

Modelli Matematici per la Meccanica**Ing. Aerospaziale**

PROFF. DANIELE ANDREUCCI, ADRIANO BARRA, EMILIO CIRILLO

Prova scritta del 19/06/2025

1.

Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\mathbf{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\mathbf{R}^2$.

01

Se l'energia fornita al sistema è E , allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E :

a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.

b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.

c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.

d Nessuna delle altre.

02

Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.

c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.

d Nessuna delle altre.

03

Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?

a Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.

b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.

c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.

d Nessuna delle altre.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1 : chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive

a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.

b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.

c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.

d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = v_0 > 0.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?

a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \rightarrow +\infty$.

b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \rightarrow +\infty$.

c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \rightarrow +\infty$.

d Nessuna delle altre.

SOLUZIONE

I: a

Studiamo l'energia potenziale. Si ha

$$V'(x) = (x-1)(4x^2 + x - 1),$$

che si annulla nei punti di equilibrio

$$x_{\text{eq}}^1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{8}, \quad x_{\text{eq}}^2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8}, \quad x_{\text{eq}}^3 = 1.$$

Studiando il segno di V' (mediante il solito studio del segno del trinomio di secondo grado) si ottiene che x_{eq}^1 e x_{eq}^3 sono minimi isolati e x_{eq}^2 è un massimo isolato. Infatti la V' risulta negativa in $(-\infty, x_{\text{eq}}^1)$ e in $(x_{\text{eq}}^2, x_{\text{eq}}^3)$, mentre è positiva in $(x_{\text{eq}}^1, x_{\text{eq}}^2)$ e in $(x_{\text{eq}}^3, +\infty)$. Si ha inoltre

$$V(x_{\text{eq}}^1) < V(0) = 1 = V(x_{\text{eq}}^3) < V(x_{\text{eq}}^2).$$

Dunque si hanno 2 orbite chiuse se $E \in (1, V(x_{\text{eq}}^2))$ e 1 orbita se $E \in (V(x_{\text{eq}}^1), 1)$.

II: a

Il sistema dinamico del primo ordine equivalente all'equazione differenziale

$$\ddot{x} = F(x) = -V'(x) = (1-x)(4x^2 + x - 1)$$

si legge

$$\dot{x}_1 = x_2 =: f_1(x_1, x_2),$$

$$\dot{x}_2 = (1-x_1)(4x_1^2 + x_1 - 1) =: f_2(x_1, x_2),$$

da cui subito si vede che il punto di equilibrio P_1 rappresenta un centro: questo perché $x_1 = 1$ corrisponde ad una posizione di minimo (locale) dell'energia potenziale, come dimostrato sopra. Quindi l'energia meccanica totale è un integrale primo e

funge anche da funzione di Liapunov. Per rispettare i tre requisiti del teorema di Liapunov serve che la funzione di Liapunov valga zero in P_1 : siccome l'energia potenziale $V(1) = 1$ mentre l'energia cinetica è nulla (i.e., $K(P_1) = 0$), basta riscalare l'energia meccanica $E \rightarrow \tilde{E} = K + V - 1$ in maniera tale che $\tilde{E}(P_1) = 0$ ed usare $\tilde{E}$ come funzione di Liapunov. Sarebbe sbagliato dire che P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato (che studiamo sotto) sono immaginari: il teorema di stabilità lineare in questo scenario non si può usare.

III: a

Se il sistema ha come dato iniziale $x_1 = 1$ ed $x_2 = v_0$ il sistema parte dal minimo locale $x_1 = 1 = x_{\text{eq}}^3$ dell'energia potenziale. A prescindere dalla direzione del vettore velocità (il sistema è conservativo), se $|v_0|$ è tale che l'energia cinetica soddisfi

$$K(t=0) = (V(x_{\text{eq}}^2) - V(x_{\text{eq}}^3)) ,$$

ossia sia uguale alla differenza di potenziale tra il minimo x_{eq}^3 ed il massimo x_{eq}^2 , l'orbita raggiunge $x_{\text{eq}}^2 > 0$ in un tempo infinito. Se invece il moto passa in $x_1 < 0$, corrisponde a un'orbita chiusa quindi è periodico.

IV: a

La matrice A delle derivate parziali calcolate in P_1 è data da

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} f_1(1,0) &= 0, & \partial_{x_2} f_1(1,0) &= 1, \\ \partial_{x_1} f_2(1,0) &= -V''(1) = -4, & \partial_{x_2} f_2(1,0) &= 0, \end{aligned}$$

ossia da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

La usiamo per scrivere il sistema dinamico linearizzato esplicitamente: questo si legge in forma vettoriale come

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}|_{P_1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{P_1}) = A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{P_1}) ,$$

cioè

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2, \\ \dot{x}_2(t) &= -4(x_1 - 1). \end{aligned}$$

Le due equazioni qui sopra definiscono un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine accoppiate, con una forzante costante, il cui integrale generale si compone della somma della soluzione dell'omogenea associata e di una soluzione particolare che tenga conto della forzante.

