4/7/2005 (ex)II] Si consideri un sistema con lagrangiana

$$\mathcal{L} = T + U\,, \quad T = \alpha^2 \dot\varphi^2 + \alpha\beta\dot\theta\dot\varphi + \beta^2\dot\theta^2\,, \quad U = \lambda \cos(\theta - \varphi) - \mu\varphi^2 + \gamma \sin^2\theta\,,$$

ove α, β, γ, λ, $\mu > 0$ sono costanti, con $\gamma < \lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$.
Si riconosca che $\theta = 0$, $\varphi = 0$ è una posizione di equilibrio stabile e si scrivano le relative equazioni delle piccole oscillazioni.
R.

$$\begin{aligned}2\beta^2\ddot\theta + \alpha\beta\ddot\varphi - (-\lambda + 2\gamma)\theta - \lambda\varphi &= 0\,,\\ \alpha\beta\ddot\theta + 2\alpha^2\ddot\varphi - \lambda\theta + (\lambda + 2\mu)\varphi &= 0\,.\end{aligned}$$

3. [7/4/2006 (ex)I] Si consideri un sistema con lagrangiana

$$\mathcal{L} = T + U\,, \quad T = \alpha^2\dot{\varphi}^2 + \alpha\beta\dot{\theta}\dot{\varphi} + \beta^2\dot{\theta}^2\,, \quad U = -\lambda(\theta-\varphi)^2 - 2\mu\theta^2 + \gamma e^{\theta^2}\,,$$

ove α, β, γ, λ, $\mu > 0$ sono costanti, con $\gamma < 2\mu$.
Si riconosca che $\theta = 0$, $\varphi = 0$ è una posizione di equilibrio stabile e si scrivano le relative equazioni delle piccole oscillazioni.
Soluzione
Si ha

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -2\lambda(\theta-\varphi) - 4\mu\theta + 2\gamma\theta e^{\theta^2}\,,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 2\lambda(\theta-\varphi)\,,$$

per cui $\nabla U(0{,}0) = 0$ e $(0{,}0)$ *è una posizione di equilibrio. Consideriamo l'Hessiana*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -2\lambda - 4\mu + 2\gamma e^{\theta^2} + 4\gamma^2\theta^2 e^{\theta^2}\,,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} = 2\lambda\,,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2\lambda\,.$$

Si ha allora

$$D^2U(0,0) = \begin{pmatrix} -2\lambda - 4\mu + 2\gamma & 2\lambda \\ 2\lambda & -2\lambda \end{pmatrix}\,.$$

Dunque

$$\det D^2U(0,0) = 4\lambda(2\mu - \gamma) > 0\,,$$

per l'ipotesi $2\mu > \gamma$. *Per lo stesso motivo, i due termini sulla diagonale principale dell'Hessiana sono negativi, e quindi la matrice è definita negativa: perciò* U *ha un massimo isolato nella posizione di equilibrio, che risulta così stabile.*
Infine si ha

$$T^*(\dot{\theta},\dot{\varphi}) = T(0,0,\dot{\theta},\dot{\varphi}) = \alpha^2\dot{\varphi}^2 + \alpha\beta\dot{\theta}\dot{\varphi} + \beta^2\dot{\theta}^2\,,$$

e

$$U^*(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}D^2U(0,0)(\theta,\varphi)^{\mathrm{t}} \cdot (\theta,\varphi)^{\mathrm{t}}\,.$$

La lagrangiana ridotta dunque è

$$\mathcal{L}^* = \alpha^2\dot{\varphi}^2 + \alpha\beta\dot{\theta}\dot{\varphi} + \beta^2\dot{\theta}^2 - (\lambda + 2\mu - \gamma)\theta^2 - 2\lambda\theta\varphi - \lambda\varphi^2\,.$$

R.

$$2\beta^2\ddot{\theta} + \alpha\beta\ddot{\varphi} + 2(\lambda + 2\mu - \gamma)\theta + 2\lambda\varphi = 0\,,$$
$$\alpha\beta\ddot{\theta} + \alpha^2\ddot{\varphi} + 2\lambda\theta + 2\lambda\varphi = 0\,.$$

4. [13/12/2006 (ex)I] Un sistema olonomo ha lagrangiana

$$\mathcal{L}(\varphi,\psi,\dot\varphi,\dot\psi)=\frac{1}{2}\Big(\alpha\dot\varphi^2+\beta(1+\varphi^2)\dot\varphi\dot\psi+\alpha\dot\psi^2\Big)+a\cos(\varphi+\psi^3)-b\varphi^4-c\psi^2\,,$$

con φ, $\psi\in(-\pi,\pi)$ e α, β, a, b, c costanti positive, $2\alpha>\beta(1+\pi^2)$.
Si dimostri che $(\varphi,\psi)=(0,0)$ è una posizione di equilibrio stabile e si scriva la relativa lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*=T^*+U^*$.
SOLUZIONE
Il potenziale è

$$U(\varphi,\psi)=a\cos(\varphi+\psi^3)-b\varphi^4-c\psi^2\,.$$

Dato che

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial\varphi}&=-a\sin(\varphi+\psi^3)-4b\varphi^3\,,\\ \frac{\partial U}{\partial\psi}&=-3a\psi^2\sin(\varphi+\psi^3)-2c\psi\,,\end{aligned}$$

si annullano in (0,0)*, in effetti questa è una posizione di equilibrio. La matrice hessiana* D^2U *è data da*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}&=-a\cos(\varphi+\psi^3)-12b\varphi^2\,,\\ \frac{\partial^2U}{\partial\varphi\partial\psi}&=-3a\psi^2\cos(\varphi+\psi^3)\,,\\ \frac{\partial^2U}{\partial\psi^2}&=-6a\varphi\sin(\varphi+\psi^3)-9a\psi^4\cos(\varphi+\psi^3)-2c\,,\end{aligned}$$

per cui in (0,0)

$$D^2U(0{,}0)=\begin{pmatrix}-a&0\\0&-2c\end{pmatrix}\,,$$

che è definita negativa.
Perciò

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*(\varphi,\psi,\dot\varphi,\dot\psi)&=T^*(\dot\varphi,\dot\psi)+U^*(\varphi,\psi)=T(0,0,\dot\varphi,\dot\psi)+\frac{1}{2}D^2U(0{,}0)(\varphi,\psi)^{\mathrm{t}}\cdot(\varphi,\psi)^{\mathrm{t}}\\ &=\frac{1}{2}\Big(\alpha\dot\varphi^2+\beta\dot\varphi\dot\psi+\alpha\dot\psi^2\Big)-\frac{a}{2}\varphi^2-c\psi^2\,.\end{aligned}$$

R.

$$\mathcal{L}^*(\varphi,\psi,\dot\varphi,\dot\psi)=\frac{1}{2}\Big(\alpha\dot\varphi^2+\beta\dot\varphi\dot\psi+\alpha\dot\psi^2\Big)-\frac{a}{2}\varphi^2-c\psi^2\,.$$

5. [26/3/2007 (ex)I] Un sistema olonomo ha lagrangiana

$$\mathcal{L}(\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta)=\frac{1}{2}\Big(\alpha(\varphi^4+1)\dot\varphi^2+\alpha\dot\varphi\dot\theta+\alpha(\varphi^4+1)\dot\theta^2\Big)+a(1-\varphi^2)^2+\frac{b}{1+\theta^2}\,,$$

con φ, $\theta\in(-\pi,\pi)$ e α, a, b, costanti positive.

Si dimostri che $(\varphi, \theta) = (0{,}0)$ è una posizione di equilibrio stabile e si scrivano le equazioni di Lagrange relative alla lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^* = T^* + U^*$.
SOLUZIONE
Il potenziale è

$$U(\varphi, \theta) = a(1 - \varphi^2)^2 + \frac{b}{1 + \theta^2}\,.$$

Dato che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \varphi} &= -4a\varphi(1 - \varphi^2)\,,\\
\frac{\partial U}{\partial \theta} &= -\frac{2b\theta}{(1 + \theta^2)^2}\,,
\end{aligned}$$

si annullano in $(0{,}0)$, *in effetti questa è una posizione di equilibrio. La matrice hessiana* D^2U *è data da*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} &= -4a(1 - \varphi^2) + 12a\varphi^2\,,\\
\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \theta} &= 0\,,\\
\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} &= -\frac{2b}{(1 + \theta^2)^2} + \frac{8b\theta^2}{(1 + \theta^2)^3}\,,
\end{aligned}$$

per cui in $(0{,}0)$

$$D^2U(0{,}0) = \begin{pmatrix} -4a & 0 \\ 0 & -2b \end{pmatrix}\,,$$

che è definita negativa. Quindi $(0{,}0)$ *è un punto di massimo isolato per* U *ed è pertanto una posizione di equilibrio stabile.*
Perciò

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^*(\varphi, \theta, \dot\varphi, \dot\theta) = T^*(\dot\varphi, \dot\theta) + U^*(\varphi, \theta) &= T(0{,}0, \dot\varphi, \dot\theta) + \frac{1}{2} D^2U(0{,}0)(\varphi, \theta) \cdot (\varphi, \theta)\\
&= \frac{1}{2}\alpha(\dot\varphi^2 + \dot\varphi\dot\theta + \dot\theta^2) - 2a\varphi^2 - b\theta^2\,.
\end{aligned}$$

R.

$$\begin{aligned}
\alpha\Big(\ddot\varphi + \frac{1}{2}\ddot\theta\Big) + 4a\varphi &= 0\,,\\
\alpha\Big(\frac{1}{2}\ddot\varphi + \ddot\theta\Big) + 2b\theta &= 0\,.
\end{aligned}$$

6. [4/7/2007 (ex)I] Si scriva la lagrangiana ridotta (intorno all'unica posizione di equilibrio stabile) per un punto P di massa m vincolato all'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

e sottoposto alla forza peso, che agisce nel verso negativo dell'asse z.

