DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA CANALE A-K A.A. 2024-2025 CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE

DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo [MMM] si riferiscono al testo *Meccanica Razionale, Modelli Matematici per l'Ingegneria*, D. Andreucci, (Independently published (5 settembre 2022) disponibile su www.amazon.it).
La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m, nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

1. Lunedì 23/09/2024
(Barra) (Aula 15: 17-19)

Introduzione al corso.
Sistemi unidimensionali: ode in forma normale, problema di Cauchy, soluzione locale di una edo, soluzione massimale, esempi di soluzioni massimali, metodo degli ansatz (esempi 1.10 e 1.11), ode in forma autonoma e loro traslabilità temporale (thm 1.12).
Metodo della separazione delle variabili: generalità e calcolo di soluzioni massimali (esempi 1.13 ed 1.14).
Esercizi sulla separazione delle variabili: modello di Malthus per la dinamica delle popolazioni, modello di variazione della pressione atmosferica vs altitudine, caduta libera in mezzo viscoso: velocità limite.
Disuguaglianza di Gronwall (Lemma 1.17).

2. Mercoledì 25/09/2024
(Andreucci) (Aula 15: 12-14)

Presentazione del corso.
Basi ortonormali. Matrici di cambiamento di base $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$. Si ha $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = {\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}^{\mathrm{t}}$.

Teorema 2.1. *Se $\boldsymbol{a}$ ha componenti $\boldsymbol{\lambda}$ in $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{\mu}$ in $\mathcal{N}$, allora $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}\boldsymbol{\lambda}$.*

Definizione di matrice ortogonale.

Teorema 2.2. (s.d.) *Le matrici di cambiamento di base sono ortogonali: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = (\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}})^{-1}$. Quindi il loro determinante ha valore assoluto pari a* 1.

Definizione di base ortonormale positiva.

Teorema 2.3. (s.d.) *Composizione delle matrici del cambiamento di base: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{P}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{P}}$.*

Esercizio 2.4. Completamento di una base ortonormale.
Caratterizzazione delle matrici ortogonali in $\boldsymbol{R}^2$. □

Per casa 2.5. Si considerino la base ortonormale standard $(\boldsymbol{e}_h)$ e quella data da:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_2 \,, \quad \boldsymbol{u}_2 = -\frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_2 \,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Si esprima il vettore

$$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3$$

nella base $(\boldsymbol{u}_h)$, sia calcolando e usando la matrice di cambiamento di base, sia usando direttamente la definizione di $(\boldsymbol{u}_h)$. □

Prodotto triplo in $\boldsymbol{R}^3$.

Teorema 2.6. *Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è una base ortonormale positiva di $\boldsymbol{R}^3$, allora*

$$\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \,, \quad \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{u}_2 \,, \quad \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Corollario 2.7. *Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è una base ortonormale positiva,*

$$\boldsymbol{a} = \sum_{h=1}^{3} \alpha_h \boldsymbol{u}_h \,, \quad \boldsymbol{b} = \sum_{h=1}^{3} \beta_h \boldsymbol{u}_h \,, \quad \textit{si ha} \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \,.$$

Per casa 2.8. Si consideri la base ortonormale data da:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_2 \,, \quad \boldsymbol{u}_2 = -\frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_2 \,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Si calcoli il prodotto vettoriale

$$(3\boldsymbol{u}_1 + 7\boldsymbol{u}_2) \times (4\boldsymbol{u}_2 - 5\boldsymbol{u}_3) \,.$$

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 9.1, 10.1.

3. Giovedì 26/09/2024
(*Andreucci*) (Aula 15: 10-12)

Definizione di sistema di riferimento in $\boldsymbol{R}^3$. Cambiamento di coordinate. Definizione di sistema di riferimento mobile in $\boldsymbol{R}^3$.

Esempio 3.1. 1) Moto $\boldsymbol{X}(t) = R\boldsymbol{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ con origine mobile nell'origine del sistema fisso e base ruotante intorno all'asse $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

2) Moto $\boldsymbol{X}(t) = (L+ct)\boldsymbol{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ dell'esempio precedente. □

Definizione di velocità e accelerazione relativa a un sistema di riferimento mobile (usando la rappresentazione in coordinate nel sistema mobile).

Per casa 3.2. 1) Calcolare velocità e accelerazione relativa nell'Esempio precedente.
2) 5/100. □

Derivata di un vettore relativa a una terna mobile (velocità e accelerazione relative).
Regole di derivazione per la derivata relativa; derivata relativa di uno scalare. Funzioni vettoriali costanti in una terna mobile (e quindi di lunghezza costante); moti solidali con un sistema di riferimento mobile.

Teorema 3.3. *Data una terna mobile* $(\boldsymbol{u}_h)$ *esiste una unica funzione* $\boldsymbol{\omega}$ *tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_h\,, \qquad h = 1\,,2\,,3\,.$$

$\boldsymbol{\omega}$ si dice velocità angolare della terna.

Esercizio 3.4. La terna

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

ha $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$. □

Per casa 3.5. 9/340, 37/340
MMM/10.36 Trovare la velocità angolare della rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_1$ e a $\boldsymbol{u}_2$. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.2, 10.3, 10.4.

4. Venerdì 27/09/2024
(*Barra*) (Aula 15: 08-10)

Lemma 1.17 (disuguaglianza di Gronwall), Corollario 1.18, Oss. 1.20, 1.21 e 1.22, Lemma 1.19 (zeri delle funzioni continue).
Sistemi dinamici monodimensionali: studio qualitativo delle soluzioni: Def. 1.23 (punto di equilibrio) e Thm. 1.24 (soluzione constante), curve integrali, linee di fase, ritratto di fase, piano esteso, Lemma 1.25 e Corollario 1.26 (equilibrio asintotico).
Esempi di studio qualitativo: modello di Malthus (caso con origine instabile e stabile), caduta di un grave con attrito: velocità limite come attrattore.

5. Lunedì 30/09/2024
(*Andreucci*) (Aula 15: 17-19)

Teorema 5.1. *Per ogni $\boldsymbol{a} \in C^1(I)$ si ha*
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}\,.$$

Teorema del moto relativo sulla scomposizione della velocità nel sistema fisso. Velocità di trascinamento.
Teorema di Coriolis sulla scomposizione dell'accelerazione nel sistema fisso. Accelerazione di trascinamento e di Coriolis.

Per casa 5.2. 1) Calcolare le velocità e accelerazioni nell'esempio MMM/10.12.
2) MMM/10.43 (sistema di riferimento terrestre) □

Esercizio 5.3. 9/340 □

Per casa 5.4. 15/340, 21/340, 24/340, 29/340, 4/350, 3/580, 5/580, 10/580 □

Teorema 5.5. *La velocità angolare di $\mathcal{M}$ è costante in $\mathcal{M}$ se e solo se è costante; ha direzione costante in $\mathcal{M}$ se e solo se ha direzione costante.*

Definizione di rotazione e rotazione costante per una terna.

