MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 00/12/2024 (vedi 25/01/2024)

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1. Si consideri il sistema dinamico non lineare

$$\dot{x} = \sin(x) - 2ye^x \,,$$
$$\dot{y} = y^2 e^x - y\cos(x) \,,$$

e si risponda alle seguenti domande.

$\boxed{\mathbf{01}}$ Il comportamento del sistema linearizzato nell'intorno di

$$P_1 := \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{pmatrix}$$

è descritto da

a una sella.
b un fuoco repulsivo.
c un fuoco attrattivo.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{02}}$ L'integrale generale del sistema linearizzato nell'intorno di P_1 è

a
$$\begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_2 e^{-t} \end{pmatrix} .$$

b
$$\begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{t} \\ c_2 e^{-t} \end{pmatrix} .$$

c
$$\begin{pmatrix} c_1 \cosh(t) \\ c_2 \sinh(t) \end{pmatrix} .$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{03}}$ Per il sistema linearizzato in P_1 il problema di Cauchy di condizioni

$$\begin{pmatrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 1/2 \end{pmatrix}$$

ha come soluzione

a
$$\begin{pmatrix} \cosh(t) \\ e^{-t}/2 \end{pmatrix} .$$

b
$$\begin{pmatrix} e^{t}/2 \\ \sinh(t) \end{pmatrix} .$$

c
$$\begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix} .$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{04}}$ La matrice esponenziale per il sistema linearizzato in P_1 è

a
$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t}+e^t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} .$$
b
$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t}+e^t \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} .$$
c
$$\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} .$$
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{05}}$ Per il sistema linearizzato nell'intorno di

$$P_2 := \begin{pmatrix} x = \pi \\ y = 0 \end{pmatrix} ,$$

il problema di Cauchy di condizioni

$$\begin{pmatrix} x(0) = -1 \\ y(0) = e^{-\pi}/2 \end{pmatrix}$$

ha come soluzione

a
$$\begin{pmatrix} -\cosh(t) \\ -e^{t-\pi}/2 \end{pmatrix} .$$
b
$$\begin{pmatrix} e^{\pi-t} \\ \sinh(t) \end{pmatrix} .$$
c
$$\begin{pmatrix} \cosh(t) \\ e^{\pi-t}/2 \end{pmatrix} .$$
d Nessuna delle altre.

SOLUZIONE

1: a; 2: a; 3: a; 4: a; 5: a.

2. Una lamina rigida è costituita da 4 elementi materiali, ciascuno di massa M, vincolati ai 4 vertici di un rettangolo $ABCD$ di lati a, b con $a > b > 0$, e centro G. Si assuma

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = a , \qquad |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| = b .$$

Si usi come sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_G, \mathcal{M})$, con $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ data da

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{a} , \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 , \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{BC}}{b} .$$

Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$ con coordinate (y_h), ove $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ è data da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= \cos(\gamma t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\gamma t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{w}_2 &= -\sin(\gamma t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\gamma t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

con $\gamma > 0$ costante.
La lamina è vincolata a giacere sul piano mobile $y_2 = 0$, ossia sul piano di equazione, in coordinate del sistema fisso,

$$\Pi(t): \quad -x_1 \sin(\gamma t) + x_2 \sin(\gamma t) = 0 \,.$$

Il centro G della lamina è vincolato alla retta mobile

$$y_2 = 0 \,, \qquad y_1 = y_3 \,.$$

Sulla lamina agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.
Si usino come coordinate lagrangiane $(x, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi/4, 7\pi/4)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}}(x, t) = x\boldsymbol{w}_1(t) + x\boldsymbol{w}_3(t) \,,$$

e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{w}_1 - \sin\varphi \boldsymbol{w}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{w}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \sin\varphi \boldsymbol{w}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{w}_3 \,. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{06}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ della lamina (rispetto al sistema di riferimento fisso) è

a

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 + \gamma \boldsymbol{u}_2 \,.$$

b

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2 + \gamma \boldsymbol{u}_1 \,.$$

c

$$\boldsymbol{\omega} = -\gamma \sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \gamma \cos\varphi \boldsymbol{u}_3 + \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2 \,.$$

d Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{07}}$ Quanto vale il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse coordinato 2 del riferimento solidale?

a $M(a+b)^2/2$.
b $M(a+b)^2$.
c $M(a^2+b^2)$.
d Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{08}}$ Quanto vale il momento angolare $\boldsymbol{L}_G$ della lamina (rispetto al sistema di riferimento fisso) usando come polo G, in funzione di x, φ, $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$, espresso nella base $\mathcal{M}$?

