MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
b I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
c Nessuna delle altre.
d I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c Nessuna delle altre.
d L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
c $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
d $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Nessuna delle altre.
b Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
c Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
d Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.

05

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
b $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{07}}$

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

b $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

c $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{08}}$

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

b Nessuna delle altre.

c $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

d $\frac{1}{2} ML^2 \dot{q}^2$.

$\boxed{\textbf{09}}$

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + Mq^2 \, .$$

b Nessuna delle altre.

c

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 \, .$$

d Una costante positiva.

$\boxed{\textbf{10}}$

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a Nessuna delle altre.

b $\beta^2 Mq$.

c 0.

d $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

$\boxed{\textbf{11}}$

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a Nessuna delle altre.

b $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

c $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)} \ddot{\varphi} + kLq \sin\varphi = 0$.

d $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

$\boxed{\textbf{12}}$

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b Infinite.
c A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio stabile.
b È di equilibrio instabile.
c Non è di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
b Nessuna delle altre.
c $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
d $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
b 0
c $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
b Nessuna delle altre.
c I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
d I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
b $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
c $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
d Nessuna delle altre.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Nessuna delle altre.
b Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
c Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
d Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.

05

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
d $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0, 2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a Nessuna delle altre.
b $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.
c $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
d $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a Nessuna delle altre.
b $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
c $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.
d $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

b Una costante positiva.
c

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

d Nessuna delle altre.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a Nessuna delle altre.
b $\beta^2 Mq$.
c 0.
d $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a Nessuna delle altre.
b $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
d $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
b A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
c Nessuna delle altre.
d Infinite.

$\boxed{\textbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio instabile.
b È di equilibrio stabile.
c Non è di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
b $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
c Nessuna delle altre.
d $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.

$\boxed{\textbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a Nessuna delle altre.
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c 0
d $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$

[3].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a Nessuna delle altre.
b I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
c I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
d I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.

$\boxed{\textbf{02}}$
Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\textbf{03}}$
Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

$\boxed{\textbf{04}}$
Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
b Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
c Nessuna delle altre.
d Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.

$\boxed{\textbf{05}}$
Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
b $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R}\times(0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

$\boxed{\textbf{07}}$

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

b Nessuna delle altre.

c $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

d $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

$\boxed{\textbf{08}}$

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

b Nessuna delle altre.

c $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

d $\frac{1}{2} ML^2\dot{q}^2$.

$\boxed{\textbf{09}}$

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 .$$

b

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

c Una costante positiva.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{10}}$

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

b 0.

c Nessuna delle altre.

d $\beta^2 Mq$.

$\boxed{\textbf{11}}$

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

b $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

c $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq \sin\varphi = 0$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{12}}$

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Infinite.
b Nessuna delle altre.
c A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio stabile.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio instabile.
d Nessuna delle altre.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
b Nessuna delle altre.
c $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
d $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
c $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
b Nessuna delle altre.
c I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
d I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.

$\boxed{\mathbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b Nessuna delle altre.
c L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

$\boxed{\mathbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
c $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
d $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.

$\boxed{\mathbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Nessuna delle altre.
b Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
c Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
d Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.

$\boxed{\mathbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
b $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
c $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi} L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a Nessuna delle altre.
b $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.
c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.
d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} ML^2 \dot{q}^2$.
b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.
c $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.
d Nessuna delle altre.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Nessuna delle altre.
b

$$\text{costante} + Mq^2 .$$

c

$$\text{costante} + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 .$$

d Una costante positiva.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.
b 0.
c $\beta^2 Mq$.
d Nessuna delle altre.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)} \ddot{\varphi} + kLq \sin\varphi = 0$.
b $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
c $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
d Nessuna delle altre.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Infinite.
b Nessuna delle altre.
c A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio instabile.
b Non è di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
c $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
d $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a Nessuna delle altre.
b 0
c $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
d $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$

[5].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
b I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
c Nessuna delle altre.
d I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
d $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
b Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
c Nessuna delle altre.
d Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
d $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c Nessuna delle altre.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

b Nessuna delle altre.

c $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.

d $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a Nessuna delle altre.

b $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

c $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

d $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + Mq^2 \,.$$

b

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 \,.$$

c Nessuna delle altre.

d Una costante positiva.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 Mq$.

b $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.

c 0.

d Nessuna delle altre.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a Nessuna delle altre.

b $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

c $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

d $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
c Infinite.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio instabile.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
c $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
d $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
b 0
c Nessuna delle altre.
d $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$

[6].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi

a Nessuna delle altre.
b I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
c I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
d I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Nessuna delle altre.
b L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione

a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
c $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora

a Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
b Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
c Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_2\,,$$
$$\dot{x}_2(t) = -16x_1 - 10x_2$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
b $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R}\times(0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c Nessuna delle altre.

d $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.
b Nessuna delle altre.
c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.
d $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.
b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{1}{2} ML^2\dot{q}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + Mq^2 \,.$$

b Nessuna delle altre.
c Una costante positiva.
d

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 \,.$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a Nessuna delle altre.
b 0.
c $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.
d $\beta^2 Mq$.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
b $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
c $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.
d Nessuna delle altre.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b Infinite.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
d A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile.
c È di equilibrio stabile.
d Non è di equilibrio.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
c $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
d $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
b 0
c Nessuna delle altre.
d $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
b I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
c I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
d Nessuna delle altre.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
c $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
d $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Nessuna delle altre.
b Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
c Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
d Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

05

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
b $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

$\boxed{\textbf{07}}$

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.

b $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

c Nessuna delle altre.

d $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

$\boxed{\textbf{08}}$

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

b $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

c $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{09}}$

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Nessuna delle altre.