Esercizio 5.6. Una terna si muove di rotazione (intorno a $\boldsymbol{u}_3$) se e solo se $\boldsymbol{\omega} = \alpha(t)\boldsymbol{u}_3$ o $\boldsymbol{\omega} = \alpha(t)\boldsymbol{e}_3$ (terna fissa e mobile coincidenti a $t = 0$).
1/340 □

Dinamica relativa; le forze apparenti di trascinamento e di Coriolis. Equilibrio relativo.

Esercizio 5.7. MMM/12.6 □

Per casa 5.8. MMM/10.44 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.4, 10.5, 10.6, 12.1.

6. Mercoledì 02/10/2024

(Barra) (Aula 15: 12-14)

Def 1.27: Equilibrio stabile/instabile, Ex. 1.28, Ex. 1.29 (legge di Newton per la temperatura) ed 1.30 (equazione logistica) [sia soluzione analitica, sia studio qualitativo per tutti gli esercizi]. Thm. 1.31 (inesistenza di soluzioni periodiche non costanti). Ex. 1.34, Thm. 1.35 (esistenza della soluzione), Oss. 1.37 e Corollario 1.39 (unicità della soluzione).

7. Giovedì 03/10/2024

(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Velocità angolare relativa di una terna mobile rispetto a un'altra.

Teorema 7.1. *Date due terne mobili $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ esiste un'unica $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ tale che*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{u}_h \,.$$

Teorema 7.2. *Per ogni $\boldsymbol{a} \in C^1(I)$ si ha*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{a} \,.$$

Dalla definizione segue $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} = 0$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$.

Teorema 7.3 (Composizione di velocità angolari)**.** *Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ sono terne mobili, vale*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \,.$$

Esercizio 7.4. MMM/10.62 Precessioni regolari
MMM/12.6 (punto materiale vincolato a ellisse scabra ruotante)
29/340 □

Per casa 7.5. 5/340, 6/340, 26/340, 27/340
10/350
2/660 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.7.

8. Venerdì 04/10/2024

(Barra) (Aula 15: 08-10)

Oss. 1.37 (stima del tempo di percorrenza), Lemma 1.41 (criterio di Lipschitzianità), Oss. 1.42 (funzioni Lipschitziane), Thm. 1.43 (Unicità nel caso Lipschitziano). Esistenza e unicità nel caso di equazioni non autonome (i.e. F=F(x,t)): Thm. 1.51 (unicità), Def. 1.44, Thm. 1.45 (dipendenza continua), Ex. 1.47. Edo del I ordine: metodo della variazione della costante (Sez. 1.6).

9. Lunedì 07/10/2024
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Energia cinetica T di un punto materiale.

Teorema 9.1 (del lavoro o dell'energia cinetica)**.** *Se* $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}$*, allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \,\mathrm{d}t\,.$$

Per casa 9.2. MMM/1.45: Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{B} \times \dot{\boldsymbol{X}}\,, \\ \boldsymbol{X}(0) &= L\boldsymbol{e}_1\,, \\ \dot{\boldsymbol{X}}(0) &= c\boldsymbol{e}_2\,. \end{aligned}$$

Qui $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_3$, $B > 0$, $L > 0$, $c > 0$. Integrale dell'energia cinetica. □

Esempio di integrazione completa nel teorema dell'energia cinetica. Definizione di forza conservativa.

Teorema 9.3. *Se* $\boldsymbol{F} = \nabla U$*, allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(\tau)) \cdot \dot{\boldsymbol{X}}(\tau) \,\mathrm{d}\tau = U(\boldsymbol{X}(t_1)) - U(\boldsymbol{X}(t_0))\,.$$

Definizione di energia (meccanica).

Teorema 9.4. *Se un moto* $\boldsymbol{X}$ *soddisfa* $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ *e* $\boldsymbol{F}$ *è conservativa con potenziale* U*, allora l'energia*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

si mantiene costante durante il moto.

Teorema 9.5. *Se un moto* $\boldsymbol{X}$ *soddisfa* $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_0$*, con* $\boldsymbol{F}$ *conservativa con potenziale* U*, e* $\boldsymbol{F}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{X}} = 0$*, allora l'energia*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

si mantiene costante durante il moto.

Esercizio 9.6. Conservazione dell'energia come strumento per ottenere informazioni sul moto.
9/120 □

Per casa 9.7. MMM/2.9
1/120, 3/120, 7/120, 8/120 □

Campi di forze posizionali e conservativi (potenziali). Esempi. Un campo conservativo è chiuso, ma non vale l'implicazione contraria.
Semplicemente connessi in $\boldsymbol{R}^2$ e $\boldsymbol{R}^3$.

Teorema 9.8. (s.d.) *Un campo chiuso in un aperto semplicemente connesso* A *è conservativo in* A*.*

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.5, 2.1, 2.2.

10. Mercoledì 09/10/2024
(*Barra*) (Aula 15: 12-14)

Thm. 1.67 (Teorema del Confronto), Ex. 1.68 (resistenza variabile), Thm. 1.72 (Esplosione in tempo finito), Ex. 1.74 (esempio 1.14 mediante Confronto). Sistemi di equazioni differenziali: Ex. 2.2 (sistema disaccoppiato), Ex. 2.3 (Precessione di Larmor). Sez. 2.1 (abbassamento d'ordine di un'equazione). Esercizi per casa (studio qualitativo e edo: Ex. 1.58, Ex. 1.61)

11. Giovedì 10/10/2024
(*Andreucci*) (Aula 15: 10-12)

Forze a direzione radiale. Moti centrali.

Teorema 11.1. *In un moto centrale il vettore $\boldsymbol{X}(t) \times \dot{\boldsymbol{X}}(t)$ è costante.*

Teorema 11.2. *Sia $\boldsymbol{X}$ un moto centrale.*
1) Se $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) \neq 0$, allora il moto avviene nel piano per $\boldsymbol{X}(0)$ perpendicolare al vettore $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0)$.
2) Se $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) = 0$, allora il moto avviene sulla retta per $\boldsymbol{X}(0)$ e l'origine.

Moti piani e coordinate polari; versori radiale e trasversale. Velocità e accelerazione radiale e trasversale. Equazioni del moto centrale scomposte nella base dei versori radiale e trasversale; l'accelerazione trasversale è nulla, quindi la velocità areolare è costante.

Esercizio 11.3. 3/220 □

La formula di Binet (s.d.).

