MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[1].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[1].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

01 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

c Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

d Nessuna delle altre.

02 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

c Nessuna delle altre.

d Esistono infinite terne principali d'inerzia.

03 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Nessuna delle altre.

b Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)=0\,,\qquad \boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^{3n+1}\to\boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell=3n-m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

b Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^m$.

c Nessuna delle altre.

d Lo spazio degli spostamenti effettivi.

$\boxed{\mathbf{05}}$ Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Nessuna delle altre.

b Dipendente dalle forze applicate.

c Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

d Dipendente dalla scelta dei vincoli.

$\boxed{\mathbf{06}}$ L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$

a Nessuna delle altre.

b È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

c È definita solo per vincoli fissi.

d Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)>0$ per ogni $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{07}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una rotazione.

b La quiete.

c Nessuna delle altre.

d Una traslazione.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Nessuna delle altre.

b Non si può porre.

c Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

$\boxed{\mathbf{09}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

b Nulla se il vincolo è liscio.

c Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

d Nessuna delle altre.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

10 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Nessuna delle altre.

11 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
b Non esistono punti di equilibrio.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
d Nessuna delle altre.

12 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Non è di equilibrio.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

13 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

b Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

c Nessuna delle altre.

d

$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

14 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

b Il corpo non può essere omogeneo.

c L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

d Nessuna delle altre.

15 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

d

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4} s^4 + \frac{m}{2} \alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

PROF. DANIELE ANDREUCCI

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[2].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[2].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[2].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[2].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

01 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

c Esistono infinite terne principali d'inerzia.

d Nessuna delle altre.

02 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

c Nessuna delle altre.

d Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

03 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Nessuna delle altre.

b Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

04 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Nessuna delle altre.
b Dipendente dalla scelta dei vincoli.
c Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.
d Dipendente dalle forze applicate.

05 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a È definita solo per vincoli fissi.
b Nessuna delle altre.
c Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.
d È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

06 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio degli spostamenti effettivi.
b Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.
c Nessuna delle altre.
d Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

07 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:
a Una rotazione.
b Nessuna delle altre.
c Una traslazione.
d La quiete.

08 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali
a Non si può porre.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
c Nessuna delle altre.
d Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

09 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:
a Nessuna delle altre.
b Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.
c Nulla se il vincolo è liscio.
d Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

10 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Non è di equilibrio.

11 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

12 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Non esistono punti di equilibrio.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
d Nessuna delle altre.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\textbf{13}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

b
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

c
$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{14}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

b L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

c Nessuna delle altre.

d Il corpo non può essere omogeneo.

$\boxed{\textbf{15}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

b
$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.

d
$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4} s^4 + \frac{m}{2} \alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

[3].0

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[3].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[3].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[3].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

01 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

b

$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty \,.$$

c

$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0 \,.$$

d Nessuna delle altre.

02 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Il corpo non può essere omogeneo.

b Nessuna delle altre.

c L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

d L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

03 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a Nessuna delle altre.

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0) \,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0) \,.$$

d

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2 \,.$$

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

$\boxed{\textbf{04}}$ Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

b Dipendente dalla scelta dei vincoli.

c Nessuna delle altre.

d Dipendente dalle forze applicate.

$\boxed{\textbf{05}}$ L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

b È definita solo per vincoli fissi.

c Nessuna delle altre.

d Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

$\boxed{\textbf{06}}$ Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio degli spostamenti effettivi.

b Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

c Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

d Nessuna delle altre.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

07 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
d Non è di equilibrio.

08 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:
a Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
c Non esistono punti di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

09 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a Nessuna delle altre.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

b Non si può porre.

c Nessuna delle altre.

d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Nessuna delle altre.

b Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

c Nulla se il vincolo è liscio.

d Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una traslazione.

b Una rotazione.

c Nessuna delle altre.

d La quiete.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

13 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.
b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
c Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.
d Nessuna delle altre.

14 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Nessuna delle altre.
b Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
c Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
d Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

15 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.
b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
c Nessuna delle altre.
d Esistono infinite terne principali d'inerzia.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[4].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[4].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[4].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\textbf{01}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{02}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

$\boxed{\textbf{03}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Nessuna delle altre.

b L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

c Il corpo non può essere omogeneo.

d L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

04 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Nessuna delle altre.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

05 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Nessuna delle altre.

06 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
b Non esistono punti di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{07}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
c Non si può porre.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una traslazione.
b Una rotazione.
c Nessuna delle altre.
d La quiete.

$\boxed{\mathbf{09}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
b Nessuna delle altre.
c Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.
d Nulla se il vincolo è liscio.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

$\boxed{\textbf{10}}$ Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio degli spostamenti effettivi.

b Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^m$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{11}}$ Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Nessuna delle altre.

b Dipendente dalla scelta dei vincoli.

c Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

d Dipendente dalle forze applicate.

$\boxed{\textbf{12}}$ L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a È definita solo per vincoli fissi.

b È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

c Nessuna delle altre.

d Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

13 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Nessuna delle altre.

b Esistono infinite terne principali d'inerzia.

c L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

d Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

14 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

c Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

d Nessuna delle altre.

15 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Nessuna delle altre.

b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

d Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r : \qquad \lambda_2 = 0 \,, \quad \lambda_3 = 0 \,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X} \,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s \boldsymbol{u}_1(t) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4} s^4 + \frac{m}{2} \alpha^2 s^2 \,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h \,.$$

[5].0

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA
PROF. DANIELE ANDREUCCI
Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[5].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[5].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[5].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

01 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Nessuna delle altre.

02 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Non esistono punti di equilibrio.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
d Nessuna delle altre.

03 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

04 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Nessuna delle altre.

b Esistono infinite terne principali d'inerzia.

c Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

d L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

05 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Nessuna delle altre.

b Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

06 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

b Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

c Nessuna delle altre.

d Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

07 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una traslazione.
b La quiete.
c Nessuna delle altre.
d Una rotazione.

08 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
c Nessuna delle altre.
d Non si può porre.

09 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.
b Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
c Nulla se il vincolo è liscio.
d Nessuna delle altre.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a
$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2 .$$
b
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0) .$$
c Nessuna delle altre.

d
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0) .$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a
$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0 .$$
b Nessuna delle altre.

c Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

d
$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty .$$

$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Nessuna delle altre.

b L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

c Il corpo non può essere omogeneo.

d L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

$\boxed{\textbf{13}}$ Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

b Dipendente dalla scelta dei vincoli.

c Dipendente dalle forze applicate.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{14}}$ L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

b È definita solo per vincoli fissi.

c Nessuna delle altre.

d È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

$\boxed{\textbf{15}}$ Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^m$.

b Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

c Nessuna delle altre.

d Lo spazio degli spostamenti effettivi.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4} s^4 + \frac{m}{2} \alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

[6].0

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[6].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[6].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[6].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

01 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

b
$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

c Nessuna delle altre.

d
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

02 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

b
$$\lim_{t\to+\infty}|\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.

d
$$\lim_{t\to+\infty}|\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

03 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

b L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

c Il corpo non può essere omogeneo.

d Nessuna delle altre.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

04 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Non è di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

05 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Non è di equilibrio.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

06 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Nessuna delle altre.
b Non esistono punti di equilibrio.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

07 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

b Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

c Nessuna delle altre.

d È definita solo per vincoli fissi.