b Una costante positiva.

c

$$\text{costante} + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

d

$$\text{costante} + Mq^2 .$$

$\boxed{\textbf{10}}$

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a 0.

b $\beta^2M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.

c β^2Mq.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{11}}$

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

b $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

c Nessuna delle altre.

d $M\ddot{q} + kq - \beta^2Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

$\boxed{\textbf{12}}$

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
b Infinite.
c A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
d Nessuna delle altre.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile.
c È di equilibrio stabile.
d Non è di equilibrio.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
b $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
c $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
d Nessuna delle altre.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a Nessuna delle altre.
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c 0
d $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
b I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
c Nessuna delle altre.
d I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
b $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Nessuna delle altre.
b Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
c Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
d Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
d $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta \boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\, \boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\, \boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\, \boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\mathbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d Nessuna delle altre.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

b $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

c $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

d Nessuna delle altre.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

c Nessuna delle altre.

d $\frac{1}{2} ML^2\dot{q}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Una costante positiva.

b

$$\text{costante} + Mq^2 \,.$$

c

$$\text{costante} + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 \,.$$

d Nessuna delle altre.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a 0.

b Nessuna delle altre.

c $\beta^2 Mq$.

d $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a Nessuna delle altre.

b $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq \sin\varphi = 0$.

c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

d $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
c Infinite.
d A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio instabile.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
b $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
c $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
b $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
c Nessuna delle altre.
d 0

[9].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
b I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
c Nessuna delle altre.
d I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
b $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Nessuna delle altre.
b Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
c Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
d Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

05

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_2\,,$$
$$\dot{x}_2(t) = -16x_1 - 10x_2$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
b $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
c $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.
b $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
d $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante} + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

b

$$\text{costante} + Mq^2 .$$

c Una costante positiva.
d Nessuna delle altre.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a 0.
b $\beta^2 Mq$.
c $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.
d Nessuna delle altre.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.
b $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
c Nessuna delle altre.
d $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
b Infinite.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Non è di equilibrio.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile.
d È di equilibrio instabile.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
c $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
d $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$
d Nessuna delle altre.

[10].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi

a Nessuna delle altre.

b I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

c I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.

d I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

b L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione

a Nessuna delle altre.

b $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.

c $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.

d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora

a Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.

b Nessuna delle altre.

c Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.

d Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
b $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.
b Nessuna delle altre.
c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.
d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a Nessuna delle altre.
b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.
c $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.
d $\frac{1}{2} ML^2 \dot{q}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Nessuna delle altre.
b Una costante positiva.
c

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 .$$

d

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 Mq$.
b $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.
c Nessuna delle altre.
d 0.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a Nessuna delle altre.
b $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
d $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)} \ddot{\varphi} + kLq \sin\varphi = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Infinite.
b Nessuna delle altre.
c A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio instabile.
b È di equilibrio stabile.
c Non è di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
b Nessuna delle altre.
c $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
d $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
b 0
c Nessuna delle altre.
d $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$

[11].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a Nessuna delle altre.
b I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
c I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
d I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
c $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
b Nessuna delle altre.
c Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
d Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.

05

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
b $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a Nessuna delle altre.
b $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

b $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

c Nessuna delle altre.

d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a Nessuna delle altre.

b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

c $\frac{1}{2} ML^2\dot{q}^2$.

d $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Nessuna delle altre.

b Una costante positiva.

c

$$\text{costante } + Mq^2 \,.$$

d

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 \,.$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

b $\beta^2 Mq$.

c 0.

d Nessuna delle altre.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

b Nessuna delle altre.

c $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

d $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
b A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
c Nessuna delle altre.
d Infinite.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio instabile.
b È di equilibrio stabile.
c Non è di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
b $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
c $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a Nessuna delle altre.
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c 0
d $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$

[12].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi

a I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
b I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
c Nessuna delle altre.
d I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c Nessuna delle altre.
d L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione

a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
b $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
c $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora

a Nessuna delle altre.
b Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
c Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
d Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
c $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
d $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\mathbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c Nessuna delle altre.

d $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.
b Nessuna delle altre.
c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.
d $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} ML^2 \dot{q}^2$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.
d $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a
$$\text{costante } + Mq^2 \,.$$
b Una costante positiva.
c Nessuna delle altre.
d
$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 \,.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a Nessuna delle altre.
b $\beta^2 Mq$.
c $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.
d 0.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
b $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
c $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq \sin\varphi = 0$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{12}}$

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
b Nessuna delle altre.
c Infinite.
d A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio stabile.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio instabile.
d Non è di equilibrio.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
b Nessuna delle altre.
c $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
d $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
b I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
c Nessuna delle altre.
d I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d Nessuna delle altre.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
d $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
b Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
c Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
b $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c Nessuna delle altre.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a Nessuna delle altre.
b $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
b $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
c $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.
d Nessuna delle altre.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Nessuna delle altre.
b Una costante positiva.
c

$$\text{costante} + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

d

$$\text{costante} + Mq^2 .$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a Nessuna delle altre.
b $\beta^2 Mq$.
c $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.
d 0.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a Nessuna delle altre.
b $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
c $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
d $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
c Infinite.
d A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio stabile.
b Non è di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio instabile.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
c $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
d $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
b $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$
c Nessuna delle altre.
d 0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a Nessuna delle altre.
b I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
c I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
d I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b Nessuna delle altre.
c L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
b Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
c Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_2\,,$$
$$\dot{x}_2(t) = -16x_1 - 10x_2$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
d $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}
$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}
$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.

b $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

c Nessuna delle altre.

d $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a Nessuna delle altre.

b $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

c $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.

d $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

b Nessuna delle altre.

c Una costante positiva.

d

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

$\boxed{\mathbf{10}}$

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a Nessuna delle altre.

b 0.

c $\beta^2 Mq$.

d $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

b $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

c Nessuna delle altre.

d $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

$\boxed{\mathbf{12}}$

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Infinite.
b A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile.
c È di equilibrio instabile.
d Non è di equilibrio.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
c $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
d $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
b Nessuna delle altre.
c $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
d 0

[15].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
b I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
c I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{02}}$
Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c Nessuna delle altre.
d L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

$\boxed{\mathbf{03}}$
Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
b $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.