Procediamo all'identificazione della soluzione dell'omogenea associata: si tratta di un oscillatore armonico. Diagonalizzando la matrice A , possiamo trovare gli autovettori relativi ai due autovalori (ne basterà uno solo perché saranno complessi e coniugati) $\lambda_1 = +i2$ e $\lambda_2 = -i2$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{Q} := (Q_x, Q_y)$ associato a λ_1 . Risolvere $[A - \lambda_1 I]\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ vuol dire, esplicitamente, risolvere

$$\begin{pmatrix} -i2 & 1 \\ -4 & -i2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} -i2Q_x + Q_y &= 0, \\ -2Q_x - iQ_y &= 0, \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ i2 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_1 + i\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

dove abbiamo chiamato $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$ la parte reale e la parte immaginaria di $\mathbf{Q}$. Possiamo quindi scrivere una prima parte dell'integrale generale, cioè la soluzione dell'omogenea associata, come

$$\begin{pmatrix} x_1^{OA}(t) \\ x_2^{OA}(t) \end{pmatrix} = C_1 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \sin(2t) \right] + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos(2t) \right],$$

che in termini di incognite scalari si legge

$$\begin{aligned} x_1^{OA}(t) &= C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t), \\ x_2^{OA}(t) &= -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t), \end{aligned}$$

e dove l'apice OA sta per omogenea associata. Essendo la forzante costante, una soluzione particolare va cercata nello spazio delle costanti, cioè, introdotte due costanti $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, assumendo che

$$\begin{aligned} x_1^{SP}(t) &= \alpha, \\ x_2^{SP}(t) &= \beta, \end{aligned}$$

dove l'apice SP significa soluzione particolare, e imponendo che la soluzione rispetti il sistema, vale a dire

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^{SP}(t) &= 0 = x_2 \Rightarrow \beta = 0, \\ \dot{x}_2^{SP}(t) &= 0 = -4(\alpha - 1) \Rightarrow \alpha = 1, \end{aligned}$$

si trovano i valori numerici di α e β . Quindi, unendo le due soluzioni, si ha

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1, \\ x_2(t) &= -2C_1 \sin(4t) + 2C_2 \cos(4t), \end{aligned}$$

che è l'espressione esplicita dell'integrale generale.

V: a

Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è chiaramente $x^{SP}(t) = 1$. Per trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea, risolviamo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$

che ha le due radici coincidenti $\lambda = -2$. Dunque l'integrale generale dell'equazione completa non omogenea è

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + 1.$$

Imponendo i dati di Cauchy si ottiene il sistema

$$C_1 + 1 = 2, \quad -2C_1 + C_2 = v_0,$$

da cui l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$x(t) = e^{-2t}[1 + (v_0 + 2)t] + 1.$$

Derivando si ottiene

$$\dot{x}(t) = e^{-2t}[v_0 - 2(v_0 + 2)t].$$

Dunque risulta: $\dot{x}(t) > 0$ per $t < t_0$; $\dot{x}(t_0) = 0$; $\dot{x}(t) < 0$ per $t > t_0$, ove $t_0 := v_0/(2v_0+4) > 0$. Perciò vale a, anche perché dall'espressione esplicita della soluzione si ottiene $x(t) \rightarrow 1$ per $t \rightarrow +\infty$.

2.

Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\mathbf{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\mathbf{X}_O, (\mathbf{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.

Il sistema di riferimento fisso $(\mathbf{X}_O, (\mathbf{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\mathbf{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2-3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.

La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\mathbf{F} = -k(\mathbf{X} - \mathbf{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\mathbf{X}_B = -2R\mathbf{e}_3$, applicata all'elemento $\mathbf{X}$.

Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{u}_2 &= -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{X}^L(\varphi, \theta) = R \cos \theta \mathbf{u}_2(\varphi) + R \sin \theta \mathbf{u}_3(\varphi).$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.