08 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalle forze applicate.

b Nessuna delle altre.

c Dipendente dalla scelta dei vincoli.

d Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

09 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

b Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

c Lo spazio degli spostamenti effettivi.

d Nessuna delle altre.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Nessuna delle altre.

b Una rotazione.

c Una traslazione.

d La quiete.

$\boxed{\mathbf{11}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

b Nessuna delle altre.

c Nulla se il vincolo è liscio.

d Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

b Nessuna delle altre.

c Non si può porre.

d Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

13 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Esistono infinite terne principali d'inerzia.

b L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

c Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

d Nessuna delle altre.

14 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

b Nessuna delle altre.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

d Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

15 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

b Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

c Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

d Nessuna delle altre.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[7].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{01}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Nessuna delle altre.

b Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

c

$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0 \,.$$

d

$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty \,.$$

$\boxed{\mathbf{02}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Il corpo non può essere omogeneo.

b L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

c L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{03}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2 I_{22} T(0) \,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2 \,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2 I_{11} T(0) \,.$$

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

04 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Non è di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

05 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Nessuna delle altre.

06 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Non esistono punti di equilibrio.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
d Nessuna delle altre.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

07 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.
c Nessuna delle altre.
d Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

08 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.
b Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
c Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
d Nessuna delle altre.

09 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.
b Esistono infinite terne principali d'inerzia.
c Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
d Nessuna delle altre.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

10 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta dei vincoli.

b Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

c Dipendente dalle forze applicate.

d Nessuna delle altre.

11 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

b Lo spazio degli spostamenti effettivi.

c Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

d Nessuna delle altre.

12 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a È definita solo per vincoli fissi.

b Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

c È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

d Nessuna delle altre.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a La quiete.
b Una traslazione.
c Una rotazione.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Non si può porre.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
c Nessuna delle altre.
d Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

$\boxed{\mathbf{15}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Nulla se il vincolo è liscio.
b Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.
c Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
d Nessuna delle altre.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0 \,, \quad \lambda_3 = 0 \,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X} \,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s \boldsymbol{u}_1(t) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4} s^4 + \frac{m}{2} \alpha^2 s^2 \,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h \,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[8].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[8].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[8].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

01 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Nessuna delle altre.

02 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
c Non esistono punti di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

03 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Non è di equilibrio.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0 \,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m} \,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

04 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta dei vincoli.

b Nessuna delle altre.

c Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

d Dipendente dalle forze applicate.

05 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

b Nessuna delle altre.

c Lo spazio degli spostamenti effettivi.

d Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

06 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

b Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

c È definita solo per vincoli fissi.

d Nessuna delle altre.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

07 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

b Nessuna delle altre.

c Non si può porre.

d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

08 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

b Nulla se il vincolo è liscio.

c Nessuna delle altre.

d Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

09 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una traslazione.

b Una rotazione.

c Nessuna delle altre.

d La quiete.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

10 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Nessuna delle altre.

c Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

d Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

11 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

b Nessuna delle altre.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

d Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

12 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

b Nessuna delle altre.

c Esistono infinite terne principali d'inerzia.

d L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

b L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

c Il corpo non può essere omogeneo.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2 \,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0) \,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0) \,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{15}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Nessuna delle altre.

b Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

c

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty \,.$$

d

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0 \,.$$

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0 \,, \quad \lambda_3 = 0 \,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X} \,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s \boldsymbol{u}_1(t) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4} s^4 + \frac{m}{2} \alpha^2 s^2 \,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h \,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA
PROF. DANIELE ANDREUCCI
Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[9].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[9].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[9].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

01 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Non è di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

02 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Nessuna delle altre.
c Non è di equilibrio.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

03 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Nessuna delle altre.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
c Non esistono punti di equilibrio.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

b Dipendente dalla scelta dei vincoli.

c Nessuna delle altre.

d Dipendente dalle forze applicate.

$\boxed{\mathbf{05}}$ L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

b È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

c Nessuna delle altre.

d È definita solo per vincoli fissi.

$\boxed{\mathbf{06}}$ Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio degli spostamenti effettivi.

b Nessuna delle altre.

c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

d Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\textbf{07}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a Nessuna delle altre.

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

d

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

$\boxed{\textbf{08}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

b Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

c

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{09}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Nessuna delle altre.

b L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

c Il corpo non può essere omogeneo.

d L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{10}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

b Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

c Nessuna delle altre.

d Nulla se il vincolo è liscio.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a La quiete.

b Una traslazione.

c Una rotazione.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Nessuna delle altre.

b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

c Non si può porre.

d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

13 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Nessuna delle altre.

b Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

c Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

d Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

14 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

b Nessuna delle altre.

c Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

15 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Nessuna delle altre.

b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

c Esistono infinite terne principali d'inerzia.

d L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[10].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[10].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[10].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

01 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Non è di equilibrio.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

02 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non è di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

03 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x - 1)^2 - \beta(y - 2)^2 \,.$$

Allora:

a Non esistono punti di equilibrio.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
d Nessuna delle altre.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

04 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una rotazione.

b Una traslazione.

c Nessuna delle altre.

d La quiete.

05 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

b Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

c Nulla se il vincolo è liscio.

d Nessuna delle altre.

06 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

b Nessuna delle altre.

c Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

d Non si può porre.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

$\boxed{\textbf{07}}$ Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

b Esistono infinite terne principali d'inerzia.

c Nessuna delle altre.

d L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

$\boxed{\textbf{08}}$ Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

c Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{09}}$ Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

b Nessuna delle altre.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

b Nessuna delle altre.

c

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

d

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Il corpo non può essere omogeneo.

b L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

c Nessuna delle altre.

d L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

13 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a Nessuna delle altre.

b È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

c Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

d È definita solo per vincoli fissi.

14 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio degli spostamenti effettivi.

b Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^m$.

d Nessuna delle altre.

15 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalle forze applicate.

b Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

c Nessuna delle altre.

d Dipendente dalla scelta dei vincoli.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r : \qquad \lambda_2 = 0 \,, \quad \lambda_3 = 0 \,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X} \,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s\boldsymbol{u}_1(t) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4} s^4 + \frac{m}{2} \alpha^2 s^2 \,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h \,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[11].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[11].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[11].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

01 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Nessuna delle altre.

b Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

c Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

d Nulla se il vincolo è liscio.