[*Sugg.* Si scelgano x, y come coordinate lagrangiane.]
SOLUZIONE
Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$(x, y) \in \Big\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \Big\} .$$

Allora il moto del punto è dato da

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}(x, y) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 - c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\boldsymbol{e}_3 .$$

Il potenziale della forza peso è quindi

$$U^{\text{L}}(x, y) = -mg(z(x, y) + c) = mgc\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - mgc .$$

Vale

$$\nabla U^{\text{L}}(0,0) = 0 ,$$

quindi il punto $(0,0,-c)$ *corrisponde a una posizione di equilibrio.*
I calcoli mostrano che

$$D^2U^{\text{L}}(0,0) = \begin{pmatrix} -\frac{mgc}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{mgc}{b^2} \end{pmatrix} ,$$

è definita negativa, e quindi $(0,0,-c)$ *è una posizione di equilibrio stabile in cui si può definire la lagrangiana ridotta.*
In particolare

$$U^*(x, y) = -\frac{1}{2}mgc\Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\Big) .$$

Troviamo poi l'energia cinetica. La velocità del punto è data da

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{e}_1 + \dot{y}\boldsymbol{e}_2 + c\Big(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{x\dot{x}}{a^2} + \frac{y\dot{y}}{b^2}\Big)\boldsymbol{e}_3 .$$

Quindi

$$T^{\text{L}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m\Big[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + c^2\Big(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\Big)^{-1}\Big(\frac{x\dot{x}}{a^2} + \frac{y\dot{y}}{b^2}\Big)^2\Big] ,$$

e l'energia cinetica ridotta è

$$T^*(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) .$$

R.

$$\mathcal{L}^*(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}mgc\Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\Big) .$$

7. [4/7/2007 (ex)II] Si scriva la lagrangiana ridotta (intorno all'unica posizione di equilibrio stabile) per un punto P di massa m vincolato all'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 ,$$

e sottoposto alla forza costante $\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{e}_1$, con $k > 0$.
[*Sugg.* Si scelgano y, z come coordinate lagrangiane.]
R.

$$\mathcal{L}^*(y, z, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}ak\Big(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\Big).$$

8. [13/12/2007 (ex)I] Scrivere le equazioni di moto per le piccole oscillazioni del sistema con lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \alpha\cos(x + xy) + \beta\cos(y + xy) + \gamma\sqrt{1 - y^2}\,,$$

intorno al punto $(x, y) = (0,0)$. Qui α, β e γ sono costanti positive.
SOLUZIONE
Il potenziale è

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = \alpha\cos(x + xy) + \beta\cos(y + xy) + \gamma\sqrt{1 - y^2}\,,$$

cosicché

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} &= -\alpha(1 + y)\sin(x + xy) - \beta y\sin(y + xy)\,,\\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial y} &= -\alpha x\sin(x + xy) - \beta(1 + x)\sin(y + xy) - \frac{\gamma y}{\sqrt{1 - y^2}}\,.\end{aligned}$$

Quindi $\nabla U^{\mathrm{L}}(0,0) = 0$.
Inoltre

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial x^2} &= -\alpha(1 + y)^2\cos(x + xy) - \beta y^2\sin(y + xy)\,,\\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial x\partial y} &= -\alpha\sin(x + xy) - \alpha x(1 + y)\cos(x + xy)\\ &\quad - \beta\sin(y + xy) - \beta y(1 + x)\cos(y + xy)\,,\\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial y^2} &= -\alpha x^2\cos(x + xy) - \beta(1 + x)^2\cos(y + xy) - \frac{\gamma}{(1 - y^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\end{aligned}$$

da cui

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0,0) = \begin{pmatrix}-\alpha & 0\\ 0 & -\beta - \gamma\end{pmatrix}.$$

Perciò $(0,0)$ *è un punto di equilibrio stabile e la lagrangiana ridotta è*

$$\mathcal{L}^*(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}[\alpha x^2 + (\beta + \gamma)y^2]\,.$$

R.

$$\begin{aligned}m\ddot{x} + \alpha x &= 0\,,\\ m\ddot{y} + (\beta + \gamma)y &= 0\,.\end{aligned}$$

9. [13/12/2007 (ex)II] Scrivere le equazioni di moto per le piccole oscillazioni del sistema con lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\alpha\cos(y+xy)+\beta\cos(x+xy)+\gamma\sqrt{1-y^2}-\delta x^4\,,$$

intorno al punto $(x,y)=(0{,}0)$. Qui α, β, γ e δ sono costanti positive.
R.

$$m\ddot{x}+\beta x = 0\,,$$
$$m\ddot{y}+(\alpha+\gamma)y = 0\,.$$

10. [18/7/2008 (ex)I] Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è soggetta ai vincoli:

- giace sul piano fisso verticale $x_3 = 0$;
- ha l'estremo A sull'asse x_1.

Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_2. Inoltre in B è applicata la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_B = -k\overrightarrow{OB}\,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e $k>0$ è costante.
Si determinino

1. tutte le posizioni di equilibrio, discutendone la stabilità;
2. la lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$ in almeno una delle posizioni di equilibrio in cui si possono definire le piccole oscillazioni.

Soluzione
A) Fissiamo le due coordinate lagrangiane

$$x = x_{1A}\in\boldsymbol{R}\,,\qquad \varphi\in(-\pi,\pi)\,,$$

ove φ è l'angolo tra $\overrightarrow{AB}$ ed $\boldsymbol{e}_1$. L'asta allora risulterà parametrizzata da

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP} = (x+s\cos\varphi, s\sin\varphi)\,,$$

ove $0\le s\le 2L$.
Il potenziale, della forza peso e di quella elastica insieme, è

$$U = -mgx_{2C}-\frac{k}{2}\left|OB\right|^2\,,$$

ove C è il centro dell'asta. In coordinate lagrangiane

$$U^{\mathrm{L}}(x,\varphi) = -mgL\sin\varphi-\frac{k}{2}(x^2+4Lx\cos\varphi+4L^2)\,.$$

Le posizioni di equilibrio sono pertanto le soluzioni del sistema

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} = -kx - 2Lk\cos\varphi = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = -mgL\cos\varphi + 2Lkx\sin\varphi = 0\,.$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda si ha

$$-mgL\cos\varphi - 4L^2k\cos\varphi\sin\varphi = 0\,,$$

da cui si ottengono le soluzioni

$$(x,\varphi) = \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big)\,, \qquad (x,\varphi) = \Big(0, -\frac{\pi}{2}\Big)\,, \tag{1}$$

ove $\cos\varphi = 0$*. Se invece* $\cos\varphi \neq 0$ *deve essere*

$$\sin\varphi = -\frac{mg}{4Lk}\,,$$

che è possibile e dà due soluzioni diverse dalle (1) *se e solo se*

$$mg < 4Lk\,. \tag{2}$$

Queste soluzioni sono dunque

$$(x,\varphi) = (\xi_1, \varphi_1)\,, \qquad (x,\varphi) = (-\xi_1, -\pi - \varphi_1)\,, \tag{3}$$

con

$$\xi_1 = -2L\cos\varphi_1 = -2L\sqrt{1 - \frac{m^2g^2}{16L^2k^2}} < 0\,,$$
$$\varphi_1 = -\arcsin\frac{mg}{4Lk}\,.$$

B) Studiamo la stabilità delle posizioni di equilibrio; la matrice hessiana di U^{L} *è*

$$D^2U^{\mathrm{L}}(x,\varphi) = \begin{pmatrix} -k & 2Lk\sin\varphi \\ 2Lk\sin\varphi & mgL\sin\varphi + 2Lkx\cos\varphi \end{pmatrix}\,.$$

Dunque

$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(x, \pm\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} -k & \pm 2Lk \\ \pm 2Lk & \pm mgL \end{pmatrix}\,,$$

che ha determinante

$$\mp mgLk - 4L^2k^2 = Lk(\mp mg - 4Lk)\,.$$

Quindi l'hessiana è senz'altro indefinita in $(0, \pi/2)$*, mentre è definita negativa* $(0, -\pi/2)$ *se e solo se*

$$mg > 4Lk\,.$$

In questo caso $(0, -\pi/2)$ *è di equilibrio stabile.*
Se invece vale la (2)*, si ha in* (ξ_1, φ_1)

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\xi_1, \varphi_1) = \begin{pmatrix} -k & -\frac{mg}{2} \\ -\frac{mg}{2} & -4L^2k \end{pmatrix}\,,$$

che ha determinante

$$4L^2k^2 - \frac{m^2g^2}{4}\,,$$

per la (2). Dunque $D^2U^{\mathrm{L}}(\xi_1,\varphi_1)$ è definita negativa e (ξ_1,φ_1) è di equilibrio stabile. La stessa cosa vale in $(-\xi_1,-\pi-\varphi_1)$.
C) Per il teorema di König l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_C|^2 + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2\,,$$

ove I è il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo asse in C. Inoltre

$$\boldsymbol{v}_C = (\dot x - L\dot\varphi\sin\varphi, L\dot\varphi\cos\varphi, 0)\,,$$

da cui

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m(\dot x^2 - 2L\dot x\dot\varphi\sin\varphi + L^2\dot\varphi^2) + \frac{1}{2}I\dot\varphi^2\,.$$

In $(0,-\pi/2)$

$$T^* = \frac{1}{2}m\dot x^2 + mL\dot x\dot\varphi + \frac{1}{2}(mL^2+I)\dot\varphi^2\,.$$

In (ξ_1,φ_1) e in $(-\xi_1,-\pi-\varphi_1)$

$$T^* = \frac{1}{2}m\dot x^2 + \frac{mg}{4k}\dot x\dot\varphi + \frac{1}{2}(mL^2+I)\dot\varphi^2\,.$$

