MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Nessuna delle altre.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Nessuna delle altre.
b Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\, \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\, \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d

$$
\begin{aligned}
&MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,\\
&\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.
\end{aligned}
$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
c Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
d Nessuna delle altre.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b 0.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Nessuna delle altre.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.

$\boxed{\mathbf{02}}$

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\mathbf{03}}$

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

$\boxed{\mathbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c Nessuna delle altre.
d $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_3$.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

$\boxed{\mathbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Nessuna delle altre.
b La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
c Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a 0.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

[3].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

$\boxed{\textbf{02}}$
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\textbf{03}}$
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

$\boxed{\textbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\, \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\, \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot\varphi \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \sin\theta\cos\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \cos^2\theta$.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot\varphi + MR^2\ddot\varphi\cos^2\theta - 2MR^2\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

c Nessuna delle altre.

d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Nessuna delle altre.

c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

b 0.

c Nessuna delle altre.

d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.

Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:

a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?

a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive

a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\mathbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a Nessuna delle altre.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a Nessuna delle altre.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a Nessuna delle altre.
b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
b La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
c Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
d Nessuna delle altre.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
b 0.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.
01
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Nessuna delle altre.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
02
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d Nessuna delle altre.
03
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
d Nessuna delle altre.
04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
d Nessuna delle altre.
05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4 \,, \qquad x(0) = 2 \,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0 \,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi) \,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a Nessuna delle altre.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d Nessuna delle altre.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a Nessuna delle altre.
b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
b Nessuna delle altre.
c Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Nessuna delle altre.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Nessuna delle altre.
c Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\mathbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.

c Nessuna delle altre.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

$\boxed{\mathbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c Nessuna delle altre.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$\begin{aligned} MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,, \\ \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,. \end{aligned}$$

b

$$\begin{gathered} MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,, \\ \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,. \end{gathered}$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Nessuna delle altre.

b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

c L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Nessuna delle altre.

b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a 0.

b Nessuna delle altre.

c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d Nessuna delle altre.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
d Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\textbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

$\boxed{\textbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a Nessuna delle altre.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.

$\boxed{\textbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$\begin{aligned} MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,, \\ \frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,. \end{aligned}$$

b Nessuna delle altre.
c

$$\begin{aligned} MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,, \\ \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,. \end{aligned}$$

d

$$
\begin{aligned}
MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,\\
\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.
\end{aligned}
$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
c Nessuna delle altre.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b 0.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

[8].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Nessuna delle altre.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Nessuna delle altre.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d

$$
\begin{aligned}
&MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,\\
&\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.
\end{aligned}
$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

c L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

d Nessuna delle altre.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Nessuna delle altre.

b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

b 0.

c Nessuna delle altre.

d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

[9].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d Nessuna delle altre.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
d Nessuna delle altre.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a Nessuna delle altre.
b $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a Nessuna delle altre.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Nessuna delle altre.

b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

c L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Nessuna delle altre.

b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

b Nessuna delle altre.

c 0.

d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Nessuna delle altre.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Nessuna delle altre.
b Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\,\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\,\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot\varphi \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \sin\theta\cos\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot\varphi = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot\varphi + MR^2\ddot\varphi\cos^2\theta = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.
d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b Nessuna delle altre.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Nessuna delle altre.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b 0.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.
01
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Nessuna delle altre.
02
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
03
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Nessuna delle altre.
04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d Nessuna delle altre.
05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle altre.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

$\boxed{\mathbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$\begin{aligned} MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,, \\ \frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,. \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,, \\ \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,. \end{aligned}$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

b Nessuna delle altre.

c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

d Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Nessuna delle altre.

b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a Nessuna delle altre.

b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.
01
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
02
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
03
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle altre.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\, \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\, \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
c Nessuna delle altre.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Nessuna delle altre.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Nessuna delle altre.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a Nessuna delle altre.
b $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.
d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
c Nessuna delle altre.
d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Nessuna delle altre.
b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
b 0.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{02}}$
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

$\boxed{\mathbf{03}}$
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
d Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1\sin(2t) + 4C_2\cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1\sin(2t) + 2C_2\cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1e^{-2t} - 4C_2e^{-4t}$.