Teorema 11.4. *Una forza a direzione radiale è conservativa se e solo se è nella forma*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(|\boldsymbol{x}|)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|},$$

e allora il suo potenziale è (per $d > 0$ arbitrario)

$$U(\boldsymbol{x}) = \int_{d}^{|\boldsymbol{x}|} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Esercizio 11.5. 5/220 □

Per casa 11.6. MMM/2.43 La formula di Binet nel caso della forza gravitazionale.
1/220, 7/220 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.8.

12. Venerdì 11/10/2024
(Barra) (Aula 15: 08-10)

Def.2.13 (Funzioni Lipschitziane vettoriali), Thm. 2.10 (esistenza), Thm. 2.14 (unicità), Thm. 2.18 (soluzione massimale), Thm. 2.19 e Cor. 2.20 (Uscita dai compatti nel limite e fine di una massimale). Thm. 2.24 (Limitazione a priori), Def. 2.27 (Dipendenza continua), Applicazioni (Ex. 2.31, Ex. 2.32)

13. Lunedì 14/10/2024
(*Andreucci*) (AUla 15: 17-19)

Sistemi di punti materiali $(\boldsymbol{X}_h, m_h)$, $h = 1, \dots, n$ e sistema differenziale delle loro equazioni di moto.
Centro di massa e involucro convesso. Quantità di moto, coincidente con $m\boldsymbol{v}_G$; momento delle quantità di moto.
Definizione di forza totale $\boldsymbol{F}$ e momento delle forze $\boldsymbol{M}_A$.

Teorema 13.1. *(Equazioni globali) Valgono:*

$$m\ddot{\boldsymbol{X}}_G = \boldsymbol{F}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{P} \times \dot{\boldsymbol{X}}_A\,.$$

Sotto le ipotesi opportune sulle forze interne, le equazioni globali valgono ancora se in $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{M}_A$ si tiene conto solo delle forze esterne.
Le equazioni globali in genere non determinano il moto del sistema di punti materiali.

Esercizio 13.2. Due punti che si attraggono a vicenda con forze elastiche. □

Sistemi di forze conservative $\boldsymbol{F}_i$, cioè tali che

$$\boldsymbol{F}_i = \nabla_{\boldsymbol{x}_i} U(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)\,.$$

Energia cinetica e meccanica del sistema.
Conservazione dell'energia, anche in presenza di forze non conservative di lavoro complessivo nullo.

Esercizio 13.3. Potenziale per un sistema di due punti che si attraggono a vicenda con forze elastiche. □

Teorema 13.4. *Se un sistema di punti materiali liberi è soggetto alle equazioni di moto $m_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_i^0$ ove il sistema delle forze $\boldsymbol{F}_i$ è conservativo con potenziale U, e*

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^0 \cdot \boldsymbol{v}_i = 0 \qquad \textit{in ogni istante}$$

allora l'energia meccanica $T - U$ si conserva lungo i moti.

Per casa 13.5. MMM/5.19
62/620, 64/620 (scrivere il potenziale delle forze applicate) □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.1, 5.2.

14. Mercoledì 16/10/2024
(*Andreucci*) (Aula 15: 12-14)

Esercizio 14.1. 62/620 (potenziale) □

Esempi di vincoli per un singolo moto: superficie, curva come intersezione di due superficie.
Calcolo dei gradi di libertà mediante i parametri necessari o mediante le equazioni vincolari.

Esercizio 14.2. MMM/5.28: Piano e sfera: i 3 casi possibili.
Vincolo per due moti di essere allineati con l'origine; una delle componenti del prodotto vettoriale (che devono essere tutte nulle) risulta combinazione lineare delle altre. □

Vincoli in generale. Configurazioni compatibili. Esempi.
Teorema del Dini per 1 vincolo scalare e per $m > 1$ vincoli scalari (s.d.).
Coordinate dipendenti e indipendenti. Calcolo dei gradi di libertà.
Esempi di applicazione del teorema del Dini: il caso dei vincoli lineari.

Per casa 14.3. Vincolo di parallelismo per due moti (4 gradi di libertà).
Coordinate dipendenti e indipendenti sulla sfera e sull'iperboloide

$$x_3^2 + 1 = x_1^2 + x_2^2 \,.$$

MMM/5.32 (Due superfici)
MMM/5.21, MMM/5.25 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.3, 5.4, 5.5.

15. Giovedì 17/10/2024
(*Andreucci*) (Aula 15: 10-12)

Definizione di vincolo olonomo regolare. Numero dei gradi di libertà.
Vincoli fissi e mobili.

Esercizio 15.1. MMM/5.38, MMM/5.39
27/340 □

Per casa 15.2. 1/310, 2/310, 3/310, 4/310
MMM/5.40 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.6.

16. Venerdì 18/10/2024
(*Barra*) (Aula 15: 08-10)

Cap.3.1: (Equazioni differenziali lineari), Thm. 3.2 (Integrale Generale), Ex. 3.3. Sez. 3.1.1 (Eq. Lin. a coefficienti costanti): Lemma 3.4 (soluzione particolare in casi di interesse nella Meccanica), Ex. 3.5 (oscillatore armonico con forzante esponenziale), Ex. 3.6 (oscillatore armonico con forzante sinusoidale: caso risonante e caso non risonante).

17. Lunedì 21/10/2024
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Coordinate lagrangiane e rappresentazione lagrangiana del moto. Esempi di curva e superficie. Le coordinate indipendenti sono coordinate lagrangiane. Spazio tangente.
Moto lagrangiano. Velocità in coordinate lagrangiane per vincoli fissi e mobili.

Esercizio 17.1. MMM/6.5: Esempio di un punto vincolato a una sfera di raggio variabile e di un punto vincolato a essere allineato con il primo e con l'origine. □

Atti di moto.

Per casa 17.2. 26/620, 1/630, 9/630, 15/630, (scrittura della velocità in rappresentazione lagrangiana)
MMM/5.44 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.7, 6.1.

18. Mercoledì 23/10/2024
(*Andreucci*) (Aula 15: 12-14)

Atti di moto (ossia derivata nel tempo del vettore delle coordinate locali $\boldsymbol{z}$). Definizione di spazio tangente; spostamenti virtuali. Se il vincolo è fisso la concatenazione di tutti i vettori velocità appartiene allo spazio tangente. Il vettore $\dot{\boldsymbol{q}}$ può assumere qualunque valore.

Teorema 18.1. *Gli atti di moto costituiscono lo spazio affine*

$$V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} + \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial t}\,.$$

Spostamenti virtuali e effettivi, e loro significato. Coincidono per i vincoli fissi.

