Meccanica Razionale

Esercizi di esame e di controllo

Versione senza risoluzioni

Daniele Andreucci
Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Università di Roma La Sapienza
via A.Scarpa 16, 00161 Roma
daniele.andreucci@sbai.uniroma1.it

launch_daexam 20250829 13.33

Note:

- Gli esami del corso di Modelli Matematici per la Meccanica, Laurea in Ingegneria Aerospaziale, sono stati elaborati in collaborazione con il prof. Emilio N.M. Cirillo, codocente del corso.
- *Salvo diverso avviso:*
  - coni e cilindri sono circolari retti;
  - i corpi rigidi sono omogenei;
  - si assume l'ipotesi dei lavori virtuali.

Domande con risposta S/N assegnate al corso di Modelli Matematici per la Meccanica Ingegneria Aerospaziale.

.1 Un elemento materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = a(x^2 + y^2) + b\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Il vincolo è scabro, con reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ tale che, indicando con $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}$ e $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}$ le sue componenti rispettivamente tangente e normale alla superficie, si abbia l'unica restrizione

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \le \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante, almeno se l'elemento materiale ha velocità nulla.
Su P agisce il peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
1) L'insieme delle coordinate (x, y) in cui è possibile l'equilibrio dipende da b.
2) Per a e b fissati, esiste $R > 0$ tale che se $x^2 + y^2 > R^2$ non si ha equilibrio.
3) L'insieme delle posizioni in cui si ha equilibrio cambia se il peso diviene $+mg\boldsymbol{e}_3$, ossia inverte il verso.

.2 Un punto materiale P di massa m si muove soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = -k(e^{yz}\boldsymbol{e}_1 + xze^{yz}\boldsymbol{e}_2 + xye^{yz}\boldsymbol{e}_3)\,, \qquad (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
4) Il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ su un moto che compie una traiettoria chiusa è nullo.
5) Esistono moti che rimangono nell'ottante $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, su cui $x(t)$ diviene illimitata.
6) Con le opportune condizioni iniziali, il moto di P è la quiete.

.3 Due punti materiali P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 sono così vincolati:
P_1 appartiene alla circonferenza di centro l'origine O e raggio R nel piano $z = 0$.
P_2 appartiene alla circonferenza di centro P_1 e raggio R nel piano $z = 0$.
Su P_2 agisce la forza elastica

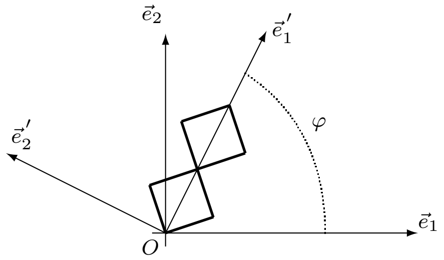
$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP_2}\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano le coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ come segue:

$$\overrightarrow{OP_1} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{P_1P_2} = R\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{e}_2\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
7) L'energia cinetica del sistema si annulla quando $\dot{\varphi} = \dot{\theta}$.
8) In tutte le posizioni di equilibrio vale $\varphi = \theta$.
9) La reazione vincolare esercitata dai vincoli su P_2 è parallela a $\overrightarrow{P_2P_1}$.

.4 Una lamina rigida è stata ottenuta saldando, come illustrato in figura, due lamine quadrate omogenee entrambe di massa $M/2$ e lato L. Il corpo è vincolato mediante una cerniera ideale con asse orizzontale fisso rispetto all'osservatore terrestre. Oltre al peso, sul corpo agisce la forza costante $\lambda\vec{e}_1$, con $\lambda > 0$, applicata al centro di massa della lamina.



Il riferimento terrestre $\{O, \vec{e}_i\}$ ha asse 3 coincidente con quello della cerniera e asse 2 verticale ascendente. Il riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ ha asse 3 coincidente con quello della cerniera e piano 1–2 coincidente con quello della lamina. Il moto del corpo rispetto al riferimento terrestre viene descritto usando la coordinata lagrangiana φ indicata in figura.
10) La matrice d'inerzia relativa al riferimento solidale considerato è

$$\begin{pmatrix} ML^2/12 & 0 & 0 \\ 0 & 31ML^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 8ML^2/3 \end{pmatrix}.$$

11) L'equazione pura del moto è

$$\frac{8}{3}ML^2\ddot{\varphi} = -\sqrt{2}MgL\cos\varphi - \sqrt{2}\lambda L\sin\varphi\,.$$

12) Se il corpo viene posto all'istante iniziale nella configurazione $\varphi = 0$ con atto di moto nullo, la somma della sollecitazione vincolare all'istante iniziale vale $-\lambda\vec{e}_1 + Mg\vec{e}_2$.

.5 Si consideri la seguente energia cinetica in forma lagrangiana, relativa a un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi regolari, con 2 gradi di libertà e $(\varphi, \theta) \in \boldsymbol{R}^2$ coordinate lagrangiane:

$$T^{\mathrm{L}} = a(\varphi,\theta)\dot{\varphi}^2 + b(\varphi,\theta)\dot{\varphi}\dot{\theta} + c(\varphi,\theta)\dot{\theta}^2 + f(\varphi,\theta)\dot{\theta} + g(\varphi,\theta)\,,$$

con a, b, c, f, g funzioni non identicamente nulle.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

13) I vincoli possono essere fissi, ossia indipendenti dal tempo.
14) Le funzioni a, b, c devono soddisfare

$$4ac - b^2 > 0\,.$$

15) Le funzioni a, b, c devono essere costanti.

.6 Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ si muove rispetto al sistema fisso di rotazione uniforme (che non si riduce alla quiete).
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
16) Esistono moti non solidali a $\mathcal{S}$ sui quali la forza di Coriolis si annulla identicamente.
17) La forza di trascinamento è posizionale sia in $\mathcal{S}$ che nel sistema di riferimento fisso.
18) Un moto solidale a $\mathcal{S}$ può avere accelerazione non nulla nel sistema di riferimento fisso.

.7 Un punto materiale P di massa m si muove in $\boldsymbol{R}^3$ soggetto a una forza $\boldsymbol{F}$ con potenziale $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$; cioè $\boldsymbol{F} = \nabla U$.
Si sa che tutti i moti sono limitati (ossia ciascun moto rimane all'interno di un'opportuna sfera di centro l'origine).
Dire quali delle seguenti forme di U sono ammissibili.
19) $U(x, y, z) = -e^{xyz}$.
20)

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\operatorname{arctg}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{\pi}{2}}\,.$$

21) $U(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2$.

.8 Un sistema rigido è sottoposto al vincolo di giunto ideale che ne induce un moto sferico di polo O rispetto all'osservatore terrestre.
22) Il momento totale della sollecitazione vincolare calcolato rispetto al polo O può essere un vettore non nullo ortogonale all'asse verticale passante per O.
23) Se il momento totale della sollecitazione attiva relativo a O è nullo e l'atto di moto iniziale è non nullo, allora il moto è necessariamente rotatorio.
24) Se l'unica sollecitazione attiva è il peso e il centro di massa del corpo coincide con O, allora il momento totale della quantità di moto relativo a O è una costante del moto.

.9 Una lamina quadrata di vertici (nell'ordine) $ABCD$ e di lato L è vincolata ad avere il vertice A sulla curva intersezione della sfera

$$S: \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

con il piano $x_2 = 0$, e il lato AD ortogonale alla sfera S (la lamina rimane esterna alla sfera). Denotiamo con O l'origine del sistema di riferimento fisso.

Dire se le seguenti parametrizzazioni lagrangiane con coordinate (φ, θ) sono ammissibili o no.
25) $(\varphi, \theta) \in (0, \pi/2) \times (0, \pi/2)$ tali che

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= R[\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_3]\,,\\ \overrightarrow{AB} &= L[\cos\varphi \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi(-\sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \boldsymbol{e}_3)]\,.\end{aligned}$$

26) $(\varphi, \theta) \in (0, \pi/2) \times (0, \pi/2)$ tali che

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= R[\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_3]\,,\\ \overrightarrow{AC} &= \sqrt{2}L[\cos\varphi \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi(-\sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \boldsymbol{e}_3)]\,.\end{aligned}$$

27) $(\varphi, \theta) \in (0, \pi/2) \times (0, \pi/2)$ tali che

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= R[\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_3]\,,\\ \overrightarrow{AD} &= L[\cos\varphi\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\sin\theta \boldsymbol{e}_3]\,.\end{aligned}$$

.10 Il punto materiale P_1 di massa m_1 è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

e il punto materiale P_2 di massa m_2 è vincolato all'ellisse

$$\frac{x_1^2}{R^2} + \frac{x_2^2}{4R^2} = 1\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Su P_i agisce la forza $\boldsymbol{F}_i$ data da

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 = -k|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2)\,,$$

con $k > 0$ costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} &= R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}} &= R\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + 2R\sin\theta \boldsymbol{e}_2\,.\end{aligned}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
28) Il potenziale lagrangiano è dato da

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = -\frac{k}{2}R^2[(\cos\varphi - \cos\theta)^2 + (\sin\varphi - 2\sin\theta)^2]\,.$$

29) Lungo ciascun moto le funzioni $\dot\varphi(t)$, $\dot\theta(t)$ restano limitate.
30) Non tutte le condizioni iniziali $\dot\varphi(0)$, $\dot\theta(0)$ compatibili nella posizione iniziale $\varphi(0) = \pi/2$, $\theta(0) = \pi/2$, lo sono anche in quella $\varphi(0) = -\pi/2$, $\theta(0) = -\pi/2$.

.11 Si considerino 3 moti (in componenti nella base standard $\boldsymbol{e}_h$ di $\boldsymbol{R}^3$)

$$\boldsymbol{X}_1 = (z_1, z_2, z_3)\,, \quad \boldsymbol{X}_2 = (z_4, z_5, z_6)\,, \quad \boldsymbol{X}_3 = (z_7, z_8, z_9)\,,$$

vincolati da (poniamo qui $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_9)$)

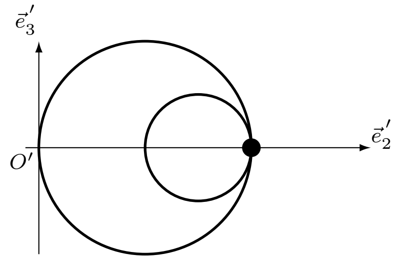
$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}) &= z_1 + z_4^2 + z_5 = 0\,, \\ f_2(\boldsymbol{z}) &= z_7 - z_8 + z_3 = 0\,, \\ f_3(\boldsymbol{z}) &= z_5 + z_9 = 0\,. \end{aligned}$$

Si assuma per noto che questo è un sistema di vincoli olonomi regolari in ogni configurazione compatibile.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
31) L'ipotesi dei lavori virtuali applicata a questo sistema consiste in 6 equazioni scalari.
32) La seguente parametrizzazione lagrangiana è ammissibile in un intorno della configurazione $\boldsymbol{z} = 0$: le coordinate sono $(z_1, z_2, z_3, z_5, z_6, z_7) \in Q$, $Q \subset \boldsymbol{R}^6$ aperto opportuno, e

$$z_4 = \sqrt{-z_5 - z_1}\,, \quad z_8 = z_7 + z_3\,, \quad z_9 = -z_5\,.$$

33) Lo spazio vettoriale degli spostamenti virtuali, come sottospazio di $\boldsymbol{R}^9$, è lo stesso in ogni configurazione compatibile con i vincoli.

.12 A un disco omogeneo di raggio R si pratica un foro di raggio $R/2$ tangente internamente il bordo del disco. La lamina così ottenuta ha massa M. Alla lamina viene poi saldato un elemento di massa m nel punto di tangenza. In figura è rappresentato il corpo assieme al riferimento $\{O', \vec{e}_i'\}$ a esso solidale.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 1 solidale parallelo all'omologo asse 1 fisso e punto O' sull'asse 2 fisso. Indicata con φ l'anomalia individuata dagli assi 2 fisso e solidale, il moto è descritto dalle relazioni $\overrightarrow{OO'}(t) = A\sin(\lambda t)\vec{e}_2$ e $\varphi(t) = \alpha t$, con $A, \lambda, \alpha > 0$ assegnati.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
34) Il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse 1 del riferimento solidale rappresentato in figura vale $(43/48)MR^2 + 4mR^2$.
35) Se $m = M/6$ il centro di massa del corpo rigido coincide con il centro geometrico del disco.

36) Le equazioni parametriche della rulletta (centroide mobile) sono $c'_1(t) = 0$, $c'_2(t) = 0$, $c'_3(t) = (A\lambda/\alpha)\cos(\lambda t)$.

.13 Un punto materiale P di massa m si muove vincolato a una superficie regolare parametrizzata da

$$\boldsymbol{r} \in C^{\infty}(Q)\,, \quad Q \subset \boldsymbol{R}^2\,; \quad \text{scriviamo} \quad \boldsymbol{r}_{\varphi} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\,, \boldsymbol{r}_{\theta} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\,.$$

Prendiamo $(\varphi, \theta) \in Q$ come coordinate lagrangiane.
Il punto è soggetto a un campo di forze posizionali $\boldsymbol{F} \in C^{\infty}(\boldsymbol{R}^3)$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
37) Se il vincolo è liscio, il sistema 2×2 delle equazioni di moto contiene $\boldsymbol{F}$ solo attraverso $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}_{\varphi}$, $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}_{\theta}$.
38) Se il vincolo è scabro, il sistema differenziale delle equazioni di moto è a 3 equazioni in 3 incognite.
39) Indipendentemente dal fatto che il vincolo sia liscio o scabro, se $\boldsymbol{F}$ è conservativa vale l'integrale primo della conservazione dell'energia.

.14 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = -ax^3 - bx - c\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

con a, b, $c > 0$ costanti.
Con riferimento al diagramma delle orbite nel piano delle fasi, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
40) Esistono orbite illimitate.
41) Esiste un unico punto di equilibrio.
42) Esistono orbite su cui il moto è periodico.

.15 Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ ha base mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

con $\varphi \in C^1(\boldsymbol{R})$, φ non costante, e

$$\boldsymbol{X}_O(t) = ct\boldsymbol{e}_1\,,$$

con $c > 0$ costante. Ricordiamo la definizione di campo di velocità di trascinamento di $\mathcal{S}$:

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_O(t))\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

43) Fissato ad arbitrio $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$,

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)| = +\infty \,.$$

44) La matrice di cambiamento di base tra $\mathcal{M}$ e la base fissa può essere costante nel tempo.
45) Se la forza di Coriolis $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$ che agisce in $\mathcal{S}$ sul moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}(t) = 0$ per ogni t, deve essere $\boldsymbol{v}(t) = s(t)\boldsymbol{e}_3$ per qualche scalare $s(t)$ ($\boldsymbol{v}$ è la velocità nel sistema fisso).

.16 Un sistema di particelle si muove rispetto a un osservatore inerziale.
46) La quantità di moto totale relativa al riferimento del centro di massa è sempre uguale alla massa totale del sistema moltiplicata per la velocità del centro di massa.
47) Se il sistema fosse rigido, allora il riferimento del centro di massa sarebbe necessariamente solidale al corpo.
48) L'energia cinetica rispetto al riferimento inerziale è minore di quella relativa al riferimento del centro di massa.