$\boxed{\mathbf{04}}$
Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
b Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
c Nessuna delle altre.
d Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.

$\boxed{\mathbf{05}}$
Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
d $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

$\boxed{\textbf{07}}$

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a Nessuna delle altre.
b $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.

$\boxed{\textbf{08}}$

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.
b $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

$\boxed{\textbf{09}}$

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Nessuna delle altre.
b

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

c Una costante positiva.
d

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

$\boxed{\textbf{10}}$

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 Mq$.
b 0.
c Nessuna delle altre.
d $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.

$\boxed{\textbf{11}}$

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
b $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
c $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{12}}$

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
b Infinite.
c Nessuna delle altre.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio stabile.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio instabile.
d Nessuna delle altre.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
b $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
c Nessuna delle altre.
d $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$
c Nessuna delle altre.
d $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
b Nessuna delle altre.
c I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
d I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d Nessuna delle altre.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
b $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
c $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
d Nessuna delle altre.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
b Nessuna delle altre.
c Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
d Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.

05

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
b $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
c $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
b Nessuna delle altre.
c $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.
d $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
b $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
c $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.
d Nessuna delle altre.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Nessuna delle altre.
b
$$\text{costante } + Mq^2\,.$$
c Una costante positiva.
d
$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2\,.$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a Nessuna delle altre.
b $\beta^2M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.
c 0.
d β^2Mq.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - \beta^2Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
b $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.
c Nessuna delle altre.
d $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Infinite.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
c A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Nessuna delle altre.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile.
d È di equilibrio instabile.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
c $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
d $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a Nessuna delle altre.
b 0
c $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
d $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$

[17].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
b I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
c I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
b Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
c Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
b $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R}\times(0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\mathbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

b $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.

c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

d Nessuna delle altre.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

b $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

c Nessuna delle altre.

d $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Una costante positiva.

b

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

c Nessuna delle altre.

d

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.

b $\beta^2 Mq$.

c 0.

d Nessuna delle altre.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

b $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

d Nessuna delle altre.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Infinite.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
c A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio instabile.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile.
d Non è di equilibrio.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
c $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
d $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a Nessuna delle altre.
b 0
c $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
d $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$

[18].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi

a Nessuna delle altre.
b I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
c I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
d I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b Nessuna delle altre.
c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione

a $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
b $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora

a Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
b Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
c Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_2\,,$$
$$\dot{x}_2(t) = -16x_1 - 10x_2$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
b $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a Nessuna delle altre.

b $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

c $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

b Nessuna delle altre.

c $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.

d $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

b Nessuna delle altre.

c Una costante positiva.

d

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

$\boxed{\mathbf{10}}$

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a Nessuna delle altre.

b $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.

c $\beta^2 Mq$.

d 0.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

b Nessuna delle altre.

c $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

d $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

$\boxed{\mathbf{12}}$

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
c Infinite.
d A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile.
c Non è di equilibrio.
d È di equilibrio stabile.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
b $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
c Nessuna delle altre.
d $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
d Nessuna delle altre.

[19].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
b I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
c Nessuna delle altre.
d I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b Nessuna delle altre.
c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
b $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
b Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
c Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
b $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\mathbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.
b $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.
c Nessuna delle altre.
d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} ML^2 \dot{q}^2$.
b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante} + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 .$$

b Una costante positiva.

c

$$\text{costante} + Mq^2 .$$

d Nessuna delle altre.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a Nessuna delle altre.
b 0.
c $\beta^2 Mq$.
d $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
d $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b Infinite.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
d A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio stabile.
b È di equilibrio instabile.
c Non è di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
c $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
d $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c Nessuna delle altre.
d $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
b I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
c Nessuna delle altre.
d I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
b $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
c $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
d Nessuna delle altre.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
b Nessuna delle altre.
c Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
d Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

05

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_2\,,$$
$$\dot{x}_2(t) = -16x_1 - 10x_2$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
d $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d Nessuna delle altre.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

b $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

d Nessuna delle altre.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} ML^2 \dot{q}^2$.

b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

c $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

d Nessuna delle altre.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 .$$

b Nessuna delle altre.

c Una costante positiva.

d

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a Nessuna delle altre.

b 0.

c $\beta^2 Mq$.

d $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a Nessuna delle altre.

b $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq \sin\varphi = 0$.

c $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

d $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
b Infinite.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
d Nessuna delle altre.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio stabile.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio instabile.
d Non è di equilibrio.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
b $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
c Nessuna delle altre.
d $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
b 0
c $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
b I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
c Nessuna delle altre.
d I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

$\boxed{\mathbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

$\boxed{\mathbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
b $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
c $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
d Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.