R. *Posizioni di equilibrio:*

$$(x,\varphi) = \Big(0,\frac{\pi}{2}\Big)\,,\qquad \textit{sempre instabile;}$$
$$(x,\varphi) = \Big(0,-\frac{\pi}{2}\Big)\,,\qquad \textit{stabile se } mg > 4Lk;$$

se $mg < 4Lk$ si hanno anche le seguenti posizioni di equilibrio, stabili in quest'ipotesi:

$$(x,\varphi) = (\xi_1,\varphi_1)\,,\qquad (x,\varphi) = (-\xi_1,-\pi-\varphi_1)\,,$$
$$\xi_1 = -2L\sqrt{1-\frac{m^2g^2}{16L^2k^2}} < 0\,,\qquad \varphi_1 = -\arcsin\frac{mg}{4Lk}\,.$$

Lagrangiane ridotte: in $(0,-\pi/2)$ (se è stabile)

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}m\dot x^2 + mL\dot x\dot\varphi + \frac{1}{2}(mL^2+I)\dot\varphi^2 - \frac{1}{2}kx^2 - 2Lkx\Big(\varphi+\frac{\pi}{2}\Big) - \frac{1}{2}mgL\Big(\varphi+\frac{\pi}{2}\Big)^2\,,$$

mentre in (ξ_1,φ_1) (se esiste e quindi è stabile)

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}m\dot x^2 + \frac{m^2g}{4k}\dot x\dot\varphi + \frac{1}{2}(mL^2+I)\dot\varphi^2 - \frac{1}{2}k(x-\xi_1)^2 - \frac{1}{2}mg(x-\xi_1)(\varphi-\varphi_1) - 4L^2k(\varphi-\varphi_1)^2\,.$$

11. [18/7/2008 (ex)I] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \alpha^2(1+\varphi^2)\dot\varphi^2 + \alpha\beta\dot\varphi\dot\theta + \beta^2(1+\cos^2\theta)\dot\theta^2 + \gamma\cos(\varphi\theta) - \delta\sin^2\varphi - \delta\theta^2\,,$$

con α, β, γ, $\delta > 0$ costanti e φ, $\theta \in (-\pi, \pi)$ coordinate lagrangiane. Riconoscere che in $(\varphi, \theta) = (0,0)$ si possono definire le piccole oscillazioni, e calcolarne le frequenze normali.

SOLUZIONE

Il potenziale è dato da

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = \gamma \cos(\varphi\theta) - \delta \sin^2 \varphi - \delta\theta^2 .$$

Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= -\gamma\theta \sin(\varphi\theta) - \delta \sin(2\varphi) , \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} &= \gamma\varphi \sin(\varphi\theta) - 2\delta\theta ,\end{aligned}$$

per cui in effetti (0,0) *è un punto critico.*
Inoltre

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi^2} &= -\gamma\theta^2 \cos(\varphi\theta) - 2\delta \cos(2\varphi) , \\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi \partial \theta} &= -\gamma \sin(\varphi\theta) - \gamma\varphi\theta \cos(\varphi\theta) , \\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta^2} &= -\gamma\varphi^2 \cos(\varphi\theta) - 2\delta .\end{aligned}$$

Dunque

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(0,0) = \begin{pmatrix} -2\delta & 0 \\ 0 & -2\delta \end{pmatrix} ,$$

e quindi l'hessiana è definita negativa. Perciò (0,0) *è un punto di equilibrio stabile e si possono definire le piccole oscillazioni.*
È noto che, definita $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *come la matrice tale che*

$$T^* = \frac{1}{2}(\dot\varphi, \dot\theta)\boldsymbol{\mathcal{A}}(\dot\varphi, \dot\theta)^{\mathrm{t}} ,$$

ossia posto

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2\alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & 4\beta^2 \end{pmatrix} ,$$

si ha

$$\det\Big(\omega^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} + D^2 U^{\mathrm{L}}(0,0)\Big) = 0 .$$

Cioè

$$7\alpha^2\beta^2\omega^4 - 4\delta(\alpha^2 + 2\beta^2)\omega^2 + 4\delta^2 = 0 .$$

R. *Le frequenze normali sono date da* $\omega_1/(2\pi)$, $\omega_2/(2\pi)$, *ove*

$$\omega_{1,2}^2 = 2\delta \frac{\alpha^2 + 2\beta^2 \pm \sqrt{(\alpha^2 - 2\beta^2)^2 + \alpha^2\beta^2}}{7\alpha^2\beta^2} .$$

12. [18/7/2008 (ex)II] Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è soggetta ai vincoli:

- giace sul piano fisso verticale $x_3 = 0$;
- ha l'estremo A sull'asse x_1.

Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_2. Inoltre nel centro C è applicata la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_C = -k\overrightarrow{OC}\,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e $k > 0$ è costante.
Si determinino

1. tutte le posizioni di equilibrio, discutendone la stabilità;
2. la lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$ in almeno una delle posizioni di equilibrio in cui si possono definire le piccole oscillazioni.

R. *Posizioni di equilibrio:*

$$(x,\varphi) = \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big)\,, \qquad \textit{sempre instabile;}$$
$$(x,\varphi) = \Big(0, -\frac{\pi}{2}\Big)\,, \qquad \textit{stabile se } mg > Lk;$$

se $mg < Lk$ si hanno anche le seguenti posizioni di equilibrio, stabili in quest'ipotesi:

$$(x,\varphi) = (\xi_1, \varphi_1)\,, \qquad (x,\varphi) = (-\xi_1, -\pi - \varphi_1)\,,$$
$$\xi_1 = -L\sqrt{1 - \frac{m^2g^2}{L^2k^2}} < 0\,, \qquad \varphi_1 = -\arcsin\frac{mg}{Lk}\,.$$

Lagrangiane ridotte: in $(0, -\pi/2)$ (se è stabile)

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mL\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}(mL^2 + I)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - Lkx\Big(\varphi + \frac{\pi}{2}\Big) - \frac{1}{2}mgL\Big(\varphi + \frac{\pi}{2}\Big)^2\,,$$

mentre in (ξ_1, φ_1) (se esiste e quindi è stabile)

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{m^2g}{k}\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}(mL^2+I)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}k(x-\xi_1)^2 - mg(x-\xi_1)(\varphi-\varphi_1) - \frac{1}{2}L^2k(\varphi-\varphi_1)^2\,.$$

13. [18/7/2008 (ex)II] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \alpha^2(1+\theta^2)\dot{\varphi}^2 + \alpha\beta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2(1+\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2 + \gamma\cos(\varphi\theta) - \delta\varphi^2 - \delta\sin^2\theta + \delta\theta^4\,,$$

con α, β, γ, $\delta > 0$ costanti e φ, $\theta \in (-\pi, \pi)$ coordinate lagrangiane.
Riconoscere che in $(\varphi, \theta) = (0{,}0)$ si possono definire le piccole oscillazioni, e calcolarne le frequenze normali.
R. *Le frequenze normali sono date da $\omega_1/(2\pi)$, $\omega_2/(2\pi)$, ove*

$$\omega_{1,2}^2 = 2\delta\frac{\alpha^2 + \beta^2 \pm \sqrt{(\alpha^2-\beta^2)^2 + \alpha^2\beta^2}}{3\alpha^2\beta^2}\,.$$

14. [12/9/2008 (ex)I] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha\beta}{1+\lambda^2\varphi^2}\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2\dot{\theta}^2\Big] - \gamma\varphi(\lambda^2\varphi^2 - 1) - \delta(e^{\lambda\theta} + e^{-\lambda\theta})\,,$$

con α, β, γ, δ, $\lambda > 0$ costanti e φ, $\theta \in (-\infty, \infty)$ coordinate lagrangiane. Determinare i punti di equilibrio del sistema e, ove possibile, scrivere la lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$.

SOLUZIONE

Il potenziale è dato da

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = -\gamma\varphi(\lambda^2\varphi^2 - 1) - \delta(e^{\lambda\theta} + e^{-\lambda\theta})\,.$$

Si ha

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = -3\gamma\lambda^2\varphi^2 + \gamma\,,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} = -\delta\lambda(e^{\lambda\theta} - e^{-\lambda\theta})\,,$$

per cui i punti critici sono

$$\Big(\frac{1}{\lambda\sqrt{3}}, 0\Big)\,, \qquad \Big(-\frac{1}{\lambda\sqrt{3}}, 0\Big)\,.$$

La matrice hessiana vale

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} -6\gamma\lambda^2\varphi & 0 \\ 0 & -\delta\lambda^2(e^{\lambda\theta} + e^{-\lambda\theta}) \end{pmatrix}\,,$$

e quindi si ha

$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{1}{\lambda\sqrt{3}}, 0\Big) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3}\gamma\lambda & 0 \\ 0 & -2\delta\lambda^2 \end{pmatrix}\,, \qquad \textit{definita negativa;}$$
$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(-\frac{1}{\lambda\sqrt{3}}, 0\Big) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\gamma\lambda & 0 \\ 0 & -2\delta\lambda^2 \end{pmatrix}\,, \qquad \textit{indefinita.}$$

Ne segue che $(1/\lambda\sqrt{3}, 0)$ *è l'unica posizione di equilibrio stabile, e che ivi si può definire la lagrangiana ridotta, data da*

$$\mathcal{L}^*(\varphi,\theta,\dot{\varphi},\dot{\theta}) = T^{\mathrm{L}}\Big(\frac{1}{\lambda\sqrt{3}}, 0, \dot{\varphi}, \dot{\theta}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\varphi - \frac{1}{\lambda\sqrt{3}}, \theta\Big)^{\mathrm{t}} D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{1}{\lambda\sqrt{3}}, 0\Big)\Big(\varphi - \frac{1}{\lambda\sqrt{3}}, \theta\Big)\,.$$

R.

$$\Big(\frac{1}{\lambda\sqrt{3}}, 0\Big)\,, \qquad \Big(-\frac{1}{\lambda\sqrt{3}}, 0\Big)\,.$$

In $(1/\lambda\sqrt{3}, 0)$

$$\mathcal{L}^*(\varphi,\theta,\dot{\varphi},\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{4}\alpha\beta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2\dot{\theta}^2\Big] - \sqrt{3}\gamma\lambda\Big(\varphi - \frac{1}{\lambda\sqrt{3}}\Big)^2 - \delta\lambda^2\theta^2\,.$$