Per casa 18.2. 1) Trovare lo spazio tangente per: i) due punti vincolati a essere a distanza costante; ii) MMM/6.24 un punto vincolato al piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0\,.$$

2) 66/620 (spazio tangente) □

Vale per ogni $j \in \{1\,, \dots\,, \ell\}$, $k \in \{1\,, \dots\,, m\}$

$$\nabla_{\boldsymbol{z}}\, f_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial q_j} = 0\,.$$

Definizione di spazio normale come sottospazio di $\boldsymbol{R}^{n_c}$ generato dai $\nabla_{z}\, f_k$.

Teorema 18.3. *Lo spazio normale è l'ortogonale dello spazio tangente.*

In particolare lo spazio tangente è indipendente dalla parametrizzazione lagrangiana.

Esercizio 18.4. MMM/6.21 Calcolo dello spazio normale e tangente nei casi:
1) superficie ($n_c = 3$, $m = 1$),
2) curva ($n_c = 3$, $m = 2$),
3) due punti vincolati a avere uguale quota ($n_c = 6$, $m = 1$). □

Esercizio 18.5. 15/630 □

Per casa 18.6. Trovare lo spazio normale per: i) due punti vincolati a essere a distanza costante; ii) MMM/6.24 un punto vincolato al piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0\,.$$

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.3.

19. Giovedì 24/10/2024
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Esercizio 19.1. MMM/7.1 Sistema vincolato di due punti, con $n_c = 6$, $m = 1$,

$$f_1(z_1, \dots, z_6) = 2z_1 - z_4 = 0\,.$$

Inoltre le forze sono $\boldsymbol{F}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{F}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{e}_1$. Equazioni di moto; ipotesi sulle reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$. Lavoro complessivo nullo delle rezioni vincolari in questo caso, ma ciascuna ${\mathbf{f}_{\text{vin}}}^i$ fa lavoro non nullo sul moto $\boldsymbol{X}_i$. □

Esercizio 19.2. 15/620 (modificato: asta omogenea → asta composta da due punti materiali), risolto con l'ipotesi $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$. □

Per casa 19.3. 1) MMM/6.25 Spostamenti virtuali e effettivi per la circonferenza che trasla.
2) Scrivere le equazioni di moto con l'ipotesi dei lavori virtuali:
9/620, 36/620, 57/620, 59/620, 23/630 □

Energia cinetica T^{L} in forma lagrangiana.

Teorema 19.4. *Vale*

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{p} + b_0\,.$$

$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *è la matrice simmetrica e definita positiva data da*

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_k}\,,$$

e $\boldsymbol{b}_1$ *e* b_0 *si annullano se* $\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}/\partial t = 0$.

Per casa 19.5. 1) Calcolare le energie cinetiche negli esercizi:
9/620, 36/620, 57/620, 59/620, 23/630
2) MMM/7.9 Ricavare dalla ILV la precedente definizione di vincolo liscio per il singolo punto vincolato a una curva. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.1, 7.2, 7.5.

20. Venerdì 25/10/2024
(Barra) (Aula 15: 08-10)

Cap.3.2: (Sistemi Lineari Omogenei). Generalità, Thm. 3.17 (combinazione lineare di soluzioni), Lemma 3.18 (lineare indipendenza in S ed R^N), Cor. 3.19 (dimensione di $S \neq N$), Thm. 3.21 (Basi in R^N), Cor. 3.22 (dimensione di $S = N$). Ex. 3.23 (il caso del moto armonico).

21. Lunedì 28/10/2024
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Forze in coordinate lagrangiane. L'ipotesi dei lavori virtuali (ILV) in diverse forme; caso del singolo punto vincolato a una superficie.

Teorema 21.1. *L'ipotesi dei lavori virtuali determina il moto.*

Esercizio 21.2. 57/620
9/620 □

Per casa 21.3. Punto su piano ruotante, in assenza di forze direttamente applicate.
66/620
Scrivere le equazioni di moto di un punto libero con la ILV. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.2, 7.3.

22. Mercoledì 30/10/2024
(Barra) (Aula 15: 12-14)

Sez. 3.4.2: (Metodi risolutivi di sistemi di ODE): primo metodo (mediante diagonalizzazione della matrice dei coefficienti del sistema dinamico). Annessa esercitazione (quattro esercizi).

23. Giovedì 31/10/2024
(*Andreucci*) (Aula 15: 10-12)

Lemma 23.1. *Valgono*

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial p_h}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q},t)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t),t)\Big) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),t)\,.$$

Notazione

$$\frac{\partial}{\partial \dot q_h} = \frac{\partial}{\partial p_h}\,.$$

Le componenti lagrangiane delle forze Q_h.

Teorema 23.2. (*Equazioni di Lagrange*) *Le ℓ equazioni*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial \dot q_h}\Big] - \frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} = Q_h\,, \quad h = 1\,,\dots\,,\ell\,,$$

sono equivalenti all'ipotesi dei lavori virtuali.

Esercizio 23.3. 1/620 □

Per casa 23.4. MMM 7.1 con le equazioni di Lagrange.
Non usare lagrangiana né passaggio al sistema di riferimento mobile:
37/620, 57/620, 61/620 (senza potenziale lagrangiano)
17/630, 29/630, 31/630, 37/630 □

Forze conservative e componenti lagrangiane delle forze.

Teorema 23.5. *Se il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, si ha*

$$Q_h = \frac{\partial}{\partial q_h}[U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},t))]\,, \qquad h = 1\,,\dots\,,\ell\,.$$

Esercizio 23.6. Punto vincolato a un piano ruotante, dinamica relativa con le equazioni di Lagrange. □

Per casa 23.7. 1) Componenti lagrangiane delle forze per un punto materiale $(\boldsymbol{X},m)$ vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

e soggetto alla forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_A)\,, \qquad \boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_3\,.$$

2) Calcolare le componenti lagrangiane delle forze per il punto materiale $(\boldsymbol{X},m)$ vincolato alla circonferenza mobile

$$x_1^2 + x_2^2 = r(t)^2\,, \qquad r > 0\,, r \in C^2(\boldsymbol{R})\,,$$

e soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_A)\,, \qquad \boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_2\,, \qquad R > 0\,.$$

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.6, 8.1.

24. Lunedì 04/11/2024
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Se i vincoli sono mobili l'energia in genere non si conserva anche se le forze direttamente applicate sono conservative.

Teorema 24.1. *Se i vincoli sono fissi e il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, l'energia*

$$T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}))\,,$$

si conserva lungo un moto lagrangiano che soddisfa l'ipotesi dei lavori virtuali.

Definizione di potenziale lagrangiano e forze conservative in senso lagrangiano.