a

$$\boldsymbol{L}_G = \gamma M b^2 \sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \dot{\varphi} M(a^2+b^2)\boldsymbol{u}_2 - \gamma M a^2 \cos\varphi \boldsymbol{u}_3 \,.$$

b

$$\boldsymbol{L}_G = -\gamma M b^2 \sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \dot{\varphi} M(a^2+b^2)\boldsymbol{u}_2 + \gamma M a^2 \cos\varphi \boldsymbol{u}_3 \,.$$

c

$$\boldsymbol{L}_G = -\gamma M b^2 \sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \dot{\varphi} M(a+b)^2\boldsymbol{u}_2 + \gamma M a^2 \cos\varphi \boldsymbol{u}_3 \,.$$

d Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{09}}$ Quanto vale l'energia cinetica in forma lagrangiana della lamina (rispetto al sistema di riferimento fisso)?

a

$$T^{\text{L}} = 2M(2\dot{x}^2 + \gamma^2 x^2) + \frac{M}{2}[b^2\gamma^2(\sin\varphi)^2 + a^2\gamma^2(\cos\varphi)^2] \,.$$

b

$$T^{\text{L}} = 2M(2\dot{x}^2 + \gamma^2 x^2) + \frac{M}{2}[b^2\gamma^2(\sin\varphi)^2 + a^2\gamma^2(\cos\varphi)^2 + (a^2+b^2)\dot{\varphi}^2] \,.$$

c

$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}[b^2\gamma^2(\cos\varphi)^2 + a^2\gamma^2(\sin\varphi)^2 + (a^2+b^2)\dot{\varphi}^2] \,.$$

d Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{10}}$ La risultante delle forze di trascinamento che agiscono sulla lamina nel sistema $\mathcal{S}_1$ è

a

$$0 \,.$$

b

$$4M\gamma^2(x + a\cos\varphi)\boldsymbol{w}_1 \,.$$

c

$$4M\gamma^2 x \boldsymbol{w}_1 \,.$$

d Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{11}}$ Il potenziale lagrangiano del sistema, quando si scrivano le equazioni di Lagrange rispetto al sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}_1$, vale

a

$$U^{\text{L}}_{\mathcal{S}_1} = \frac{M}{2}\gamma^2[4x^2 + ab\cos\varphi\sin\varphi] - 4Mgx \,.$$

b

$$U^{\text{L}}_{\mathcal{S}_1} = \frac{M}{2}\gamma^2[4x^2 + a^2(\cos\varphi)^2 + b^2(\sin\varphi)^2] - 4Mgx \,.$$

c Il potenziale lagrangiano non può essere definito in questo caso.

d Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Quale delle seguenti posizioni è di equilibrio relativo a $\mathcal{S}_1$ instabile?

a

$$(x, \varphi) = (0, 0) \,.$$

b

$$(x, \varphi) = \Big(\frac{g}{\gamma^2}, 0\Big) \,.$$

c

$$(x, \varphi) = \Big(\frac{g}{2\gamma^2}, \pi\Big) \,.$$

d Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Le equazioni di Lagrange per il moto relativo al riferimento $\mathcal{S}_1$ sono

$$2\ddot{x} - \gamma^2 x + g = 0 \,,$$
$$2(a^2 + b^2)\ddot{\varphi} + \gamma^2(a^2 - b^2)\sin(2\varphi) = 0 \,.$$

(Questa informazione può essere usata anche nelle domande successive.)
Esistono moti in cui una sola delle due coordinate x e φ si mantiene costante?

a Sì, ma solo se a/b è un numero intero.
b Sì, per ogni valore dei parametri M, γ, a, b.
c No, per nessun valore dei parametri M, γ, a, b.
d Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Esistono moti in cui la derivata $\dot{x}(t)$ cambia di segno (da positiva a negativa) infinite volte?

a Sì, un unico moto.
b Sì, tutti a parte quelli di quiete relativa a $\mathcal{S}_1$.
c No, nessuno.
d Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Quale è la risultante delle forze vincolari applicate alla lamina?

a

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = 4Mg\boldsymbol{w}_3 + 8M\gamma\dot{x}\boldsymbol{w}_2 \,.$$

b

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = 4Mg\boldsymbol{w}_3 \,.$$

c

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = 2M(\gamma^2 x + g)(\boldsymbol{w}_3 - \boldsymbol{w}_1) + 8M\gamma\dot{x}\boldsymbol{w}_2 \,.$$

d Nessuna delle precedenti.

Soluzione

6: b; 7: c; 8: b; 9: b; 10: c; 11: b; 12: b; 13: b; 14: c; 15: c.