15. [12/9/2008 (ex)II] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot\varphi^2 + \frac{\alpha\beta}{1+\lambda^2\theta^2}\dot\varphi\dot\theta + \beta^2\dot\theta^2\Big] - \gamma\varphi(\lambda^2\varphi^2 - 4) - \delta(e^{\frac{\lambda\theta}{2}} + e^{-\frac{\lambda\theta}{2}})\,,$$

con α, β, γ, δ, $\lambda > 0$ costanti e φ, $\theta \in (-\infty, \infty)$ coordinate lagrangiane.
Determinare i punti di equilibrio del sistema e, ove possibile, scrivere la lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$.
R.

$$\Big(\frac{2}{\lambda\sqrt{3}}, 0\Big)\,, \qquad \Big(-\frac{2}{\lambda\sqrt{3}}, 0\Big)\,.$$

In $(2/\lambda\sqrt{3}, 0)$

$$\mathcal{L}^*(\varphi, \theta, \dot\varphi, \dot\theta) = \frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot\varphi^2 + \alpha\beta\dot\varphi\dot\theta + \beta^2\dot\theta^2\Big] - 2\sqrt{3}\gamma\lambda\Big(\varphi - \frac{2}{\lambda\sqrt{3}}\Big)^2 - \frac{1}{4}\delta\lambda^2\theta^2\,.$$

16. [12/2/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha x_1^2\,,$$

ed è soggetto alla forza elastica

$$\boldsymbol{F}_e = -k\overrightarrow{OP}\,,$$

e al peso

$$\boldsymbol{F}_p = -mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Qui α, k sono costanti positive.
Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni nell'unica posizione di equilibrio.
SOLUZIONE
Usiamo come coordinate lagrangiane $x = x_1$, $y = x_2$.
Dunque

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(x, y) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + \alpha x^2\boldsymbol{e}_3\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(x, y)}{\mathrm{d}t} = \dot x\boldsymbol{e}_1 + \dot y\boldsymbol{e}_2 + 2\alpha\dot x x\boldsymbol{e}_3\,,$$

per cui

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m\big[(1 + 4\alpha^2x^2)\dot x^2 + \dot y^2\big]\,.$$

Il potenziale è

$$U = -mgx_3 - \frac{k}{2}\left|OP\right|^2\,,$$

per cui in coordinate lagrangiane

$$U^{\mathrm{L}} = -mg\alpha x^2 - \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + \alpha^2x^4)\,.$$

Quindi i punti di equilibrio si trovano risolvendo

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} = -2mg\alpha x - kx - 2k\alpha^2 x^3 = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial y} = -ky = 0\,.$$

L'unica soluzione è

$$(x, y) = (0{,}0)\,,$$

ove

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = \operatorname{diag}\big(-2mg\alpha - k, -k\big)\,.$$

Pertanto la posizione di equilibrio è stabile, e sono in essa definite le piccole oscillazioni.
Si sa che le $\omega_i/(2\pi)$ sono le frequenze cercate, se le ω_i risolvono

$$\det\big(\omega^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} + D^2 U^{\mathrm{L}}(0{,}0)\big) = 0\,,$$

ove

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \operatorname{diag}(m, m)$$

è la matrice associata alla forma quadratica dell'energia cinetica nella posizione di equilibrio. L'equazione per le ω_i infine è

$$\det \operatorname{diag}\big(\omega^2 m - 2mg\alpha - k, \omega^2 m - k\big) = (\omega^2 m - 2mg\alpha - k)(\omega^2 m - k) = 0\,.$$

R.

$$\omega_1 = \sqrt{2g\alpha + \frac{k}{m}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

17. [12/2/2009 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_2 = \alpha x_1^2\,,$$

ed è soggetto alla forza elastica

$$\boldsymbol{F}_e = -k\overrightarrow{OP}\,,$$

e al peso

$$\boldsymbol{F}_p = -mg\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui α, k sono costanti positive.
Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni nell'unica posizione di equilibrio.
R.

$$\omega_1 = \sqrt{2g\alpha + \frac{k}{m}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

18. [12/6/2009 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2 = \beta \sin \alpha x_1 \,, \qquad 0 < x_1 < \frac{2\pi}{\alpha} \,.$$

Qui α, β sono costanti positive. Sull'asta agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_2.
Determinare:

1. La lagrangiana del sistema.
2. I punti di equilibrio, e, ove possibile, scrivere le equazioni di Lagrange ridotte e determinare le frequenze normali.

Soluzione
1) Scegliamo

$$x = x_{1A} \,, \quad x \in \boldsymbol{R} \,, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi) \,,$$

come coordinate lagrangiane, ove φ è l'angolo tale che l'asta sia parametrizzata da

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(x, \varphi; s) = \overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}(s) = (x + s\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (\beta \sin \alpha x + s \sin\varphi)\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Così, per $s = L$ si ottiene il centro di massa C dell'asta, e

$$\boldsymbol{v}_C = (\dot{x} - L\dot{\varphi}\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (\alpha\beta\dot{x}\cos\alpha x + L\dot{\varphi}\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Dunque per il teorema di König

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{L}} &= \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}_C|^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \big\{ (\dot{x} - L\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (\alpha\beta\dot{x}\cos\alpha x + L\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 \big\} + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \big\{ \dot{x}^2 (1 + \alpha^2\beta^2\cos^2\alpha x) + L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{x}\dot{\varphi}(-\sin\varphi + \alpha\beta\cos\alpha x\cos\varphi) \big\} + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \,. \end{aligned}$$

Il potenziale è

$$U^{\mathrm{L}} = -mg(L\sin\varphi + \beta\sin\alpha x) \,.$$

2) Per trovare i punti di equilibrio cerchiamo i punti critici del potenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial x} &= -mg\alpha\beta\cos\alpha x = 0 \,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= -mgL\cos\varphi = 0 \,. \end{aligned}$$

Le soluzioni sono quindi date da tutte le possibili scelte di

$$x = \frac{\pi}{2\alpha} \,, \frac{3\pi}{2\alpha} \,, \qquad \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \,.$$

Come è noto, le piccole oscillazioni si possono definire nei punti critici dove la matrice hessiana è definita negativa. L'hessiana è data da

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(x, \varphi) = mg \begin{pmatrix} \alpha^2\beta\sin\alpha x & 0 \\ 0 & L\sin\varphi \end{pmatrix} \,.$$

Dunque la matrice è definita negativa solo nei punti critici ove entrambi gli elementi sulla diagonale principale sono negativi, ossia in $(3\pi/2\alpha, -\pi/2)$, ove

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} = D^2 U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{3\pi}{2\alpha}, -\frac{\pi}{2}\Big) = mg \begin{pmatrix} -\alpha^2\beta & 0 \\ 0 & -L \end{pmatrix} .$$

Qui si ha

$$U^*(x,\varphi) = -\frac{1}{2} mg\alpha^2\beta\Big(x - \frac{3\pi}{2\alpha}\Big)^2 - \frac{1}{2} mgL\Big(\varphi + \frac{\pi}{2}\Big)^2 ,$$

e

$$T^*(x,\varphi,\dot{x},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\big\{m\dot{x}^2 + 2mL\dot{x}\dot{\varphi} + (L^2 m + I)\dot{\varphi}^2\big\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{\varphi} \end{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} .$$

È noto che le frequenze normali si calcolano risolvendo

$$\det(\boldsymbol{\mathcal{A}}\omega^2 + \boldsymbol{\mathcal{U}}) = 0 ,$$

ossia

$$mI\omega^4 - mg\big[mL + \alpha^2\beta(mL^2 + I)\big]\omega^2 + m^2g^2L\alpha^2\beta = 0 .$$

R.

1) $$\mathcal{L}(x,\varphi,\dot{x},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m\big\{\dot{x}^2(1 + \alpha^2\beta^2\cos^2\alpha x) + L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{x}\dot{\varphi}(-\sin\varphi + \alpha\beta\cos\alpha x\cos\varphi)\big\} + \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 - mg(L\sin\varphi + \beta\sin\alpha x) .$$

2) $\Big(\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2}\Big)$, $\Big(\frac{\pi}{2\alpha}, -\frac{\pi}{2}\Big)$, $\Big(\frac{3\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2}\Big)$, $\Big(\frac{3\pi}{2\alpha}, -\frac{\pi}{2}\Big)$;

In $\Big(\frac{3\pi}{2\alpha}, -\frac{\pi}{2}\Big)$ *si ha:*

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\big[mL + \alpha^2\beta(mL^2 + I)\big] \pm \sqrt{\Big\{mg\big[mL + \alpha^2\beta(mL^2 + I)\big]\Big\}^2 - 4m^3g^2L\alpha^2\beta I}}{2mI}} .$$

19. [12/6/2009 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2 = \alpha\cos\beta x_1 , \qquad -\frac{\pi}{2\beta} < x_1 < \frac{3\pi}{2\beta} .$$

Qui α, β sono costanti positive. Sull'asta agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_2.
Determinare:

1. La lagrangiana del sistema.

2. I punti di equilibrio, e, ove possibile, scrivere le equazioni di Lagrange ridotte e determinare le frequenze normali.