02 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

b Nessuna delle altre.

c Non si può porre.

d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

03 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a La quiete.

b Una rotazione.

c Nessuna delle altre.

d Una traslazione.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano
a Nessuna delle altre.
b Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.
c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.
d Lo spazio degli spostamenti effettivi.

$\boxed{\mathbf{05}}$ Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è
a Nessuna delle altre.
b Dipendente dalla scelta dei vincoli.
c Dipendente dalle forze applicate.
d Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

$\boxed{\mathbf{06}}$ L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$
a È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.
b È definita solo per vincoli fissi.
c Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.
d Nessuna delle altre.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

07 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Nessuna delle altre.
b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.
d Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

08 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Nessuna delle altre.
b Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
c Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.
d Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

09 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Esistono infinite terne principali d'inerzia.
b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
c Nessuna delle altre.
d L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\textbf{10}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

b Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

c Nessuna delle altre.

d

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

$\boxed{\textbf{11}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

b Nessuna delle altre.

c L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

d Il corpo non può essere omogeneo.

$\boxed{\textbf{12}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Non è di equilibrio.
d È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
b Non esistono punti di equilibrio.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Nessuna delle altre.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[12].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[12].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[12].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

01 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Non si può porre.

b Nessuna delle altre.

c Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

d Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

02 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una traslazione.

b Nessuna delle altre.

c Una rotazione.

d La quiete.

03 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Nessuna delle altre.

b Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

c Nulla se il vincolo è liscio.

d Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

04 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

05 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

06 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Non esistono punti di equilibrio.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
d Nessuna delle altre.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)=0\,,\qquad \boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^{3n+1}\to\boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell=3n-m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

07 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Nessuna delle altre.
b Lo spazio degli spostamenti effettivi.
c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^m$.
d Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

08 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$

a È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.
b È definita solo per vincoli fissi.
c Nessuna delle altre.
d Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)>0$ per ogni $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$.

09 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Nessuna delle altre.
b Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.
c Dipendente dalla scelta dei vincoli.
d Dipendente dalle forze applicate.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.
c Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
b Nessuna delle altre.
c Esistono infinite terne principali d'inerzia.
d L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
b Nessuna delle altre.
c Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.
d Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

13 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

14 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

d Nessuna delle altre.

15 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Nessuna delle altre.

b L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

c L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

d Il corpo non può essere omogeneo.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[13].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

01 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Nessuna delle altre.

02 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Nessuna delle altre.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

03 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Non esistono punti di equilibrio.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

04 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Nessuna delle altre.

b Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

c Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

d Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

05 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

c Nessuna delle altre.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

06 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Esistono infinite terne principali d'inerzia.

b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

c Nessuna delle altre.

d L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{07}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

$\boxed{\mathbf{08}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a Nessuna delle altre.

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

d

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

$\boxed{\mathbf{09}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Il corpo non può essere omogeneo.

b L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

c L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

d Nessuna delle altre.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una rotazione.
b Nessuna delle altre.
c La quiete.
d Una traslazione.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
b Non si può porre.
c Nessuna delle altre.
d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

$\boxed{\mathbf{12}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Nessuna delle altre.
b Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
c Nulla se il vincolo è liscio.
d Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

13 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

b È definita solo per vincoli fissi.

c È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

d Nessuna delle altre.

14 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio degli spostamenti effettivi.

b Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

c Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

d Nessuna delle altre.

15 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

b Dipendente dalle forze applicate.

c Dipendente dalla scelta dei vincoli.

d Nessuna delle altre.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[14].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[14].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[14].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

01 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Non è di equilibrio.

02 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

03 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Non esistono punti di equilibrio.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)=0\,,\qquad \boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^{3n+1}\to\boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell=3n-m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

04 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano
a Nessuna delle altre.
b Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^m$.
c Lo spazio degli spostamenti effettivi.
d Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

05 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è
a Dipendente dalla scelta dei vincoli.
b Dipendente dalle forze applicate.
c Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.
d Nessuna delle altre.

06 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$
a Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)>0$ per ogni $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$.
b È definita solo per vincoli fissi.
c È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.
d Nessuna delle altre.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

07 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

c Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

d Nessuna delle altre.

08 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

b L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

c Esistono infinite terne principali d'inerzia.

d Nessuna delle altre.

09 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)]\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

c Nessuna delle altre.

d Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

10 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

b Il corpo non può essere omogeneo.

c L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

d Nessuna delle altre.

11 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

c

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

d Nessuna delle altre.

12 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a Nessuna delle altre.

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{13}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Nulla se il vincolo è liscio.

b Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

c Nessuna delle altre.

d Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Nessuna delle altre.

b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

c Non si può porre.

d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Nessuna delle altre.

b La quiete.

c Una rotazione.

d Una traslazione.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4} s^4 + \frac{m}{2} \alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[15].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[15].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[15].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[15].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{01}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

b
$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

c Nessuna delle altre.

d
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

$\boxed{\mathbf{02}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

b Nessuna delle altre.

c L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

d Il corpo non può essere omogeneo.

$\boxed{\mathbf{03}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

b
$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.

d
$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

04 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 .$$

Allora:

a Nessuna delle altre.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
d Non esistono punti di equilibrio.

05 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non è di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

06 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
d Non è di equilibrio.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

$\boxed{\mathbf{07}}$ Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)] , \qquad s \in \boldsymbol{R} ,$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

b Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

c Nessuna delle altre.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

c Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{09}}$ Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Esistono infinite terne principali d'inerzia.

b Nessuna delle altre.

c L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

d Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)=0\,,\qquad \boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^{3n+1}\to\boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell=3n-m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.
b Nessuna delle altre.
c Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.
d Lo spazio degli spostamenti effettivi.

$\boxed{\mathbf{11}}$ L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$

a Nessuna delle altre.
b Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)>0$ per ogni $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$.
c È definita solo per vincoli fissi.
d È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.
b Dipendente dalla scelta dei vincoli.
c Nessuna delle altre.
d Dipendente dalle forze applicate.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

13 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una traslazione.
b La quiete.
c Nessuna delle altre.
d Una rotazione.

14 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
c Non si può porre.
d Nessuna delle altre.

15 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Nulla se il vincolo è liscio.
b Nessuna delle altre.
c Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.
d Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA
PROF. DANIELE ANDREUCCI
Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[16].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[16].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[16].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

$\boxed{\textbf{01}}$ Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)]\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.
b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{02}}$ Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
b Nessuna delle altre.
c Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.
d Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

$\boxed{\textbf{03}}$ Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.
b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
c Nessuna delle altre.
d Esistono infinite terne principali d'inerzia.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

04 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a La quiete.
b Nessuna delle altre.
c Una rotazione.
d Una traslazione.

