MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 25/03/2025

1. Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)=0\,,\qquad \boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^{3n+1}\to\boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell=3n-m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.

$\boxed{\mathbf{01}}$ Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano

a Lo spazio degli spostamenti effettivi.

b Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^m$.

c Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{02}}$ L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$

a È definita solo per vincoli fissi.

b Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)>0$ per ogni $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$.

c È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{03}}$ Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è

a Dipendente dalla scelta dei vincoli.

b Dipendente dalle forze applicate.

c Dipendente dalla scelta della parametrizzazione lagrangiana.

d Nessuna delle altre.

Soluzione

I: a

II: c

III: a

2. Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0)\neq 0$.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.

a L'ellissoide d'inerzia in O deve essere una sfera.

b L'ellissoide d'inerzia in O non può essere una sfera.

c Il corpo non può essere omogeneo.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{05}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:

a Può avere direzione costante, ma modulo variabile.

b

$$\lim_{t\to+\infty}|\boldsymbol{\omega}(t)|=0\,.$$

c

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty .$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{06}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:

a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = 2I_{22}T(0) .$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \geq 2I_{11}T(0) .$$

c

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2 .$$

d Nessuna delle altre.

Soluzione

I: b

II: d

III: b

3. Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

$\boxed{\mathbf{07}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.

b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):

a Non è di equilibrio.

b È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.

c È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{09}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x - 1)^2 - \beta(y - 2)^2 .$$

Allora:

a Non esistono punti di equilibrio.

b Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
c Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
d Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: c
II: d
III: b

4. Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.
$\boxed{\mathbf{10}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:
a Tale che $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) \geq 0$.
b Nulla se il vincolo è liscio.
c Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali
a Non si può porre.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
c Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:
a La quiete.
b Una traslazione.
c Una rotazione.
d Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: a
II: c
III: c

5. Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:
a Non esistono altri assi solidali rispetto ai quali il momento d'inerzia sia uguale a I.
b Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
c Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha > 0$. Allora:
a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ non può essere costante.
b Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
c Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:
a L'ellissoide d'inerzia in O è una sfera.
b Esistono infinite terne principali d'inerzia.
c Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
d Nessuna delle altre.
Soluzione
I: b
II: b
III: b

6.
Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile r data da

$$r: \qquad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0.$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Sul punto $\boldsymbol{X}$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}.$$

Qui $\alpha > 0$, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinata lagrangiana $s \in \boldsymbol{R}$ con

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(s,t) = s\boldsymbol{u}_1(t).$$

1) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2.$$

4) A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.
5) Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}| \leq C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).
6) Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove

$$\boldsymbol{X} = \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h \,.$$

Soluzione
1) Si ha

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2} |\dot{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{L}}{}_1|^2 = \frac{m}{2} |\dot{s}_1 \boldsymbol{u}_1 + s_1 \alpha \boldsymbol{u}_2|^2 = \frac{m}{2} (\dot{s}_1^2 + \alpha^2 s_1^2) \,.$$

Infatti $\dot{\boldsymbol{u}}_1 = \alpha \boldsymbol{u}_2$, $\dot{\boldsymbol{u}}_2 = -\alpha \boldsymbol{u}_1$.
2) Si ha

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \dot{s} \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Quindi

$$T^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2} \dot{s}^2 \,.$$

3) In $\mathcal{S}$ *agiscono oltre alla* $\boldsymbol{F}$ *anche* $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$. *Poiché il campo di forza di trascinamento è*

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = m\alpha^2 (\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2) \,,$$

si ha

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{T}} = \frac{m\alpha^2}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \,.$$

Resta da considerare la forza di Coriolis. Però siamo in un caso in cui $\ell = 1$ *e i vincoli sono fissi in* $\mathcal{S}$. *Quindi le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono nulle, per un noto risultato teorico.*
Infine,

$$\nabla \Big(-\frac{k}{4} |\boldsymbol{x}|^4 \Big) = -k |\boldsymbol{x}|^3 \, \nabla |\boldsymbol{x}| = -k |\boldsymbol{x}|^3 \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} = -k |\boldsymbol{x}|^2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \,.$$

Pertanto

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = -\frac{k}{4} |\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}|^4 + \frac{m}{2} \alpha^2 (\lambda^{\mathrm{L}}_{1\boldsymbol{X}})^2 = -\frac{k}{4} s^4 + \frac{m}{2} \alpha^2 s^2 \,.$$

4) Poiché in $\mathcal{S}$ *i vincoli sono fissi, le posizioni di equilibrio relativo sono date dal sistema del gradiente*

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}{}'(s) = -ks^3 + m\alpha^2 s = 0 \,.$$

Quindi le posizioni di equilibrio sono

$$s_1 = 0 \,, \qquad s_2 = \sqrt{\frac{m\alpha^2}{k}} \,, \qquad s_3 = -s_2 \,.$$

Si ha la derivata seconda

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}{}''(s) = -3ks^2 + m\alpha^2 \,.$$

Quindi si calcola

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}{}''(s_1) = m\alpha^2 > 0 \,, \qquad U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}{}''(s_2) = U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}{}''(s_3) = -2m\alpha^2 < 0 \,.$$

Perciò s_1 è di equilibrio instabile, e s_2, s_3 sono di equilibrio stabile.
5) In $\mathcal{S}$ i vincoli sono fissi e le forze (che fanno lavoro non nullo) conservative. Quindi si ha per la conservazione dell'energia

$$T^{\text{L}}_{\mathcal{S}} - U^{\text{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2}\dot{s}^2 - U^{\text{L}}_{\mathcal{S}} = E\,,$$

e perciò

$$-U^{\text{L}}_{\mathcal{S}} \le E\,,$$

ossia lungo ciascun moto

$$\frac{k}{4}s^4 - \frac{m}{2}\alpha^2 s^2 \le \text{ costante.}$$

Pertanto s è limitata su ciascun moto.
6) Imponiamo il vincolo su $\boldsymbol{X}$; $\lambda_2 = 0$ equivale a $(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_O)\cdot\boldsymbol{u}_2 = 0$ ossia (essendo $\boldsymbol{X}_O = 0$) a

$$\lambda_2 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h = -z_1\sin(\alpha t) + z_2\cos(\alpha t) = 0\,.$$

Invece $\lambda_3 = 0$ equivale a

$$\lambda_3 = \boldsymbol{u}_3 \cdot \sum_{h=1}^{3} z_h \boldsymbol{e}_h = z_3 = 0\,.$$

R. *1)*

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \alpha^2 s^2)\,.$$

2)

$$T^{\text{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2}\dot{s}^2\,.$$

3)

$$U^{\text{L}}_{\mathcal{S}}(s) = -\frac{k}{4}s^4 + \frac{m}{2}\alpha^2 s^2\,.$$

4) Si ha che s_1 è di equilibrio instabile, e s_2, s_3 sono di equilibrio stabile, ove

$$s_1 = 0\,, \qquad s_2 = \sqrt{\frac{m\alpha^2}{k}}\,, \qquad s_3 = -s_2\,.$$

5) Segue dalla conservazione dell'energia.
6)

$$\begin{aligned} -z_1\sin(\alpha t) + z_2\cos(\alpha t) &= 0\,, \\ z_3 &= 0\,. \end{aligned}$$