.17 Un disco D di raggio R e centro G è vincolato ad avere l'estremo A di un diametro solidale AB appartenente all'asse x_3 e l'altro estremo B all'elica cilindrica

$$\begin{aligned} x_1 &= 2R\cos(\alpha s)\,, \\ x_2 &= 2R\sin(\alpha s)\,, \\ x_3 &= h\alpha s\,, \end{aligned}$$

con α, $h > 0$, $s \in \boldsymbol{R}$. Denotiamo con O l'origine del sistema di riferimento fisso, e con HK il diametro solidale ortogonale a AB.
Dire se le seguenti parametrizzazioni lagrangiane con le coordinate indicate sono ammissibili o no.
49) $s \in \boldsymbol{R}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\overrightarrow{OA} = h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,,$$
$$\overrightarrow{HK} = 2R\cos\varphi[-\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2] + 2R\sin\varphi\boldsymbol{e}_3\,.$$

50) $z \in \boldsymbol{R}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\overrightarrow{OA} = z\boldsymbol{e}_3\,,$$
$$\overrightarrow{GK} = R\sin\varphi\Big[-\sin\frac{z}{h}\boldsymbol{e}_1 + \cos\frac{z}{h}\boldsymbol{e}_2\Big] + R\cos\varphi\boldsymbol{e}_3\,.$$

51) $z \in \boldsymbol{R}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\overrightarrow{OA} = z\boldsymbol{e}_3\,.$$
$$\overrightarrow{GH} = R\cos\varphi\Big[\cos\frac{z}{h}\boldsymbol{e}_1 + \sin\frac{z}{h}\boldsymbol{e}_2\Big] + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_3\,.$$

.18 Il punto materiale P_1 di massa m_1 è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

e il punto materiale P_2 di massa m_2 è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = 4R^2 \,, \qquad x_3 = L \,,$$

con R, $L > 0$.
Su P_i agisce la forza $\boldsymbol{F}_i$ data da

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 = k|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^2(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) \,,$$

con $k > 0$ costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} &= R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}} &= 2R\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + 2R\sin\theta \boldsymbol{e}_2 + L\boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
52) Esistono infinite posizioni di equilibrio.
53) Si può definire il potenziale lagrangiano, e questo vale

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = \frac{k}{4}[5R^2 - 4R^2\cos(\varphi - \theta) + L^2]^2 \,.$$

54) Esistono condizioni iniziali $\dot\varphi(0)$, $\dot\theta(0)$ per cui

$$\dot\varphi(t)^2 + \dot\theta(t)^2 \to +\infty \,, \qquad t \to +\infty \,.$$

.19 Si considerino 3 moti (in componenti nella base standard $\boldsymbol{e}_h$ di $\boldsymbol{R}^3$)

$$\boldsymbol{X}_1 = (z_1, z_2, z_3) \,, \quad \boldsymbol{X}_2 = (z_4, z_5, z_6) \,, \quad \boldsymbol{X}_3 = (z_7, z_8, z_9) \,,$$

vincolati da (poniamo qui $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_9)$)

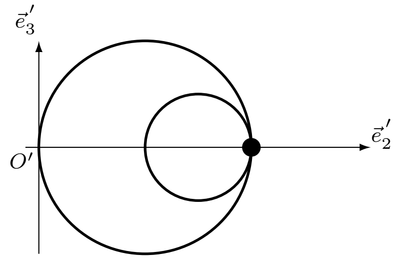
$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}) &= z_1 + z_7 - z_8^2 = 0 \,, \\ f_2(\boldsymbol{z}) &= z_1 + z_5 z_6 = 0 \,, \\ f_3(\boldsymbol{z}) &= z_5 - z_8 = 0 \,. \end{aligned}$$

Si assuma per noto che questo è un sistema di vincoli olonomi regolari in ogni configurazione compatibile.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
55) La seguente parametrizzazione lagrangiana è ammissibile in un intorno della configurazione $\boldsymbol{z} = 0$: le coordinate sono $(z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_9) \in Q$, $Q \subset \boldsymbol{R}^6$ aperto opportuno, e

$$z_1 = -z_5 z_6 \,, \quad z_7 = z_5^2 + z_5 z_6 \,, \quad z_8 = z_5 \,.$$

56) L'energia cinetica in forma lagrangiana, per qualunque scelta delle coordinate lagrangiane q_h, è un polinomio positivo di grado 6 nelle $\dot{q}_h$.
57) L'ipotesi dei lavori virtuali applicata a questo sistema consiste in un sistema lineare 9×9 nelle componenti delle reazioni vincolari applicate ai 3 punti.

.20 A un disco omogeneo di raggio R si pratica un foro di raggio $R/2$ tangente internamente il bordo del disco. La lamina così ottenuta ha massa M. Alla lamina viene poi saldato un elemento di massa m nel punto di tangenza. In figura è rappresentato il corpo assieme al riferimento $\{O', \vec{e}_i'\}$ a esso solidale.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 1 solidale parallelo all'omologo asse 1 fisso e punto O' sull'asse 2 fisso. Indicata con φ l'anomalia individuata dagli assi 2 fisso e solidale, il moto è descritto dalle relazioni $\overrightarrow{OO'}(t) = A\sin(\lambda t)\vec{e}_2$ e $\varphi(t) = \alpha t$, con $A, \lambda, \alpha > 0$ assegnati.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
58) Il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale rappresentato in figura vale $(43/48)MR^2 + 4mR^2$.
59) Se $m = 4M/3$ il centro di massa del corpo rigido coincide con il centro geometrico del foro.
60) Le equazioni parametriche della base (centroide fissa) sono $c_1(t) = 0$, $c_2(t) = A\sin(\lambda t) - (2A\lambda/\alpha)\cos(\lambda t)\sin(\alpha t)$, $c_3(t) = (2A\lambda/\alpha)\cos(\lambda t)\cos(\alpha t)$.

.21 Un punto materiale P di massa m si muove vincolato a una superficie regolare parametrizzata da

$$\boldsymbol{r} \in C^\infty(Q)\,, \quad Q \subset \boldsymbol{R}^2\,.$$

Prendiamo $(\varphi, \theta) \in Q$ come coordinate lagrangiane.
Il punto è soggetto a un campo di forze conservativo $\boldsymbol{F} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$, $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{e}_1 + F_2\boldsymbol{e}_2 + F_3\boldsymbol{e}_3$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
61) Si ha

$$\frac{\partial F_1(\boldsymbol{r})}{\partial \varphi} = \frac{\partial F_2(\boldsymbol{r})}{\partial \theta}\,.$$

62) Anche se la superficie è illimitata, ciascun moto è limitato.
63) Se il vincolo è liscio, in ogni istante il vettore $m\boldsymbol{a} - \boldsymbol{F}$ è ortogonale a S.

.22 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = a(x-1)^4\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $a > 0$ costante.
Con riferimento al diagramma delle orbite nel piano delle fasi, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
64) Esistono orbite ove $\dot{x}(t) > 0$ per ogni t.
65) Tutte le orbite sono illimitate, a parte eventualmente quelle corrispondenti ai punti di equilibrio.
66) Tutti i moti soddisfano $|\dot{x}(t)| \to +\infty$ per $t \to \Sigma$, se (σ, Σ) denota l'intervallo massimale di esistenza.

.23 Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ ha base mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e

$$\boldsymbol{X}_O(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,,$$

con R, $\alpha > 0$ costanti.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
67) La matrice di cambiamento di base tra $\mathcal{M}$ e la base fissa è una matrice 3×3 definita positiva.
68) La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di $\mathcal{M}$ rispetto alla base fissa non può essere nulla.
69) Se $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \boldsymbol{e}_3$, con $\omega_0 \in \boldsymbol{R}$ costante, allora la forza di trascinamento in $\mathcal{S}$ è una forza posizionale nelle coordinate del sistema fisso.

.24 Si considera un parallelepipedo a base quadrata omogeneo e un riferimento cartesiano con origine nel suo centro di massa.
70) Il riferimento è necessariamente centrale d'inerzia.
71) Se il corpo venisse posto in moto sferico con polo nel centro di massa il momento angolare totale risulterebbe necessariamente parallelo alla velocità angolare.
72) Se il corpo si muovesse libero e sottoposto al solo peso, il moto rispetto al centro di massa sarebbe rotatorio oppure di precessione.

.25 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato al paraboloide

$$x_3 = -\alpha(x_1^2 + x_2^2)\,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Su di esso agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica attrattiva

$$\boldsymbol{F} = -k(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
73) Se $k > 2\alpha mg$ tutti i moti sono limitati.

74) Se si usano le coordinate polari nel piano (x_1, x_2) per il moto del punto, l'energia cinetica è
$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)\,.$$
75) Se $k < 2\alpha mg$ esiste un unico punto di equilibrio.

.26 Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ un sistema di riferimento mobile, con
$$\boldsymbol{X}_O(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2\,,$$
e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ data da
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$
Qui α e β sono costanti positive.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
76) Si possono scegliere i parametri α, $\beta > 0$ in modo che tutti i moti solidali a $\mathcal{S}$ siano circolari uniformi nel sistema fisso.
77) L'accelerazione di trascinamento $\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}}$ in $\mathcal{S}$ dipende da α.
78) L'accelerazione di Coriolis $\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$ in $\mathcal{S}$ dipende da β.

.27 Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Sull'asta agiscono le forze
$$\boldsymbol{F}_A = -k\boldsymbol{X}_A\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = \mu\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{e}_3\,,$$
con $k > 0$, $\mu \geq 0$. Si scelgano come coordinate lagrangiane
$$x = x_{1A} \in \boldsymbol{R}\,, \quad y = x_{2A} \in \boldsymbol{R}\,, \quad \varphi \in (-\pi, \pi)$$
tale che
$$\overrightarrow{AB} = 2L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + 2L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$
Le equazioni di Lagrange sono allora (I è un opportuno momento d'inerzia dell'asta)
$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[(mL^2 + I)\dot{\varphi} - mL(\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi)\big] + 2L\dot{\varphi}(\dot{x}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi) = -4L^2\mu\,,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m(\dot{x} - L\dot{\varphi}\sin\varphi)\big] = -kx + 2\mu L\sin\varphi\,,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m(\dot{y} + L\dot{\varphi}\sin\varphi)\big] = -ky - 2\mu L\cos\varphi\,.
\end{aligned}$$
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.

79) Sia $\mu > 0$. Si può scrivere il potenziale lagrangiano del sistema.
80) Sia $\mu > 0$. Esistono posizioni di equilibrio.
81) Sia $\mu = 0$. Tutti i moti con $\dot{\varphi}(0) = 0$ si svolgono mantenendo $\varphi(t) = \varphi(0)$ per ogni $t > 0$.

.28 Un disco omogeneo pesante di raggio R e massa M è vincolato a muoversi su un piano fisso orizzontale. I vincoli sono ideali. Si considera il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ con piano coordinato 1–2 coincidente con il piano su cui giace il disco e asse 3 verticale ascendente. Indicato con C il centro di massa del disco, si considera il riferimento solidale $\{C, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ tale che $\vec{e}_3^{\,\prime} = \vec{e}_3$. Oltre al peso, sul centro di massa del disco agisce la forza elastica di costante $k > 0$ e centro O.
Il moto del disco rispetto al riferimento terrestre è descritto usando come coordinate lagrangiane le coordinate c_1 e c_2 del centro di massa rispetto al riferimento $\{O, \vec{e}_i\}$ e l'anomalia φ individuata dagli assi 1 fisso e solidale e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.
Si considera il moto con dato iniziale $\overrightarrow{OC}(0) = a\vec{e}_1$, $\vec{v}_C(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \lambda$, con $a, \lambda > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
82) Il moto del centro di massa è circolare.
83) La sollecitazione vincolare è equivalente a una forza applicata al centro di massa.
84) Se $\lambda = \sqrt{k/M}$ la base (centroide fissa) è una circonferenza.

.29 Dire se ciascuna delle matrici seguenti può essere la matrice della forma quadratica nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$ dell'energia cinetica lagrangiana di un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi regolari.
Qui $(\varphi, \theta) \in \boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate lagrangiane e $t > 0$.
85)
$$\begin{pmatrix} 2e^{\frac{\varphi+\theta}{2}} & e^{\varphi} \\ e^{\theta} & e^{\frac{\varphi+\theta}{2}} \end{pmatrix} .$$
86)
$$\begin{pmatrix} \varphi^2+1 & \varphi \\ \varphi & \varphi^2+1 \end{pmatrix} .$$
87)
$$\begin{pmatrix} t(\dot{\varphi}^2+1)e^{\varphi} & 0 \\ 0 & 2+\theta^2 \end{pmatrix} .$$

.30 Un moto $\boldsymbol{X}(t)$ è dato da
$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t)) ,$$
ove $\boldsymbol{\psi} \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è una curva regolare con curvatura positiva; s è l'ascissa curvilinea e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca.

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
88) In un istante $t = t_0$ si può avere

$$\ddot{\boldsymbol{X}}(t_0) = -b\boldsymbol{T}(s(t_0)) - a\boldsymbol{N}(s(t_0)),$$

con a, $b > 0$.
89) Sull'intervallo $(a, b) \subset \boldsymbol{R}$, $\ddot{\boldsymbol{X}}$ può avere componente nulla lungo $\boldsymbol{T}(s(t))$.
90) Supponiamo che $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{R}) \subset S$, con S superficie regolare. Allora $\ddot{\boldsymbol{X}}(t)$ può essere normale a S.

.31 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \dots, n$, è soggetto a vincoli olonomi regolari.
Vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
91) Se i vincoli sono fissi, il lavoro fatto da ciascuna reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^i$ sul moto $\boldsymbol{X}_i$ è nullo.
92) Lo spazio normale $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} \subset \boldsymbol{R}^{3n}$, cui appartiene $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$, è invariante nel tempo.
93) Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ dipende di fatto dalla scelta delle coordinate lagrangiane.

.32 Data la sollecitazione costituita dai punti di applicazione $X_1, \dots, X_n$ e forze $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, si indicano con $\vec{f}$ e $\vec{M}_O$ la somma e il momento totale di polo O.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
94) Il trinomio invariante (o invariante scalare) è uguale a $\vec{f} \times \vec{M}_O$.
95) Se il trinomio invariante è nullo e $\vec{f} \neq 0$ allora esiste almeno un punto X tale che $\vec{M}_X$ è parallelo a $\vec{f}$.
96) Se $\vec{f} = 0$ allora il campo momento è uniforme.

.33 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato al cono

$$x_3 = -\alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 0,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Su di esso agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica attrattiva

$$\boldsymbol{F} = -k(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2),$$

ove $k > 0$ è costante.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
97) Esistono infinite posizioni di equilibrio.
98) Se si usano le coordinate polari nel piano (x_1, x_2) per il moto del punto, l'energia cinetica è

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2(1 + \alpha^2) + r^2\dot{\varphi}^2).$$

99) Se $k > \alpha mg$ esistono posizioni di equilibrio stabile $(x_1, x_2) \neq (0,0)$.

.34 Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ un sistema di riferimento mobile, con

$$\boldsymbol{X}_O(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 + ct\boldsymbol{e}_3\,,$$

e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Qui α, β e c sono costanti positive.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
100) I moti solidali con $\mathcal{S}$ hanno velocità nel sistema fisso sempre diversa da 0.
101) L'accelerazione di trascinamento $\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}}$ in $\mathcal{S}$ è ortogonale a $\boldsymbol{\omega}$.
102) Esistono moti solidali con $\mathcal{S}$ che rimangono limitati nel sistema fisso.