R.

$$1)\quad \mathcal{L}(x,\varphi,\dot{x},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\{\dot{x}^2(1+\alpha^2\beta^2\sin^2\beta x) + L^2\dot{\varphi}^2 - 2L\dot{x}\dot{\varphi}(\sin\varphi + \alpha\beta\sin\beta x\cos\varphi)\} + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 - mg(L\sin\varphi + \alpha\cos\beta x)\,.$$

$$2)\quad \Big(0,\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \Big(0,-\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \Big(\frac{\pi}{\beta},\frac{\pi}{2}\Big)\,,\quad \Big(\frac{\pi}{\beta},-\frac{\pi}{2}\Big)\,;$$

In $\Big(\frac{\pi}{\beta},-\frac{\pi}{2}\Big)$ *si ha:*

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\big[mL+\alpha\beta^2(mL^2+I)\big] \pm \sqrt{\Big\{mg\big[mL+\alpha\beta^2(mL^2+I)\big]\Big\}^2 - 4m^3g^2L\alpha\beta^2 I}}{2mI}}\,.$$

20. [11/9/2009 (ex)I] Un sistema olonomo con due gradi di libertà ha lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big(\alpha^2\dot{\varphi}^2 + \frac{2\alpha\beta}{2+\alpha^2\varphi^2}\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2\dot{\theta}^2\Big) + U(\varphi,\theta)\,,$$

ove il potenziale U è dato da

$$U(\varphi,\theta) = e^{\lambda\varphi^2}(1-\mu\theta^2) + e^{\gamma\theta^3}(1-\delta\varphi^2)\,.$$

Qui α, β, γ, δ, λ, μ, sono costanti positive.
Determinare condizioni su tali costanti perché

$$(\varphi,\theta) = (0,0)$$

sia un punto di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni, e trovare le frequenze normali di queste ultime.

Soluzione

Troviamo i punti di equilibrio come punti critici del potenziale

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi} = 2\lambda\varphi e^{\lambda\varphi^2}(1-\mu\theta^2) - 2\delta\varphi e^{\gamma\theta^3}\,,$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = -2\mu\theta e^{\lambda\varphi^2} + 3\gamma\theta^2 e^{\gamma\theta^3}(1-\delta\varphi^2)\,.$$

Quindi $\nabla U(0{,}0) = 0$, *e perciò* $(0{,}0)$ *è in effetti un punto di equilibrio.*
Calcoliamo poi la matrice hessiana

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 2\lambda e^{\lambda\varphi^2}(1-\mu\theta^2) + 4\lambda^2\varphi^2 e^{\lambda\varphi^2}(1-\mu\theta^2) - 2\delta e^{\gamma\theta^3}\,,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi\partial\theta} = -4\lambda\mu\varphi\theta e^{\lambda\varphi^2} - 6\gamma\delta\varphi\theta^2 e^{\gamma\theta^3}\,,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = -2\mu e^{\lambda\varphi^2} + 6\gamma\theta e^{\gamma\theta^3}(1-\delta\varphi^2) + 9\gamma^2\theta^4 e^{\gamma\theta^3}(1-\delta\varphi^2)\,.$$

Quindi

$$D^2U(0,0) = \begin{pmatrix} 2(\lambda-\delta) & 0 \\ 0 & -2\mu \end{pmatrix} .$$

Perciò l'hessiana è definita negativa se e solo se $\delta > \lambda$.
Le frequenze normali si trovano risolvendo

$$\det(\omega^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{U}}) = \begin{vmatrix} \alpha^2\omega^2 - 2(\delta-\lambda) & \frac{\alpha\beta}{2}\omega^2 \\ \frac{\alpha\beta}{2}\omega^2 & \beta^2\omega^2 - 2\mu \end{vmatrix} = 0 .$$

R.

$$\delta > \lambda; \qquad \frac{3\alpha^2\beta^2}{4}\omega^4 - 2\big[\beta^2(\delta-\lambda) + \alpha^2\mu\big]\omega^2 + 4\mu(\delta-\lambda) = 0 .$$

21. [11/9/2009 (ex)II] Un sistema olonomo con due gradi di libertà ha lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big(\alpha^2\dot\varphi^2 + \frac{2\alpha\beta}{2+\alpha^2\varphi^2}\dot\varphi\dot\theta + \beta^2\dot\theta^2\Big) + U(\varphi,\theta) ,$$

ove il potenziale U è dato da

$$U(\varphi,\theta) = e^{\lambda\theta^2}(1-\mu\varphi^2) + e^{\gamma\varphi^3}(1-\delta\theta^2) .$$

Qui α, β, γ, δ, λ, μ, sono costanti positive.
Determinare condizioni su tali costanti perché

$$(\varphi,\theta) = (0,0)$$

sia un punto di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni, e trovare le frequenze normali di queste ultime.
R.

$$\delta > \lambda; \qquad \frac{3\alpha^2\beta^2}{4}\omega^4 - 2\big[\beta^2\mu + \alpha^2(\delta-\lambda)\big]\omega^2 + 4\mu(\delta-\lambda) = 0 .$$

22. [8/7/2010 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a mantenere l'estremo A sulla circonferenza verticale fissa γ di raggio R, e a giacere nel piano ortogonale a γ in A. Si assuma $R > L$.
Scrivere le equazioni delle piccole oscillazioni nei punti di equilibrio ove questo è possibile.
SOLUZIONE
Scegliamo il sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$ in modo che O sia il centro di γ, e questa giaccia nel piano $x_3 = 0$. Il peso sia diretto come $-\boldsymbol{e}_2$.
Introduciamo coordinate lagrangiane $\varphi \in (-\pi,\pi)$ e $\theta \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ tali che

$$\overrightarrow{OA} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 ,$$
$$\overrightarrow{AB} = 2L\cos\theta(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2) + 2L\sin\theta\boldsymbol{e}_3 .$$

Dunque l'asta risulta parametrizzata da

$$\overrightarrow{OP(s)} = (R + s\cos\theta)(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2) + s\sin\theta \boldsymbol{e}_3\,, \qquad 0 \le s \le 2L\,,$$

cosicché

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(s) = \dot\varphi(R + s\cos\theta)(-\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2) \\ - s\dot\theta\sin\theta(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2) + s\dot\theta\cos\theta \boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

Detto C il centro dell'asta, il potenziale della forza peso è

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = -Mgx_{2C} = -Mg[R\sin\varphi + L\cos\theta\sin\varphi]\,.$$

L'energia cinetica è data da

$$\begin{aligned}T^{\mathrm{L}} &= \frac{1}{2}\int_{AB} |\boldsymbol{v}(s)|^2 \rho \,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\frac{M}{2L}\int_0^{2L} [\dot\varphi^2(R + s\cos\theta)^2 + s^2\dot\theta^2\sin^2\theta + s^2\dot\theta^2\cos^2\theta]\,\mathrm{d}s \\ &= M\dot\varphi^2\Big(\frac{R^2}{2} + LR\cos\theta + \frac{2}{3}L^2\cos^2\theta\Big) + \frac{2}{3}ML^2\dot\theta^2\,.\end{aligned}$$

Troviamo le posizioni di equilibrio cercate, risolvendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= -Mg(R + L\cos\theta)\cos\varphi = 0\,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= MgL\sin\theta\sin\varphi = 0\,.\end{aligned}$$

Le soluzioni (φ,θ) sono date da

$$\Big(\frac{\pi}{2},0\Big)\,, \qquad \Big(\frac{\pi}{2},\pi\Big)\,, \qquad \Big(-\frac{\pi}{2},0\Big)\,, \qquad \Big(-\frac{\pi}{2},\pi\Big)\,.$$

La matrice hessiana è

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} Mg(R + L\cos\theta)\sin\varphi & MgL\sin\theta\cos\varphi \\ MgL\sin\theta\cos\varphi & MgL\cos\theta\sin\varphi \end{pmatrix}\,.$$

Perciò l'unico punto di equilibrio ove D^2U^{L} risulta definita negativa è

$$\Big(-\frac{\pi}{2},0\Big)\,.$$

Dunque, ponendo $q_1 = \varphi + \pi/2$, $q_2 = \theta$, si ha

$$\begin{aligned}T^* &= M\Big(\frac{R^2}{2} + LR + \frac{2}{3}L^2\Big)\dot q_1^2 + \frac{2}{3}ML^2\dot q_2^2\,, \\ U^* &= \frac{1}{2}D^2U^{\mathrm{L}}\Big(-\frac{\pi}{2},0\Big)\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q} = -\frac{1}{2}Mg(R + L)q_1^2 - MgLq_2^2\,.\end{aligned}$$

R.

$$\begin{aligned}2M\Big(\frac{R^2}{2} + LR + \frac{2}{3}L^2\Big)\ddot q_1 + Mg(R + L)q_1 = 0\,, \\ \frac{4}{3}ML^2\ddot q_2 + MgLq_2 = 0\,.\end{aligned}$$

23. [17/2/2014 (ex)I] Si consideri il piano ruotante $\Pi(t)$ di equazione

$$-x_1 \sin(\omega t) + x_2 \cos(\omega t) = 0\,,$$

ove $\omega > 0$ è costante. Qui (x_h) denota le coordinate nel sistema fisso. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una circonferenza γ solidale con Π e giacente su di esso, di raggio $R > 0$, con centro C a distanza $d > 2R$ dall'asse x_3.
Il punto P è soggetto alla forza elastica di richiamo

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{PA}\,,$$

ove A è il punto della circonferenza γ più vicino all'asse x_3. Qui k è la costante positiva

$$k = m\omega^2\Big(\frac{d}{R} - 2\Big) > 0\,.$$

Si studi la stabilità delle posizioni di equilibrio relativo a Π, e ove possibile si determinino le frequenze normali delle piccole oscillazioni.
SOLUZIONE
Scegliamo come sistema solidale con Π quello $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ ove O è l'origine del sistema fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

La quota x_{3C} del centro C è ininfluente ai fini della risoluzione, e quindi scegliamo

$$\overrightarrow{OC} = d\boldsymbol{u}_1\,, \qquad \overrightarrow{OA} = (d-R)\boldsymbol{u}_1\,.$$

Dunque si avrà

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = d\boldsymbol{u}_1 + R\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{u}_3\,,$$

ove $\varphi \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ è la coordinata lagrangiana.
Indichiamo con (y_h) le coordinate in $\mathcal{S}$. Allora su P agiscono la forza elastica e di trascinamento rispettivamente di potenziale

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}|\overrightarrow{AP}|^2\,, \qquad U_{\scriptscriptstyle T} = \frac{1}{2}m\omega^2 y_1^2\,.$$