$\boxed{\mathbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c Nessuna delle altre.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.

$\boxed{\mathbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR \sin\theta + 2kR^2 \cos\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR \sin\theta + 2kR^2 \sin\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta + MgR \cos\theta - 2kR^2 \cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi} \cos^2\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta + MgR \cos\theta - 2kR^2 \sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.
d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Nessuna delle altre.
b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
b 0.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
b Nessuna delle altre.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Nessuna delle altre.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle altre.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a Nessuna delle altre.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

c Nessuna delle altre.

d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Nessuna delle altre.

b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Nessuna delle altre.

b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

b 0.

c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
d Nessuna delle altre.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
d Nessuna delle altre.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\mathbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.

c $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{07}}$
Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
$\boxed{\textbf{08}}$
Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{09}}$
Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \sin\theta\cos\theta$.
$\boxed{\textbf{10}}$
Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{11}}$
Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
c Nessuna delle altre.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a 0.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

$\boxed{\mathbf{02}}$
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

$\boxed{\mathbf{03}}$
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

$\boxed{\mathbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle altre.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a Nessuna delle altre.
b $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a Nessuna delle altre.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.
d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
b Nessuna delle altre.
c L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
d Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
b 0.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.
01
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Nessuna delle altre.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
02
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d Nessuna delle altre.
03
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso.
L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot\varphi \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \cos^2\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \sin\theta\cos\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot\varphi + MR^2\ddot\varphi\cos^2\theta = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot\varphi = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b Nessuna delle altre.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a 0.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.
01
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Nessuna delle altre.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
02
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
03
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
d Nessuna delle altre.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$
\begin{aligned}
&MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,\\
&\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.
\end{aligned}
$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

c Nessuna delle altre.

d Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Nessuna delle altre.

d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a Nessuna delle altre.

b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso.
L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a Nessuna delle altre.
b $\boldsymbol{v}^{\text{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\text{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\text{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
d Nessuna delle altre.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a Nessuna delle altre.
b $U^{\text{L}} =$ una costante positiva.
c $U^{\text{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d $U^{\text{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Nessuna delle altre.

b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

c Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Nessuna delle altre.

c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Nessuna delle altre.

c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a 0.

b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

c Nessuna delle altre.

d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.
01
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Nessuna delle altre.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
02
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
03
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle altre.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a Nessuna delle altre.
b $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\text{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\text{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\text{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\text{L}} =$ una costante positiva.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\text{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d $U^{\text{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
b Nessuna delle altre.
c Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c 0.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:

a Nessuna delle altre.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Nessuna delle altre.
b P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?

a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
d Nessuna delle altre.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive

a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\,\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\,\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\mathbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta$.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.
d Nessuna delle altre.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2 \sin\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2 \cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
c Nessuna delle altre.
d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d 0.

[23].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Nessuna delle altre.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.

c $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d Nessuna delle altre.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d Nessuna delle altre.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
c Nessuna delle altre.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:

a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

$\boxed{\textbf{02}}$

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Nessuna delle altre.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?

a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

$\boxed{\textbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive

a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle altre.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso.
L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2 \sin\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2 \cos\theta$.
d Nessuna delle altre.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

b Nessuna delle altre.

c Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Nessuna delle altre.

d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Nessuna delle altre.

b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a Nessuna delle altre.

b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
d Nessuna delle altre.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Nessuna delle altre.
b Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1\sin(2t) + 2C_2\cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d $x_1(t) = C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1\sin(2t) + 4C_2\cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4 \,, \qquad x(0) = 2 \,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0 \,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi \, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi) \,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d Nessuna delle altre.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a Nessuna delle altre.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d Nessuna delle altre.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a 0.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

[26].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle altre.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
d Nessuna delle altre.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$
Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
c Nessuna delle altre.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
$\boxed{\mathbf{13}}$
Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
$\boxed{\mathbf{14}}$
Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
$\boxed{\mathbf{15}}$
Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a 0.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Nessuna delle altre.
d Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d Nessuna delle altre.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
d Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\mathbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c Nessuna delle altre.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot\varphi \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \sin\theta\cos\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \cos^2\theta$.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot\varphi + MR^2\ddot\varphi\cos^2\theta = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot\varphi + MR^2\ddot\varphi\cos^2\theta - 2MR^2\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
d Nessuna delle altre.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\textbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