.35 Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Sull'asta agiscono le forze

$$\boldsymbol{F}_G = -k\boldsymbol{X}_G\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = \mu(t)\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{e}_3\,,$$

con $\mu(t) = \nu\sin(\alpha t)$, ν, α, $k > 0$ costanti. Qui G è il centro di massa dell'asta. Si scelgano come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1G} \in \boldsymbol{R}\,, \quad y = x_{2G} \in \boldsymbol{R}\,, \quad \varphi \in (-\pi, \pi)$$

tale che

$$\overrightarrow{AB} = 2L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + 2L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

Le equazioni di Lagrange sono allora (I è un opportuno momento d'inerzia dell'asta)

$$\begin{aligned}
I\ddot{\varphi} &= -2L^2\mu\,,\\
m\ddot{x} &= -kx + 2\mu L\sin\varphi\,,\\
m\ddot{y} &= -ky - 2\mu L\cos\varphi\,.
\end{aligned}$$

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
103) In ciascun moto $\dot{\varphi}$ si mantiene limitato.
104) Esistono moti in cui $x(t) = y(t)$ per ogni t.
105) Si consideri un moto in cui $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. Allora $\varphi(t) < 0$ in qualche intervallo opportuno $(0, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$.

.36 Una lamina quadrata omogenea pesante di lato L e massa M è vincolata a muoversi su un piano fisso orizzontale. I vincoli sono ideali. Si considera

il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ con piano coordinato 1–2 coincidente con il piano su cui giace la lamina e asse 3 verticale ascendente. Indicato con C il centro di massa della lamina, si considera il riferimento solidale $\{C, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ tale che $\vec{e}_3^{\,\prime} = \vec{e}_3$. Oltre al peso, sul centro di massa della lamina agisce la forza elastica di costante $k > 0$ e centro O.
Il moto della lamina rispetto al riferimento terrestre è descritto usando come coordinate lagrangiane le coordinate c_1 e c_2 del centro di massa rispetto al riferimento $\{O, \vec{e}_i\}$ e l'anomalia φ individuata dagli assi 1 fisso e solidale e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.
Si considera il moto con dato iniziale $\overrightarrow{OC}(0) = 0$, $\vec{v}_C(0) = v_0\vec{e}_1$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \lambda$, con $v_0, \lambda > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
106) La traiettoria del centro di massa è un'ellisse.
107) Il momento totale della sollecitazione vincolare calcolato usando come polo l'origine del riferimento fisso è nullo.
108) Se $\lambda = \sqrt{k/M}$ la base (centroide fissa) è una circonferenza.

.37 Dire se ciascuna delle matrici seguenti può essere la matrice iacobiana (trasposta) $\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}/\partial \boldsymbol{q}$ della parametrizzazione lagrangiana di un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi regolari, con $n_c = 3$, $m = 1$, per ogni valore delle coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in \boldsymbol{R}^2$.
109)
$$\begin{pmatrix} 2\varphi & 2\theta & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
110)
$$\begin{pmatrix} 2\varphi & 0 & 2 \\ \dot{\varphi} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
111)
$$\begin{pmatrix} \varphi^2 + 1 & 0 & \theta \\ 1 & 0 & \varphi^2 + \theta^2 \end{pmatrix}.$$

.38 Un moto $\boldsymbol{X}(t)$ è dato da
$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t)),$$
ove $\boldsymbol{\psi} \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è una curva regolare con curvatura positiva; s è l'ascissa curvilinea e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
112) Se in un istante $t = t_0$ si conoscono $\ddot{s}(t_0)$, $\dot{s}(t_0)$ allora ne risulta determinato il modulo dell'accelerazione $|\boldsymbol{a}(t_0)|$, a prescindere da ogni conoscenza della traiettoria $\boldsymbol{\psi}$.
113) Sull'intervallo $(a, b) \subset \boldsymbol{R}$, si può avere $\ddot{\boldsymbol{X}}(t) \neq 0$ ma con componente identicamente nulla lungo $\boldsymbol{N}(s(t))$.

114) Supponiamo che $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{R}) \subset S$, con S superficie regolare, e che in un istante t_0 si abbia $\dot{s}(t_0) = 0$. Allora $\ddot{\boldsymbol{X}}(t_0)$ è tangente a S.

.39 Un sistema di 2 punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, 2$, è soggetto a vincoli $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) \in \boldsymbol{R}^m$ olonomi regolari, mobili.
Vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
115) Se il lavoro fatto dalla reazione vincolare ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^1$ sul moto $\boldsymbol{X}_1$ è nullo, allora lo è anche quello fatto da ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^2$ su $\boldsymbol{X}_2$.
116) Lo spazio degli atti di moto del sistema è un traslato di

$$N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} = \langle \nabla_{\boldsymbol{z}} f_1, \dots, \nabla_{\boldsymbol{z}} f_m \rangle \subset \boldsymbol{R}^6 \,.$$

117) Se per ogni $\boldsymbol{q} \in Q$, $t \in \boldsymbol{R}$,

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}}{\partial q_1}(\boldsymbol{q}, t) = 0 \,,$$

allora

$${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^2 \quad \text{è parallela a} \quad \frac{\partial \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}}{\partial q_1}(\boldsymbol{q}, t) \,.$$

.40 Si consideri l'atto di moto rigido $\vec{v}_X$. Si indichi con $\vec{\omega}$ la velocità angolare e con $\vec{v}_O$ la velocità associata al punto O.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
118) Il trinomio invariante (o invariante scalare) è uguale a $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_O$.
119) Se il trinomio invariante è nullo e $\vec{\omega} \neq 0$ allora esiste almeno un punto X tale che $\vec{v}_X$ è parallelo a $\vec{\omega}$.
120) Se $\vec{\omega} = 0$ allora l'atto di moto è uniforme.

.41 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato al paraboloide iperbolico

$$x_3 = -\alpha x_1 x_2 \,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Su di esso agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica attrattiva

$$\boldsymbol{F} = -k(x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2) \,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
121) Per ogni valore dei parametri, la conservazione dell'energia implica che ciascun moto è limitato.
122) Per ogni valore dei parametri, esistono moti limitati.
123) Esiste una scelta dei parametri per cui tutte le configurazioni compatibili con il vincolo sono di equilibrio.

.42 Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ un sistema di riferimento mobile, con

$$\boldsymbol{X}_O(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 \,,$$

e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ data da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Qui α e β sono costanti positive.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
124) La matrice di cambiamento di base tra la terna fissa e $\mathcal{M}$ dipende da α.
125) Sia $\mathcal{S}'$ un altro sistema di riferimento mobile, con terna $\mathcal{N}$. Allora se conosco la velocità angolare di $\mathcal{N}$ rispetto a $\mathcal{M}$, ne posso dedurre quella di $\mathcal{N}$ rispetto alla terna fissa.
126) La somma delle forze apparenti (dette anche fittizie) in $\mathcal{S}$, agenti su un moto solidale, dipende sia da α che da β.

.43 Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Sull'asta agiscono una forza elastica applicata nell'estremo A e una distribuzione di forze (applicata su tutti i punti di AB), date da

$$\boldsymbol{F}_A = -k\boldsymbol{X}_A \,, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mu x_2 \boldsymbol{e}_1 \,\mathrm{d}s \,,$$

con $k > 0$, $\mu > 0$. Si scelgano come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1A} \in \boldsymbol{R}, \quad y = x_{2A} \in \boldsymbol{R}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi)$$

tale che

$$\overrightarrow{AB} = 2L\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + 2L\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Le componenti lagrangiane delle forze sono allora:

$$\begin{aligned} Q_x &= -kx + 2L\mu(y + L\sin\varphi) \,, \\ Q_y &= -ky \,, \\ Q_\varphi &= -2L^2\mu\Big(y + \frac{4}{3}L\sin\varphi\Big) \,. \end{aligned}$$

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
127) Esistono configurazioni di equilibrio.
128) Le forze direttamente applicate sono conservative.
129) La matrice dell'energia cinetica del sistema (come forma quadratica nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$) è diagonale.

.44 Una lamina rettangolare omogenea pesante di lati L_1, L_2 e massa M è vincolata a muoversi su un piano fisso orizzontale. I vincoli sono ideali. Si considera il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ con piano coordinato 1–2 coincidente con il piano su cui giace la lamina e asse 3 verticale ascendente. Indicato con C il centro di massa della lamina, si considera il riferimento solidale $\{C, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ tale che $\vec{e}_3^{\,\prime} = \vec{e}_3$. Oltre al peso, sul centro di massa della lamina agisce la forza elastica di costante $k > 0$ e centro O.
Il moto della lamina rispetto al riferimento terrestre è descritto usando come coordinate lagrangiane le coordinate c_1 e c_2 del centro di massa rispetto al riferimento $\{O, \vec{e}_i\}$ e l'anomalia φ individuata dagli assi 1 fisso e solidale e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.
Si considera il moto con dato iniziale $\overrightarrow{OC}(0) = a\vec{e}_1$, $\vec{v}_C(0) = v_0\vec{e}_2$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \lambda$, con $a, v_0, \lambda > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
130) Scegliendo opportunamente a e v_0 la traiettoria del centro di massa è una circonferenza.
131) La sollecitazione vicolare ha trinomio invariante diverso da zero.
132) Se $\lambda = 0$ la base (centroide fissa) giace sull'asse coordinato 2 del riferimento fisso.

.45 Dire se ciascuna delle seguenti può essere la lagrangiana ridotta delle piccole oscillazioni, in un punto di equilibrio $(\varphi, \theta) = (0{,}0)$, per un sistema di corpi rigidi soggetto a forze conservative e vincoli olonomi fissi, con $\ell = 2$. Qui $(\varphi, \theta) \in \boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate lagrangiane e a, b, c, d sono costanti positive.
133)
$$\mathcal{L}^* = a^2\dot{\varphi}^2 + 2ab\dot{\varphi}\dot{\theta} + 2b^2\dot{\theta}^2 - c\varphi^2 - d\theta^2 \,.$$
134)
$$\mathcal{L}^* = 3a^2\dot{\varphi}^2 + b^2\dot{\theta}^2 - c^2\varphi^2 \,.$$
135)
$$\mathcal{L}^* = a^2\dot{\theta}^2 + 2ab\dot{\varphi}\dot{\theta} + b^2\dot{\theta}^2 - c^2\varphi^2 - c^2\theta^2 \,.$$

.46 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva $\boldsymbol{\psi} \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Il vincolo è scabro, secondo la legge
$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$
ove $\mu > 0$. Si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ sia una curva regolare con curvatura positiva; s è l'ascissa curvilinea e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$. Si assuma che il punto abbia velocità non nulla.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
136) Il segno della componente $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}$ dipende da quello di $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}$.

137) Se $\boldsymbol{F} = 0$, allora l'energia cinetica si conserva.
138) Assegnato $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B}$, si può rendere $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}} = 0$ variando opportunamente $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}$.

.47 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \dots, n$, è soggetto al vincolo olonomo regolare $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t)$, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m$.
Vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
139) Il lavoro complessivo fatto dalle reazioni vincolari sui moti $\boldsymbol{X}_i$ è nullo.
140) Se le forze direttamente applicate sono posizionali, anche le reazioni vincolari dipendono solo dalla posizione dei punti.
141) Lo spazio degli spostamenti virtuali, come spazio vettoriale, ha dimensione pari a $3n - m$.

.48 Rispetto al punto solidale O un corpo rigido ha riferimento principale $\{O, \vec{e}_i\}$ e matrice principale

$$I_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

con $B > A > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
142) Il corpo ha infiniti riferimenti principali relativi al punto O.
143) Se il corpo viene posto in rotazione attorno alla retta passante per O e individuata dal versore $(\sqrt{2}/2)\vec{e}_1 + (\sqrt{2}/2)\vec{e}_2$ il momento angolare risulta parallelo alla velocità angolare $\vec{\omega}$.
144) Per il moto considerato al punto precedente l'energia cinetica vale $A\|\omega\|^2/2$.

.49 Un moto $\boldsymbol{X} \in C^2(\boldsymbol{R})$ soddisfa

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \alpha_1(t)\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2(t)\boldsymbol{e}_2 \,,$$

con α_1, $\alpha_2 \in C^1(\boldsymbol{R})$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
145) In ogni istante l'accelerazione del moto appartiene al piano $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$.
146) In ogni istante il moto appartiene al piano $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$.
147) Se $\boldsymbol{X}(1) = \boldsymbol{X}(0)$ allora

$$\int_0^1 \alpha_1(t) \, \mathrm{d}t = 0 \,.$$

.50 Si consideri il sistema differenziale

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = \nabla U(\boldsymbol{X}) \,,$$

con $m > 0$, $\boldsymbol{X} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ e $U \in C^2(\boldsymbol{R}^2)$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
148) Se $\nabla U(0) = 0$ e $D^2U(0)$ ha autovalori -1, -2, $\boldsymbol{x} = 0$ è di equilibrio stabile.
149) Se $\nabla U(0) = 0$ e $D^2U(0)$ è nulla, $\boldsymbol{x} = 0$ è di equilibrio instabile.
150) Se $U(\boldsymbol{x}) \to +\infty$ per $|\boldsymbol{x}| \to +\infty$ allora esiste almeno un punto di equilibrio per il sistema.

.51 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ dati da

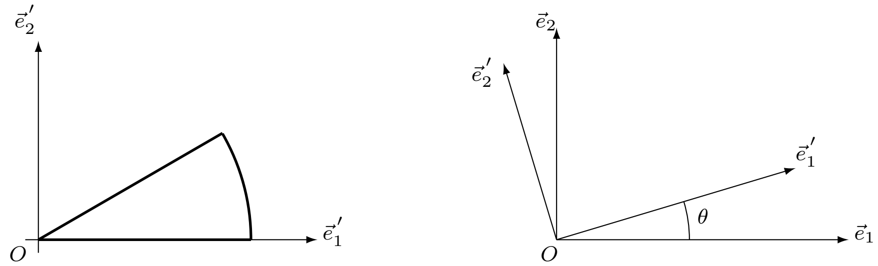
$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3 \,,$$

sono vincolati dal vincolo olonomo non singolare

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}, t) &= z_1 - z_4 + ct = 0 \,, \\ f_2(\boldsymbol{z}) &= z_2^2 + z_5 = 0 \,, \end{aligned}$$

$(\boldsymbol{z}, t) \in \boldsymbol{R}^7$, con $c > 0$ costante.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
151) Lo spazio degli spostamenti virtuali è indipendente da t.
152) Lo spazio degli spostamenti effettivi coincide con quello degli spostamenti virtuali.
153) Assumendo l'ipotesi dei lavori virtuali, il lavoro fatto dalle reazioni vincolari sui punti è nullo.

.52 Una lamina rigida omogenea di massa M ha la forma di un settore circolare di raggio R e angolo al centro $\pi/6$. In figura (a sinistra) è rappresentato il corpo assieme al riferimento $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ a esso solidale.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 3 verticale e ascendente. Il vincolo di cerniera è ideale. La sola sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso. Si indica con θ l'anomalia individuata dagli assi 1 fisso e solidale (figura a destra).
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
154) Il prodotto d'inerzia relativo agli assi 1 e 2 del riferimento solidale vale $-3MR^2/(8\pi)$.
155) L'energia cinetica del corpo è $3MR^2\dot{\theta}^2/4$.

156) Per il moto con dato iniziale $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = p$, con $p > 0$, la componente 3 del momento totale della sollecitazione vincolare è MgR.