Dunque sostituendo la parametrizzazione lagrangiana

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -\frac{k}{2}[(1+\cos\varphi)^2R^2 + R^2\sin^2\varphi] + \frac{1}{2}m\omega^2[d + R\cos\varphi]^2\,,$$

ossia

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -kR^2\cos\varphi + \frac{1}{2}m\omega^2(R^2\cos^2\varphi + 2dR\cos\varphi) + \text{costante}\,,$$

che con l'ipotesi su k diviene

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = 2m\omega^2 R^2 \cos\varphi + \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \cos^2\varphi + \text{costante}\,.$$

I punti di equilibrio sono dati da

$$\frac{\mathrm{d}U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi) = -2m\omega^2 R^2 \sin\varphi - \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \sin(2\varphi) = 0\,.$$

Le soluzioni sono quelle di

$$\sin\varphi = 0\,,$$

e quelle di

$$\cos\varphi = -2\,,$$

che non ne ha. Perciò otteniamo le soluzioni

$$\varphi = 0\,, \qquad \varphi = \pi\,.$$

Per studiare la stabilità deriviamo ancora:

$$\frac{\mathrm{d}^2U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}\varphi^2}(\varphi) = -2m\omega^2 R^2 \cos\varphi - m\omega^2 R^2 \cos(2\varphi)\,.$$

Dunque

$$\frac{\mathrm{d}^2U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}\varphi^2}(0) = -3m\omega^2 R^2 < 0\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = 0 \text{ è } \textit{stabile;}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2U^{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}\varphi^2}(\pi) = m\omega^2 R^2 > 0\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = \pi \text{ è } \textit{instabile.}$$

Inoltre in $\varphi = 0$ poiché la forma quadratica di U^{L} è definita negativa si possono definire le piccole oscillazioni. Il potenziale ridotto sarà

$$U^*(\varphi) = -\frac{3}{2} m\omega^2 R^2 \varphi^2\,,$$

mentre l'energia cinetica ridotta coincide con

$$T^{\mathrm{L}}(\varphi, \dot\varphi) = \frac{1}{2} mR^2 \dot\varphi^2\,.$$

Dunque

$$\mathcal{L}^*(\varphi, \dot\varphi) = \frac{1}{2} mR^2 \dot\varphi^2 - \frac{3}{2} m\omega^2 R^2 \varphi^2\,,$$

e l'equazione di moto delle piccole oscillazioni vale

$$mR^2 \ddot\varphi + 3m\omega^2 R^2 \varphi = 0\,.$$

R. *Equilibrio stabile per $\varphi = 0$, instabile per $\varphi = \pi$.*
Frequenza delle piccole oscillazioni in $\varphi = 0$: $\sqrt{3}\omega/(2\pi)$.

24. [17/2/2014 (ex)II] Si consideri il piano ruotante $\mathit{\Pi}(t)$ di equazione

$$-x_1 \sin(\omega t) + x_2 \cos(\omega t) = 0\,,$$

ove $\omega > 0$ è costante. Qui (x_h) denota le coordinate nel sistema fisso. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una circonferenza γ solidale con Π e giacente su di esso, di raggio $R > 0$, con centro C a distanza $d > R$ dall'asse x_3.
Il punto P è soggetto alla forza elastica di richiamo

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{PA},$$

ove A è il punto della circonferenza γ più vicino all'asse x_3. Qui k è la costante positiva

$$k = m\omega^2\Big(\frac{d}{R} + 3\Big) > 0 .$$

Si studi la stabilità delle posizioni di equilibrio relativo a Π, e ove possibile si determinino le frequenze normali delle piccole oscillazioni.
R. *Equilibrio stabile per $\varphi = \pi$, instabile per $\varphi = 0$.*
Frequenza delle piccole oscillazioni in $\varphi = 0$: ω/π.

25. [17/7/2014 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha(x_1^2 + \varepsilon^2)(x_2^2 + \varepsilon^2) , \qquad x_1 , x_2 \in \boldsymbol{R},$$

ove α, $\varepsilon > 0$ sono costanti, e le x_i indicano le coordinate nel sistema fisso.
Su P agisce il peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 .$$

Determinare le frequenze normali delle piccole oscillazioni nell'unica posizione di equilibrio stabile.
SOLUZIONE
Scegliamo come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1P} , \qquad y = x_{2P} , \qquad x , y \in \boldsymbol{R}.$$

Allora il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -mgx_{3P} = -mg\alpha(x^2 + \varepsilon^2)(y^2 + \varepsilon^2) .$$

Il gradiente è

$$\nabla U^{\mathrm{L}}(x, y) = -2mg\alpha\big((y^2 + \varepsilon^2)x, (x^2 + \varepsilon^2)y\big) ,$$

che si annulla solo in (0,0). *In tale posizione la matrice hessiana vale*

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = -2mg\alpha \operatorname{diag}(\varepsilon^2, \varepsilon^2) ,$$

che è definita negativa. Dunque è possibile definire le piccole oscillazioni in (0,0).
Troviamo ora l'energia cinetica ridotta in (0,0)*; dato che*

$$\dot{x}_{3P} = 2\alpha[x\dot{x}(y^2 + \varepsilon^2) + y\dot{y}(x^2 + \varepsilon^2)] ,$$

si ha

$$T^{\mathrm{L}}(0{,}0, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = T^*(\dot{x}, \dot{y}) .$$

La matrice corrispondente quindi è $m\boldsymbol{\mathcal{I}}$. Le frequenze delle piccole oscillazioni sono quindi date dall'equazione

$$\det\begin{pmatrix} \omega^2 m - 2mg\alpha\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 m - 2mg\alpha\varepsilon^2 \end{pmatrix} = 0 \,.$$

R.

$$\frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\omega_2}{2\pi} = \sqrt{2g\alpha}\,\frac{\varepsilon}{2\pi} \,.$$

26. [13/1/2015 (ex)I] Si consideri un sistema con energia cinetica e potenziale dati da

$$T^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta) = b^2\cosh(a\varphi)\dot\varphi^2 - bc\cos(\varphi+\theta)\dot\varphi\dot\theta + c^2\dot\theta^2 \,,$$
$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = -\arcsin(\alpha\varphi^2 + \beta\theta^2) + \alpha^2\varphi^4 \,,$$

φ, $\theta \in (-\pi,\pi)$. Qui a, b, c, α, β sono costanti positive.
Si riconosca che $(\varphi,\theta) = (0,0)$ è una posizione di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni, si scrivano le equazioni di moto relative a queste e si determinino le frequenze normali.
Soluzione
Calcoliamo anzitutto

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi}(\varphi,\theta) = -\frac{2\alpha\varphi}{\sqrt{1-(\alpha\varphi^2+\beta\theta^2)^2}} + 4\alpha^2\varphi^3 \,,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta}(\varphi,\theta) = -\frac{2\beta\theta}{\sqrt{1-(\alpha\varphi^2+\beta\theta^2)^2}} \,.$$

Risulta che (0,0) *è un punto critico del potenziale e quindi è una posizione di equilibrio. Poi si ha*

$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi^2}(\varphi,\theta) = -\frac{2\alpha}{\sqrt{1-(\alpha\varphi^2+\beta\theta^2)^2}} - \frac{2\alpha^2\varphi^2(\alpha\varphi^2+\beta\theta^2)}{[1-(\alpha\varphi^2+\beta\theta^2)^2]^{3/2}} + 12\alpha^2\varphi^2 \,,$$
$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi\partial\theta}(\varphi,\theta) = -\frac{2\alpha\beta\varphi\theta(\alpha\varphi^2+\beta\theta^2)}{[1-(\alpha\varphi^2+\beta\theta^2)^2]^{3/2}} \,,$$
$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta^2}(\varphi,\theta) = -\frac{2\beta}{\sqrt{1-(\alpha\varphi^2+\beta\theta^2)^2}} - \frac{2\beta^2\theta^2(\alpha\varphi^2+\beta\theta^2)}{[1-(\alpha\varphi^2+\beta\theta^2)^2]^{3/2}} \,.$$

Dunque si ha

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 \\ 0 & -2\beta \end{pmatrix} \,,$$

che è ovviamente definita negativa. Pertanto si possono definire le piccole oscillazioni nel punto di equilibrio (0,0).
Inoltre il potenziale ridotto è

$$U^*(\varphi,\theta) = -\alpha\varphi^2 - \beta\theta^2 \,.$$

Notiamo che T^{L} è in effetti una forma quadratica definita positiva in $(\dot\varphi,\dot\theta)$; si ha

$$T^*(\dot\varphi,\dot\theta) = T^{\mathrm{L}}(0{,}0,\dot\varphi,\dot\theta) = b^2\dot\varphi^2 - bc\dot\varphi\dot\theta + c^2\dot\theta^2 \,.$$

Dunque la lagrangiana ridotta è

$$\mathcal{L}^* = b^2\dot\varphi^2 - bc\dot\varphi\dot\theta + c^2\dot\theta^2 - \alpha\varphi^2 - \beta\theta^2 \,,$$

per cui le equazioni delle piccole oscillazioni sono

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[2b^2\dot\varphi - bc\dot\theta\big] + 2\alpha\varphi = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[-bc\dot\varphi + 2c^2\dot\theta\big] + 2\beta\theta = 0\,.$$

Le frequenze normali si possono trovare come soluzioni di

$$\det\begin{pmatrix} 2b^2\omega^2 - 2\alpha & -bc\omega^2 \\ -bc\omega^2 & 2c^2\omega^2 - 2\beta \end{pmatrix} = 0\,.$$

R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[2b^2\dot\varphi - bc\dot\theta\big] + 2\alpha\varphi = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[-bc\dot\varphi + 2c^2\dot\theta\big] + 2\beta\theta = 0\,.$$
$$\omega^2 = 2\big[\alpha c^2 + \beta b^2 \pm \sqrt{\alpha^2c^4 - \alpha\beta b^2c^2 + \beta^2 b^4}\big](3b^2c^2)^{-1}\,.$$

27. [13/1/2015 (ex)II] Si consideri un sistema con energia cinetica e potenziale dati da

$$T^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta) = \beta^2(1+\gamma^2\varphi^2)\dot\varphi^2 - \alpha\beta e^{-\gamma\theta}\dot\varphi\dot\theta + \alpha^2 e^{-2\gamma\theta}\dot\theta^2\,,$$
$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = -\operatorname{arctg}(b\varphi^2 + a\theta^2) + b^2\theta^4\,,$$