06

Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.

a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2.$

b $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2.$

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2.$

d Nessuna delle altre.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.

a Nessuna delle altre.

b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.

d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\mathbf{X}$.

a $\mathbf{v}^L = -R\dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{u}_1 - R\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{u}_2 + R\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{u}_3$.

b $\mathbf{v}^L = +R\dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{u}_1 + R\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{u}_2 + R\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{u}_3$.

c $\mathbf{v}^L = -R\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{u}_1 - R\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{u}_2 + R\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{u}_3$.

d Nessuna delle altre.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.

a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2 \theta$.

b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)}MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \cos^2 \theta$.

c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta$.

d Nessuna delle altre.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.

a Nessuna delle altre.

b $U^L = -MgR \sin \theta + 2kR^2 \sin \theta$.

c $U^L = -MgR \sin \theta + 2kR^2 \cos \theta$.

d $U^L =$ una costante positiva.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.

a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + MgR \cos \theta + 2kR^2 \cos \theta = 0,$$

$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi} \cos^2 \theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta = 0.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + MgR \cos \theta - 2kR^2 \cos \theta = 0,$$

$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi} \cos^2 \theta = 0.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + MgR \cos \theta - 2kR^2 \sin \theta = 0,$$

$$\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0.$$

d Nessuna delle altre.

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.

b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.

c La componente relativa a $\mathbf{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.

d Nessuna delle altre.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.

a Nessuna delle altre.

b Due qualunque sia il valore dei parametri M , R e k .

c Tre qualunque sia il valore dei parametri M , R e k .

d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M , R e k .

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.

a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M , R e k .

b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M , R e k .

c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M , R e k .

d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\mathbf{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicita dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.

a 0.

b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.

c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2$.

d Nessuna delle altre.

SOLUZIONE

I: a

Il corpo occupa il volume $8R^3 - 4\pi R^3/3$ e, pertanto ha densità $\sigma = M/(8R^3 - 4\pi R^3/3)$. Si considera il cubo pieno di massa $\sigma 8R^3$ e il corpo fittizio di forma sferica con massa negativa $-\sigma 4\pi R^3/3$. Allora, ricordando le espressioni del momento d'inerzia centrale di un corpo omogeneo cubico e di una sfera omogenea, si ha

$$I_{33} = \frac{1}{6}\sigma 8R^3(2R)^2 + \frac{2}{5}(-\sigma)\frac{4}{3}\pi R^3 R^2 = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2.$$

Infatti per un cubo K di spigolo $2R$ e densità $\sigma > 0$ costante si ha

$$\begin{aligned} I_{33}^K &= \int_{-R}^R \int_{[-R,R] \times [-R,R]} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sigma \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 \, d\lambda_3 = 2R\sigma \left(2 \int_{[-R,R] \times [-R,R]} \lambda_1^2 \, d\lambda_1 \right) \\ &= 4R\sigma \left(2R \frac{2}{3} R^3 \right) = \frac{16}{3} \sigma R^5, \end{aligned}$$

e per una sfera S di raggio R , per simmetria,

$$\begin{aligned} I_{33}^S &= \iiint_S (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sigma \, d\lambda = \frac{2}{3} \sigma \iiint_S |\lambda|^2 \, d\lambda \\ &= \frac{2}{3} \sigma \left(2\pi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^R r^4 \, dr \right) = \frac{8}{3} \pi \sigma \frac{R^5}{5}. \end{aligned}$$

II: a

Il centro di massa coincide con il centro geometrico. Il corpo ha simmetria sferica rispetto al centro di massa, quindi tutti i momenti d'inerzia relativi a assi passanti per il centro di massa sono uguali.

III: a

Ricordando l'espressione di $\mathbf{X}^\perp(\varphi, \theta)$, le formule di Poisson, usando che $\mathbf{u}_3$ è costante e che la velocità angolare del corpo C vale $\dot{\varphi} \mathbf{u}_3$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^\perp &= -R\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{u}_2 + R \cos \theta \dot{\varphi} \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_2 + R\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{u}_3 \\ &= -R\dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{u}_1 - R\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{u}_2 + R\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{u}_3. \end{aligned}$$

IV: a

Per quanto riguarda il corpo C : la matrice d'inerzia è diagonale (addirittura proporzionale all'identità) e la velocità angolare ha la sola componente 3 relativa al riferimento solidale non nulla e uguale a $\dot{\varphi}$. Allora il momento angolare del corpo vale $I_{33} \dot{\varphi} \mathbf{u}_3$. Per l'elemento $\mathbf{X}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \times (M \mathbf{v}^\perp) &= (R \cos \theta \mathbf{u}_2 + R \sin \theta \mathbf{u}_3) \times M(-R\dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{u}_1 - R\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{u}_2 + R\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{u}_3) \\ &= MR^2 \dot{\varphi} \cos^2 \theta \mathbf{u}_3 + MR^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta \mathbf{u}_1 - MR^2 \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \mathbf{u}_2 \\ &\quad + MR^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta \mathbf{u}_1 \\ &= MR^2 \dot{\theta} \mathbf{u}_1 - MR^2 \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \mathbf{u}_2 + MR^2 \dot{\varphi} \cos^2 \theta \mathbf{u}_3. \end{aligned}$$