.53 Sia
$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}, t)$$
un'equazione di moto con $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^7)$, e indichiamo con $\boldsymbol{X} \in C^2(I)$ una sua soluzione massimale.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
157) Se per ogni soluzione il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ su un qualunque intervallo di tempo è nullo, allora $\boldsymbol{F}$ è nulla.
158) Se $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ su $\boldsymbol{X}$ in $[t_0, t_1]$ dipende solo da $\boldsymbol{X}(t_0)$ e $\boldsymbol{X}(t_1)$.
159) Se $\boldsymbol{F}$ è una costante non nulla e $\dot{\boldsymbol{X}}(t_0) = 0$, il lavoro su $[t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$ non può annullarsi.

.54 Una forza $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\} \to \boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\})$ è chiusa in $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
160) Esiste un potenziale $U \in C^2(\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\})$.
161) Esiste un potenziale $U \in C^2(Q)$, con $Q = \boldsymbol{R} \times (0, +\infty)$.
162) La circuitazione di $\boldsymbol{F}$ (cioè l'integrale curvilineo di $\boldsymbol{F}$) si annulla su tutte le curve chiuse semplici γ che non contengono né circondano (0,0).

.55 Sia $(\boldsymbol{X}, m)$ un punto materiale vincolato alla curva $\boldsymbol{\psi} \in C^2(\boldsymbol{R})$ con terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$, soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$. Il vincolo è liscio.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
163) Se $\boldsymbol{F} = 0$, allora $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = 0$.
164) Se $\boldsymbol{F} \neq 0$, allora $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \neq 0$.
165) Se all'istante t si ha $\boldsymbol{F}(t) \in \langle \boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)) \rangle$, allora
$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(t) \in \langle \boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)) \rangle .$$

.56 Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
166) Considerato un sistema rigido sottoposto al vincolo di giunto ideale di polo O rispetto all'osservatore terrestre e a una sollecitazione attiva di momento non nullo rispetto al polo O, il momento totale della sollecitazione vincolare calcolato rispetto al polo O è nullo.
167) Considerato un sistema di particelle in moto rispetto a un osservatore inerziale, la quantità di moto totale relativa al riferimento del centro di massa è sempre uguale alla massa totale del sistema moltiplicata per la velocità del centro di massa.
168) Considerato un parallelepipedo a base quadrata omogeneo, tutti i riferimenti cartesiani con origine nel suo centro di massa sono centrali d'inerzia.

.57 Un moto $\boldsymbol{X} \in C^2(\boldsymbol{R})$ soddisfa

$$m\ddot{\boldsymbol{X}}(t) = F_1(t)\boldsymbol{e}_1 ,$$

con $F_1 \in C(\boldsymbol{R})$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
169) Il moto $\boldsymbol{X}(t)$ è rettilineo.
170) Se $F_1(t) = 0$ per ogni t, il punto resta fermo..
171) La velocità $\dot{\boldsymbol{X}}$ ha 2 componenti costanti.

.58 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio al paraboloide

$$x_3 = \alpha(x_1^2 + x_2^2) , \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 ,$$

con $\alpha > 0$ costante. Indichiamo con $\boldsymbol{\nu}$ il versore normale alla superficie.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
172) Se la reazione vincolare non è nulla, non è ortogonale a $\boldsymbol{e}_3$.
173) Se la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ è nulla, il moto non può svolgersi a quota x_3 costante, salvo il caso della quiete.
174) Se $\boldsymbol{F} = \lambda\boldsymbol{\nu}$, $\lambda \neq 0$ costante, e la velocità iniziale è $\dot{\boldsymbol{X}}(0) = 0$, allora il moto è la quiete.

.59 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ dati da

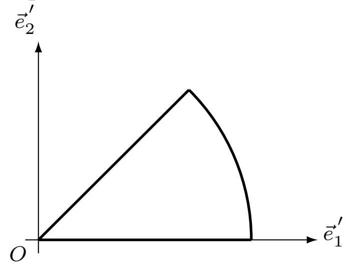
$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3 , \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3 ,$$

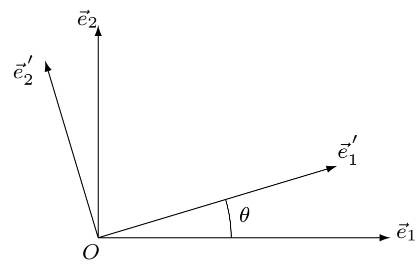
sono vincolati dal vincolo olonomo non singolare, per $t > 0$,

$$f_1(\boldsymbol{z}, t) = ctz_1 + z_4^2 = 0 ,$$
$$f_2(\boldsymbol{z}) = z_5 z_6 - b = 0 ,$$

$(\boldsymbol{z}, t) \in \boldsymbol{R}^7$, con c, b costanti positive.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
175) Lo spazio degli spostamenti virtuali è indipendente da t.
176) Lo spazio degli spostamenti effettivi coincide con quello degli spostamenti virtuali.
177) Assumendo l'ipotesi dei lavori virtuali, la reazione vincolare appartiene allo spazio degli spostamenti virtuali.

.60 Una lamina rigida omogenea di massa M ha la forma di un settore circolare di raggio R e angolo al centro $\pi/4$. In figura (a sinistra) è rappresentato il corpo assieme al riferimento $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ a esso solidale.





Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 3 verticale e ascendente. Il vincolo di cerniera è ideale. La sola sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso. Si indica con θ l'anomalia individuata dagli assi 1 fisso e solidale (figura a destra).
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
178) Il prodotto d'inerzia relativo agli assi 1 e 2 del riferimento solidale vale $-3MR^2/(2\pi)$.
179) Il momento angolare del corpo relativo al polo O è $(MR^2/2)\vec{e}_3$.
180) Per il moto con dato iniziale $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = p$, con $p > 0$, la componente 3 della somma della sollecitazione vincolare è Mg.

.61 Consideriamo i moti

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) ,$$

con $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^6)$, e indichiamo con $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}} \in \boldsymbol{R}^3$ un punto di equilibrio.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
181) Se $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}$ è stabile, non esistono moti illimitati.
182) Se $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}$ non è stabile, esiste almeno un moto $\boldsymbol{X}$ tale che

$$\lim_{t\to-\infty} \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}} , \qquad \lim_{t\to-\infty} \dot{\boldsymbol{X}}(t) = 0 .$$

183) Se $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\dot{\boldsymbol{X}})$, con $\boldsymbol{F}(0) = 0$, o tutte le posizioni $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ sono di equilibrio stabile o sono tutte di equilibrio instabile.

.62 Sia $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^3)$ una forza conservativa in $\boldsymbol{R}^3$ con potenziale $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
184) Il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ lungo il moto $\boldsymbol{X} \in C^2([t_0, t_1])$ con $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}(t_1)$ è nullo.
185) Il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ lungo il moto $\boldsymbol{X} \in C^2([t_0, t_1])$ con $\boldsymbol{X}(t_0) \neq \boldsymbol{X}(t_1)$ non è nullo.
186) Lungo ciascun moto limitato, anche l'energia cinetica rimane limitata.

.63 Sia $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$ un moto, con $\boldsymbol{\psi} \in C^2(\boldsymbol{R})$ di curvatura $k(s)$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
187) Può essere che $k(s) = 0$ per $s \in [a, b]$, $a < b$, ma $k(s) > 0$ per $s \notin [a, b]$.
188) All'istante fissato t, la curvatura $k(s(t))$ può essere calcolata come funzione di $\boldsymbol{X}(t)$, $\dot{\boldsymbol{X}}(t)$.
189) La curvatura $k(s)$ è una funzione di classe C^2.

.64 Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
190) Considerato un corpo rigido sottoposto al vincolo di giunto ideale di polo O e sollecitazione attiva con momento totale relativo a O nullo, se l'atto di moto iniziale è non nullo, allora il moto è necessariamente di precessione.

191) Considerato un sistema rigido in moto rispetto a un osservatore inerziale, il riferimento del centro di massa è necessariamente solidale al corpo.
192) Considerato un parallelepipedo a base quadrata omogeneo in moto sferico con polo nel centro di massa, il momento angolare totale è necessariamente parallelo alla velocità angolare.

.65 Dire se in ciascuno dei seguenti casi il moto può essere un moto centrale.
193)

$$\boldsymbol{X}(t) = at\boldsymbol{e}_1 + bt^2\boldsymbol{e}_2 + ct^3\boldsymbol{e}_3 \,,$$

a, b, $c > 0$, $t \in \boldsymbol{R}$.
194)

$$\boldsymbol{X}(t) = R\cos(\alpha t^2)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t^2)\boldsymbol{e}_2 \,,$$

R, $\alpha > 0$, $t \in \boldsymbol{R}$.
195)

$$\boldsymbol{X}(t) = R\boldsymbol{e}_1 \,,$$

$R > 0$, $t \in \boldsymbol{R}$.

.66 Dire se in ciascuno dei seguenti casi la superficie S può essere parametrizzata con una $\boldsymbol{r}$ di classe C^3, e allo stesso tempo la forza $\boldsymbol{F}$ composta con la parametrizzazione soddisfa le condizioni di regolarità del teorema di esistenza e unicità del moto di un punto vincolato alla superficie.
Qui α, $\lambda > 0$ sono costanti.
196)

$$\begin{gathered} S: \quad x_3 = \alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,; \\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{e}_1 \,. \end{gathered}$$

197)

$$\begin{gathered} S: \quad x_3 = \alpha(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \,; \\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \lambda|\boldsymbol{x}|^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{e}_1 \,. \end{gathered}$$

198)

$$\begin{gathered} S: \quad x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = \alpha \,; \\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \lambda|\boldsymbol{x}|^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{e}_1 \,. \end{gathered}$$

.67 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ dati da

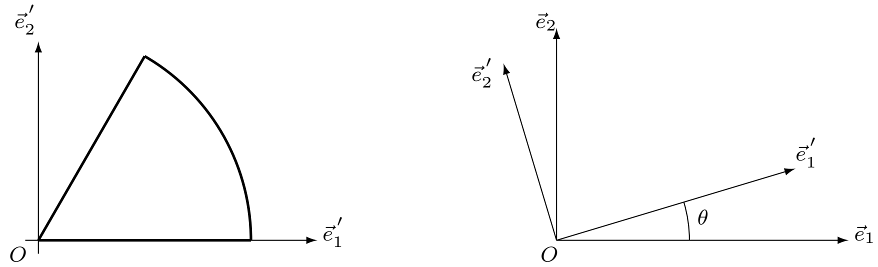
$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3 \,,$$

sono vincolati dal vincolo olonomo non singolare, per $t > 0$,

$$f_1(\boldsymbol{z}, t) = z_2^2 + z_3^2 - cz_1 = 0\,,$$
$$f_2(\boldsymbol{z}, t) = z_4 - \alpha t^2 = 0\,,$$

$(\boldsymbol{z}, t) \in \boldsymbol{R}^7$, c, $\alpha > 0$ costanti.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
199) Esistono $t_1 \neq t_2$ tali che l'insieme delle configurazioni compatibili soddisfa $Z_{\boldsymbol{f}}(t_1) = Z_{\boldsymbol{f}}(t_2)$.
200) Lo spazio degli spostamenti virtuali è indipendente dal tempo.
201) Assumendo l'ipotesi dei lavori virtuali, la reazione vincolare è ortogonale allo spazio degli spostamenti effettivi.

.68 Una lamina rigida omogenea di massa M ha la forma di un settore circolare di raggio R e angolo al centro $\pi/3$. In figura (a sinistra) è rappresentato il corpo assieme al riferimento $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ a esso solidale.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 3 verticale e ascendente. Il vincolo di cerniera è ideale. La sola sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso. Si indica con θ l'anomalia individuata dagli assi 1 fisso e solidale (figura a destra).
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
202) La coordinata 1 del centro di massa rispetto al riferimento solidale è $\sqrt{3}R/(3\pi)$.
203) Il momento d'inerzia relativo all'asse 3 del riferimento solidale vale $MR^2/2$.
204) Per il moto con dato iniziale $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = p$, con $p > 0$, la componente 2 del momento totale della sollecitazione vincolare è $-Mg(\sqrt{3}R/\pi)\cos(pt) + Mg(R/\pi)\sin(pt)$.

.69 Consideriamo il sistema differenziale

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}, t)\,,$$

con $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^7)$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.

205) Se una soluzione massimale ha dominio $(-\infty,0)$, allora

$$\lim_{t\to 0-} |\boldsymbol{X}(t)| = +\infty\,.$$

206) Se una soluzione massimale con dominio (σ,Σ) soddisfa per ogni $t\in(\sigma,\Sigma)$

$$|\boldsymbol{X}(t)| + |\dot{\boldsymbol{X}}(t)| \le a e^{bt^4}\,,$$

con a, $b>0$ costanti, allora $(\sigma,\Sigma)=\boldsymbol{R}$.
207) È possibile che per due soluzioni valga $\boldsymbol{X}_1(t_0)=\boldsymbol{X}_2(t_0)$, ma $\boldsymbol{X}_1(t)\neq\boldsymbol{X}_2(t)$ per $t\neq t_0$.

.70 Sia $\boldsymbol{F}\in C^1(\boldsymbol{R}^3)$ una forza conservativa in $\boldsymbol{R}^3$ con potenziale $U\in C^2(\boldsymbol{R}^3)$. Denotiamo con $(\boldsymbol{X},m)$ un punto materiale soggetto alla forza $\boldsymbol{F}$. Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
208) Se

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3} |U(\boldsymbol{x})| < +\infty\,,$$

allora esistono condizioni iniziali tali che la conservazione dell'energia non dà nessuna limitazione per $\boldsymbol{X}(t)$.
209) Se

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3} |U(\boldsymbol{x})| = +\infty\,,$$

allora tutti i moti sono limitati.
210) Se

$$U(\boldsymbol{x})=0\,,\quad |\boldsymbol{x}|=R\,;\qquad U(\boldsymbol{x})>0\,,\quad |\boldsymbol{x}|\neq R\,,$$

un moto con condizioni iniziali

$$\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{x}_0\,,\quad |\boldsymbol{x}_0|\neq R\,,\qquad \dot{\boldsymbol{X}}(0)=0\,,$$

non può soddisfare $|\boldsymbol{X}(t)|=R$ per nessun t.

.71 Consideriamo i moti

$$m\ddot{x}=f(x)\,,$$

con $m>0$ e $f\in C^1(\boldsymbol{R})$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
211) Si può tracciare il ritratto di fase.
212) Se $xf(x)<0$ per $x\neq 0$, allora $x=0$ è un punto di equilibrio stabile.
213) Se f è un polinomio, esiste sempre almeno un punto di equilibrio.

.72 Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
214) Considerato un sistema di particelle in moto rispetto a un osservatore inerziale, l'energia cinetica rispetto al riferimento inerziale è maggiore o uguale di quella relativa al riferimento del centro di massa.

215) Considerato un parallelepipedo a base quadrata omogeneo in moto libero e sottoposto al solo peso, il moto rispetto al riferimento del centro di massa è rotatorio oppure di precessione.
216) Data la sollecitazione costituita dai punti di applicazione $X_1, \dots, X_n$ e forze $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, indicati con $\vec{f}$ e $\vec{M}_O$ la somma e il momento totale di polo O, se il trinomio invariante fosse nullo e $\vec{f} \neq 0$ allora esisterebbe almeno un punto X tale che $\vec{M}_X$ è parallelo a $\vec{f}$.