$\boxed{\mathbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_2\,,$$
$$\dot{x}_2(t) = -16x_1 - 10x_2$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
d $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,, \\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,, \\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R}\times(0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,, \\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,, \\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

$\boxed{\textbf{07}}$

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.
b Nessuna delle altre.
c $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.
d $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

$\boxed{\textbf{08}}$

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} ML^2 \dot{q}^2$.
b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.
c $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{09}}$

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + Mq^2 \,.$$

b Una costante positiva.
c Nessuna delle altre.
d

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 \,.$$

$\boxed{\textbf{10}}$

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a Nessuna delle altre.
b 0.
c $\beta^2 Mq$.
d $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

$\boxed{\textbf{11}}$

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a Nessuna delle altre.
b $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
c $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)} \ddot{\varphi} + kLq \sin\varphi = 0$.
d $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

$\boxed{\textbf{12}}$

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b Infinite.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
d A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Nessuna delle altre.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio instabile.
d È di equilibrio stabile.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
b $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
c $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
d Nessuna delle altre.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
b 0
c $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
b I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
c I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
d Nessuna delle altre.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c Nessuna delle altre.
d L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
c $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
d $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
b Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
c Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
b $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d Nessuna delle altre.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.
b $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.
c $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} ML^2 \dot{q}^2$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.
d $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Nessuna delle altre.
b

$$\text{costante } + Mq^2 \,.$$

c

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 \,.$$

d Una costante positiva.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 Mq$.
b 0.
c $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.
d Nessuna delle altre.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a Nessuna delle altre.
b $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
d $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Infinite.
b A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
d Nessuna delle altre.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio instabile.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile.
d Non è di equilibrio.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
c $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
d $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
c $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
d Nessuna delle altre.

[23].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi

a Nessuna delle altre.
b I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
c I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
d I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d Nessuna delle altre.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione

a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
b $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora

a Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
b Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
c Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
b $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
c $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

b Nessuna delle altre.

c $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a Nessuna delle altre.

b $\frac{1}{2} ML^2 \dot{q}^2$.

c $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

d $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante} + Mq^2 .$$

b Una costante positiva.

c

$$\text{costante} + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 .$$

d Nessuna delle altre.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 Mq$.

b Nessuna delle altre.

c $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

d 0.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

b $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

c $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)} \ddot{\varphi} + kLq \sin\varphi = 0$.

d Nessuna delle altre.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
b Infinite.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
d Nessuna delle altre.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio instabile.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
c $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
d $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a Nessuna delle altre.
b $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$
c 0
d $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$

[24].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
b I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
c I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c Nessuna delle altre.
d L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\mathbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

$\boxed{\mathbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
b Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
c Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
b $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c Nessuna delle altre.

d $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a Nessuna delle altre.
b $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.
c $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.
d $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.
b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.
c $\frac{1}{2} ML^2\dot{q}^2$.
d Nessuna delle altre.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante} + Mq^2 .$$

b

$$\text{costante} + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 .$$

c Una costante positiva.
d Nessuna delle altre.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a 0.
b Nessuna delle altre.
c $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.
d $\beta^2 Mq$.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
d $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
b Nessuna delle altre.
c Infinite.
d A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.

$\boxed{\textbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Nessuna delle altre.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile.
d È di equilibrio instabile.

$\boxed{\textbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
b Nessuna delle altre.
c $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
d $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.

$\boxed{\textbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b Nessuna delle altre.
c $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
d $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$

[25].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
b Nessuna delle altre.
c I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
d I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
b $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
c $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
d Nessuna delle altre.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Nessuna delle altre.
b Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
c Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
d Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.

05

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
d $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}
$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}
$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a Nessuna delle altre.
b $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

$\boxed{\textbf{07}}$

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a Nessuna delle altre.

b $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

c $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

$\boxed{\textbf{08}}$

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a Nessuna delle altre.

b $\frac{1}{2} ML^2 \dot{q}^2$.

c $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

d $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

$\boxed{\textbf{09}}$

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + Mq^2 \,.$$

b Una costante positiva.

c

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 \,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{10}}$

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

b 0.

c Nessuna delle altre.

d $\beta^2 Mq$.

$\boxed{\textbf{11}}$

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a Nessuna delle altre.

b $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)} \ddot{\varphi} + kLq \sin\varphi = 0$.

c $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

d $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

$\boxed{\textbf{12}}$

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
b Nessuna delle altre.
c A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
d Infinite.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio instabile.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile.
d Non è di equilibrio.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
c $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
d $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a Nessuna delle altre.
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
d 0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
b Nessuna delle altre.
c I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
d I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d Nessuna delle altre.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
c $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
b Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
c Nessuna delle altre.
d Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

05

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_2\,,$$
$$\dot{x}_2(t) = -16x_1 - 10x_2$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
b $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}
$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}
$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

$\boxed{\textbf{07}}$

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.
b $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{08}}$

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.
b $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

$\boxed{\textbf{09}}$

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

b Nessuna delle altre.
c Una costante positiva.
d

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

$\boxed{\textbf{10}}$

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 Mq$.
b $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.
c 0.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{11}}$

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
b $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.
c Nessuna delle altre.
d $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

$\boxed{\textbf{12}}$

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
c Infinite.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio instabile.
b Non è di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
c $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
d $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$
d Nessuna delle altre.

[27].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a Nessuna delle altre.
b I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
c I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
d I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c Nessuna delle altre.
d L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
c $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
d $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Nessuna delle altre.
b Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
c Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
d Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
d $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

b $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.

c $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

d Nessuna delle altre.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.

b Nessuna delle altre.

c $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

d $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Una costante positiva.

b

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

c Nessuna delle altre.

d

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 Mq$.

b 0.

c Nessuna delle altre.

d $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

b $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

c Nessuna delle altre.

d $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
b Infinite.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
d Nessuna delle altre.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile.
c È di equilibrio instabile.
d Nessuna delle altre.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
b $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
c Nessuna delle altre.
d $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
b Nessuna delle altre.
c 0
d $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$

[28].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
b Nessuna delle altre.
c I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
d I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
b $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
c $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
d Nessuna delle altre.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Nessuna delle altre.
b Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
c Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
d Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.