05 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.
b Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
c Nessuna delle altre.
d Nulla se il vincolo è liscio.

06 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Non si può porre.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
c Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
d Nessuna delle altre.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

07 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

c

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

d Nessuna delle altre.

08 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

d Nessuna delle altre.

09 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

b Nessuna delle altre.

c Il corpo non può essere omogeneo.

d L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

10 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Nessuna delle altre.

b Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

d Lo spazio degli spostamenti effettivi.

11 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

b Dipendente dalla scelta dei vincoli.

c Dipendente dalle forze applicate.

d Nessuna delle altre.

12 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a Nessuna delle altre.

b Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

c È definita solo per vincoli fissi.

d È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non è di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non è di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha (x-1)^2 - \beta (y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
b Nessuna delle altre.
c Non esistono punti di equilibrio.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

[17].0

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA
PROF. DANIELE ANDREUCCI
Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[17].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[17].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[17].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{01}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali
a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
c Nessuna delle altre.
d Non si può porre.

$\boxed{\mathbf{02}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:
a Nessuna delle altre.
b Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.
c Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
d Nulla se il vincolo è liscio.

$\boxed{\mathbf{03}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:
a Una traslazione.
b Nessuna delle altre.
c Una rotazione.
d La quiete.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

04 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

05 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Nessuna delle altre.

b L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

c Il corpo non può essere omogeneo.

d L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

06 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.

d Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)=0\,,\qquad \boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^{3n+1}\to\boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell=3n-m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

$\boxed{\textbf{07}}$ Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

b Dipendente dalle forze applicate.

c Nessuna delle altre.

d Dipendente dalla scelta dei vincoli.

$\boxed{\textbf{08}}$ L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$

a È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

b Nessuna delle altre.

c È definita solo per vincoli fissi.

d Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)>0$ per ogni $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$.

$\boxed{\textbf{09}}$ Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

b Lo spazio degli spostamenti effettivi.

c Nessuna delle altre.

d Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

b Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

c Nessuna delle altre.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Nessuna delle altre.

b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

c L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

d Esistono infinite terne principali d'inerzia.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Nessuna delle altre.

c Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

d Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

13 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:
a Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
b Non esistono punti di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.

14 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Non è di equilibrio.

15 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Nessuna delle altre.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

[18].0

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA
prof. Daniele Andreucci
Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[18].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[18].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[18].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[18].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\textbf{01}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Nessuna delle altre.

b Una traslazione.

c La quiete.

d Una rotazione.

$\boxed{\textbf{02}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

b Nessuna delle altre.

c Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

d Nulla se il vincolo è liscio.

$\boxed{\textbf{03}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Nessuna delle altre.

b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

c Non si può porre.

d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

04 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Non è di equilibrio.

05 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Non è di equilibrio.

06 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
b Non esistono punti di equilibrio.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
d Nessuna delle altre.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

$\boxed{\mathbf{07}}$ Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Esistono infinite terne principali d'inerzia.

b Nessuna delle altre.

c L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

d Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Nessuna delle altre.

c Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

d Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

$\boxed{\mathbf{09}}$ Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

c Nessuna delle altre.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a Nessuna delle altre.

b
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0) \,.$$

c
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0) \,.$$

d
$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2 \,.$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Il corpo non può essere omogeneo.

b Nessuna delle altre.

c L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

d L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

$\boxed{\mathbf{12}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a
$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0 \,.$$

b Nessuna delle altre.

c Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

d
$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty \,.$$

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

13 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a Nessuna delle altre.

b Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

c È definita solo per vincoli fissi.

d È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

14 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

b Lo spazio degli spostamenti effettivi.

c Nessuna delle altre.

d Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

15 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalle forze applicate.

b Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

c Dipendente dalla scelta dei vincoli.

d Nessuna delle altre.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA
PROF. DANIELE ANDREUCCI
Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[19].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[19].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[19].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[19].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

01 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.
b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
c Nessuna delle altre.
d Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

02 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
b Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.
c Nessuna delle altre.
d Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

03 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
b L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.
c Esistono infinite terne principali d'inerzia.
d Nessuna delle altre.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

04 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

d Nessuna delle altre.

05 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Il corpo non può essere omogeneo.

b Nessuna delle altre.

c L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

d L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

06 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

d Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)=0\,,\qquad \boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^{3n+1}\to\boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell=3n-m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

07 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio degli spostamenti effettivi.

b Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

c Nessuna delle altre.

d Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

08 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$

a È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

b Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)>0$ per ogni $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$.

c Nessuna delle altre.

d È definita solo per vincoli fissi.

09 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Nessuna delle altre.

b Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

c Dipendente dalla scelta dei vincoli.

d Dipendente dalle forze applicate.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

c Nessuna delle altre.

d Non si può porre.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una rotazione.

b Una traslazione.

c La quiete.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{12}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Nulla se il vincolo è liscio.

b Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

c Nessuna delle altre.

d Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

13 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Non è di equilibrio.

14 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non è di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

15 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
b Nessuna delle altre.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
d Non esistono punti di equilibrio.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r : \qquad \lambda_2 = 0 \,, \quad \lambda_3 = 0 \,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X} \,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s\boldsymbol{u}_1(t) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2 \,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h \,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[20].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[20].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[20].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[20].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

01 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Nulla se il vincolo è liscio.

b Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

c Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

d Nessuna delle altre.

02 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

b Non si può porre.

c Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

d Nessuna delle altre.

03 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a La quiete.

b Una traslazione.

c Nessuna delle altre.

d Una rotazione.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

04 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

b Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

c Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

d Nessuna delle altre.

05 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

b Nessuna delle altre.

c Esistono infinite terne principali d'inerzia.

d Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

06 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)]\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

b Nessuna delle altre.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

07 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Non è di equilibrio.

08 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
c Non esistono punti di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

09 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non è di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)=0\,,\qquad \boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^{3n+1}\to\boldsymbol{R}^m\,,$$

con $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell=3n-m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

$\boxed{\mathbf{10}}$ L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$

a È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

b È definita solo per vincoli fissi.

c Nessuna delle altre.

d Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)>0$ per ogni $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalle forze applicate.

b Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

c Dipendente dalla scelta dei vincoli.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Nessuna delle altre.

b Lo spazio degli spostamenti effettivi.

c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^m$.

d Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\textbf{13}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.

c Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

d

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

$\boxed{\textbf{14}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{15}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Nessuna delle altre.

b Il corpo non può essere omogeneo.

c L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

d L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[21].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[21].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[21].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

01 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:
a Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
b Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.
c Nessuna delle altre.
d Nulla se il vincolo è liscio.