$\boxed{\textbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

$\boxed{\textbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Nessuna delle altre.

b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

c Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Nessuna delle altre.

d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a Nessuna delle altre.

b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Nessuna delle altre.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle altre.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso.
L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a Nessuna delle altre.
b $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.
d

$$\begin{aligned} &MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,, \\ &\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,. \end{aligned}$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
c Nessuna delle altre.
d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Nessuna delle altre.
b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
c 0.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle altre.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a Nessuna delle altre.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
b Nessuna delle altre.
c L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
d Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Nessuna delle altre.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b 0.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

[31].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.
01
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
b Nessuna delle altre.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
02
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
03
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Nessuna delle altre.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1\sin(2t) + 2C_2\cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1\sin(2t) + 4C_2\cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1e^{-2t} - 4C_2e^{-4t}$.
05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a Nessuna delle altre.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta$.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR \sin\theta + 2kR^2 \sin\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR \sin\theta + 2kR^2 \cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a Nessuna delle altre.
b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2 \cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi} \cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos\theta \sin\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2 \sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d Nessuna delle altre.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Nessuna delle altre.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a 0.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
b Nessuna delle altre.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle altre.
d La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c Nessuna delle altre.
d $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.

$\boxed{\mathbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$\begin{aligned} MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,, \\ \frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,. \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,, \\ \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,. \end{aligned}$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
c Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
d Nessuna delle altre.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b 0.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Nessuna delle altre.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Nessuna delle altre.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
c $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso.
L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a Nessuna delle altre.
b $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
d Nessuna delle altre.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

b Nessuna delle altre.

c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

d Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a 0.

b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Nessuna delle altre.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Nessuna delle altre.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a Nessuna delle altre.
b $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d Nessuna delle altre.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a Nessuna delle altre.
b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Nessuna delle altre.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
d Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle altre.
d La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a Nessuna delle altre.
b $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a Nessuna delle altre.
b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot\varphi + MR^2\ddot\varphi\cos^2\theta = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
c Nessuna delle altre.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b 0.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot\varphi + MR^2\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

[36].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Nessuna delle altre.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Nessuna delle altre.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4 \,, \qquad x(0) = 2 \,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0 \,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi) \,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

c L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

d Nessuna delle altre.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Nessuna delle altre.

d Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Nessuna delle altre.

b Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

b 0.

c Nessuna delle altre.

d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Nessuna delle altre.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
d Nessuna delle altre.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c Nessuna delle altre.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\textbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\textbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.

$\boxed{\textbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

$\boxed{\textbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c Nessuna delle altre.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.

$\boxed{\textbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Nessuna delle altre.
b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Nessuna delle altre.
b Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Nessuna delle altre.
c Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
d Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
d Nessuna delle altre.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4 \,, \qquad x(0) = 2 \,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0 \,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi \, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi) \,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\textbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot\varphi \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \sin\theta\cos\theta$.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \cos^2\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \cos^2\theta$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot\varphi = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot\varphi + MR^2\ddot\varphi\cos^2\theta = 0\,.$$

c

$$
\begin{aligned}
&MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,\\
&\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.
\end{aligned}
$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

c Nessuna delle altre.

d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Nessuna delle altre.

c Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

b Nessuna delle altre.

c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{02}}$
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

$\boxed{\mathbf{03}}$
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Nessuna delle altre.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1\sin(2t) + 2C_2\cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1\sin(2t) + 4C_2\cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1e^{-2t} - 4C_2e^{-4t}$.