05

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
d $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{06}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a Nessuna delle altre.
b $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a Nessuna delle altre.
b $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
b $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
c $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.
d Nessuna delle altre.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

b Una costante positiva.
c Nessuna delle altre.
d

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.
b $\beta^2 Mq$.
c Nessuna delle altre.
d 0.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
b $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.
c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
d Nessuna delle altre.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Infinite.
b Nessuna delle altre.
c A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio stabile.
b È di equilibrio instabile.
c Nessuna delle altre.
d Non è di equilibrio.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
c $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
d $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a Nessuna delle altre.
b $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$
c 0
d $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi

a I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
b Nessuna delle altre.
c I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
d I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Nessuna delle altre.
b L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione

a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
b $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora

a Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
b Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
c Nessuna delle altre.
d Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
b $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,, \\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,, \\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0, 2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,, \\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,, \\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a Nessuna delle altre.
b $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

b Nessuna delle altre.

c $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

b $\frac{1}{2} ML^2\dot{q}^2$.

c Nessuna delle altre.

d $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + Mq^2 \,.$$

b

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 \,.$$

c Nessuna delle altre.

d Una costante positiva.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 Mq$.

b $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

c Nessuna delle altre.

d 0.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

b $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

c Nessuna delle altre.

d $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
b Nessuna delle altre.
c Infinite.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio stabile.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio instabile.
d Nessuna delle altre.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
b $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
c $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
d Nessuna delle altre.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
b Nessuna delle altre.
c 0
d $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi

a Nessuna delle altre.
b I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
c I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
d I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione

a $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
b $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora

a Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
b Nessuna delle altre.
c Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
d Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
b $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c Nessuna delle altre.

d $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

b $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

d Nessuna delle altre.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a Nessuna delle altre.

b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

c $\frac{1}{2} ML^2\dot{q}^2$.

d $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Nessuna delle altre.

b

$$\text{costante} + Mq^2 .$$

c

$$\text{costante} + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 .$$

d Una costante positiva.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a 0.

b $\beta^2 Mq$.

c Nessuna delle altre.

d $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

b $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

c Nessuna delle altre.

d $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
b Nessuna delle altre.
c Infinite.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio stabile.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio instabile.
d Non è di equilibrio.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
b $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
c Nessuna delle altre.
d $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c Nessuna delle altre.
d $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo
Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
b I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
c Nessuna delle altre.
d I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

$\boxed{\mathbf{02}}$
Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

$\boxed{\mathbf{03}}$
Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
b $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
c $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{04}}$
Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
b Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
c Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{05}}$
Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
b $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}
$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta \boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\, \boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\, \boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\, \boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}
$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

$\boxed{\textbf{07}}$

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.
b Nessuna delle altre.
c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.
d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

$\boxed{\textbf{08}}$

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a Nessuna delle altre.
b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.
c $\frac{1}{2} ML^2\dot{q}^2$.
d $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

$\boxed{\textbf{09}}$

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 .$$

b

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

c Nessuna delle altre.
d Una costante positiva.

$\boxed{\textbf{10}}$

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a Nessuna delle altre.
b $\beta^2 Mq$.
c 0.
d $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

$\boxed{\textbf{11}}$

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
d $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

$\boxed{\textbf{12}}$

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
c A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
d Infinite.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio instabile.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
c $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
d $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
b 0
c $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
b I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
c Nessuna delle altre.
d I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
d $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
b Nessuna delle altre.
c Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
d Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
b $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2 \,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta \boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\, \boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\, \boldsymbol{w}_3(t) \,, \\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\, \boldsymbol{w}_3(t) \,, \\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t) \,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d Nessuna delle altre.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.
b $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
b $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

b

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

c Nessuna delle altre.
d Una costante positiva.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 Mq$.
b 0.
c $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.
d Nessuna delle altre.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
b $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.
c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
d Nessuna delle altre.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Infinite.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
c A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
d Nessuna delle altre.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile.
c È di equilibrio stabile.
d Non è di equilibrio.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
b $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
c $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
d Nessuna delle altre.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c Nessuna delle altre.
d $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
b Nessuna delle altre.
c I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
d I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
b $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
b Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
c Nessuna delle altre.
d Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.

05

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
d $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2 \,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\, \boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\, \boldsymbol{w}_3(t) \,, \\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\, \boldsymbol{w}_3(t) \,, \\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t) \,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c Nessuna delle altre.

d $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

b $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

c Nessuna delle altre.

d $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a Nessuna delle altre.

b $\frac{1}{2} ML^2 \dot{q}^2$.

c $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

d $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante} + Mq^2 .$$

b Nessuna delle altre.

c Una costante positiva.

d

$$\text{costante} + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 .$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a Nessuna delle altre.

b 0.

c $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

d $\beta^2 Mq$.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

b $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

d Nessuna delle altre.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
c Infinite.
d A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile.
c È di equilibrio stabile.
d Non è di equilibrio.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
b Nessuna delle altre.
c $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
d $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c 0
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
b Nessuna delle altre.
c I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
d I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d Nessuna delle altre.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
b Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
c Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
b $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R}\times(0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a Nessuna delle altre.
b $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

b $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

c Nessuna delle altre.

d $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a Nessuna delle altre.

b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

c $\frac{1}{2} ML^2\dot{q}^2$.

d $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante} + Mq^2 .$$

b Nessuna delle altre.

c

$$\text{costante} + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 .$$

d Una costante positiva.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a 0.

b Nessuna delle altre.

c $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

d $\beta^2 Mq$.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a Nessuna delle altre.

b $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

c $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

d $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
c Infinite.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile.
c È di equilibrio stabile.
d Non è di equilibrio.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
b $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
c $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
d Nessuna delle altre.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c 0
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
b I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
c I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
d Nessuna delle altre.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
c $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
d $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
d Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.