Sommando i due contributi si ottiene

$$\mathbf{L}_O \cdot \mathbf{u}_3 = \frac{2(10 - \pi)}{5(6 - \pi)} MR^2 \dot{\varphi} + MR^2 \dot{\varphi} \cos^2 \theta.$$

V: a

Per quanto riguarda il peso: il centro di massa del corpo ha quota costante, mentre la coordinata 3 relativa al riferimento fisso dell'elemento è $R \sin \theta$. Pertanto il potenziale lagrangiano del peso è $-MgR \sin \theta$. Per quanto riguarda la forza elastica: il potenziale conservativo è $-k|\mathbf{X} - \mathbf{X}_B|^2/2$, pertanto si calcola

$$\mathbf{X} - \mathbf{X}_B = \mathbf{X} - \mathbf{X}_O + \mathbf{X}_O - \mathbf{X}_B = 2R\mathbf{u}_3 + R \cos \theta \mathbf{u}_2 + R \sin \theta \mathbf{u}_3 = R \cos \theta \mathbf{u}_2 + (2R + R \sin \theta) \mathbf{u}_3,$$

e quindi $|\mathbf{X} - \mathbf{X}_B|^2 = R^2 + 4R^2 + 4R^2 \sin \theta$. Da cui segue che $U^\perp(\varphi, \theta) = -MgR \sin \theta - 2kR^2 \sin \theta$.

VI: a

Il moto del corpo rigido è rotatorio attorno all'asse 3, quindi l'energia cinetica del sistema si scrive

$$T^\perp = \frac{I_{33}}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M |\mathbf{v}^\perp|^2 = \frac{1}{2} \frac{2(10 - \pi)}{5(6 - \pi)} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} MR^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta).$$

La sollecitazione attiva è tutta conservativa, quindi si considera la funzione lagrangiana $\mathcal{L} = T^\perp + U^\perp$ che vale

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{2(10 - \pi)}{5(6 - \pi)} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} MR^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) - MgR \sin \theta - 2kR^2 \sin \theta.$$

Si calcola, quindi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= MR^2 \dot{\theta}, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -MR^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - MgR \cos \theta - 2kR^2 \cos \theta, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{2(10 - \pi)}{5(6 - \pi)} \dot{\varphi} + MR^2 \dot{\varphi} \cos^2 \theta, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Derivando rispetto al tempo, si trovano le equazioni di Lagrange:

$$MR^2 \ddot{\theta} + MR^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + MgR \cos \theta + 2kR^2 \cos \theta = 0,$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{2(10 - \pi)}{5(6 - \pi)} \dot{\varphi} + MR^2 \dot{\varphi} \cos^2 \theta \right) = 0.$$

In modo più esplicito la seconda diventa

$$\frac{2(10 - \pi)}{5(6 - \pi)} MR^2 \ddot{\varphi} + MR^2 \ddot{\varphi} \cos^2 \theta - 2MR^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta = 0.$$

VII: a

L'energia meccanica si conserva perché i vincoli sono fissi e perfetti e la sollecitazione è tutta conservativa. Dalla seconda equazione di Lagrange si ha che si conserva il momento coniugato relativo alla variabile φ , che è ciclica; dal risultato della domanda IV, si ha che questo coincide con la terza componente del momento angolare.

VIII: a

Si ha che il sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^\perp}{\partial \varphi} &= 0 = 0, \\ \frac{\partial U^\perp}{\partial \theta} &= -(MgR + 2kR^2) \cos \theta = 0, \end{aligned}$$

ha le infinite soluzioni $(\bar{\varphi}, \pi/2)$ e $(\bar{\varphi}, 3\pi/2)$, con $\bar{\varphi}$ arbitraria, che sono tutte configurazioni di equilibrio.

IX: a

Per discutere la stabilità non si possono usare le condizioni sufficienti di Dirichlet e Liapunov, da momento che il determinante hessiano è identicamente nullo. D'altro

canto, presa una qualsiasi configurazione di equilibrio $(\bar{\varphi}, \pi/2)$, si considera il moto con dato iniziale $\varphi(0) = \bar{\varphi}$, $\theta(0) = 3\pi/2$, $\dot{\varphi}(0) = \alpha$, $\dot{\theta}(0) = 0$, con $\alpha > 0$ arbitrario. Dalle equazioni di Lagrange segue che il moto lagrangiano è $(\varphi(t), \theta(t)) = (\alpha t + \bar{\varphi}, 3\pi/2)$ per ogni $t > 0$, e quindi si ha che la configurazione di equilibrio è instabile. X: a

È immediato osservare che sia il peso sia la forza elastica hanno momento perpendicolare all'asse 3. Inoltre, la componente 3 del momento angolare del sistema è costante, pertanto, dalla seconda equazione cardinale, segue che la terza componente del momento totale della sollecitazione vincolare è nulla.