φ, $\theta \in (-\pi,\pi)$. Qui a, b, α, β, γ sono costanti positive.
Si riconosca che $(\varphi,\theta) = (0{,}0)$ è una posizione di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni, si scrivano le equazioni di moto relative a queste e si determinino le frequenze normali.
R.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[2\beta^2\dot\varphi - \alpha\beta\dot\theta\big] + 2b\varphi = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[-\alpha\beta\dot\varphi + 2\alpha^2\dot\theta\big] + 2a\theta = 0\,.$$
$$\omega^2 = 2\big[\alpha^2 b + a\beta^2 \pm \sqrt{a^2\beta^4 - ab\alpha^2\beta^2 + \alpha^4 b^2}\big](3\beta^2\alpha^2)^{-1}\,.$$

28. [2/7/2015 (ex)I] Si consideri un sistema di lagrangiana

$$\mathcal{L} = \dot\varphi^2 + \dot\theta^2 - \frac{\varphi^2}{1+\theta^4} - \theta^2(\theta-2)^4\,,$$

ove $\varphi \in (-1{,}3)$, $\theta \in (-1{,}3)$.
Si determinino le posizioni di equilibrio stabile, quelle in cui si possono definire le piccole oscillazioni, e in queste ultime posizioni le frequenze normali.
SOLUZIONE
Il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = -\frac{\varphi^2}{1+\theta^4} - \theta^2(\theta-2)^4 \,.$$

Le posizioni di equilibrio sono quelle che annullano il gradiente ∇U^{L}, *ossia le soluzioni di*

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= -\frac{2\varphi}{1+\theta^4} = 0\,, \\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} &= \frac{4\theta^3}{(1+\theta^4)^2}\varphi^2 - 2\theta(\theta-2)^3(3\theta-2) = 0\,. \end{aligned}$$

Quindi le soluzioni del sistema sono

$$(\varphi, \theta) = (0{,}0)\,, \qquad (\varphi, \theta) = (0{,}2)\,, \qquad (\varphi, \theta) = \Big(0, \frac{2}{3}\Big)\,.$$

Dato che $U^{\mathrm{L}} \le 0$ *per ogni valore di* (φ, θ) *e che*

$$U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = 0\,, \quad U^{\mathrm{L}}(0{,}2) = 0\,, \quad U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) < 0\,, \quad \textit{altrove,}$$

i due punti critici $(0{,}0)$ *e* $(0{,}2)$ *sono massimi isolati e quindi di equilibrio stabile. Consideriamo poi la matrice hessiana i cui elementi sono dati da*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi^2} &= -\frac{2}{1+\theta^4}\,, \\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi \partial \theta} &= \frac{8\varphi\theta^3}{(1+\theta^4)^2}\,, \\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta^2} &= \varphi^2 \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{4\theta^3}{(1+\theta^4)^2} - 2(\theta-2)^2(15\theta^2 - 20\theta + 4)\,. \end{aligned}$$

Perciò si ha

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix}; \quad D^2U^{\mathrm{L}}(0{,}2) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{17} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(0, \frac{2}{3}\Big) = \begin{pmatrix} -\frac{162}{97} & 0 \\ 0 & \frac{256}{27} \end{pmatrix}.$$

Pertanto il terzo punto di equilibrio $(0{,}2/3)$ *risulta un punto di sella per* U^{L} *e quindi instabile.*
Dunque le piccole oscillazioni si possono definire solo in $(0{,}0)$, *ove le frequenza si trovano risolvendo l'equazione*

$$\det \begin{pmatrix} 2\omega^2 - 2 & 0 \\ 0 & 2\omega^2 - 32 \end{pmatrix} = 4(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 16) = 0\,.$$

R. *Punti di equilibrio, i primi due stabili, il terzo instabile:*

$$(\varphi, \theta) = (0{,}0)\,, \qquad (\varphi, \theta) = (0{,}2)\,, \qquad (\varphi, \theta) = \Big(0, \frac{2}{3}\Big)\,.$$

Solo in (0,0) *si possono definire le piccole oscillazioni, e le frequenze normali sono*

$$\omega_1 = \frac{1}{2\pi}\,, \qquad \omega_2 = \frac{2}{\pi}\,.$$

29. [12/1/2015 (ex)I] Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\big[\alpha^2\dot\theta^2 + 2\alpha\beta(1+\varphi^2)\dot\theta\dot\varphi + \beta^2(1+\varphi^2)^2\dot\varphi^2 + \dot\varphi^2\big] \\ - \gamma\cos\theta^2 - \lambda\varphi^2\,,$$

con $\theta \in (-\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi})$ e $\varphi \in (-1,1)$. Qui α, β, γ, λ sono costanti positive assegnate.
Si determinino i punti di equilibrio, se ne studi la stabilità e si calcoli la lagrangiana ridotta in quelli ove è possibile definire le piccole oscillazioni.
Soluzione
I punti di equilibrio sono dati dai punti critici del potenziale

$$U^{\mathrm{L}}(\theta,\varphi) = -\gamma\cos\theta^2 - \lambda\varphi^2\,,$$

ossia dalle soluzioni del sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= 2\gamma\theta\sin\theta^2 = 0\,,\\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= -2\lambda\varphi = 0\,.\end{aligned}$$

Si hanno dunque le soluzioni (θ,φ)

$$(0{,}0)\,, \qquad (\sqrt{\pi}{,}0)\,.$$

Calcoliamo l'hessiana

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 2\gamma\sin\theta^2 + 4\gamma\theta^2\cos\theta^2 & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

Dunque in particolare

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}, \qquad D^2U^{\mathrm{L}}(\sqrt{\pi}{,}0) = \begin{pmatrix} -4\gamma\pi & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

La posizione $(\sqrt{\pi}{,}0)$ *dunque ha hessiana definita negativa, ed è pertanto stabile; in essa si possono anche definire le piccole oscillazioni.*
La posizione (0,0) *ha hessiana semidefinita negativa; tuttavia si ha*

$$U^{\mathrm{L}}(\theta{,}0) = -\gamma\cos\theta^2 > -\gamma = U^{\mathrm{L}}(0{,}0)\,, \qquad \theta \neq 0\,,$$

e perciò (0,0) *è un punto sella e corrisponde a un equilibrio instabile.*
R. *Punti di equilibrio:*

$$(\theta,\varphi) = (0{,}0)\,, \qquad (\theta,\varphi) = (\sqrt{\pi}{,}0)\,.$$

Solo $(\sqrt{\pi},0)$ è stabile. In esso si possono definie le piccole oscillazioni e la lagrangiana ridotta in $(\sqrt{\pi},0)$, con $\theta_1 = \theta - \sqrt{\pi}$, è:

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}\bigl[\alpha^2\dot\theta_1^2 + 2\alpha\beta\dot\theta_1\dot\varphi + (\beta^2+1)\dot\varphi^2\bigr] - 2\gamma\pi\theta_1^2 - \lambda\varphi^2 \,.$$

30. [12/1/2015 (ex)II] Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bigl[\alpha^2\dot\theta^2 + \beta^2\dot\varphi^2\bigr] - \gamma\cos\theta^2 - \lambda\varphi^2 \,,$$

con $\theta \in (0,\sqrt{3\pi})$ e $\varphi \in (-1,1)$. Qui α, β, γ, λ sono costanti positive assegnate.
Si determinino i punti di equilibrio, se ne studi la stabilità, e si trovino le frequenze normali in quelli ove è possibile definire le piccole oscillazioni.
R. *Punti di equilibrio:*

$$(\theta,\varphi) = (\sqrt{2\pi},0)\,, \qquad (\theta,\varphi) = (\sqrt{\pi},0)\,.$$

Solo $(\sqrt{\pi},0)$ è stabile. In esso si possono definire le piccole oscillazioni e le frequenze normali sono

$$\frac{\sqrt{m\gamma}}{\alpha\sqrt{\pi}}\,, \qquad \frac{\sqrt{m\lambda}}{\sqrt{2\pi}\beta}\,.$$

31. [17/01/2017 (ex)I] Un sistema di corpi rigidi vincolati da vincoli olonomi lisci è soggetto a forze conservative di potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\theta,\varphi) = -\lambda\theta^4(\theta-\alpha)^2 - \mu(\varphi-\beta)^2 \,,$$

con $(\theta,\varphi) \in \boldsymbol{R}^2$ coordinate lagrangiane e λ, μ, α, $\beta > 0$ costanti assegnate.
Trovare le posizioni di equilibrio e determinarne la stabilità, indicando in quali di esse è possibile definire le piccole oscillazioni.
Soluzione
Iniziamo con il trovare le posizioni di equilibrio come punti critici del potenziale:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= -2\lambda\theta^3(\theta-\alpha)(3\theta-2\alpha)\,,\\ \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} &= -2\mu(\varphi-\beta)\,.\end{aligned}$$

Dunque i punti critici sono

$$(0,\beta)\,; \qquad (\alpha,\beta)\,; \qquad \Bigl(\frac{2}{3}\alpha,\beta\Bigr)\,.$$

Troviamo quindi la matrice hessiana

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta^2} &= -6\lambda\theta^2(\theta-\alpha)(3\theta-2\alpha) - 2\lambda\theta^3(3\theta-2\alpha) - 6\lambda\theta^3(\theta-\alpha)\,,\\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta\partial\varphi} &= 0\,,\\ \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi^2} &= -2\mu\,.\end{aligned}$$

Dunque

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0,\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\mu \end{pmatrix} .$$

La matrice è semidefinita negativa, tuttavia si vede subito che

$$U^{\mathrm{L}}(\theta,\varphi) < 0 = U^{\mathrm{L}}(0,\beta) , \qquad (\theta,\varphi) \in B_\varepsilon((0,\beta)) \setminus \{(0,\beta)\} ,$$

ove $\varepsilon > 0$ *è un raggio opportunamente piccolo. Perciò* $(0,\beta)$ *è un punto di equilibrio stabile: in esso non si possono definire le piccole oscillazioni perché la matrice hessiana non è definita.*
Poi si ha