Esercizio 24.2. MMM/8.19 Un moto con potenziale lagrangiano ma con forze non conservative (punto vincolato a circonferenza con forza tangente).
MMM/8.17 □

Per casa 24.3. MMM/8.20 □

Definizione di lagrangiana.
Equazioni di Lagrange in forma conservativa.

Esercizio 24.4. Punto vincolato a una circonferenza con forza tangente: il potenziale lagrangiano esiste anche se la forza non è conservativa.
64/620 □

Coordinate cicliche e integrale primo associato.

Esercizio 24.5. 6/630 □

Per casa 24.6. 32/620, 35/620, 40/620, 56/620, 59/620, 64/620, 65/620, 68/620, 71/620 □

Le coordinate lagrangiane valide in uno dei due sistemi di riferimento lo sono anche nell'altro.

Teorema 24.7. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i vincoli sono fissi e $\ell = 1$.*

Teorema 24.8. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i moti sono vincolati a un piano solidale cui appartiene anche la velocità angolare.*

Per casa 24.9. MMM/12.18 (piano che ruota intorno a un asse esterno)
1/630, 3/630, 14/630, 25/630, 42/630, 54/630, 63/630 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.1, 8.2, 12.4.

25. Mercoledì 06/11/2024
(*Andreucci*) (Aula 15: 12-14)

Teorema 25.1. *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})$. Allora se*

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}_0) = 0\,, \qquad h = 1\,, \dots\,, \ell\,,$$

la funzione costante $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0$ risolve le equazioni di Lagrange.

Teorema 25.2. (s.d.) *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})$ e inoltre le forze direttamente applicate siano conservative in senso tradizionale, con $\boldsymbol{q}_0$ punto di massimo isolato per U^{L}. Allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.*

Esempi di equilibrio vincolato.

Esercizio 25.3. 8/660 □

Per casa 25.4. 14/660, 20/660, 27/660, 40/660, 41/660, 42/660, 46/660, 47/660, 48/660 (tutti senza piccole oscillazioni) □

Per casa 25.5. 60/620
9/630, 15/630
53/660 □

Esercizio 25.6. MMM/12.12 Vincoli mobili: punto materiale vincolato a circonferenza che trasla:

$$R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + \frac{ct^2}{2}\boldsymbol{e}_1\,,$$

soggetto al peso $-mg\boldsymbol{e}_2$.
Determinazione della lagrangiana e delle equazioni di Lagrange nel sistema mobile e in quello fisso. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.4, 12.3.

26. Giovedì 07/11/2024
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Teorema 26.1. *Se due lagrangiane soddisfano*

$$\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\boldsymbol{q}, t)\,,$$

allora hanno equazioni di Lagrange equivalenti.

Definizione di lunghezza L della traiettoria di un moto come estremo superiore delle lunghezze delle approssimazioni con spezzate. In effetti

Teorema 26.2. (s.d.)

$$L = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\boldsymbol{X}}(\tau)| \,\mathrm{d}\tau\,.$$

Definizione di lunghezza d'arco s. Funzione inversa della lunghezza d'arco per moti regolari. Parametrizzazione mediante s. Moto dato mediante la traiettoria e la legge oraria. Versore tangente, versore normale principale, curvatura. Scomposizione di velocità e accelerazione:

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{T}(s)\,, \qquad \boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{T}(s) + \dot{s}^2 k(s)\boldsymbol{N}(s)\,.$$

Accelerazione tangente e normale. La terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ (se $k > 0$). Moto vincolato a una curva, reazioni vincolari. Necessità di ipotesi costitutive. Il caso del vincolo liscio per le curve; la componente tangente dell'equazione del moto è indipendente dalle altre 2, che servono a determinare la reazione vincolare. Legge di attrito dinamico di Coulomb-Morin.
Le formule di Frenet-Serret.

Teorema 26.3. *La velocità angolare della terna intrinseca di una curva descritta da un moto di legge oraria $s(t)$ è*

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{s}[-\tau\boldsymbol{T} + k\boldsymbol{B}]\,.$$

Esercizio 26.4. 66/630 □

Per casa 26.5. 1) Scrivere il moto che ha per traiettoria l'elica cilindrica e legge oraria $s(t) = bt^2$.
2) Scrivere la legge oraria per il moto sull'elica cilindrica che ha per prima coordinata $R\cos(bt^3)$.
3) Lunghezza d'arco nell'ellisse.
4) 6/100, 2/120, 3/120, 12/120, 7/560, 9/560, 11/560, 13/560, 15/560, 16/560, 19/560, 22/560, 23/560, 24/560, 10/620, 68/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.1, 3.2, 3.3, 3.5, 3.6, 3.7, 10.8, 12.3.

27. Lunedì 11/11/2024
(*Barra*) (Aula 15: 17-19)

Fine dell'esercitazione sulla risoluzione di sistemi di equazioni differenziali mediante diagonalizzazione della matrice dei coefficienti: caso di autovalori coincidenti. Sec. III.3: Matrici risolventi e di transizione. Lemma 3.24, Def. 3.25 (Matrice di transizione), Lemma 3.26, Thm. 3.27, Thm. 3.30 (proprietà algebriche della matrice di transizione), Thm. 3.32 (matrice di transizione come soluzione unica del problema di Cauchy), Ex. 3.27 (il caso del moto armonico).

28. Mercoledì 13/11/2024
(*Andreucci*) (Aula 15: 12-14)

Piccole oscillazioni in punti di equilibrio, con hessiana del potenziale definita negativa, per sistemi vincolati da vincoli olonomi fissi e soggetti a forze conservative. Energia cinetica ridotta, potenziale ridotto, lagrangiana ridotta.
Il caso 1-dimensionale: moto armonico.
Equazioni di Lagrange delle piccole oscillazioni nel caso $\ell > 1$:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\mathcal{U}}\boldsymbol{q} = 0\,.$$

Ricerca delle frequenze delle piccole oscillazioni con la sostituzione $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$; equazione $\det(\omega^2\boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{U}}) = 0$.
Teorema di esistenza delle coordinate normali. Discussione della periodicità delle piccole oscillazioni.

Esercizio 28.1. 6/680 □

Per casa 28.2. 4/680, 16/680, 20/680, 25/680, 37/680 □

Vincoli di rigidità per n moti $\boldsymbol{X}_i$. Numero dei gradi di libertà per 3 moti non allineati ($\ell = 6$).

Teorema 28.3. (s.d.) *Risultano costanti nel tempo le quantità:*

$$(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{X}_i)\cdot(\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_h)\,,$$
$$|(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{X}_i)\times(\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_h)|\,.$$

Teorema 28.4. (s.d.) *Per ogni $r \geq 4$ esistono $\lambda_h \in \boldsymbol{R}$ costanti tali che*

$$\boldsymbol{X}_r(t) - \boldsymbol{X}_1(t) = \sum_{h=1}^{3}\lambda_h\boldsymbol{u}_h(t)\,,\qquad t\in I\,.$$

Qui $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2$.