.73 Un punto materiale è vincolato a muoversi su un piano che ruota con velocità angolare costante intorno a un asse fisso che giace sul piano stesso. Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
217) Esistono moti appartenenti al piano ruotante su cui la forza di Coriolis si annulla.
218) La forza di trascinamento, nel sistema di riferimento mobile solidale con il piano, è conservativa.
219) Sul punto non agisce la forza di Coriolis, purché esso sia ulteriormente vincolato a una retta del piano.

.74 Un sistema di corpi rigidi vincolati da vincoli olonomi lisci e fissi è soggetto a forze di potenziale lagrangiano $U^{\mathrm{L}}(x, y)$ che soddisfa

$$\nabla U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = (0{,}0)\,.$$

Dire in ciascuno dei seguenti casi se in (0,0) si possono o no definire le piccole oscillazioni, in base alle informazioni fornite sulla matrice hessiana del potenziale.
220)

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -11 \end{pmatrix}.$$

221)

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

222)

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

.75 Due punti materiali P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 si muovono vincolati alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Scegliamo come coordinate lagrangiane gli angoli φ_1, $\varphi_2 \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\overrightarrow{OP_1} = R\cos\varphi_1 \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi_1 \boldsymbol{e}_2\,,$$
$$\overrightarrow{OP_2} = R\cos\varphi_2 \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi_2 \boldsymbol{e}_2\,.$$

I due punti si attraggono con una forza elastica di costante $k > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
223) L'energia cinetica del sistema è

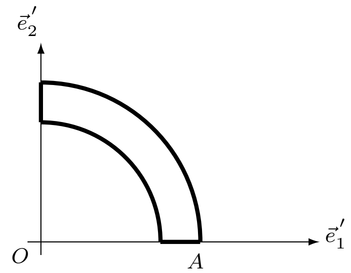
$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 \dot\varphi_2^2 \,.$$

224) Si può definire il potenziale lagrangiano e questo vale

$$U^{\mathrm{L}} = kR^2 [1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \,.$$

225) Il sistema ha posizioni di equilibrio stabile.

.76 Una lamina rigida omogenea di massa M ha la forma di un settore di corona circolare di raggi $0 < r < R$ e angolo al centro $\pi/2$. In figura è rappresentato il corpo, il riferimento $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ a esso solidale e il punto solidale A tale che $\overrightarrow{OA} = R\vec{e}_1^{\,\prime}$.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 2 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 2 verticale e ascendente. Il vincolo di cerniera è ideale. La sollecitazione attiva agente sul corpo è costituita dal peso e dalla forza elastica $-k\overrightarrow{CA}$ agente sul punto A di costante $k > 0$ e centro C tale che $\overrightarrow{OC} = 2R\vec{e}_1$. Si indica con θ l'anomalia individuata dagli assi 1 fisso e solidale.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
226) La coordinata 1 del centro di massa relativa al riferimento solidale è $4(R^3 - r^3)/[3\pi(R^2 - r^2)]$.
227) In corrispondenza di un generico moto del sistema il momento angolare del corpo relativo al polo O è $(M(R^2 + r^2)/4)\dot\varphi\vec{e}_2$.
228) In corrispondenza di un generico moto del sistema la componente 1 relativa al riferimento fisso del momento totale della sollecitazione vincolare calcolata rispetto al polo O è $4Mg(R^3 - r^3)\sin\varphi/[3\pi(R^2 - r^2)]$.

.77 Un sistema di punti materiali soggetto a vincoli olonomi lisci e fissi ha equazione di moto

$$\ddot{x} = f(x) \,,$$

ove $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ e $x \in \boldsymbol{R}$ è la coordinata lagrangiana (infatti si assume $\ell = 1$).
Si assume anche

$$f(x) \geq x^4 \,, \qquad x \in \boldsymbol{R} \,.$$

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
229) Se un moto soddisfa $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) \neq 0$, allora $\dot{x}(t)$ cambia segno intorno a $t = 0$.
230) Non esistono punti di equilibrio.
231) Esistono moti su cui $\dot{x}$ diviene illimitata.

.78 Un sistema di corpi rigidi è vincolato da vincoli olonomi fissi.
Le coordinate lagrangiane sono $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$. Qui a, b, c sono costanti positive.
Dire se ciascuna delle seguenti funzioni possa rappresentare l'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana.
232) $T^{\mathrm{L}} = a\dot{\varphi}^2 + b\dot{\theta}^2$.
233) $T^{\mathrm{L}} = a^2\dot{\varphi}^2 - ab\varphi^2\dot{\varphi}\dot{\theta} + b^2\dot{\theta}^2$.
234) $T^{\mathrm{L}} = a^2\dot{\varphi}^4 + b^2\dot{\theta}^4$.

.79 Dire se per se ciascuna delle seguenti scelte le componenti lagrangiane delle forze sono conservative in senso lagrangiano o no.
In ogni caso $\ell = 2$ e le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$.
235)
$$Q_x = x^2 y + t^2 \,, \qquad Q_y = \frac{x^3}{3} + t \,.$$
236)
$$Q_x = xy + \dot{y} \,, \qquad Q_y = \frac{x^3}{3} + x\dot{y} + y \,.$$
237)
$$Q_x = xy \,, \qquad Q_y = y + x \,.$$

.80 Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
238) Considerato un sistema di particelle in moto rispetto a un osservatore convenzionalmente considerato fisso, il momento angolare di tale moto calcolato usando come polo il centro di massa è uguale al momento angolare del moto relativo al riferimento del centro di massa calcolato usando come polo il centro di massa più la quantità $\overrightarrow{OG} \times m\vec{v}_G$, dove m è la massa totale del sistema, O l'origine del riferimento fisso, G il centro di massa del sistema e $\vec{v}_G$ la sua velocità.
239) Una lamina quadrata vincolata al centro di massa mediante un giunto liscio e sottoposta al solo peso compie esclusivamente moti rotatori.
240) Se un corpo rigido si muove di moto traslatorio rispetto a un riferimento detto fisso, in ogni istante l'asse di istantanea rotazione passa per l'origine del riferimento fisso.

Domande con risposta S/N assegnate al corso di Meccanica Razionale Ingegneria Meccanica.

.81 Un punto materiale è vincolato a muoversi su un piano che ruota con velocità angolare costante intorno a un asse fisso che giace sul piano stesso.
Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.
241) Le forze di Coriolis danno contributo nullo nelle equazioni di Lagrange scritte nel sistema mobile solidale con il piano.
242) Sul punto non agisce la forza di Coriolis, purché esso sia ulteriormente vincolato a una curva del piano.
243) La forza di trascinamento, nel sistema di riferimento mobile solidale con il piano, è conservativa.

.82 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia intorno al polo O.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali no.
244) Ogni possibile moto è periodico.
245) In ogni moto esiste un piano fisso $\varPi$, tale che in ogni istante l'intersezione di $\varPi$ con l'ellissoide d'inerzia mobile sia un punto solidale P, con P che non cambia durante il moto.
246) L'energia cinetica di C soddisfa $T = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\omega}$, con $\boldsymbol{f}$ vettore costante nel sistema fisso.

.83 Un sistema di corpi rigidi vincolati da vincoli olonomi lisci e fissi è soggetto a forze di potenziale lagrangiano $U^{\mathrm{L}}(x, y)$ che soddisfa

$$\nabla U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = (0{,}0)\,.$$

Dire in ciascuno dei seguenti casi se in (0,0) si possono o no definire le piccole oscillazioni, in base alle informazioni fornite sulla matrice hessiana del potenziale.
247)

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

248)

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

249)

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}.$$

.84 Un corpo rigido non degenere C è contenuto in un piano solidale $\varPi$. Qui $\boldsymbol{\sigma}_O$ denota la matrice di inerzia in un punto O del piano $\varPi$, e la base solidale $(\boldsymbol{u}_h)$ a cui la matrice è relativa è tale che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale a $\varPi$.
Dire quale delle seguenti affermazioni può essere vera e quale no.

250)

$$\boldsymbol{\sigma}_O = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad a\,, b > 0\,.$$

251)

$$\boldsymbol{\sigma}_O = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}, \qquad a\,, b > 0\,.$$

252)

$$\boldsymbol{\sigma}_O = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a+d \end{pmatrix}, \qquad a\,, b\,, c\,, d\,, e > 0\,.$$

.85 Un disco di raggio $R > 0$ e massa $m > 0$ è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$, mantenendo nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O, (x_h))$ un punto solidale A del suo bordo.
Sul punto B diametralmente opposto a A è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_B = kx_2\boldsymbol{e}_1\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Scegliamo come coordinata lagrangiana l'angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\overrightarrow{OB} = 2R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + 2R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
253) L'energia cinetica T^{L} del disco è data da

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2\,,$$

ove I è un opportuno momento d'inerzia.
254) Si può definire il potenziale lagrangiano.
255) Si può definire l'energia meccanica e questa si conserva durante il moto.

.86 Due punti materiali P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 si muovono vincolati alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Scegliamo come coordinate lagrangiane gli angoli φ_1, $\varphi_2 \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\overrightarrow{OP_1} = R\cos\varphi_1\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi_1\boldsymbol{e}_2\,,$$
$$\overrightarrow{OP_2} = R\cos\varphi_2\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi_2\boldsymbol{e}_2\,.$$

I due punti si attraggono con una forza elastica di costante $k > 0$.
Dire quali delle seguenti affermazioni è vera e quale no.
256) L'energia cinetica del sistema è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 \dot{\varphi}_2^2 + (m_1 + m_2) R^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \,.$$

257) Si può definire il potenziale lagrangiano e questo vale

$$U^{\mathrm{L}} = -kR^2[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \,.$$

258) Il sistema ha posizioni di equilibrio stabile in cui si possono definire le piccole oscillazioni.

.87 Una sfera solida di raggio R e massa m si muove di moto polare, ove il polo O è il centro della sfera.
Il sistema di riferimento $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale alla sfera.
Sul punto A tale che $\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_1$ è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = \alpha \boldsymbol{u}_2 \,,$$

con $\alpha > 0$ costante.
La sfera parte da ferma.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali no.
259) Il momento delle forze esterne rispetto a O è

$$\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = R\alpha \boldsymbol{u}_3 \,.$$

260) Il moto della sfera è una rotazione.
261) L'energia cinetica $T(t)$ rimane limitata per $t \to +\infty$.

.88 Una lamina rettangolare di lati $a > b > 0$ e massa m è vincolata a mantenere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso.
Sulla lamina non agiscono forze direttamente applicate.
All'istante iniziale la lamina ha velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0 \boldsymbol{u}(0) \,,$$

ove $\omega_0 > 0$ e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale alla lamina parallelo a una diagonale del rettangolo.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali no.
262) Il moto è una rotazione intorno a una diagonale del rettangolo.
263) L'energia cinetica vale

$$T(t) = \frac{I}{2} \omega_0^2 \,, \qquad \text{per ogni } t,$$

ove I è il momento d'inerzia relativo alla diagonale del rettangolo.

264) Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_O(t)$ si mantiene parallelo a $\boldsymbol{u}(t)$ durante il moto.

.89 Un cilindro di massa m, raggio R e altezza H, è vincolato a muoversi mantenendo il centro A di una delle due basi nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$.
Nel centro B dell'altra base è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_B = k(x_1 + R)\boldsymbol{e}_1 \,,$$

con $k > 0$ costante.
Il cilindro parte da fermo, con $\overrightarrow{AB}(0) = H\boldsymbol{e}_3$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
265) Il moto è una rotazione intorno all'asse x_2.
266) L'energia meccanica si conserva durante il moto.
267) Il momento delle quantità di moto (rispetto a A) si conserva durante il moto.

.90 Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sulla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \,,$$

soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
268) Gli unici punti di equilibrio sono i poli $(0,0,R)$ e $(0,0,-R)$.
269) Nella parametrizzazione lagrangiana

$$(x_1, x_2) \in Q = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < R^2\} \,,$$
$$x_3 = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} \,,$$

l'energia cinetica è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \frac{R^2 \dot{x}_1 \dot{x}_2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2}\Big) \,.$$

270) Si può scrivere la lagrangiana del moto.

.91 Un punto P di massa m si muove sulla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Il vincolo è scabro, tale che, se la velocità non è nulla,

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

ove $\mu > 0$ è costante.
Su punto agisce la forza elastica repulsiva

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{OP}\,,$$

ove O è il centro della circonferenza e $k > 0$ è costante.
Le condizioni iniziali sono

$$\boldsymbol{X}(0) = R\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_2\,,$$

con $v_0 > 0$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
271) Il punto si arresta a un istante $\bar{t} < mv_0/(\mu kR)$.
272) La reazione vincolare non fa lavoro.
273) Se $s(t)$ indica l'ascissa curvilinea di P al tempo t, allora $\ddot{s}(t)$ è costante.

.92 Dire quale delle seguenti componenti lagrangiane delle forze sono conservative in senso lagrangiano e quali no.
In ogni caso $\ell = 2$ e le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$.
274)

$$Q_x = xy\,, \qquad Q_y = \frac{x^2}{2} + t\,.$$

275)

$$Q_x = x + \dot{y}\,, \qquad Q_y = \frac{x^2}{2} + x\dot{y} + y\,.$$

276)

$$Q_x = y\,, \qquad Q_y = -x\,.$$

.93 Un sistema di corpi rigidi è vincolato da vincoli olonomi fissi.
Le coordinate lagrangiane sono $(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$. Qui a, b, c sono costanti positive.
Dire quali delle seguenti funzioni possono rappresentare l'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana.
277) $T^{\mathrm{L}} = a\dot{\varphi}^2 + b\dot{\theta}^2 + c\theta^2$.
278) $T^{\mathrm{L}} = a^2\dot{\varphi}^2 + ab\varphi\dot{\varphi}\dot{\theta} + b^2\dot{\theta}^2$.
279) $T^{\mathrm{L}} = a^2\dot{\varphi}^2 + 2ab\dot{\varphi}\dot{\theta} + b^2\dot{\theta}^2$.

.94 Sia $\boldsymbol{\varphi} : I \to \boldsymbol{R}^3$ una soluzione di

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi})\,,$$

con $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^3)$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali no.
280) Se $\boldsymbol{\varphi}(t_1) = \boldsymbol{\varphi}(t_2)$ per $t_1 \neq t_2$, allora la funzione $\boldsymbol{\varphi}$ è periodica.
281) Se $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0) = 0$, allora $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di equilibrio.

282) Sia $\boldsymbol{x}_0$ di equilibrio. Allora se $\boldsymbol{\varphi}(\bar{t}) \neq \boldsymbol{x}_0$ per un $\bar{t} \in \boldsymbol{R}$, vale $\boldsymbol{\varphi}(t) \neq \boldsymbol{x}_0$ per ogni $t \in \boldsymbol{R}$.

.95 Si consideri il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_O$ di un corpo rigido C, di polo O solidale con C. Qui $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare di C.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali no.
283) Se $\boldsymbol{\omega}$ è sempre nullo durante il moto, anche $\boldsymbol{L}_O$ lo è.
284) Se $\boldsymbol{L}_O$ è costante nel sistema fisso, allora è costante anche nel sistema solidale.
285) Se il moto è polare, $\boldsymbol{L}_O$ è un multiplo scalare di $\boldsymbol{\omega}$.