02 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali
a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c Non si può porre.
d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

03 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:
a Nessuna delle altre.
b Una traslazione.
c Una rotazione.
d La quiete.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

04 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 .$$

Allora:

a Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
b Nessuna delle altre.
c Non esistono punti di equilibrio.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.

05 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

06 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Non è di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)=0\,,\qquad \boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^{3n+1}\to\boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell=3n-m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

07 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$

a Nessuna delle altre.

b Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)>0$ per ogni $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$.

c È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

d È definita solo per vincoli fissi.

08 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Nessuna delle altre.

b Dipendente dalla scelta dei vincoli.

c Dipendente dalle forze applicate.

d Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

09 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Nessuna delle altre.

b Lo spazio degli spostamenti effettivi.

c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

d Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

10 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a
$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2 .$$

b
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0) .$$

c
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0) .$$

d Nessuna delle altre.

11 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Nessuna delle altre.

b
$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0 .$$

c Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

d
$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty .$$

12 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Il corpo non può essere omogeneo.

b L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

c Nessuna delle altre.

d L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

$\boxed{\textbf{13}}$ Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.
b Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.
c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{14}}$ Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
b Nessuna delle altre.
c Esistono infinite terne principali d'inerzia.
d L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

$\boxed{\textbf{15}}$ Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
b Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.
c Nessuna delle altre.
d Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4} s^4 + \frac{m}{2} \alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA
prof. Daniele Andreucci
Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[22].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[22].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{01}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:
a Nulla se il vincolo è liscio.
b Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.
c Nessuna delle altre.
d Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

$\boxed{\mathbf{02}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali
a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
c Non si può porre.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{03}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:
a Nessuna delle altre.
b La quiete.
c Una traslazione.
d Una rotazione.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

$\boxed{\textbf{04}}$ Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

b Esistono infinite terne principali d'inerzia.

c Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$ Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)]\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

b Nessuna delle altre.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

d Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

$\boxed{\textbf{06}}$ Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

c Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

d Nessuna delle altre.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

07 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Nessuna delle altre.
b Lo spazio degli spostamenti effettivi.
c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^m$.
d Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

08 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a È definita solo per vincoli fissi.
b Nessuna delle altre.
c Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.
d È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

09 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta dei vincoli.
b Dipendente dalle forze applicate.
c Nessuna delle altre.
d Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a
$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2 \,.$$

b
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0) \,.$$

c Nessuna delle altre.

d
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0) \,.$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

b Nessuna delle altre.

c Il corpo non può essere omogeneo.

d L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

$\boxed{\mathbf{12}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

b
$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0 \,.$$

c
$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty \,.$$

d Nessuna delle altre.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

13 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:
a Nessuna delle altre.
b Non esistono punti di equilibrio.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.

14 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a Non è di equilibrio.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

15 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a Nessuna delle altre.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[23].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[23].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

01 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 .$$

Allora:
a Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
b Nessuna delle altre.
c Non esistono punti di equilibrio.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.

02 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a Nessuna delle altre.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

03 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Non è di equilibrio.
d È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\textbf{04}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

$\boxed{\textbf{05}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Nessuna delle altre.

b L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

c Il corpo non può essere omogeneo.

d L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

$\boxed{\textbf{06}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Nessuna delle altre.

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

c

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

d Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{07}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Nulla se il vincolo è liscio.

b Nessuna delle altre.

c Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

d Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una traslazione.

b Una rotazione.

c Nessuna delle altre.

d La quiete.

$\boxed{\mathbf{09}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Non si può porre.

b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

c Nessuna delle altre.

d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

10 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio degli spostamenti effettivi.

b Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

d Nessuna delle altre.

11 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Nessuna delle altre.

b Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

c Dipendente dalle forze applicate.

d Dipendente dalla scelta dei vincoli.

12 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

b Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

c È definita solo per vincoli fissi.

d Nessuna delle altre.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

13 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Nessuna delle altre.
b Esistono infinite terne principali d'inerzia.
c Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
d L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

14 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)]\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
b Nessuna delle altre.
c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.
d Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

15 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.
b Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
c Nessuna delle altre.
d Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

[24].0

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA
prof. Daniele Andreucci
Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[24].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

01 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Nessuna delle altre.
c Non è di equilibrio.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

02 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

03 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Non esistono punti di equilibrio.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
d Nessuna delle altre.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

04 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a Nessuna delle altre.

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

05 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

b Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

c

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

06 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

b Il corpo non può essere omogeneo.

c Nessuna delle altre.

d L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{07}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

b Nulla se il vincolo è liscio.

c Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Non si può porre.

b Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

c Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{09}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Nessuna delle altre.

b Una rotazione.

c Una traslazione.

d La quiete.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)=0\,,\qquad \boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^{3n+1}\to\boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell=3n-m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano
a Lo spazio degli spostamenti effettivi.
b Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.
c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^m$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{11}}$ L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$
a Nessuna delle altre.
b È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.
c Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)>0$ per ogni $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$.
d È definita solo per vincoli fissi.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è
a Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.
b Nessuna delle altre.
c Dipendente dalla scelta dei vincoli.
d Dipendente dalle forze applicate.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

$\boxed{\textbf{13}}$ Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

c Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{14}}$ Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Nessuna delle altre.

b Esistono infinite terne principali d'inerzia.

c Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

d L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

$\boxed{\textbf{15}}$ Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

d Nessuna delle altre.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r : \qquad \lambda_2 = 0 \,, \quad \lambda_3 = 0 \,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X} \,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s\boldsymbol{u}_1(t) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4} s^4 + \frac{m}{2} \alpha^2 s^2 \,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h \,.$$

[25].0

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

PROF. DANIELE ANDREUCCI

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[25].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[25].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[25].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

01 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a La quiete.

b Nessuna delle altre.

c Una traslazione.

d Una rotazione.

02 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Nessuna delle altre.

b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

c Non si può porre.

d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

03 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

b Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

c Nessuna delle altre.

d Nulla se il vincolo è liscio.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\textbf{04}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

c Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{06}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Nessuna delle altre.

b L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

c L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

d Il corpo non può essere omogeneo.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

07 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:
a Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
b Esistono infinite terne principali d'inerzia.
c L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.
d Nessuna delle altre.

08 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:
a Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
b Nessuna delle altre.
c Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.
d Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

09 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)]\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $\alpha > 0$. Allora:
a Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.
b Nessuna delle altre.
c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.
d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

10 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Nessuna delle altre.

11 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
d Non è di equilibrio.

12 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x - 1)^2 - \beta(y - 2)^2 .$$

Allora:
a Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
b Non esistono punti di equilibrio.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
d Nessuna delle altre.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

13 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

b Lo spazio degli spostamenti effettivi.

c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

d Nessuna delle altre.

14 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

b Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

c È definita solo per vincoli fissi.

d Nessuna delle altre.