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} -2\lambda\alpha^4 & 0 \\ 0 & -2\mu \end{pmatrix} .$$

La matrice è definita negativa, perciò (α,β) *è di equilibrio stabile e in esso si possono definire le piccole oscillazioni.*
Infine

$$D^2U^{\mathrm{L}}\Big(\frac{2}{3}\alpha,\beta\Big) = \begin{pmatrix} 2\lambda\alpha\Big(\frac{2}{3}\alpha\Big)^3 & 0 \\ 0 & -2\mu \end{pmatrix} .$$

La matrice è indefinita, quindi $(2\alpha/3,\beta)$ *è un punto sella e l'equilibrio è instabile.*
R.

$$(0,\beta) , \quad \textit{stabile} ; \qquad (\alpha,\beta) , \quad \textit{stabile} ; \qquad \Big(\frac{2}{3}\alpha,\beta\Big) , \quad \textit{instabile} .$$

Solo in (α,β) *si possono definire le piccole oscillazioni.*

32. [17/01/2017 (ex)II] Un sistema di corpi rigidi vincolati da vincoli olonomi lisci è soggetto a forze conservative di potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\theta,\varphi) = -\lambda\theta^2(\theta-\alpha)^4 - \mu(\varphi+\beta)^2 ,$$

con $(\theta,\varphi) \in \boldsymbol{R}^2$ coordinate lagrangiane e λ, μ, α, $\beta > 0$ costanti assegnate. Trovare le posizioni di equilibrio e determinarne la stabilità, indicando in quali di esse è possibile definire le piccole oscillazioni.
R.

$$(0,-\beta) , \quad \textit{stabile} ; \qquad (\alpha,-\beta) , \quad \textit{stabile} ; \qquad \Big(\frac{\alpha}{3},-\beta\Big) , \quad \textit{instabile} .$$

Solo in $(0,\beta)$ *si possono definire le piccole oscillazioni.*

33. [13/02/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = -(\cos x)(\cos y) ,$$

ed è soggetto al peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 .$$

Determinare la stabilità dei punti di equilibrio

$$(x,y) = (0{,}0) , \qquad (x,y) = (\pi{,}0) ,$$

e ove possibile calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni.
SOLUZIONE
Scegliamo x, $y \in \boldsymbol{R}$ come coordinate lagrangiane. Il potenziale è

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = mg\cos x\cos y\,.$$

Si noti che

$$U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = mg \geq U^{\mathrm{L}}(x,y) \geq -mg = U^{\mathrm{L}}(\pi{,}0)\,,$$

per ogni $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$. Dunque $(0{,}0)$ è un massimo isolato e perció stabile, mentre $(\pi{,}0)$ è un minimo isolato e dunque instabile.
In ogni caso calcoliamo la matrice hessiana

$$D^2U^{\mathrm{L}}(x,y) = mg\begin{pmatrix} -\cos x\cos y & \sin x\sin y \\ \sin x\sin y & -\cos x\cos y \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$D^2U^{\mathrm{L}}(\pi{,}0) = mg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che è definita positiva confermando che $(0{,}0)$ è di minimo, mentre

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = mg\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

è definita negativa, il che permette di concludere di nuovo che $(\pi{,}0)$ è di massimo e inoltre che in esso si possono definire le piccole oscillazioni.
Troviamo l'energia cinetica:

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{e}_1 + \dot{y}\boldsymbol{e}_2 + (\dot{x}\sin x\cos y + \dot{y}\cos x\sin y)\boldsymbol{e}_3\,,$$

per cui

$$T^*(\dot{x},\dot{y}) = T^{\mathrm{L}}(0{,}0,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\,.$$

Quindi come è noto le frequenze $\omega/(2\pi) > 0$ sono determinate da

$$\omega^2\boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{U}} = m\begin{pmatrix} \omega^2 - g & 0 \\ 0 & \omega^2 - g \end{pmatrix}.$$

R. *$(\pi{,}0)$ è instabile, $(0{,}0)$ è stabile e in esso si possono definire le piccole oscillazioni con frequenze $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{g}$.*

34. [13/02/2018 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = (\cos x)(\cos y)\,,$$

ed è soggetto al peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Determinare la stabilità dei punti di equilibrio

$$(x,y) = (0{,}0)\,, \qquad (x,y) = (0,\pi)\,,$$

e ove possibile calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni.
R. (0,0) *è instabile,* $(0,\pi)$ *è stabile e in esso si possono definire le piccole oscillazioni con frequenze* $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{g}$.

35. [15/01/2019 (ex)I] Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conservative, e ha lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + e^y \dot{y}^2) + (y^2 - 1)^2(1 - x^2)\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

Determinare tutti i punti di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni.

Soluzione

Iniziamo con il trovare i punti di equilibrio, ossia critici per il potenziale

$$U^{\text{L}}(x, y) = (y^2 - 1)^2(1 - x^2)\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

Il sistema dei punti critici è

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial x} = -2x(y^2 - 1)^2 = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial y} = 4y(y^2 - 1)(1 - x^2) = 0\,.$$

Le soluzioni sono

$$(x, \pm 1)\,, \quad x \in \boldsymbol{R}\,; \qquad (0{,}0)\,.$$

Calcoliamo la matrice hessiana

$$D^2 U^{\text{L}}(x, y) = \begin{pmatrix} -2(y^2 - 1)^2 & -8xy(y^2 - 1) \\ -8xy(y^2 - 1) & 4(3y^2 - 1)(1 - x^2) \end{pmatrix}\,.$$

Dunque

$$D^2 U^{\text{L}}(x, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8(1 - x^2) \end{pmatrix}\,,$$

che è semidefinita positiva se $|x| < 1$, *semidefinita negativa se* $|x| > 1$ *e nulla se* $|x| = 1$. *In nessun caso si possono definire le piccole oscillazioni in queste posizioni. Invece*

$$D^2 U^{\text{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

è definita negativa. Quindi (0,0) *è un punto di equilibrio stabile in cui si possono definire le piccole oscillazioni.*
R.

$$(0{,}0)\,.$$

36. [15/01/2019 (ex)II] Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conservative, e ha lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + e^y \dot{y}^2) + (x^2 - 4)^2(1 - y^2)\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

Determinare tutti i punti di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni.

37. [13/01/2020 (ex)I] Si consideri un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi fissi e forze conservative di potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = -\alpha(\sin\varphi)^2 + \beta(\varphi-\pi)^3 + \gamma\sin(\pi+\theta^2)\,, \qquad (\varphi,\theta)\in \boldsymbol{R}^2\,.$$

Qui α, β, γ sono costanti positive assegnate.
L'energia cinetica è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}(c\dot\varphi^2 + d\dot\theta^2)\,,$$

con c, $d>0$.

- Si dimostri che in $(\varphi,\theta)=(\pi{,}0)$ si possono definire le piccole oscillazioni.
- Si calcolino le frequenze normali delle piccole oscillazioni.
- Si dia una condizione sui parametri perché tutti i moti delle piccole oscillazioni siano periodici.

R.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{c}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{d}}\,.$$

Condizione per la periodicità:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{\alpha d}{\gamma c}} = \frac{m}{n}\,, \qquad m\,,n\in\boldsymbol{N}\setminus\{0\}\,.$$

38. [13/01/2020 (ex)II] Si consideri un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi fissi e forze conservative di potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = -\alpha(\sin\theta)^2 + \beta\cos\Big(\frac{\pi}{2}+\varphi^2\Big) + \gamma\varphi^4\,, \qquad (\varphi,\theta)\in \boldsymbol{R}^2\,.$$

Qui α, β, γ sono costanti positive assegnate.
L'energia cinetica è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}(c\dot\varphi^2 + d\dot\theta^2)\,,$$

con c, $d>0$.

- Si dimostri che in $(\varphi,\theta)=(0,\pi)$ si possono definire le piccole oscillazioni.
- Si calcolino le frequenze normali delle piccole oscillazioni.
- Si dia una condizione sui parametri perché tutti i moti delle piccole oscillazioni siano periodici.

Soluzione

A) Calcoliamo

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = -2\beta\varphi \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi^2\right) + 4\gamma\varphi^3 ,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta} = -2\alpha \sin\theta \cos\theta .$$

Quindi

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi}(0,\pi) = \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta}(0,\pi) = 0 .$$

Pertanto $(0,\pi)$ *è un punto di equilibrio.*

Calcoliamo la matrice hessiana

$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi^2} = -2\beta \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi^2\right) + \varphi R(\varphi) ,$$
$$\frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi \partial \theta} = 0 , \qquad \frac{\partial^2 U^{\mathrm{L}}}{\partial \theta^2} = -2\alpha \cos(2\theta) ,$$

con $R \in C(\boldsymbol{R})$.

Quindi

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(0,\pi) = \begin{pmatrix} -2\beta & 0 \\ 0 & -2\alpha \end{pmatrix} ,$$

che è definita negativa. Quindi in $(0,\pi)$ *si possono definire le piccole oscillazioni.*

B) Le frequenze delle piccole oscillazioni sono date da

$$\det \begin{pmatrix} c\omega^2 - 2\alpha & 0 \\ 0 & d\omega^2 - 2\beta \end{pmatrix} = 0 ,$$

ossia da

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{c}} , \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2\beta}{d}} .$$

C) I moti sono periodici se ω_1 e ω_2 *sono commensurabili, ossia se*

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{\alpha d}{\beta c}} = \frac{m}{n} ,$$

con m, $n \in \boldsymbol{N} \setminus \{0\}$.

R.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{c}} , \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2\beta}{d}} .$$

Condizione per la periodicità:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{\alpha d}{\beta c}} = \frac{m}{n} , \qquad m , n \in \boldsymbol{N} \setminus \{0\} .$$