$\boxed{\mathbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

$\boxed{\mathbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a Nessuna delle altre.
b

$$\begin{aligned} MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta &= 0\,, \\ \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta &= 0\,. \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta &= 0\,, \\ \frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} &= 0\,. \end{aligned}$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
c Nessuna delle altre.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a 0.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Nessuna delle altre.
d Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d Nessuna delle altre.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
d Nessuna delle altre.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a Nessuna delle altre.
b $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d Nessuna delle altre.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Nessuna delle altre.
b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c 0.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
d Nessuna delle altre.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
b Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
d Nessuna delle altre.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso.
L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\mathbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d Nessuna delle altre.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
b La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
c Nessuna delle altre.
d Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c 0.
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{02}}$
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{03}}$
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Nessuna delle altre.
b Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

$\boxed{\mathbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso.
L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\mathbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.

c $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d Nessuna delle altre.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.
d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12
Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
c Nessuna delle altre.
d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
13
Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Nessuna delle altre.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
14
Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
15
Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Nessuna delle altre.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
b Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a Nessuna delle altre.
b $\boldsymbol{v}^{\text{L}} = -R\dot{\varphi} \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\text{L}} = +R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\text{L}} = -R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\text{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\text{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d $U^{\text{L}} =$ una costante positiva.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

b La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

c Nessuna delle altre.

d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Nessuna delle altre.

c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Nessuna delle altre.

c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

c Nessuna delle altre.

d 0.

[44].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Nessuna delle altre.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Nessuna delle altre.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c Nessuna delle altre.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a Nessuna delle altre.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta$.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.

$\boxed{\mathbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR \sin\theta + 2kR^2 \cos\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c Nessuna delle altre.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR \sin\theta + 2kR^2 \sin\theta$.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta + MgR \cos\theta - 2kR^2 \sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta + MgR \cos\theta - 2kR^2 \cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi} \cos^2\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

12
Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d Nessuna delle altre.
13
Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.
14
Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
15
Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a 0.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Nessuna delle altre.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
c $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d Nessuna delle altre.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a Nessuna delle altre.
b

$$
\begin{aligned}
MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,\\
\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.
\end{aligned}
$$

c

$$
\begin{aligned}
MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,\\
\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.
\end{aligned}
$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b Nessuna delle altre.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a 0.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:

a Nessuna delle altre.

b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.

c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

b Nessuna delle altre.

c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

d P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?

a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

b Nessuna delle altre.

c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.

d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive

a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

c $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c Nessuna delle altre.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

b Nessuna delle altre.

c L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

d Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Nessuna delle altre.

b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Nessuna delle altre.

b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

b 0.

c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Nessuna delle altre.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

$\boxed{\textbf{02}}$
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

$\boxed{\textbf{03}}$
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Nessuna delle altre.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

$\boxed{\textbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.

$\boxed{\textbf{06}}$

Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d Nessuna delle altre.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a Nessuna delle altre.
b

$$\begin{aligned} MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,, \\ \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,. \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,, \\ \frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,. \end{aligned}$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Nessuna delle altre.
b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Nessuna delle altre.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.

$\boxed{\textbf{06}}$

Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c Nessuna delle altre.
d $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\textbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\textbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.

$\boxed{\textbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a Nessuna delle altre.
b

$$\begin{aligned} MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta &= 0\,,\\ \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta &= 0\,. \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta &= 0\,,\\ \frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} &= 0\,. \end{aligned}$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Nessuna delle altre.

b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

d Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Nessuna delle altre.

d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

b Nessuna delle altre.

c 0.

d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{02}}$

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
c $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso.
L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
d Nessuna delle altre.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d Nessuna delle altre.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Nessuna delle altre.
b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a 0.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:

a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
d Nessuna delle altre.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?

a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive

a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\mathbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c Nessuna delle altre.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a Nessuna delle altre.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a Nessuna delle altre.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR \sin\theta + 2kR^2 \cos\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR \sin\theta + 2kR^2 \sin\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta + MgR \cos\theta - 2kR^2 \sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta + MgR \cos\theta + 2kR^2 \cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi} \cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos\theta \sin\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Nessuna delle altre.
b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b 0.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1\sin(2t) + 4C_2\cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1e^{-2t} - 4C_2e^{-4t}$.
d $x_1(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1\sin(2t) + 2C_2\cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle altre.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR \sin\theta + 2kR^2 \sin\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c Nessuna delle altre.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR \sin\theta + 2kR^2 \cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta + MgR \cos\theta - 2kR^2 \cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi} \cos^2\theta = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta + MgR \cos\theta + 2kR^2 \cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi} \cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos\theta \sin\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Nessuna delle altre.

b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

c L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Nessuna delle altre.