05

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
b $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a Nessuna delle altre.
b $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a Nessuna delle altre.
b $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.
c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.
d $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.
b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.
c $\frac{1}{2} ML^2\dot{q}^2$.
d Nessuna delle altre.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Nessuna delle altre.
b

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

c Una costante positiva.
d

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 Mq$.
b $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.
c 0.
d Nessuna delle altre.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
d $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
b Infinite.
c Nessuna delle altre.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio instabile.
c È di equilibrio stabile.
d Nessuna delle altre.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
b $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
c $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
d Nessuna delle altre.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
c Nessuna delle altre.
d $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
b I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
c Nessuna delle altre.
d I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
b $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
b Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
c Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
d $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi} L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

b $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

d Nessuna delle altre.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

b Nessuna delle altre.

c $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

d $\frac{1}{2} ML^2\dot{q}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante} + Mq^2 \,.$$

b Nessuna delle altre.

c Una costante positiva.

d

$$\text{costante} + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 \,.$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

b $\beta^2 Mq$.

c 0.

d Nessuna delle altre.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a Nessuna delle altre.

b $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

d $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
c A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
d Infinite.

$\boxed{\textbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile.
c È di equilibrio stabile.
d Non è di equilibrio.

$\boxed{\textbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
b Nessuna delle altre.
c $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
d $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.

$\boxed{\textbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$
b Nessuna delle altre.
c 0
d $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
b I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
c I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
b $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
c $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
b Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
c Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
b $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a Nessuna delle altre.
b $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
c $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a Nessuna delle altre.
b $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.
c $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
d $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Nessuna delle altre.
b

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

c Una costante positiva.
d

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a Nessuna delle altre.
b $\beta^2 Mq$.
c $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.
d 0.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.
d $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
c Nessuna delle altre.
d Infinite.

$\boxed{\textbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio instabile.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile.
d Non è di equilibrio.

$\boxed{\textbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
b $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
c Nessuna delle altre.
d $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.

$\boxed{\textbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a Nessuna delle altre.
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c 0
d $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$

[38].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
b Nessuna delle altre.
c I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
d I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
b $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
c $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
d Nessuna delle altre.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
b Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
c Nessuna delle altre.
d Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.

05

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_2\,,$$
$$\dot{x}_2(t) = -16x_1 - 10x_2$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
d $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R}\times(0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c Nessuna delle altre.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

$\boxed{\textbf{07}}$

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

b $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.

c Nessuna delle altre.

d $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

$\boxed{\textbf{08}}$

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

b $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.

c $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{09}}$

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante } + Mq^2 \,.$$

b Una costante positiva.

c Nessuna delle altre.

d

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 \,.$$

$\boxed{\textbf{10}}$

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 Mq$.

b Nessuna delle altre.

c $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.

d 0.

$\boxed{\textbf{11}}$

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

b $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

c Nessuna delle altre.

d $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

$\boxed{\textbf{12}}$

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
c Infinite.
d A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio stabile.
b È di equilibrio instabile.
c Nessuna delle altre.
d Non è di equilibrio.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
b $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
c Nessuna delle altre.
d $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
b 0
c $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$
d Nessuna delle altre.

[39].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi

a Nessuna delle altre.

b I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

c I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.

d I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

b L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione

a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.

b Nessuna delle altre.

c $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

d $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora

a Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.

b Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

c Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_2\,,$$
$$\dot{x}_2(t) = -16x_1 - 10x_2$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
d $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

b $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

c $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

d Nessuna delle altre.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} ML^2 \dot{q}^2$.

b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

c $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

d Nessuna delle altre.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Nessuna delle altre.

b Una costante positiva.

c

$$\text{costante} + Mq^2 .$$

d

$$\text{costante} + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 .$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

b $\beta^2 Mq$.

c 0.

d Nessuna delle altre.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

b Nessuna delle altre.

c $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq \sin\varphi = 0$.

d $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Infinite.
b A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
c Nessuna delle altre.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio instabile.
b Non è di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
b $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
c $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
d Nessuna delle altre.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b Nessuna delle altre.
c $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
d $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$

[40].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
b I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
c Nessuna delle altre.
d I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

$\boxed{\textbf{02}}$
Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

$\boxed{\textbf{03}}$
Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
c $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

$\boxed{\textbf{04}}$
Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
b Nessuna delle altre.
c Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
d Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

$\boxed{\textbf{05}}$
Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
d $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\mathbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a Nessuna delle altre.
b $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
c $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
b $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.
c $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
d Nessuna delle altre.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Una costante positiva.
b

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

c

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

d Nessuna delle altre.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.
b 0.
c Nessuna delle altre.
d $\beta^2 Mq$.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
b $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.
c $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
d Nessuna delle altre.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
b Nessuna delle altre.
c Infinite.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.

$\boxed{\textbf{13}}$

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio instabile.
c È di equilibrio stabile.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{14}}$

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
b Nessuna delle altre.
c $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
d $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.