Dunque $\ell = 6$ per ogni $n \geq 3$.

Per casa 28.5. 44/630, 52/630
MMM/7.10 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.6, 9.3.

29. Giovedì 14/11/2024

(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Sistema rigido non degenere. Sistema di riferimento solidale. Moti del sistema rigido e moti solidali al sistema rigido.
Moti solidali al rigido $\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda})$. Scomposizione

$$\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{X}_O(t) + \sum_{h=1}^{3} \lambda_h \boldsymbol{u}_h(t) \,.$$

Angoli di Eulero.
Velocità angolare nella forma (MMM/13.10)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \boldsymbol{e}_3 + \dot{\theta} \boldsymbol{w}_1 + \dot{\psi} \boldsymbol{u}_3 \,.$$

Esercizio 29.1. 4/340 □

Per casa 29.2. 5/310, 6/310, 11/340, 13/340, 76/620 □

Sistema rigido degenere rettilineo.

Lemma 29.3. *Se* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{a} \neq 0$, *allora* $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = -|\boldsymbol{a}|^2 [\boldsymbol{b}]_\perp$.

Teorema 29.4. *Dato un versore* $\boldsymbol{u} \in C^1(I)$ *esiste unico* $\boldsymbol{\omega}$ *tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u} \,, \qquad \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \,.$$

Per casa 29.5. 35/340, 38/340 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 13.1, 13.2, 13.3.

30. Venerdì 15/11/2024

(Barra) (Aula 15: 08-10)

Esercitazione sulla risoluzione di sistemi di equazioni differenziali—ed annessi problemi di Cauchy—mediante diagonalizzazione della matrice dei coefficienti e mediante matrice di trasferimento. Caso di matrici 3x3 e casi non omogenei.

31. Lunedì 18/11/2024
(*Andreucci*) (Aula 15: 17-19)

Corpi rigidi continui (e non continui). Distribuzioni di massa: solidi, superfici, curve, punti isolati. Definizione di corpo rigido non degenere e degenere rettilineo. Massa.
Definizione di moto del centro di massa $\boldsymbol{X}_G$.

Teorema 31.1. *($\boldsymbol{X}_G$ è solidale) Si ha $\boldsymbol{X}_G(t) = \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda}_G)$, con*

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{1}{m} \int\limits_C \boldsymbol{\lambda} \rho(\boldsymbol{\lambda}) \, \mathrm{d}\mu \,.$$

Teorema 31.2. *(additività)* (s.d.) *Se $C = C_1 \cup C_2$, con $\int_{C_1 \cap C_2} \rho \, \mathrm{d}\mu = 0$, allora*

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{m_1}{m} \boldsymbol{\lambda}_G^1 + \frac{m_2}{m} \boldsymbol{\lambda}_G^2 \,,$$

con m_i e $\boldsymbol{\lambda}_G^i$ rispettivamente massa e coordinate del centro di massa di C_i.

Definizione di piano di simmetria materiale ortogonale.

Teorema 31.3. (s.d.) *Se Π è di simmetria materiale ortogonale per C allora $\boldsymbol{\lambda}_G \in \Pi$.*

Esercizio 31.4. MMM/14.15 (centro di massa di una sfera forata) □

Per casa 31.5. MMM/14.18 (proprietà di minimo del centro di massa)
7/580, 8/580 □

Definizione di quantità di moto e momento delle quantità di moto di polo Z. Quantità di moto e momento delle quantità di moto in cui si sostituisce la formula della velocità di trascinamento (per il sistema di riferimento solidale).
Definizione del tensore d'inerzia $\boldsymbol{\sigma}_Z$ di polo Z.

Teorema 31.6. *Vale per ogni moto $\boldsymbol{X}_Z$*

$$\boldsymbol{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{X}_G - \boldsymbol{X}_Z) \times \boldsymbol{V}_T(\boldsymbol{X}_Z, t) \,.$$

In particolare $\boldsymbol{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega}$ se $\boldsymbol{X}_G = \boldsymbol{X}_Z$ o se $\boldsymbol{X}_Z$ è sia fisso che solidale.

Esercizio 31.7. Calcolo della matrice d'inerzia di un disco omogeneo. □

Per casa 31.8. 19/330, 26/330, 31/330, 48/330, 59/330 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.1, 14.2, 14.3.

32. Mercoledì 20/11/2024 (*Andreucci*) (Aula 15: 12-14)

Definizione di momenti di inerzia e deviatori.

Teorema 32.1. *Le quantità* $\boldsymbol{\sigma u} \cdot \boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{\sigma u} \cdot \boldsymbol{w}$ *(con* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 0$*) espresse in funzione di distanze da rette e piani (mediante integrali).*

Corollario 32.2. *La* $\boldsymbol{\sigma}$ *è definita positiva se il corpo è non degenere, e semidefinita positiva nel caso dell'asta rigida.*

Calcolo di $\boldsymbol{\sigma}$ per l'asta rigida.
Momenti d'inerzia e deviatori possono dipendere dal tempo. Però:

Teorema 32.3. *Se* $\mathcal{M}$ *e* $\boldsymbol{X}_Z$ *sono solidali con il corpo rigido, allora la matrice* $\boldsymbol{\sigma}_Z^{\mathcal{M}}$ *è costante nel tempo.*

Per casa 32.4. 26/330, 31/330 □

Definizione di vettori principali di inerzia, assi principali di inerzia, terne principali di inerzia.

Teorema 32.5. *Sia* $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ *una terna ortonormale. Allora* $\boldsymbol{u}_1$ *è principale se e solo se* $I_{12} = I_{13} = 0$*.*

Teorema 32.6. *Sia* C *un rigido non degenere. In ogni punto esiste una terna ortonormale principale, che rende la matrice di* $\boldsymbol{\sigma}$ *diagonale.*
Se $\boldsymbol{X}_Z$ *è un moto solidale, esiste una base solidale principale* $\mathcal{M}$ *in* $\boldsymbol{X}_Z$ *(ossia tale che* $\boldsymbol{\sigma}_Z^{\mathcal{M}}$ *sia diagonale e costante).*

Esercizio 32.7. 59/630 □

Proprietà di minimo e massimo dei momenti principali.

Teorema 32.8. *1) Dati due versori ortogonali principali, il loro prodotto vettoriale è principale.*
2) Se in un punto tutti i momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i vettori sono principali in quel punto.
3) Se in un punto due momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i versori del piano generato dai due versori principali corrispondenti sono principali.