b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Nessuna delle altre.

c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a Nessuna delle altre.

b 0.

c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

$\boxed{\textbf{02}}$
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\textbf{03}}$
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Nessuna delle altre.
b Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

$\boxed{\textbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
c $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c Nessuna delle altre.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi\sin\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta\sin\theta\boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot\varphi\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot\theta\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi\cos^2\theta$.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi\sin\theta\cos\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a Nessuna delle altre.
b

$$MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot\varphi + MR^2\ddot\varphi\cos^2\theta - 2MR^2\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot\varphi + MR^2\ddot\varphi\cos^2\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
b Nessuna delle altre.
c L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
d Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c 0.
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{02}}$
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{03}}$
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
c $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

$\boxed{\mathbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso.
L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a Nessuna delle altre.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d Nessuna delle altre.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a Nessuna delle altre.
b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
b Nessuna delle altre.
c L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
d Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Nessuna delle altre.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1\sin(2t) + 2C_2\cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1\sin(2t) + 4C_2\cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1e^{-2t} - 4C_2e^{-4t}$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4 \,, \qquad x(0) = 2 \,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0 \,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi) \,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c Nessuna delle altre.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

c

$$
\begin{aligned}
&MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,\\
&\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.
\end{aligned}
$$

d Nessuna delle altre.

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

b Nessuna delle altre.

c Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Nessuna delle altre.

c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Nessuna delle altre.

c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a Nessuna delle altre.

b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

$\boxed{\textbf{02}}$
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\textbf{03}}$
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

$\boxed{\textbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle altre.
d La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi} \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta} \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta} \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a Nessuna delle altre.
b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot\varphi + MR^2\ddot\varphi\cos^2\theta - 2MR^2\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Nessuna delle altre.

b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Nessuna delle altre.

b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

b 0.

c Nessuna delle altre.

d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot\varphi + MR^2\cos^2\theta$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Nessuna delle altre.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4 , \qquad x(0) = 2 , \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0 .$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 , \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi) .$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d Nessuna delle altre.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
b La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
c Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
d Nessuna delle altre.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Nessuna delle altre.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
b 0.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale +2 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Nessuna delle altre.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Nessuna delle altre.

b La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

c L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

d Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Nessuna delle altre.

d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c Nessuna delle altre.

d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.

Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:

a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
d Nessuna delle altre.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?

a Nessuna delle altre.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive

a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a Nessuna delle altre.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

$\boxed{\mathbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a Nessuna delle altre.
b

$$
\begin{aligned}
MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,, \\
\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.
\end{aligned}
$$

c

$$
\begin{aligned}
MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,, \\
\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.
\end{aligned}
$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
c Nessuna delle altre.
d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Nessuna delle altre.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
b 0.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Nessuna delle altre.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.

$\boxed{\mathbf{02}}$

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

$\boxed{\mathbf{03}}$

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1\sin(2t) + 2C_2\cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1e^{-2t} - 4C_2e^{-4t}$.
d $x_1(t) = C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1\sin(2t) + 4C_2\cos(2t)$.

$\boxed{\mathbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\mathbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot\varphi\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot\theta\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi\sin\theta\cos\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot\varphi + MR^2\ddot\varphi\cos^2\theta = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot\varphi = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
b Nessuna delle altre.
c Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c 0.
d Nessuna delle altre.

[60].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

$\boxed{\textbf{02}}$
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\textbf{03}}$
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

$\boxed{\textbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
c $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle altre.
d La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a Nessuna delle altre.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a Nessuna delle altre.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Nessuna delle altre.

d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

b Nessuna delle altre.

c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.
01
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Nessuna delle altre.
02
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Nessuna delle altre.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
03
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Nessuna delle altre.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
d Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso.
L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\mathbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b Nessuna delle altre.
c L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Nessuna delle altre.
b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
b Nessuna delle altre.
c 0.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

[62].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Nessuna delle altre.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4 \,, \qquad x(0) = 2 \,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0 \,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso.
L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi) \,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_3$.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a Nessuna delle altre.
b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Nessuna delle altre.
b La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
c Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Nessuna delle altre.
b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a 0.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{02}}$
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

$\boxed{\mathbf{03}}$
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

$\boxed{\mathbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.

c Nessuna delle altre.
d $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Nessuna delle altre.

b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

d Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Nessuna delle altre.

b Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Nessuna delle altre.

b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

c Nessuna delle altre.

d 0.