.96 Un sistema di punti materiali soggetto a vincoli olonomi lisci e fissi ha equazione di moto

$$\ddot{x} = f(x),$$

ove $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ e $x \in \boldsymbol{R}$ è la coordinata lagrangiana (infatti si assume $\ell = 1$).
Si assume anche

$$f(x) \geq x^2, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni è vera, con riferimento al diagramma delle orbite del moto nel piano delle fasi (x, p).
286) Le orbite $(x(t), p(t))$ del moto tali che $p(0) = 0$, $x(0) \neq 0$ hanno in $t = 0$ un punto di inversione del moto (ossia $p(t)$ cambia segno intorno a $t = 0$).
287) Esiste almeno un punto di equilibrio.
288) Esistono orbite su cui p diviene illimitata.

.97 Un cubo di massa m e spigolo L è vincolato a muoversi di moto polare con polo in un vertice A, che occupa l'origine O del sistema di riferimento fisso. Siano B il vertice opposto a A e G il centro del cubo.
Sul cubo sono applicate le forze, nei punti indicati,

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha \cos(\gamma t) \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{F}_G = \beta \sin(\gamma t) \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \times \boldsymbol{u},$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale ortogonale alla diagonale $\overrightarrow{AB}$, e α, β, γ costanti positive.
Il cubo parte da fermo.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
289) Esiste una costante $C > 0$ tale che

$$T(t) \leq C, \qquad \text{per ogni } t \geq 0.$$

290) Il moto è una rotazione.
291) Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_A$ rimane costante durante il moto.

.98 Un punto materiale P di massa m è vincolato con vincolo scabro al piano

$$x_1 + x_3 = 0 \,,$$

e soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha x_1 \boldsymbol{e}_1 \,,$$

con $\alpha > 0$ costante.
La reazione vincolare soddisfa le usuali ipotesi di Coulomb-Morin con

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

$\mu > 0$ costante. Si assuma che la velocità non sia nulla.
Si usino come coordinate lagrangiane $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
292) Il sistema di moto è costituito da due equazioni nella forma

$$\ddot{x}_1 = f(x_1, x_2) \,, \qquad \ddot{x}_2 = g(x_1, x_2) \,.$$

293) Tra i moti possibili esiste un moto rettilineo uniforme.
294) Esistono condizioni iniziali

$$x_1(0) \,, \quad x_2(0) \,, \quad \dot{x}_1(0) \neq 0 \,, \quad \dot{x}_2(0) \neq 0 \,,$$

per cui non vale il teorema di esistenza e unicità del moto in un opportuno intervallo di tempo.

.99 Si consideri un sistema formato da due moti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1 \boldsymbol{e}_1 + z_2 \boldsymbol{e}_2 + z_3 \boldsymbol{e}_3 \,, \quad \boldsymbol{X}_2 = z_4 \boldsymbol{e}_1 + z_5 \boldsymbol{e}_2 + z_6 \boldsymbol{e}_3 \,,$$

vincolati da

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}) &= (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 - \alpha[1 + (\cos(\gamma t))^2] = 0 \,, \\ f_2(\boldsymbol{z}) &= z_3 - z_5 = 0 \,, \\ f_3(\boldsymbol{z}) &= z_1 z_6 - \beta = 0 \,, \end{aligned}$$

con $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_6)$, $t > 0$ e α, β e γ costanti positive.
Si assuma come noto che il sistema di vincoli è olonomo regolare in ogni configurazione compatibile.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
295) Assumiamo che la stessa configurazione $\boldsymbol{z}$ sia compatibile in due istanti diversi, t_1 e t_2. Allora lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t_1}\boldsymbol{f}$ può essere diverso da quello $V_{\boldsymbol{z},t_2}\boldsymbol{f}$.
296) L'ipotesi dei lavori virtuali per il sistema, nella configurazione $\boldsymbol{z}$, può esprimersi come

$$({\mathbf{f}_{\text{vin}}}^1, {\mathbf{f}_{\text{vin}}}^2) \in \langle \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{v}_3(\boldsymbol{z}) \rangle \,,$$

ove i $\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{R}^6$ sono opportuni vettori indipendenti dal tempo.
297) Esiste una parametrizzazione lagrangiana in cui z_1 e z_6 sono entrambe coordinate lagrangiane.

.100 Un punto materiale è soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conservative. La lagrangiana è $\mathcal{L} = T^{\mathrm{L}} + U^{\mathrm{L}}$, con

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha\dot{\varphi}^2 + 2(\alpha+\beta)\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2\dot{\theta}^2 \,, \quad U^{\mathrm{L}} = -\alpha\varphi^2 - \beta^2\theta^4 \,.$$

Qui α, β sono costanti e $(\varphi, \theta) \in \boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate lagrangiane.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è compatibile con le definizioni date sopra e le proprietà che ne seguono.
298) Si può prendere $\beta = 0$, purché $\alpha > 0$.
299) Si possono prendere alcuni valori $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e in modo tale che in $(\varphi, \theta) = (0{,}0)$ si possono definire le piccole oscillazioni.
300) Si possono prendere alcuni valori $\alpha > 0$ e $\beta = -\alpha$, e in $(\varphi, \theta) = (0{,}0)$ si ha un equilibrio stabile.

.101 Una lamina quadrata è vincolata a muoversi di moto polare intorno al suo centro G, con vincolo liscio.
Si sa che il momento delle forze esterne di polo G soddisfa in ogni istante

$$\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}} = \alpha \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega} \,,$$

ove $\alpha > 0$ è una costante e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale alla lamina. Si assuma $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per ogni t.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
301) L'energia cinetica si conserva durante il moto.
302) Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_G$ si conserva durante il moto.
303) Se per $t = 0$ sia $\boldsymbol{\omega}$ che $\boldsymbol{u}$ sono ortogonali alla lamina, il moto è una rotazione.

.102 Consideriamo un punto materiale P di massa m vincolato con vincolo liscio a una superficie S con parametrizzazione regolare $\boldsymbol{r} \in C^\infty(Q)$, $Q \subset \boldsymbol{R}^2$.
Si prendano $(u, v) \in Q$ come coordinate lagrangiane.
Sul punto agisce la forza posizionale $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
304) Se vale su S

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)) = \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r}(u,v)) + g(u,v)\boldsymbol{\nu}(u,v) \,,$$

con $\boldsymbol{\nu}$ normale a S, $g \in C^\infty(Q)$, e $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x})$ conservativa in $\boldsymbol{R}^3$, allora l'energia meccanica si conserva lungo i moti di P.
305) Se $\boldsymbol{F}$ è ovunque nulla, e all'istante iniziale

$$\dot{u}(0) \neq 0 \,, \qquad \dot{v}(0) = 0 \,,$$

allora lungo il moto si ha $v(t)$ costante.
306) Sia $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$ un moto di P con traiettoria $\boldsymbol{\psi}(s)$ parametrizzata dall'ascissa curvilinea s. Se $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$ è la terna intrinseca della traiettoria, in generale sia $\boldsymbol{N}$ che $\boldsymbol{B}$ possono avere una componente tangente a S non nulla.

.103 Un punto materiale P di massa m è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \alpha \cos(\beta x_1 x_2 x_3) \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,, \qquad \boldsymbol{x} \neq 0\,,$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ costanti.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
307) Il moto è piano.
308) Vale la conservazione dell'energia lungo tutti i moti di P.
309) Supponiamo che il moto non si riduca alla quiete, ma abbia velocità nulla in qualche istante. Allora la traiettoria del moto giace su una retta.

.104 Si consideri un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ con $\mathcal{M}$ di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ rispetto alla terna fissa. Assumiamo che $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per ogni t.
Ricordiamo la definizione del campo della velocità di trascinamento di $\mathcal{S}$,

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_O(t))\,.$$

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
310) Il luogo dei punti $\boldsymbol{x}$ ove, all'istante t, $|\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)|$ è minimo, può essere una sfera di raggio positivo.
311) Per ogni istante t esiste una direzione $\boldsymbol{u}(t)$ tale che la componente di $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)$ parallela a $\boldsymbol{u}(t)$ è indipendente da $\boldsymbol{x}$.
312) Si ha sempre $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) \neq 0$ per ogni $(\boldsymbol{x}, t)$.

.105 Un cubo di massa m e spigolo L è vincolato a muoversi di moto polare con polo nel suo centro G, che occupa l'origine O del sistema di riferimento fisso. Siano A e B due vertici opposti del cubo (ossia estremi di una diagonale del cubo).
Sul cubo sono applicate le forze, nei punti indicati,

$$\boldsymbol{F}_A = \alpha \boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = \beta \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \times \boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale ortogonale alla diagonale $\overrightarrow{AB}$, e α, β costanti positive.
Il cubo parte da fermo.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

313) Esiste una costante $C > 0$ tale che

$$T(t) \leq C\,, \qquad \text{per ogni } t \geq 0.$$

314) Il moto è una rotazione.
315) L'ellissoide d'inerzia in G si mantiene tangente a un piano fisso durante il moto.

.106 Un punto materiale P di massa m è vincolato con vincolo scabro al piano

$$x_1 + x_3 = 0\,,$$

e soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -\alpha x_1 \boldsymbol{e}_1 - \beta x_2 \boldsymbol{e}_2\,,$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ costanti.
La reazione vincolare soddisfa le usuali ipotesi di Coulomb-Morin con

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

$\mu > 0$ costante. Si assuma che la velocità non sia nulla.
Si usino come coordinate lagrangiane $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
316) Tutti i moti sono limitati.
317) Esistono moti su cui di fatto $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}} = 0$.
318) Se il moto parte con condizioni iniziali

$$x_1(0) = 0\,, \quad x_2(0) = 1\,, \quad \dot{x}_1(0) \neq 0\,, \quad \dot{x}_2(0) = 0\,,$$

si ha $x_2(t) = 1$ per ogni t.

.107 Consideriamo un moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = U'(x)\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $U \in C^\infty(\boldsymbol{R})$.
Con riferimento al diagramma delle orbite nel piano delle fasi, dire se ciascuna delle seguenti affermazioni può essere vera.
319) Il punto $x = 0$ è di equilibrio stabile, e le curve

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))}\,,$$

per una certa costante E, coincidono in un intorno di (0,0) con le due rette $p = \pm x$.
320) Un'orbita corrisponde al moto $x(t)$ e corrisponde anche a tutti i suoi traslati temporali $x(t + c)$ con c costante.
321) Un'orbita non periodica può contenere punti ove $\dot{x}$ ha segni diversi.

.108 Un punto materiale è soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conservative. La lagrangiana è $\mathcal{L} = T^{\mathrm{L}} + U^{\mathrm{L}}$, con

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha\dot{\varphi}^2 + 2(\alpha+\beta)\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2\dot{\theta}^2 \,, \quad U^{\mathrm{L}} = -\alpha\varphi^2 - \beta^2\theta^2 + \beta\theta^4 \,.$$

Qui α, β sono costanti e $(\varphi, \theta) \in \boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate lagrangiane.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è compatibile con le definizioni date sopra e le proprietà che ne seguono.
322) Si può prendere $\alpha + \beta = 0$, purché $\alpha > 0$.
323) Si possono prendere alcuni valori $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e in modo tale che in $(\varphi, \theta) = (0{,}0)$ si possono definire le piccole oscillazioni.
324) Per i valori $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ (se sono ammissibili), esiste una unica posizione di equilibrio.

.109 Una lamina quadrata è vincolata a muoversi di moto polare intorno al suo centro G, con vincolo liscio.
Si sa che il momento delle forze esterne di polo G soddisfa in ogni istante

$$\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}} = \alpha(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} \,,$$

ove $\alpha > 0$ è una costante e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale alla lamina. Si assuma $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per ogni t.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
325) Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_G$ si conserva durante il moto.
326) Se $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\omega} = |\boldsymbol{\omega}|$ per ogni istante, il moto è una rotazione.
327) Se per $t = 0$, $\boldsymbol{\omega}(0)$ è ortogonale alla lamina, e $\boldsymbol{u}$ è parallelo alla lamina, il moto è una rotazione.

.110 Consideriamo un punto materiale P di massa m vincolato con vincolo liscio a una superficie S con parametrizzazione regolare $\boldsymbol{r} \in C^\infty(Q)$, $Q \subset \boldsymbol{R}^2$.
Si prendano $(u, v) \in Q$ come coordinate lagrangiane.
Sul punto agisce la forza posizionale $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
328) Sia $\boldsymbol{F}$ ovunque nulla; sia $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$ un moto di P con traiettoria $\boldsymbol{\psi}(s)$ parametrizzata dall'ascissa curvilinea s. Se $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$ è la terna intrinseca della traiettoria, l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ è parallela a $\boldsymbol{N}$.
329) Sia S una sfera, e $\boldsymbol{F}$ abbia direzione costante; allora esistono dei punti di equilibrio.
330) È possibile definire il potenziale lagrangiano solo se $\boldsymbol{F}$ è conservativa (in senso tradizionale).

.111 Un punto materiale P di massa m è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \alpha \cos(\beta \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \,, \qquad \boldsymbol{x} \neq 0 \,,$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ costanti.

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
331) Esistono moti rettilinei.
332) Vale la conservazione dell'energia lungo tutti i moti di P.
333) Supponiamo che $\boldsymbol{X}(0) = R\boldsymbol{e}_1$, $\dot{\boldsymbol{X}}(0) = c\boldsymbol{e}_2$, con $R > 0$, $c > 0$. Allora $\dot{\boldsymbol{X}}$ non si annulla mai.

.112 Si consideri un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ con $\mathcal{M}$ di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ rispetto alla terna fissa. Assumiamo che $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per ogni t.
Ricordiamo la definizione del campo della velocità di trascinamento di $\mathcal{S}$,

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_O(t)) .$$

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
334) Supponiamo t fissato; si può considerare $\boldsymbol{R}^3$ come unione di rette su ciascuna delle quali $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)$ è costante.
335) Nelle rotazioni, $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)$ è indipendente da t.
336) Per ogni t fissato, esiste sempre almeno un punto ove $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) = 0$.

.113 Un cubo di massa m e spigolo $2L$ è vincolato a muoversi di moto polare con polo nel centro A di una delle facce. Si consideri il sistema di riferimento solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_A, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ sono i versori paralleli ai lati della faccia cui appartiene A, cosicché

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{AG}}{L} ,$$

se G è il centro del cubo.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
337) Se il moto è una rotazione uniforme di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ allora l'energia cinetica vale

$$\frac{1}{3} m L^2 |\boldsymbol{\omega}|^2 .$$

338) Se sul cubo è applicata, in G, la forza

$$\boldsymbol{F}_G = \lambda \cos(\alpha t) \boldsymbol{u}_1 ,$$

con λ, α costanti positive, e condizioni iniziali $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{03} \boldsymbol{u}_3(0)$, il moto è una rotazione.
339) Se sul cubo non sono applicate forze, vale $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(0)$ per ogni t.

.114 Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0 ,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Sull'asta agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -k \overrightarrow{OP} \, \mathrm{d}s ,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e P il generico punto dell'asta. La distribuzione è nulla fuori dell'asta AB e $k > 0$ è costante.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
340) Se si scrivono le equazioni di Lagrange nel sistema di riferimento mobile solidale con il piano ruotante, si può scrivere la Lagrangiana dell'asta.
341) L'energia cinetica dell'asta nel sistema di riferimento fisso non dipende da α.
342) L'asta nel sistema di riferimento mobile ha numero di gradi di libertà diverso da quello nel sistema di riferimento fisso.