Per casa 32.9. 35/630, 46/630, 55/630
Ricerca di assi principali per la lamina usando le proprietà di minimo e massimo.
La diagonale del rettangolo non è principale nel centro del rettangolo (se il rettangolo non è quadrato). □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.4, 14.5, 14.6.

33. Giovedì 21/11/2024
(Barra) (Aula 15: 10-12)

Sez. 3.4: Thm 3.33 (matrice esponenziale), Thm. 3.35 (matrice di transizione come matrice esponenziale). Sez. 3.4.1 Calcolo effettivo di un integrale generale. Sez. 3.4.3: Thm. 3.40 (risoluzione mediante matrice esponenziale). Ex. 3.42 (il caso del moto armonico). Esercitazione.

34. Venerdì 22/11/2024
(Barra) (Aula 15: 08-10)

Comportamenti asintotici (Cap.4): Def. 4.1 (sistema dinamico), Def. 4.2 (orbita e grafico), Def. 4.3 (ritratto di fase), Oss. 4.4 e 4.5, Lemma 4.6, Ex. 4.7 (moto armonico), Def. 4.9 e Lemma 4.10 (Integrale primo), Def. 4.11, Lemma 4.12, Def. 4.13 (equilibrio), Oss. 4.14, Lemma 4.15 (comportamento vicino ai punti d'equilibrio), Def. 4.16 (punto fisso stabile o instabile), Def. 4.17 (punto fisso asintoticamente stabile), Thm. 4.19 (integrali primi e assenza di punti fissi asintoticamente stabili), Ex. 4.21 (moto dissipativo). Thm. 4.23 (stabilità per sistemi a coefficienti costanti).

35. Lunedì 25/11/2024
(Andreucci) (Aula 15: 17-19)

Esercizio 35.1. Ricerca di assi principali per la lamina usando le proprietà di minimo e massimo.
La diagonale del rettangolo non è principale nel centro del rettangolo (se il rettangolo non è quadrato). □

Ricerca di assi principali (s.d.):
la normale a un piano di simmetria materiale ortogonale è principale (in un punto del piano);
traslabilità di terne principali centrali lungo gli assi;
teorema di Huygens;
corpi con simmetria di rotazione.

Esercizio 35.2. Ricerca degli assi principali:
parallepipedo (nel centro di massa);
cubo (in un punto qualsiasi). □

Per casa 35.3. 19/330, 39/330, 52/330 □

Sistemi di corpi rigidi vincolati. Coordinate locali. Moti solidali a un corpo rigido del sistema; velocità di moti solidali in forma lagrangiana; energia cinetica di un corpo rigido e del sistema di corpi rigidi. Distribuzioni di forze su un corpo rigido. Esempi. Ipotesi dei lavori virtuali.

Teorema 35.4. (s.d.) *Le equazioni date dall'ipotesi dei lavori virtuali determinano il moto.*

Le equazioni di Lagrange per sistemi di corpi rigidi.

Esercizio 35.5. Energia cinetica dell'asta rigida. □

Per casa 35.6. 1/330, 7/330, 10/330
11/620, 14/620, 20/620, 28/620, 30/620, 51/620, 58/620, 63/620
1/660, 5/660, 13/660, 25/660, 36/660, 44/660, 57/660
10/680, 18/680, 22/680 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.6, 15.1, 15.3, 16.1, 16.2.

36. Mercoledì 27/11/2024
(*Andreucci*) (Aula 15: 12-14)

Teorema 36.1. *Vale per un corpo rigido C e un moto $\boldsymbol{X}_Z$*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{V}_T(\boldsymbol{X}_Z,t)|^2 \\ + m\boldsymbol{V}_T(\boldsymbol{X}_Z,t)\cdot\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{X}_G-\boldsymbol{X}_Z]\,.$$

Corollario 36.2. *(König)*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2\,.$$

Moto polare e rotazione di un sistema di riferimento mobile.

Corollario 36.3. *In un moto polare di polo Z*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Si può scrivere in un moto polare di polo Z, se $\boldsymbol{\omega}(t)\neq 0$,

$$T(t) = \frac{1}{2}I^Z_{\boldsymbol{u}(t)\boldsymbol{u}(t)}|\boldsymbol{\omega}(t)|^2\,, \qquad \boldsymbol{u}(t) := \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{|\boldsymbol{\omega}(t)|}\,.$$

Esercizio 36.4. 58/620 □

Per casa 36.5. 5/330, 9/330, 25/330, 29/330, 41/330, 45/330, 57/330
38/620, 41/620, 44/620, 47/620, 55/620
21/630, 27/630, 49/630 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.7.

37. Giovedì 28/11/2024
(*Andreucci*) (Aula 15: 10-12)

Risultante e momento risultante delle forze.

Per casa 37.1. MMM/15.13 (potenziale gravitazionale terrestre, Terra non sferica)
MMM/15.15 (forze solidali e non solidali) □

Equazioni globali per un corpo rigido. Forze esterne e interne.

Teorema 37.2. *Le due equazioni globali determinano il moto di un corpo rigido non degenere.*

Cenno al caso dell'asta rigida.

Esercizio 37.3. 28/620 □

Per casa 37.4. 5/470, 8/470 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.1, 15.2, 15.4.

38. Venerdì 29/11/2024
(*Barra*) (Aula 15: 08-10)

Thm. 4.29 (Teorema di stabilità lineare). Esercitazione sui punti di equilibrio in sistemi lineari e nonlineari. Def. 4.33 (funzione di Lyapunov). Thm. 4.35 (Teorema di Lyapunov per la stabilità). Thm. 4.38 (Teorema di Lyapunov per la stabilità asintotica). Applicazioni: Ex. 4.42 pendolo conservativo (analisi dei punti fissi, piccole oscillazioni), Ex. 4.43 pendolo dissipativo (analisi dei punti fissi).

39. Lunedì 02/12/2024
(*Andreucci*) (Aula 15: 17-19)

Teorema 39.1. *(Equazioni di Eulero) Supponiamo che l'origine O del sistema solidale con il rigido non degenere sia fissa o coincida con il centro di massa. Vale*

$$\boldsymbol{\sigma}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \,. \tag{39.1}$$

Corollario 39.2. *In componenti, in una terna principale $(\boldsymbol{u}_h)$, denotando*

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,, \qquad \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = \sum_{h=1}^{3} M_h \boldsymbol{u}_h \,,$$

la (39.1) *equivale a*

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 + M_1 \,, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + M_2 \,, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + M_3 \,. \end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero in genere vanno accoppiate con la prima equazione globale. Nel caso del moto polare determinano il moto. Sono sempre un sistema del II ordine negli angoli di Eulero, e possono essere considerate un sistema del I ordine nelle ω_h se $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ dipende solo dalle ω_h e da t.