15 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Nessuna delle altre.

b Dipendente dalla scelta dei vincoli.

c Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

d Dipendente dalle forze applicate.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

[26].0

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[26].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[26].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{01}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Nessuna delle altre.
b La quiete.
c Una traslazione.
d Una rotazione.

$\boxed{\mathbf{02}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.
b Nessuna delle altre.
c Nulla se il vincolo è liscio.
d Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

$\boxed{\mathbf{03}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
c Nessuna delle altre.
d Non si può porre.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)=0\,,\qquad \boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^{3n+1}\to\boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell=3n-m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

$\boxed{\mathbf{04}}$ L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$

a Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)>0$ per ogni $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$.

b Nessuna delle altre.

c È definita solo per vincoli fissi.

d È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

$\boxed{\mathbf{05}}$ Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^m$.

b Nessuna delle altre.

c Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

d Lo spazio degli spostamenti effettivi.

$\boxed{\mathbf{06}}$ Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta dei vincoli.

b Nessuna delle altre.

c Dipendente dalle forze applicate.

d Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\textbf{07}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Nessuna delle altre.

b L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

c L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

d Il corpo non può essere omogeneo.

$\boxed{\textbf{08}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a Nessuna delle altre.

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

$\boxed{\textbf{09}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

b Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

c Nessuna delle altre.

d

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

$\boxed{\textbf{10}}$ Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
b Nessuna delle altre.
c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.
d Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

$\boxed{\textbf{11}}$ Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.
b Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
c Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{12}}$ Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.
b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
c Esistono infinite terne principali d'inerzia.
d Nessuna delle altre.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

13 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
d Non è di equilibrio.

14 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Non è di equilibrio.

15 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:
a Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
c Non esistono punti di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[27].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[27].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[27].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

01 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali
a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
b Non si può porre.
c Nessuna delle altre.
d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

02 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:
a Una rotazione.
b Nessuna delle altre.
c Una traslazione.
d La quiete.

03 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:
a Nessuna delle altre.
b Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
c Nulla se il vincolo è liscio.
d Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

04 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è
a Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.
b Dipendente dalla scelta dei vincoli.
c Dipendente dalle forze applicate.
d Nessuna delle altre.

05 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$
a Nessuna delle altre.
b È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.
c Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.
d È definita solo per vincoli fissi.

06 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano
a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.
b Nessuna delle altre.
c Lo spazio degli spostamenti effettivi.
d Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

07 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

c Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

d Nessuna delle altre.

08 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

b Nessuna delle altre.

c L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

d Il corpo non può essere omogeneo.

09 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

d Nessuna delle altre.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

10 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a Non è di equilibrio.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

11 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 .$$

Allora:
a Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
c Non esistono punti di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

12 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

13 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

c Nessuna delle altre.

d Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

14 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Esistono infinite terne principali d'inerzia.

b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

c L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

d Nessuna delle altre.

15 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

b Nessuna delle altre.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

d Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[28].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[28].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[28].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[28].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{01}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Il corpo non può essere omogeneo.

b L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

c L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{02}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

$\boxed{\mathbf{03}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

c

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

04 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.
b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.
d Nessuna delle altre.

05 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
b Nessuna delle altre.
c L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.
d Esistono infinite terne principali d'inerzia.

06 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Nessuna delle altre.
b Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
c Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
d Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

07 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è
a Dipendente dalla scelta dei vincoli.
b Nessuna delle altre.
c Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.
d Dipendente dalle forze applicate.

08 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$
a È definita solo per vincoli fissi.
b Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.
c È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.
d Nessuna delle altre.

09 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano
a Lo spazio degli spostamenti effettivi.
b Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.
c Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.
d Nessuna delle altre.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{10}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Nessuna delle altre.

b Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

c Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

d Nulla se il vincolo è liscio.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una rotazione.

b La quiete.

c Nessuna delle altre.

d Una traslazione.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

b Non si può porre.

c Nessuna delle altre.

d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

13 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
d Non è di equilibrio.

14 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 .$$

Allora:

a Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
c Non esistono punti di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

15 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Nessuna delle altre.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[29].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[29].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[29].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[29].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

01 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

b Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

c Nessuna delle altre.

d Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

02 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Esistono infinite terne principali d'inerzia.

b L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

c Nessuna delle altre.

d Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

03 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

b Nessuna delle altre.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

d Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

04 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Nulla se il vincolo è liscio.

b Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

c Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

d Nessuna delle altre.

05 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una rotazione.

b La quiete.

c Nessuna delle altre.

d Una traslazione.

06 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Nessuna delle altre.

b Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

c Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

d Non si può porre.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

07 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 .$$

Allora:
a Nessuna delle altre.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
d Non esistono punti di equilibrio.

08 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Nessuna delle altre.
c Non è di equilibrio.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

09 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Nessuna delle altre.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\textbf{10}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Nessuna delle altre.

b L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

c Il corpo non può essere omogeneo.

d L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

$\boxed{\textbf{11}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a Nessuna delle altre.

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

$\boxed{\textbf{12}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

d Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

13 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta dei vincoli.

b Nessuna delle altre.

c Dipendente dalle forze applicate.

d Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

14 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a È definita solo per vincoli fissi.

b È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

c Nessuna delle altre.

d Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

15 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Nessuna delle altre.

b Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

c Lo spazio degli spostamenti effettivi.

d Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

[30].0

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA
PROF. DANIELE ANDREUCCI
Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[30].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[30].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[30].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[30].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

01 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è
a Dipendente dalle forze applicate.
b Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.
c Nessuna delle altre.
d Dipendente dalla scelta dei vincoli.

02 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$
a Nessuna delle altre.
b È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.
c È definita solo per vincoli fissi.
d Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

03 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano
a Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.
b Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^m$.
c Lo spazio degli spostamenti effettivi.
d Nessuna delle altre.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

04 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Non è di equilibrio.

05 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Non esistono punti di equilibrio.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.

06 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\textbf{07}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

b

$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty \,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0 \,.$$

$\boxed{\textbf{08}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Il corpo non può essere omogeneo.

b L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

c L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{09}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2 \,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0) \,.$$

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0) \,.$$

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

10 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Nulla se il vincolo è liscio.

b Nessuna delle altre.

c Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

d Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

11 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

b Nessuna delle altre.

c Non si può porre.

d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

12 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una rotazione.

b Una traslazione.

c Nessuna delle altre.

d La quiete.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

13 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
b Nessuna delle altre.
c Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.
d Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

14 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.
b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
c Nessuna delle altre.
d Esistono infinite terne principali d'inerzia.

15 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.
b Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.
c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
d Nessuna delle altre.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[31].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

01 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a È definita solo per vincoli fissi.

b Nessuna delle altre.

c È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

d Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

02 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

b Dipendente dalle forze applicate.

c Nessuna delle altre.

d Dipendente dalla scelta dei vincoli.