.115 Si consideri un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ vincolato alla circonferenza ruotante
$$\boldsymbol{\psi}(s,t) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3(t)\,,$$
ove $R > 0$ e
$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$
con $\alpha > 0$ costante.
Sul punto agisce il peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
343) La reazione vincolare, per ogni (s,t), appartiene al piano mobile $\langle \boldsymbol{N}(s,t), \boldsymbol{B}(s,t)\rangle$, ove $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca della circonferenza.
344) L'energia meccanica si conserva durante il moto.
345) Se si usa s come coordinata lagrangiana, allora l'energia cinetica in forma lagrangiana è
$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}\Big(\dot{s}^2 + R^2\alpha^2\cos^2\frac{s}{R}\Big)\,.$$

.116 Un sistema di corpi rigidi vincolato da vincoli olonomi lisci e fissi è soggetto a forze conservative di potenziale U^{L}. Qui $\ell = 3$ e $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^3$ sono le coordinate lagrangiane. Si assuma
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(0{,}0{,}0) = 0\,, \qquad h = 1\,{,}2\,{,}3\,.$$
Dire se in ciascuno dei seguenti casi si ha sicuramente equilibrio stabile.
346) Si ha l'hessiana
$$D^2U^{\mathrm{L}}(0{,}0{,}0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\,.$$

347) Si ha per un $\alpha > 0$ costante

$$-2\alpha|\boldsymbol{q}|^2 \leq U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) \leq -\alpha|\boldsymbol{q}|^2\,, \qquad \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^3\,.$$

348) L'hessiana $D^2U^{\mathrm{L}}(0{,}0{,}0)$ ha tutti gli autovalori non positivi.

.117 Sia C un corpo rigido non degenere, di densità non uniforme $\rho(\boldsymbol{\lambda})$, ove $\boldsymbol{\lambda}$ sono le coordinate solidali. Sia $\boldsymbol{X}_Z$ un moto solidale al rigido.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
349) Se $\boldsymbol{X}_Z$ è fisso, l'energia cinetica si può scrivere come

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{L}_Z \cdot \boldsymbol{\omega}\,,$$

ove $\boldsymbol{L}_Z$ è il momento delle quantità di moto di polo $\boldsymbol{X}_Z$.
350) Il tensore d'inerzia $\boldsymbol{\sigma}_Z$ è definito positivo.
351) Esistono sempre un versore $\boldsymbol{u}$ costante nel sistema di riferimento fisso e un $\mu \in \boldsymbol{R}$ tali che $\boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{u} = \mu\boldsymbol{u}$ per ogni tempo t.

.118 Si consideri un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, con s ascissa curvilinea e curvatura $k(s) > 0$. Il vincolo è scabro e soggetto alla legge di Coulomb-Morin secondo cui

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante, se $\dot{s} \neq 0$, il che assumiamo.
Sul punto è applicata la forza $\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{N}$, $\alpha > 0$ costante. Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
352) L'equazione di moto è

$$m\ddot{s} = \mu\frac{\dot{s}}{|\dot{s}|}|m\dot{s}^2k(s) - \alpha|\,.$$

353) Il moto dipende dal valore di $\mu > 0$.
354) Prescritte le condizioni iniziali $s(0)$, $\dot{s}(0)$, si può scegliere $\alpha > 0$ in modo che all'istante iniziale $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(0) = 0$.

.119 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = k|\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{u}||\boldsymbol{X}|^2\boldsymbol{X}\,,$$

con $k > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ versore costante.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
355) La forza è conservativa in $\boldsymbol{R}^3$.
356) Tutti i moti sono rettilinei.
357) L'origine è un punto di equilibrio stabile.

.120 Si consideri un disco

$$C = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leq R^2 \,,\ \lambda_3 = 0\} \,,$$

ove $\boldsymbol{\lambda}$ sono le coordinate solidali relative al sistema con base $(\boldsymbol{u}_h)$. La densità $\rho(\boldsymbol{\lambda})$ non è uniforme.
Il disco si muove di moto polare con polo nel suo centro geometrico K.
Sul disco non agiscono forze direttamente applicate.
Dire se in ciascuno dei seguenti casi il moto è una rotazione.
358) Se $\rho(\boldsymbol{\lambda}) = \rho_0(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$ e $\boldsymbol{\omega}(0) \cdot \boldsymbol{u}_3(0) = 0$.
359) Se $\rho(\boldsymbol{\lambda}) = \rho_0(\lambda_1)$ e $\boldsymbol{\omega}(0) \cdot \boldsymbol{u}_3(0) = 0$.
360) Se $\boldsymbol{\omega}(0) \times \boldsymbol{u}_3(0) = 0$.

.121 Un cilindro di massa m, raggio R e altezza H è vincolato ad avere il centro nell'origine O del sistema fisso.
Il sistema $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al cilindro, con $\boldsymbol{u}_3$ diretto come il suo asse. Sul cilindro è applicata, in A, la forza

$$\boldsymbol{F}_A = -\lambda \boldsymbol{u}_2 \,, \qquad \boldsymbol{X}_A = \frac{H}{2} \boldsymbol{u}_3 \,.$$

con $\lambda > 0$ costante. Le condizioni iniziali sono

$$\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h \,, \quad h = 1\,,2\,,3 \,; \qquad \boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{03} \boldsymbol{u}_3(0) \,,$$

ove $\omega_{03} > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
361) Una delle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ in $(\boldsymbol{u}_h)$ soddisfa l'equazione dei moti armonici $\ddot{x} + \mu^2 x = 0$, con $\mu > 0$ opportuno.
362) Il moto è una rotazione.
363) Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_O$ si conserva durante il moto.

.122 Si consideri il corpo rigido dato, in coordinate solidali $\boldsymbol{\lambda}$, da

$$C = \Big\{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = R^2 \,, \quad \lambda_3 \leq \frac{R}{2}\Big\} \,.$$

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
364) Esistono punti in cui l'ellissoide d'inerzia è di rotazione.
365) La funzione $f(P) = I_{22}^P$, ristretta all'asse λ_3, raggiunge il minimo nel punto $\boldsymbol{\lambda} = 0$.
366) Se il corpo è posto in moto polare per inerzia intorno al proprio centro di massa, e $\boldsymbol{\omega}$ mantiene direzione costante, allora $|\boldsymbol{\omega}|$ è costante.

.123 Si consideri un punto materiale P di massa m, vincolato alla sfera mobile

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R(t)^2 \,,$$

con $R \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, $R > 0$.
Vale l'ipotesi dei lavori virtuali. Sul punto agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -kx_1\boldsymbol{e}_1\,,$$

con $k > 0$ costante.
Scegliamo come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta, t) = R(t)\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R(t)\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R(t)\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,.$$

Dire se ciascuna dalle seguenti affermazioni è corretta.
367) La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ nella configurazione $(\boldsymbol{x}, t)$ ha direzione dipendente dalla derivata $\dot{R}(t)$.
368) Esiste il potenziale lagrangiano ed è dato da

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta, t) = -\frac{k}{2}(R(t)\cos\varphi\sin\theta)^2\,.$$

369) Su qualunque moto su cui φ, θ si mantengono costanti, anche l'energia cinetica T^{L} si mantiene costante.

.124 In un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \dots, n$, l'i-esimo punto è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij}\,,$$

ove

$$\boldsymbol{F}_i = -h\boldsymbol{X}_i\,, \qquad \boldsymbol{F}_{ij} = -k(\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_j)\,, \quad j \neq i\,.$$

Qui h, $k > 0$ sono costanti. Denotiamo il centro di massa del sistema con G.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
370) La prima equazione globale (o cardinale) della dinamica determina da sola il moto del centro di massa del sistema.
371) Il momento delle quantità di moto di polo $\boldsymbol{X}_O = 0$ si conserva durante il moto.
372) Il momento delle quantità di moto di polo $\boldsymbol{X}_G$ si conserva durante il moto.

.125 Sia C un corpo rigido non degenere di densità non uniforme ρ, e sia $\boldsymbol{\sigma}$ il suo tensore d'inerzia con polo in un moto solidale $\boldsymbol{X}_Z$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
373) Se C ha in $\boldsymbol{X}_Z$ due terne solidali principali d'inerzia $(\boldsymbol{u}_h)$ e $(\boldsymbol{w}_k)$, con $\boldsymbol{u}_h \neq \boldsymbol{w}_k$ per ogni h, k, allora l'ellissoide d'inerzia in $\boldsymbol{X}_Z$ è una sfera.
374) Gli assi principali in $\boldsymbol{X}_Z$ si ottengono traslando quelli principali in $\boldsymbol{X}_G$ (G è il centro di massa di C).
375) Se la densità del corpo viene raddoppiata, ossia diviene 2ρ, gli assi principali d'inerzia in $\boldsymbol{X}_Z$ possono cambiare.

.126 Due moti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3\,,$$

sono vincolati da

$$\begin{aligned} &f_1(\boldsymbol{z}) = (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 - L^2 = 0\,,\\ &f_2(\boldsymbol{z}) = z_1 = 0\,,\\ &f_3(\boldsymbol{z}) = z_6 = 0\,, \end{aligned}$$

ove $L > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
376) Il vincolo è olonomo regolare in tutte le configurazioni compatibili.
377) Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali, la reazione vincolare su $\boldsymbol{X}_1$ è sempre parallela a $\boldsymbol{e}_1$.
378) Si possono scegliere come coordinate lagrangiane z_3, z_4, z_5, z_6.

.127 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^3\boldsymbol{X} - \alpha\dot{\boldsymbol{X}}\,,$$

con α, $k \geq 0$ costanti.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
379) Se $\alpha > 0$, $k > 0$ allora il punto $\boldsymbol{x}_0 = 0$ è di equilibrio stabile per il moto.
380) Se $\alpha > 0$, $k = 0$, allora tutti i punti sono di equilibrio stabile.
381) Se $\alpha = 0$, $k > 0$, allora in $\boldsymbol{x}_0 = 0$ si possono definire le piccole oscillazioni.

.128 Si consideri una lamina quadrata di lato $2L$

$$C = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid |\lambda_1| \leq L\,,\ |\lambda_2| \leq L\,,\ \lambda_3 = 0\}\,,$$

di densità non uniforme $\rho(\boldsymbol{\lambda})$. Qui le $\boldsymbol{\lambda}$ sono le coordinate del sistema solidale alla lamina.
La lamina è vincolata a ruotare intorno all'asse λ_1, che è fisso, con vincolo liscio. Sulla lamina non agiscono forze direttamente applicate.
382) Se $\rho(\lambda_1, \lambda_2, 0) = \rho(\lambda_1, -\lambda_2, 0)$ allora il momento delle reazioni vincolari rispetto al centro geometrico della lamina ha componente ortogonale all'asse di rotazione nulla.
383) Le reazioni vincolari hanno risultante nulla.
384) Il vettore $\boldsymbol{\sigma\omega}$ è costante (qui il polo di $\boldsymbol{\sigma}$ è il centro geometrico della lamina).

.129 Un parallepipedo omogeneo C è vincolato a muoversi di moto polare di polo l'origine del sistema fisso O, in cui è fissato un suo vertice, con vincolo liscio.

Sul corpo rigido agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_O)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} + \beta\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}\,,$$

ove $\boldsymbol{e}$ è un vettore costante (nel sistema fisso), α, β sono costanti positive, e $\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$ è la misura di volume su C. Qui $\boldsymbol{x}$ sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso, e $\boldsymbol{\lambda}$ quelle nel sistema di riferimento solidale.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
385) Il moto di C è indipendente da α.
386) Il moto di C è indipendente da β.
387) La componente di $\boldsymbol{L}_O$ data da $\boldsymbol{L}_O \cdot \boldsymbol{e}$ è indipendente dal tempo.

.130 Un punto materiale è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

con vincolo scabro tale che

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \le \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,.$$

Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{e}_3\,;$$

qui $\alpha > 0$, $\mu > 0$ sono costanti.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
388) Esistono infinite posizioni di equilibrio.
389) Esistono infinite posizioni non di equilibrio.
390) L'insieme delle posizioni di equilibrio è invariante per simmetrie $x_3 \mapsto -x_3$.

.131 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = -\beta e^{\alpha(x_1+x_2)}(\alpha x_3^2\boldsymbol{e}_1 + \alpha x_3^2\boldsymbol{e}_2 + 2x_3\boldsymbol{e}_3)\,, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\,.$$

Dire se ciascuna dalle seguenti affermazioni è corretta.
391) Esistono moti illimitati.
392) Se, dato un moto $\boldsymbol{X}$, esiste una costante $c > 0$ tale che lungo il moto

$$x_1(t)^2 + x_2(t)^2 \le c\,, \qquad \text{per ogni } t,$$

allora anche $x_3(t)$ rimane limitata durante il moto.
393) Se un moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $\boldsymbol{X}(t_1) = \boldsymbol{X}(t_3)$ e $\boldsymbol{X}(t_2) = \boldsymbol{X}(t_4)$, per $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, allora il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ sul moto in $[t_1, t_2]$ è uguale a quello fatto in $[t_3, t_4]$.

.132 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ sono entrambi vincolati al cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,,$$

con vincolo liscio, e su $\boldsymbol{X}_i$ è applicata la forza $\boldsymbol{F}_i$

$$\boldsymbol{F}_1 = \gamma \frac{\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1}{|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^3} = -\boldsymbol{F}_2 \,,$$

con $\gamma > 0$. Si assuma $\boldsymbol{X}_1 \neq \boldsymbol{X}_2$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
394) L'energia meccanica si conserva.
395) La parametrizzazione lagrangiana

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} &= R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + u\boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}} &= x\boldsymbol{e}_1 + \sqrt{R^2 - x^2}\boldsymbol{e}_2 + v\boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $x \in (-R, R)$, $(u, v) \in \boldsymbol{R}^2$, è ammissibile.
396) Tutti i moti sono limitati, cioè per ciascun moto esiste una $c > 0$ tale che $|\boldsymbol{X}_1(t)| + |\boldsymbol{X}_2(t)| \leq c$ per ogni t.

.133 Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con attrito alla curva $\boldsymbol{\psi}(s)$; la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante, e supponiamo $\dot{\boldsymbol{X}}(t) \neq 0$ per ogni t. Sul punto è applicata la forza $\boldsymbol{F}$. Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva, che ha curvatura mai nulla.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
397) Se $\boldsymbol{F}(t) = 0$ allora $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(t) \neq 0$.
398) Se $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}(t) = 0$ allora $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
399) Se $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}(t) \neq 0$ allora $m\ddot{s}(t) \neq \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{T}(s(t))$.

.134 Sia $(\boldsymbol{X}, m)$ un moto vincolato alla curva mobile $\boldsymbol{\psi}(s, t)$ con vincolo liscio, soggetto a forze direttamente applicate nulle.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
400) L'energia meccanica $\mathcal{E}(t)$ è non decrescente in t.
401) L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ ha componente nulla lungo la binormale $\boldsymbol{B}(s(t), t)$ alla curva.
402) Si ha $m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

.135 Un corpo rigido non degenere C è vincolato a muoversi di moto polare di polo O.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
403) Se $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = \lambda \boldsymbol{e}_1$ con $\lambda \in \boldsymbol{R}$, il moto può essere una rotazione.
404) Se $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ è periodico in t, anche tutti i moti lo sono.
405) La prima equazione globale (o cardinale) della meccanica è sufficiente a determinare il moto di C.