$\boxed{\textbf{15}}$

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c Nessuna delle altre.
d 0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
b I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
c I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b Nessuna delle altre.
c L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
b $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
c $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
b Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
c Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
d $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c Nessuna delle altre.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.

b $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

c Nessuna delle altre.

d $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.

b $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

c Nessuna delle altre.

d $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Una costante positiva.

b

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

c

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

d Nessuna delle altre.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.

b Nessuna delle altre.

c 0.

d $\beta^2 Mq$.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

b Nessuna delle altre.

c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

d $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Infinite.

b A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
d Nessuna delle altre.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio instabile.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
b Nessuna delle altre.
c $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
d $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b Nessuna delle altre.
c $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
d $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$

[42].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
b Nessuna delle altre.
c I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
d I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
b $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
b Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
c Nessuna delle altre.
d Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
d $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c Nessuna delle altre.

d $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

b $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

c $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

d Nessuna delle altre.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2} ML^2 \dot{q}^2$.

b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

c Nessuna delle altre.

d $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2 \dot{\varphi}^2$.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a

$$\text{costante} + Mq^2 .$$

b Una costante positiva.

c

$$\text{costante} + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 .$$

d Nessuna delle altre.

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 Mq$.

b Nessuna delle altre.

c 0.

d $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

b $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)} \ddot{\varphi} + kLq \sin\varphi = 0$.

c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

d Nessuna delle altre.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
d Infinite.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile.
c Non è di equilibrio.
d È di equilibrio stabile.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
b $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
c Nessuna delle altre.
d $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c 0
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
b Nessuna delle altre.
c I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
d I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.

$\boxed{\textbf{02}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

$\boxed{\textbf{04}}$

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
b Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
c Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
b $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?
a $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.
b $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
c $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?
a $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.
b $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
c $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.
d Nessuna delle altre.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?
a

$$\text{costante } + Mq^2\,.$$

b Nessuna delle altre.
c Una costante positiva.
d

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2\,.$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)
a $\beta^2 Mq$.
b Nessuna delle altre.
c 0.
d $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.
a Nessuna delle altre.
b $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.
d $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
b Infinite.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
d Nessuna delle altre.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Non è di equilibrio.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile.
d È di equilibrio instabile.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
b $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
c Nessuna delle altre.
d $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$
d Nessuna delle altre.

[44].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
b I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
c I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
d Nessuna delle altre.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d Nessuna delle altre.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
b $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
b Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
c Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_2\,,$$
$$\dot{x}_2(t) = -16x_1 - 10x_2$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
c $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
d $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0,2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

b Nessuna delle altre.

c $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a Nessuna delle altre.

b $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

c $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

d $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Una costante positiva.

b Nessuna delle altre.

c

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

d

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

$\boxed{\mathbf{10}}$

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.

b 0.

c $\beta^2 Mq$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a Nessuna delle altre.

b $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

c $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

d $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

$\boxed{\mathbf{12}}$

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Nessuna delle altre.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
c Infinite.
d A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile.
c È di equilibrio instabile.
d Non è di equilibrio.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a Nessuna delle altre.
b $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
c $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
d $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a Nessuna delle altre.
b $-Mg\left(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\right)\vec{e}_3$
c 0
d $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$

[45].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi

a I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
b Nessuna delle altre.
c I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
d I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b Nessuna delle altre.
c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 4$ ha come soluzione

a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
c $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.
d $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora

a Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
b Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
c Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2\,,\\ \dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t = 0) = 1$, $x_2(t = 0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.
b $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}
$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$.
Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q,t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}
$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a Nessuna delle altre.

b $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

c $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)}ML^2$.

d $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)}ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)}ML^2$.

08

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

b $\frac{1}{2}ML^2\dot{q}^2$.

c $\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)}ML^2\dot{\varphi}^2$.

d Nessuna delle altre.

09

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Nessuna delle altre.

b

$$\text{costante} + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)^2 .$$

c Una costante positiva.

d

$$\text{costante} + Mq^2 .$$

10

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 Mq$.

b Nessuna delle altre.

c 0.

d $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big)$.

11

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a Nessuna delle altre.

b $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

c $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi}L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

d $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

12

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
b Infinite.
c A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.
d Nessuna delle altre.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio instabile.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile.
d Nessuna delle altre.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
b $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
c $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
d Nessuna delle altre.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$
b $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
c Nessuna delle altre.
d 0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria (cioè $m = 1$) e puntiforme in $\boldsymbol{R}$ soggetta a una forza generata dal potenziale $U(x) = -8x^2(x-1)^2$ e si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è $E = 1/5$, allora nel piano delle fasi
a I moti associati al sistema tracciano due orbite chiuse e separate.
b I moti associati al sistema tracciano un'unica orbita chiusa.
c I moti associati al sistema tracciano un'orbita chiusa e una aperta.
d Nessuna delle altre.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b Nessuna delle altre.
c L'origine è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d L'origine è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si consideri il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Il problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 4$ ha come soluzione
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = 1 - \cos(4t)$ e $x_2(t) = 4\sin(4t)$.
c $x_1(t) = -\cos(4t) + \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = +4\sin(4t) + 4\cos(4t)$.
d $x_1(t) = (e^{4t} + e^{-4t})/2 - 1$ e $x_2(t) = 2(e^{4t} - e^{-4t})$.