03 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio degli spostamenti effettivi.

b Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

c Nessuna delle altre.

d Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

04 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Non è di equilibrio.
d È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

05 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Nessuna delle altre.

06 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Non esistono punti di equilibrio.
b Nessuna delle altre.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

07 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

b
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

c
$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

d Nessuna delle altre.

08 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Nessuna delle altre.

b
$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

c Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

d
$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

09 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

b Il corpo non può essere omogeneo.

c Nessuna delle altre.

d L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

10 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

b Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

c Nessuna delle altre.

d Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

11 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)] , \qquad s \in \boldsymbol{R} ,$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

c Nessuna delle altre.

d Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

12 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Esistono infinite terne principali d'inerzia.

b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

c L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

d Nessuna delle altre.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali
a Nessuna delle altre.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
c Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
d Non si può porre.

$\boxed{\mathbf{14}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:
a Nessuna delle altre.
b Nulla se il vincolo è liscio.
c Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
d Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:
a Una traslazione.
b Nessuna delle altre.
c Una rotazione.
d La quiete.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

PROF. DANIELE ANDREUCCI

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[32].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[32].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

01 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

02 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
b Nessuna delle altre.
c Non esistono punti di equilibrio.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.

03 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Non è di equilibrio.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

04 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

b Nessuna delle altre.

c È definita solo per vincoli fissi.

d Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

05 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Nessuna delle altre.

b Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

d Lo spazio degli spostamenti effettivi.

06 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalle forze applicate.

b Nessuna delle altre.

c Dipendente dalla scelta dei vincoli.

d Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\textbf{07}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:
a Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
b Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.
c Nessuna delle altre.
d Nulla se il vincolo è liscio.

$\boxed{\textbf{08}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali
a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
b Nessuna delle altre.
c Non si può porre.
d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

$\boxed{\textbf{09}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:
a Nessuna delle altre.
b La quiete.
c Una rotazione.
d Una traslazione.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

10 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

b Il corpo non può essere omogeneo.

c Nessuna delle altre.

d L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

11 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Nessuna delle altre.

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

c

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

d Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

12 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

d Nessuna delle altre.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

13 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Nessuna delle altre.

b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

c L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

d Esistono infinite terne principali d'inerzia.

14 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

c Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

d Nessuna delle altre.

15 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

b Nessuna delle altre.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r : \qquad \lambda_2 = 0 \,, \quad \lambda_3 = 0 \,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X} \,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s\boldsymbol{u}_1(t) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4} s^4 + \frac{m}{2} \alpha^2 s^2 \,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h \,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA
prof. Daniele Andreucci
Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[33].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[33].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[33].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

01 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non è di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

02 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Nessuna delle altre.

03 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
b Non esistono punti di equilibrio.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
d Nessuna delle altre.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

04 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

d Nessuna delle altre.

05 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

c Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

d Nessuna delle altre.

06 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Il corpo non può essere omogeneo.

b L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

c L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

d Nessuna delle altre.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{07}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:
a Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
b Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.
c Nessuna delle altre.
d Nulla se il vincolo è liscio.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali
a Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
b Non si può porre.
c Nessuna delle altre.
d Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

$\boxed{\mathbf{09}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:
a La quiete.
b Una rotazione.
c Nessuna delle altre.
d Una traslazione.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

$\boxed{\mathbf{10}}$ L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a Nessuna delle altre.

b Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

c È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

d È definita solo per vincoli fissi.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio degli spostamenti effettivi.

b Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

c Nessuna delle altre.

d Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

b Nessuna delle altre.

c Dipendente dalla scelta dei vincoli.

d Dipendente dalle forze applicate.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

13 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

c Nessuna delle altre.

d Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

14 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

b Nessuna delle altre.

c Esistono infinite terne principali d'inerzia.

d L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

15 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

b Nessuna delle altre.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

[34].0

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

PROF. DANIELE ANDREUCCI

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[34].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

01 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

b Nessuna delle altre.

c L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

d Il corpo non può essere omogeneo.

02 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

c Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

d Nessuna delle altre.

03 Denotiamo con $I_{11} \le I_{22} \le I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \ge 2 I_{11} T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2 I_{22} T(0)\,.$$

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

04 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano
a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^m$.
b Nessuna delle altre.
c Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.
d Lo spazio degli spostamenti effettivi.

05 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è
a Nessuna delle altre.
b Dipendente dalle forze applicate.
c Dipendente dalla scelta dei vincoli.
d Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

06 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$
a Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.
b Nessuna delle altre.
c È definita solo per vincoli fissi.
d È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{07}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

b Nessuna delle altre.

c Nulla se il vincolo è liscio.

d Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Nessuna delle altre.

b Una rotazione.

c La quiete.

d Una traslazione.

$\boxed{\mathbf{09}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Nessuna delle altre.

b Non si può porre.

c Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

d Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

$\boxed{\textbf{10}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Non è di equilibrio.

$\boxed{\textbf{11}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Non è di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{12}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Nessuna delle altre.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
c Non esistono punti di equilibrio.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

13 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Nessuna delle altre.

c Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

d Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

14 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Nessuna delle altre.

b Esistono infinite terne principali d'inerzia.

c Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

d L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

15 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

b Nessuna delle altre.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4} s^4 + \frac{m}{2} \alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[35].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[35].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[35].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

01 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Nessuna delle altre.

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

c

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

d Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

02 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

03 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Nessuna delle altre.

b L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

c Il corpo non può essere omogeneo.

d L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

04 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Non è di equilibrio.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

05 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 .$$

Allora:

a Nessuna delle altre.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
d Non esistono punti di equilibrio.

06 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non è di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)=0\,,\qquad \boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^{3n+1}\to\boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell=3n-m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

07 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta dei vincoli.

b Dipendente dalle forze applicate.

c Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

d Nessuna delle altre.

08 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$

a È definita solo per vincoli fissi.

b È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

c Nessuna delle altre.

d Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)>0$ per ogni $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$.

09 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Nessuna delle altre.

b Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

c Lo spazio degli spostamenti effettivi.

d Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{10}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:
a Nessuna delle altre.
b Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
c Nulla se il vincolo è liscio.
d Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali
a Nessuna delle altre.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
c Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
d Non si può porre.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:
a Una rotazione.
b Una traslazione.
c Nessuna delle altre.
d La quiete.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

13 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

c Nessuna delle altre.

d Esistono infinite terne principali d'inerzia.

14 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

c Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

d Nessuna delle altre.

15 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

b Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

d Nessuna delle altre.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[36].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[36].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[36].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

01 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio degli spostamenti effettivi.
b Nessuna delle altre.
c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^m$.
d Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

02 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a Nessuna delle altre.
b Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.
c È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.
d È definita solo per vincoli fissi.