Esercizio 39.3. 6/470 □

Per casa 39.4. MMM/15.26 (forza non solidale su sfera)
1/470, 2/470, 10/470 □

Teorema 39.5. *In un moto polare di polo Z*

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_Z^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega} \,.$$

Esercizio 39.6. 1/450 □

Per casa 39.7. MMM/15.42 (derivata della T di un corpo rigido nel caso generale)
4/450, 7/450, 9/450, 11/450, 13/450 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.5, 15.7.

40. Mercoledì 04/12/2024
(Andreucci) (Aula 15: 12-14)

Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema solidale al rigido non degenere.

Teorema 40.1. *Sia O fisso.*
Se il moto è una rotazione intorno a un asse principale allora $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ è parallelo all'asse di rotazione.
Se viceversa $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ è parallelo a un asse principale, il moto è di rotazione intorno a quell'asse per le opportune condizioni iniziali.

Teorema 40.2. *Sia O fisso.*
Se il moto è una rotazione intorno a un asse non principale, allora il momento $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ ha componente ortogonale all'asse non nulla in ogni istante in cui $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$.

Motivazione della denominazione di momenti deviatori.
Collegamento tra equazioni globali e dinamica lagrangiana.
Caso del corpo vincolato a ruotare intorno a un asse fisso: si possono usare le equazioni di Eulero, quella relativa alla direzione dell'asse di rotazione dà l'equazione del moto, le altre due danno il momento della reazione vincolare.
Nel caso del corpo vincolato a ruotare intorno a un asse fisso con vincolo liscio (cioè se vale l'ipotesi dei lavori virtuali), il momento della reazione vincolare ha componente nulla lungo l'asse di rotazione.
Nel caso del corpo vincolato a muoversi di moto polare con vincolo liscio (cioè se vale l'ipotesi dei lavori virtuali), il momento della reazione vincolare è nullo.

Esercizio 40.3. 26/450 □

Per casa 40.4. 17/450, 21/450, 23/450, 32/450, 47/450, 49/450, 65/450, 84/450 □

Teorema 40.5. *Una curva è piana se e solo se $\boldsymbol{B}(s)$ è costante.*

Corollario 40.6. *Una curva è piana se e solo se ha torsione nulla.*

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.5, 10.8, 15.6, 16.5.

41. Giovedì 05/12/2024
(*Andreucci*) (Aula 15: 10-12)

Moti polari per inerzia di polo O.

Teorema 41.1. *In un moto polare per inerzia valgono gli integrali primi:*
1) $\boldsymbol{L}_O(t) = \boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{L}(t_0)$.
2) $T(t) = \boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}/2 = T(t_0)$.

Il vettore $\boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega}$ è costante nella terna fissa ma in genere non solidale al rigido. Se $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per un t allora non si annulla mai.

Esercizio 41.2. 42/450 □

Ellissoide d'inerzia solidale e mobile. Normale all'ellissoide.

Teorema 41.3. *(Moto alla Poinsot) Consideriamo un corpo rigido non degenere che si muove di moto polare per inerzia di polo O.*
Allora l'ellissoide d'inerzia mobile si muove rotolando senza strisciare su un piano fisso, che ha normale $\boldsymbol{L}_O(t)$.

Esercizio 41.4. 35/450 □

Per casa 41.5. 29/450, 31/450, 35/450, 41/450, 45/450 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.8.

42. Lunedì 09/12/2024
(*Andreucci*) (Aula 15: 17-19)

Teorema 42.1. *Se C si muove di moto polare per inerzia, e di rotazione, allora la rotazione è uniforme e l'asse di rotazione è principale d'inerzia.*

Le rotazioni uniformi intorno a assi principali sono moti polari per inerzia. Limitazione di $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ da sopra e da sotto in termini di $T(t_0)$.

Teorema 42.2. *Se un corpo è un giroscopio in $\boldsymbol{X}_O$, allora i moti polari per inerzia sono precessioni regolari.*

Definizioni di poloidi ed erpoloidi. Casi dell'ellissoide di rotazione e sferico. Caso dell'ellissoide non di rotazione: rotazioni per inerzia stabili e instabili; moti per inerzia non periodici (corrispondono alle 4 polodie separatrici).

Esercizio 42.3. 54/630 □

Per casa 42.4. 35/450, 56/450, 57/450, 63/450, 64/450, 69/450, 71/450 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.8, 15.9.

43. Mercoledì 11/12/2024
(Andreucci) (Aula 15: 12-14)

Esercizio 43.1. MMM/16.11 Due circonferenze che rotolano l'una sull'altra senza strisciamento (rotolamento puro). □

Per casa 43.2. MMM/11.22 (periodo nelle precessioni regolari) □

Campo delle velocità di trascinamento di un sistema di riferimento mobile $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}$. Studio del campo della velocità di trascinamento.
Scomposizione della velocità di trascinamento in componente parallela e ortogonale a $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$. Centro istantaneo del moto. Asse istantaneo di moto e sue proprietà (asse di istantanea rotazione).

Lemma 43.3. *Vale*

$$\boldsymbol{V}_T(\boldsymbol{x}_1, t) - \boldsymbol{V}_T(\boldsymbol{x}_2, t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\,,$$

e quindi $\boldsymbol{V}_T$ per t fissato è costante sulle rette parallele a $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Esercizio 43.4. 77/630 □

Per casa 43.5. 16/340, 17/340, 18/340, 19/340 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 11.1, 11.4, 16.4.

44. Giovedì 12/12/2024
(Andreucci) (Aula 15: 10-12)

Asse istantaneo di moto e sue proprietà di minimizzazione (asse di istantanea rotazione). Trinomio invariante.
Rigate del moto.
Moto senza strisciamento delle rigate l'una sull'altra.
Teorema di Chasles.
Moti rigidi piani. Base e rulletta.

Esercizio 44.1. MMM/11.20 Il compasso ellittico.
Esercizio a scelta multipla. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 11.2, 11.3.

45. Venerdì 13/12/2024
(Barra) (Aula 15: 08-10)

Sez. 4.6: sistemi del II ordine. Def. 4.45, Def. 4.46, Def. 4.47, Thm. 4.50 (criterio di stabilità di Dirichlet), Thm. 4.56 (criterio di stabilità asintotica di Dirichlet, sistemi dissipativi) e Thm. 4.58 (criterio di instabilità di Dirichlet). Esempi: oscillatore armonico conservativo, dissipativo, repulsore armonico. Sez. 4.7: Ritratti di fase con esempi: Thm. 4.61 (integrali primi nei ritratti di fase) e Thm. 4.63 (tempo di percorrenza nei ritratti di fase).

Fine del corso