[64].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Nessuna delle altre.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

$\boxed{\mathbf{02}}$
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{03}}$
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1\sin(2t) + 2C_2\cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1e^{-2t} - 4C_2e^{-4t}$.
d $x_1(t) = C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1\sin(2t) + 4C_2\cos(2t)$.

$\boxed{\mathbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

b La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

c Nessuna delle altre.

d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Nessuna delle altre.

c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a 0.

b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

c Nessuna delle altre.

d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

[65].0

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Nessuna delle altre.
b Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
c Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
d Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.

$\boxed{\mathbf{02}}$
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\mathbf{03}}$
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

$\boxed{\mathbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.

c Nessuna delle altre.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a Nessuna delle altre.
b $\boldsymbol{v}^{\text{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\text{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\text{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

$\boxed{\mathbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\text{L}} =$ una costante positiva.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\text{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d $U^{\text{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

c Nessuna delle altre.

d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

$\boxed{\textbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Nessuna delle altre.

d Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\textbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a Nessuna delle altre.

b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\textbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a 0.

b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:

a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

$\boxed{\textbf{02}}$

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{03}}$

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?

a Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive

a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
b Nessuna delle altre.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c Nessuna delle altre.
d $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
c Nessuna delle altre.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
c Nessuna delle altre.
d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

$\boxed{\mathbf{15}}$

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b 0.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Nessuna delle altre.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b Nessuna delle altre.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso.
L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a Nessuna delle altre.
b $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Nessuna delle altre.

b Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

c L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

d Nessuna delle altre.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

b Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

c Nessuna delle altre.

d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

c 0.

d Nessuna delle altre.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
b Nessuna delle altre.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

$\boxed{\textbf{02}}$
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

$\boxed{\textbf{03}}$
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a Nessuna delle altre.
b $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
c $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
d $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle altre.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso.
L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\,\boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta\,\boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b Nessuna delle altre.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot\varphi \sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c Nessuna delle altre.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot\varphi \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot\theta \sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta \cos\theta \boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \cos^2\theta$.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi \sin\theta\cos\theta$.
d Nessuna delle altre.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d Nessuna delle altre.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$\begin{aligned} MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,, \\ \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot\varphi + MR^2\ddot\varphi\cos^2\theta - 2MR^2\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\sin\theta = 0\,. \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} MR^2\ddot\theta + MR^2\dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,, \\ \frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot\varphi = 0\,. \end{aligned}$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
c L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
d Nessuna delle altre.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
d 0.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo

Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:

a Nessuna delle altre.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
b Nessuna delle altre.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?

a Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
b Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
c Nessuna delle altre.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive

a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta \boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
d Nessuna delle altre.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
b Nessuna delle altre.
c $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
c Nessuna delle altre.
d La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b Nessuna delle altre.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Nessuna delle altre.
d Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a 0.
b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
c Nessuna delle altre.
d $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

proff. Daniele Andreucci, Adriano Barra, Emilio Cirillo
Prova scritta del 19/06/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili).
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).
Risposte: Al candidato è richiesto di indicare la risposta a tutte le 15 domande proposte. Ciascuna risposta esatta vale $+2$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna.
Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle. Usate una penna per scrivere le risposte: le risposte scritte a matita sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

1.
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
b Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
c Nessuna delle altre.
d Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c Nessuna delle altre.
d P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
b Nessuna delle altre.
c Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
d Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c Nessuna delle altre.
d $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a Nessuna delle altre.
b La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
d La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

2.
Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{06}}$
Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.
a Nessuna delle altre.
b $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.
a $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
b $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_3$.
b Nessuna delle altre.
c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
d $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
d $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a Nessuna delle altre.
b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
c $U^{\mathrm{L}} =$ una costante positiva.
d $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

b Nessuna delle altre.
c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

d

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
b Nessuna delle altre.
c Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
d L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Nessuna delle altre.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.
b 0.
c $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
d Nessuna delle altre.