04

Se si introduce anche la forza di attrito nel sistema, i.e., si considera il problema $\ddot{x} = U'(x) - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$ costante, e se il sistema parte dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/2$, allora
a Il moto è limitato, ma raggiunge il valore $x = 1/2$.
b Si ha $-1/2 < x(t) < 1/2$ per ogni $t > 0$.
c Si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\
\dot{x}_2(t) &= -16x_1 - 10x_2
\end{aligned}
$$

(che può essere visto come quello originale linearizzato nell'origine cui si è aggiunta una forza di attrito). Il problema di Cauchy con condizioni iniziali $x_1(t=0) = 1$, $x_2(t=0) = 0$ ha come soluzione

a $x_1(t) = \frac{4}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} - 1$ e $x_2(t) = \frac{4}{3}\left(-8e^{-8t} - 2e^{-2t}\right)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$ e $x_2(t) = \frac{8}{3}\left(e^{-8t} - e^{-2t}\right)$.
d $x_1(t) = \left(e^{4t} + e^{-4t}\right)/2$ e $x_2(t) = 4\sinh(4t)$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido C omogeneo di massa M. Il corpo è stato ottenuto saldando a un cubo K con spigolo di lunghezza $2L$ una sfera H di raggio L in modo che questa sia tangente a una delle facce del cubo nel suo centro. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo e ha origine nel punto di saldatura e semiasse positivo 1 passante per il centro della sfera e, quindi, semiasse negativo 1 passante per quello del cubo. Gli assi solidali 2 e 3 sono ortogonali ciascuno a due facce del cubo. Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate nel riferimento solidale.
Consideriamo poi il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_i))$; qui $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per ogni t, ossia l'origine di $\mathcal{S}$ coincide con quella del sistema di riferimento fisso, e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= -\sin(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(-\beta t)\,\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,
\end{aligned}
$$

La velocità angolare di $(\boldsymbol{w}_i)$ rispetto alla terna fissa è quindi $\beta\boldsymbol{w}_2$, con $\beta > 0$. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da (y_1, y_2, y_3).
Il versore $\boldsymbol{w}_2$ è verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo il punto O' sull'asse y_1 e $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$.
La sollecitazione attiva agente sul sistema, in $\mathcal{S}$, è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ di centro O applicata in O', data da $\boldsymbol{F}_{O'} = -k\boldsymbol{X}_{O'}$, dalla forza di Coriolis e da quella di trascinamento.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (0{,}2\pi)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(q, t) = q\boldsymbol{w}_1(t)$ e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2(t) &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2(t) + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{u}_1(t) &= \boldsymbol{w}_1(t)\,.
\end{aligned}
$$

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento mobile $\mathcal{S}$.

$\boxed{\mathbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_{O'}, (\boldsymbol{u}_i))$?
a Nessuna delle altre.
b $\lambda_{1G} = \frac{-6+\pi}{6+\pi}L$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.
c $\lambda_{1G} = \frac{-24+3\pi}{24+4\pi}$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

d $\lambda_{1G} = 0$, $\lambda_{2G} = 0$, $\lambda_{3G} = 0$.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?

a $I_{11} = \frac{20+5\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+3\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

b $I_{11} = \frac{20+2\pi}{5(6+\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6+\pi)} ML^2$.

c Nessuna delle altre.

d $I_{11} = \frac{15+2\pi}{5(6-\pi)} ML^2$, $I_{22} = \frac{50+7\pi}{5(6-\pi)} ML^2$.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?

a Nessuna delle altre.

b $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{15+2\pi}{10(6-\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

c $\frac{1}{2} M\dot{q}^2 + \frac{10+\pi}{5(6+\pi)} ML^2\dot{\varphi}^2$.

d $\frac{1}{2} ML^2\dot{q}^2$.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso 2?

a Una costante positiva.

b Nessuna delle altre.

c

$$\text{costante } + M\Big(q + \frac{-6+\pi}{6+\pi} L\Big)^2 .$$

d

$$\text{costante } + Mq^2 .$$

$\boxed{\mathbf{10}}$

Quanto vale la componente lagrangiana della forza di trascinamento relativa alla coordinata lagrangiana q? (Suggerimento: si può usare il potenziale lagrangiano di trascinamento, per calcolare il quale si può usare la domanda precedente.)

a $\beta^2 M\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big)$.

b $\beta^2 Mq$.

c Nessuna delle altre.

d 0.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Sapendo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono entrambe nulle, si scrivano le equazioni di Lagrange.

a Nessuna delle altre.

b $ML^2\ddot{\varphi} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\frac{10+\pi}{5(6+\pi)}\ddot{\varphi} + kLq\sin\varphi = 0$.

c $M\ddot{q} + kq - M\beta^2\big(q - \frac{6-\pi}{6+\pi} L\big) = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

d $M\ddot{q} + kq - \beta^2 Mq = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

$\boxed{\mathbf{12}}$

Nel caso $k = M\beta^2$, quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a Due qualunque sia il valore dei parametri M, L, β e k.
b Infinite.
c Nessuna delle altre.
d A seconda del valore dei parametri M, L, β e k possono essere due o quattro.

13

Nel caso $k \neq M\beta^2$, dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-4\pi}{6+4\pi}L$ e $\varphi = \pi/2$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile.
c È di equilibrio instabile.
d Non è di equilibrio.

14

Determinare l'integrale generale delle equazioni di Lagrange nel caso $k = M\beta^2$ (a, b, c, d sono costanti arbitrarie reali).
a $q(t) = at + b$ e $\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t + ct^2 + d$.
b $q(t) = -\frac{1}{2}\beta^2\frac{6-\pi}{6+\pi}Lt^2 + at + b$ e $\varphi(t) = ct + d$.
c $q(t) = 0$ e $\varphi(t) = at + b$.
d Nessuna delle altre.

15

Sia $k \neq M\beta^2$. Si determini il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sul corpo se viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = \bar{q} := -\frac{M\beta^2}{k-M\beta^2}\frac{6-\pi}{6+\pi}L$ e $\varphi = 0$.
a 0
b $-Mg\Big(\bar{q} + \frac{-6+\pi}{6+\pi}L\Big)\vec{e}_3$
c $Mg\frac{k}{k-M\beta^2}\frac{6-5\pi}{6-\pi}\vec{e}_3$
d Nessuna delle altre.