03 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalle forze applicate.
b Dipendente dalla scelta dei vincoli.
c Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.
d Nessuna delle altre.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

04 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Nessuna delle altre.
b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.
c Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.
d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

05 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.
b Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
c Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
d Nessuna delle altre.

06 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
b Nessuna delle altre.
c L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.
d Esistono infinite terne principali d'inerzia.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

07 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

b Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

c Nessuna delle altre.

d

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

08 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

09 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

b Nessuna delle altre.

c L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

d Il corpo non può essere omogeneo.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

10 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una rotazione.

b Nessuna delle altre.

c La quiete.

d Una traslazione.

11 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Nessuna delle altre.

b Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

c Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

d Nulla se il vincolo è liscio.

12 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

b Non si può porre.

c Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

d Nessuna delle altre.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

13 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a Nessuna delle altre.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

14 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 .$$

Allora:
a Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
b Non esistono punti di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.

15 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Non è di equilibrio.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\textbf{01}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

b Nessuna delle altre.

c Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

d Non si può porre.

$\boxed{\textbf{02}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a La quiete.

b Una rotazione.

c Nessuna delle altre.

d Una traslazione.

$\boxed{\textbf{03}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Nulla se il vincolo è liscio.

b Nessuna delle altre.

c Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

d Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

04 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Nessuna delle altre.
c Non è di equilibrio.
d È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

05 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:

a Nessuna delle altre.
b Non esistono punti di equilibrio.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.

06 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

07 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è
a Dipendente dalla scelta dei vincoli.
b Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.
c Nessuna delle altre.
d Dipendente dalle forze applicate.

08 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano
a Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.
b Lo spazio degli spostamenti effettivi.
c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.
d Nessuna delle altre.

09 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$
a Nessuna delle altre.
b È definita solo per vincoli fissi.
c Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.
d È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

10 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Nessuna delle altre.

b

$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0 \,.$$

c Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

d

$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty \,.$$

11 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a Nessuna delle altre.

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2 I_{11} T(0) \,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2 I_{22} T(0) \,.$$

d

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2 \,.$$

12 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Il corpo non può essere omogeneo.

b Nessuna delle altre.

c L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

d L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

$\boxed{\textbf{13}}$ Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Nessuna delle altre.

b L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

c Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

d Esistono infinite terne principali d'inerzia.

$\boxed{\textbf{14}}$ Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Nessuna delle altre.

b Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

c Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

d Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

$\boxed{\textbf{15}}$ Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

c Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

d Nessuna delle altre.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

[38].0

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA
PROF. DANIELE ANDREUCCI
Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[38].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

$\boxed{\textbf{01}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{02}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

b Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

c

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{03}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a Il corpo non può essere omogeneo.

b L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

c Nessuna delle altre.

d L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

04 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalle forze applicate.

b Dipendente dalla scelta dei vincoli.

c Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

d Nessuna delle altre.

05 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

b Lo spazio degli spostamenti effettivi.

c Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

d Nessuna delle altre.

06 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a È definita solo per vincoli fissi.

b È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

c Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

d Nessuna delle altre.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

07 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a Nessuna delle altre.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

08 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

09 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 .$$

Allora:
a Nessuna delle altre.
b Non esistono punti di equilibrio.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
d Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali
a Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
c Non si può porre.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{11}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:
a Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
b Nulla se il vincolo è liscio.
c Nessuna delle altre.
d Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:
a Una traslazione.
b Una rotazione.
c Nessuna delle altre.
d La quiete.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

13 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Esistono infinite terne principali d'inerzia.

b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

c L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

d Nessuna delle altre.

14 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

b Nessuna delle altre.

c Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

15 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

c Nessuna delle altre.

d Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[39].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

$\boxed{\mathbf{01}}$ Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

c Nessuna delle altre.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

$\boxed{\mathbf{02}}$ Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Nessuna delle altre.

b Esistono infinite terne principali d'inerzia.

c L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

d Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

$\boxed{\mathbf{03}}$ Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

c Nessuna delle altre.

d Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

04 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Non è di equilibrio.

05 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Nessuna delle altre.

06 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 .$$

Allora:

a Non esistono punti di equilibrio.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
d Nessuna delle altre.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)=0\,,\qquad \boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^{3n+1}\to\boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell=3n-m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

07 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$

a È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

b È definita solo per vincoli fissi.

c Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)>0$ per ogni $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$.

d Nessuna delle altre.

08 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio degli spostamenti effettivi.

b Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

c Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{m}$.

d Nessuna delle altre.

09 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta dei vincoli.

b Nessuna delle altre.

c Dipendente dalle forze applicate.

d Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.

Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Non si può porre.

b Nessuna delle altre.

c Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

d Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

b Nessuna delle altre.

c Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.

d Nulla se il vincolo è liscio.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a La quiete.

b Una traslazione.

c Nessuna delle altre.

d Una rotazione.

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

13 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0)\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

d

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0)\,.$$

14 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

b Nessuna delle altre.

c L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

d Il corpo non può essere omogeneo.

15 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

d Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$

[40].0

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

PROF. DANIELE ANDREUCCI

Prova scritta del 25/03/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[40].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[40].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[40].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

01 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0 \,.$$

b Nessuna delle altre.

c Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

d

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty \,.$$

02 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

b Il corpo non può essere omogeneo.

c Nessuna delle altre.

d L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

03 Denotiamo con $I_{11} \le I_{22} \le I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0) \,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \ge 2I_{11}T(0) \,.$$

d

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2 \,.$$

Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{04}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:

a Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.
b Nessuna delle altre.
c Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
d Nulla se il vincolo è liscio.

$\boxed{\mathbf{05}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali

a Non si può porre.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
c Nessuna delle altre.
d Equivale a $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

$\boxed{\mathbf{06}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:

a Una rotazione.
b Nessuna delle altre.
c La quiete.
d Una traslazione.

Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

07 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:

a Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

b Nessuna delle altre.

c Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.

d Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.

08 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:

a Esistono infinite terne principali d'inerzia.

b L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.

c Nessuna delle altre.

d Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.

09 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:

a Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.

b Nessuna delle altre.

c Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.

d Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

10 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d Non è di equilibrio.

11 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Nessuna delle altre.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
d È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

12 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x - 1)^2 - \beta(y - 2)^2 \,.$$

Allora:

a Non esistono punti di equilibrio.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
d Nessuna delle altre.

Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

$\boxed{\mathbf{13}}$ L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

a È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

b Nessuna delle altre.

c È definita solo per vincoli fissi.

d Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Nessuna delle altre.

b Dipendente dalla scelta dei vincoli.

c Dipendente dalle forze applicate.

d Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^m$.

b Lo spazio degli spostamenti effettivi.

c Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

d Nessuna delle altre.

Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s, t) = s\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h\,.$$