.136 Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema fisso e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

ove $\alpha > 0$ è costante.
Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$ è vincolato al piano ruotante $\langle \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_3(t)\rangle$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
406) La forza di Coriolis non appare nelle equazioni di Lagrange scritte in $\mathcal{S}$.
407) Nel sistema di riferimento mobile la forza di trascinamento è conservativa.
408) Se il sistema di punti è in quiete rispetto a $\mathcal{S}$, allora non può esserlo rispetto al sistema di riferimento fisso.

.137 Un parallepipedo omogeneo C è vincolato a muoversi di moto polare di polo l'origine del sistema fisso O, in cui è fissato un suo vertice, con vincolo liscio.
Sul corpo rigido agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_O)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} + \beta\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}\,,$$

ove $\boldsymbol{e}$ è un vettore costante (nel sistema fisso), α, β sono costanti positive, e $\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$ è la misura di volume su C. Qui $\boldsymbol{x}$ sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso, e $\boldsymbol{\lambda}$ quelle nel sistema di riferimento solidale.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
409) Il moto di C è indipendente da α.
410) Il moto di C è indipendente da β.
411) La componente di $\boldsymbol{L}_O$ data da $\boldsymbol{L}_O \cdot \boldsymbol{e}$ è indipendente dal tempo.

.138 Un punto materiale è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

con vincolo scabro tale che

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,.$$

Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{e}_3\,;$$

qui $\alpha > 0$, $\mu > 0$ sono costanti.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
412) Esistono infinite posizioni di equilibrio.

413) Esistono infinite posizioni non di equilibrio.
414) L'insieme delle posizioni di equilibrio è invariante per simmetrie $x_3 \mapsto -x_3$.

.139 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = -\beta e^{\alpha(x_1+x_2)}(\alpha x_3^2 \boldsymbol{e}_1 + \alpha x_3^2 \boldsymbol{e}_2 + 2x_3 \boldsymbol{e}_3)\,, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\,.$$

Dire se ciascuna dalle seguenti affermazioni è corretta.
415) Esistono moti illimitati.
416) Se, dato un moto $\boldsymbol{X}$, esiste una costante $c > 0$ tale che lungo il moto

$$x_1(t)^2 + x_2(t)^2 \leq c\,, \qquad \text{per ogni } t,$$

allora anche $x_3(t)$ rimane limitata durante il moto.
417) Se un moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $\boldsymbol{X}(t_1) = \boldsymbol{X}(t_3)$ e $\boldsymbol{X}(t_2) = \boldsymbol{X}(t_4)$, per $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, allora il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ sul moto in $[t_1, t_2]$ è uguale a quello fatto in $[t_3, t_4]$.

.140 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ sono entrambi vincolati al cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,,$$

con vincolo liscio, e su $\boldsymbol{X}_i$ è applicata la forza $\boldsymbol{F}_i$

$$\boldsymbol{F}_1 = \gamma \frac{\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1}{|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^3} = -\boldsymbol{F}_2\,,$$

con $\gamma > 0$. Si assuma $\boldsymbol{X}_1 \neq \boldsymbol{X}_2$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
418) L'energia meccanica si conserva.
419) La parametrizzazione lagrangiana

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} &= R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + u\boldsymbol{e}_3\,, \\ \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}} &= x\boldsymbol{e}_1 + \sqrt{R^2 - x^2}\boldsymbol{e}_2 + v\boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $x \in (-R, R)$, $(u, v) \in \boldsymbol{R}^2$, è ammissibile.
420) Tutti i moti sono limitati, cioè per ciascun moto esiste una $c > 0$ tale che $|\boldsymbol{X}_1(t)| + |\boldsymbol{X}_2(t)| \leq c$ per ogni t.

.141 Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con attrito alla curva $\boldsymbol{\psi}(s)$; la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante, e supponiamo $\dot{\boldsymbol{X}}(t) \neq 0$ per ogni t. Sul punto è applicata la forza $\boldsymbol{F}$. Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva, che ha curvatura mai nulla.

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
421) Se $\boldsymbol{F}(t) = 0$ allora $\mathbf{f}_{\rm vin}(t) \neq 0$.
422) Se $\mathbf{f}_{\rm vin}^{\rm tan}(t) = 0$ allora $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
423) Se $\mathbf{f}_{\rm vin}^{\rm nor}(t) \neq 0$ allora $m\ddot{s}(t) \neq \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{T}(s(t))$.

.142 Sia $(\boldsymbol{X}, m)$ un moto vincolato alla curva mobile $\boldsymbol{\psi}(s,t)$ con vincolo liscio, soggetto a forze direttamente applicate nulle.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
424) L'energia meccanica $\mathcal{E}(t)$ è non decrescente in t.
425) L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ ha componente nulla lungo la binormale $\boldsymbol{B}(s(t),t)$ alla curva.
426) Si ha $m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

.143 Siano S_1, S_2 due superfici regolari con

$$\{\boldsymbol{x}_0\} = S_1 \cap S_2 \,,$$

tali che le normali coincidano nell'intersezione: $\boldsymbol{\nu}_1(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{\nu}_2(\boldsymbol{x}_0)$. Su ciascuna delle due superfici vale la legge di attrito statico di Coulomb-Morin

$$|\mathbf{f}_{\rm vin}^{\rm tan}| \leq \mu_i |\mathbf{f}_{\rm vin}^{\rm nor}| \,, \qquad i = 1\,,2 \,,$$

con coefficienti rispettivamente μ_1, $\mu_2 > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
427) Sia $\mu_1 = \mu_2$; allora se una forza è ammissibile per l'equilibrio in $\boldsymbol{x}_0$ in S_1, lo è anche in S_2.
428) Se $\mu_1 > \mu_2$ il cono d'attrito relativo a S_1 è contenuto in quello relativo a S_2.
429) Se $\boldsymbol{F}$ è ammissibile per l'equilibrio sia per S_1 che per S_2 la reazione vincolare è la stessa per le due superfici.

.144 Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

ove $\alpha > 0$ è costante.
Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$ è vincolato al piano ruotante $\langle \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_3(t) \rangle$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
430) La forza di Coriolis non appare nelle equazioni di Lagrange scritte in $\mathcal{S}$.
431) Nel sistema di riferimento mobile la forza di trascinamento è conservativa.
432) Se il sistema di punti è in quiete rispetto a $\mathcal{S}$, allora non può esserlo rispetto al sistema di riferimento fisso.

.145 Un elemento materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = c(x^2 + y^2) + d\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,,$$

con c, $d > 0$ costanti. Il vincolo è scabro, con reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ tale che, indicando con $\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}$ e $\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}$ le sue componenti rispettivamente tangente e normale alla superficie, si abbia l'unica restrizione

$$|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| \le \mu |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante, almeno se l'elemento materiale ha velocità nulla.
Su P agisce la forza costante $b\boldsymbol{e}_3$, con $b > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
433) L'insieme delle coordinate (x, y) in cui è possibile l'equilibrio dipende da d.
434) Per c e d fissati, esiste $R > 0$ tale che se $x^2 + y^2 < R^2$ non si ha equilibrio.
435) L'insieme delle posizioni in cui si ha equilibrio cambia se la forza diviene $b\boldsymbol{e}_1$, ossia cambia direzione.

.146 Un punto materiale P di massa m si muove soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = -k(e^{yz}\boldsymbol{e}_1 + xze^{yz}\boldsymbol{e}_2 + xye^{yz}\boldsymbol{e}_3)\,, \qquad (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
436) Il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ su un moto che compie una traiettoria non chiusa non è nullo.
437) Esistono moti che rimangono sull'asse x.
438) Esistono soluzioni costanti del sistema del moto.

.147 Due punti materiali P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 sono così vincolati:
P_1 appartiene alla circonferenza di centro l'origine O e raggio R nel piano $z = 0$.
P_2 appartiene alla circonferenza di centro P_1 e raggio R nel piano $z = 0$.
Su P_2 agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP_2}\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano le coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ come segue:

$$\overrightarrow{OP_1} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{P_1P_2} = R\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{e}_2\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

439) L'energia cinetica del sistema si annulla solo se il moto è la quiete.
440) Non ci sono posizioni di equilibrio stabile.
441) La reazione vincolare esercitata dai vincoli su P_2 è parallela a $\overrightarrow{OP_2}$.

.148 Una sfera solida di massa m e raggio R è vincolato a muoversi di moto polare con polo in un punto solidale A della sua frontiera, che occupa l'origine O del sistema di riferimento fisso. Siano B il punto opposto a A del diametro per A, e G il centro della sfera.
Sulla sfera sono applicate le forze, nei punti indicati,

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha\cos(\gamma t)\boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{F}_G = \beta\sin(\gamma t)\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\times\boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale ortogonale al diametro $\overrightarrow{AB}$, e α, β, γ costanti positive.
La sfera parte da ferma.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
442) Esiste una costante $C>0$ tale che

$$T(t)\le C\,, \qquad \text{per ogni } t\ge 0.$$

443) Il moto è polare per inerzia.
444) Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_A$ rimane costante durante il moto.

.149 Si consideri la seguente energia cinetica in forma lagrangiana, relativa a un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi regolari, con 2 gradi di libertà e $(\varphi,\theta)\in\boldsymbol{R}^2$ coordinate lagrangiane:

$$T^{\mathrm{L}} = a(\varphi,\theta)\dot\varphi^2 + b(\varphi,\theta)\dot\varphi\dot\theta + c(\varphi,\theta)\dot\theta^2 + f(\varphi,\theta)\dot\theta + g(\varphi,\theta)\,,$$

con a, b, c, f, g funzioni non identicamente nulle.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
445) I vincoli devono essere mobili.
446) Le funzioni a, b, c possono essere funzioni positive arbitrarie che devono soddisfare solo la condizione di essere positive.
447) Le funzioni a, b, c dipendono dalla densità di tutti i corpi rigidi.

.150 Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}=(\boldsymbol{X}_O,(\boldsymbol{u}_h))$ si muove rispetto al sistema fisso di rotazione uniforme (che non si riduce alla quiete).
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
448) Esistono moti solidali a $\mathcal{S}$ sui quali la forza di Coriolis non si annulla identicamente.
449) Esistono moti solidali a $\mathcal{S}$ che hanno accelerazione nulla nel sistema di riferimento fisso.
450) La forza di trascinamento è posizionale sia in $\mathcal{S}$ che nel sistema di riferimento fisso.

.151 Un punto materiale P di massa m si muove in $\boldsymbol{R}^3$ soggetto a una forza $\boldsymbol{F}$ con potenziale $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$; cioè $\boldsymbol{F} = \nabla U$.
Si sa che tutti i moti sono limitati (ossia ciascun moto rimane all'interno di un'opportuna sfera di centro l'origine).
Dire se ciascuna delle seguenti forme di U è ammissibile.
451) $U(x, y, z) = e^{x^2 yz}$.
452)

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x^2 + y^2 + z^2)} .$$

453) $U(x, y, z) = -(x^4 + y^2 + z^2)$.

.152 Un sistema rigido si muove di moto polare di polo O.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
454) Se il momento totale delle forze direttamente applicate, rispetto a O, non è nullo, allora il momento delle quantità di moto non si conserva.
455) Se il momento totale delle forze direttamente applicate, rispetto a O, è nullo, allora il moto è necessariamente rotatorio.
456) Se l'unica forza direttamente applicata è il peso e il centro di massa del corpo coincide con O, allora l'energia cinetica si conserva.

Prova scritta del 11/01/2021 I

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 11/01/2021 I

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0 ,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Inoltre il centro G di AB deve avere quota $x_{3G} = 0$.
Sull'asta agisce la forza (applicata in B)

$$\boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{X}_B ,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(r, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 , \end{aligned}$$

allora

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_3)\,, \quad \boldsymbol{X}_G = r\boldsymbol{u}_1\,.$$

Sotto $\boldsymbol{X}_O$ denota l'origine del sistema di riferimento fisso, che ha coordinate (x_h).

$\boxed{\mathbf{01}}$ Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze apparenti sono conservative nel senso lagrangiano e quindi esiste il loro potenziale lagrangiano U^{L}_{app}.
a Sì, e il potenziale è dato da

$$U^{\mathrm{L}}_{app}(r, \varphi) = \frac{m}{2}\alpha^2\Big(r^2 + \frac{L^2}{3}\cos^2\varphi\Big)\,.$$

b No, le forze apparenti non sono conservative in senso lagrangiano.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{02}}$ Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze direttamente applicate ammettono potenziale lagrangiano.
a Sì ed esso vale

$$U^{\mathrm{L}}_{da} = -\frac{k}{2}(r^2 + L^2 + 2rL\cos\varphi)\,.$$

b Sì ed esso vale

$$U^{\mathrm{L}}_{da} = -\frac{k}{2}(r^2 + L^2 + 2rL\sin\varphi)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{03}}$ Esistono posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $r = 0$.
a Sì e sono sempre stabili.
b Sì e sono instabili per una opportuna scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove R, $h > 0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea. Il vincolo è scabro.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \gamma x_1 \boldsymbol{T} + \delta \boldsymbol{B}\,,$$

con γ, $\delta > 0$ costanti. Qui (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca dell'elica, che viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{B}(s) &= \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e la curvatura $k(s) = R\alpha^2$.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Si supponga $\dot{s} \neq 0$ e che la reazione vincolare soddisfi

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\tan}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Allora l'equazione di moto è:
a

$$m\ddot{s} = \gamma R \cos(\alpha s) - \mu \operatorname{sign}(\dot{s}) \sqrt{\dot{s}^4 m^2 k^2 + \delta^2}\,.$$

b

$$m\ddot{s} = \gamma R \cos(\alpha s) - \mu \delta \operatorname{sign}(\dot{s})\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$, e che la reazione vincolare soddisfi all'equilibrio

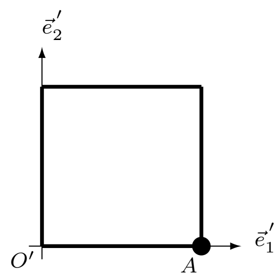
$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\tan}| \leq \mu_s |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Allora il punto materiale resta in equilibrio.
a Sì, ma solo se $0 < h \leq h_0$ con $h_0 > 0$ opportuno.
b Sì, ma solo se $\mu_s \geq \mu^0$ con $\mu^0 > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0 > 0$, e che la reazione vincolare soddisfi, se $\dot{s} \neq 0$,

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\tan}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Dire quale delle seguenti proprietà soddisfa $s(t)$.
a Se $\mu\delta > \gamma R$, vale $\dot{s}(t) \to 0$ per $t \to t_0-$, con $t_0 < +\infty$.
b Vale in ogni caso $\dot{s}(t) > 0$ per ogni $t \in (0, +\infty)$.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando l'elemento A di massa M a una lamina rigida omogenea di forma quadrata di massa M e lato $2L$. In figura è rappresentato il corpo assieme al riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i^{\,\prime}\}$. Si nota che $\overrightarrow{O'A} = 2L\vec{e}_1^{\,\prime}$.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo O' sull'asse fisso 1 e l'asse 3 solidale costantemente parallelo all'omologo asse fisso 3. Come coordinate lagrangiane si possono usare la coordinata cartesiana 1 di O' e l'anomalia φ individuata dall'asse fisso 1 e dall'asse solidale 1 orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.

$\boxed{07}$ Quanto valgono le coordinate del centro di massa del corpo rispetto al riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i^{\,\prime}\}$?
a $\left(\frac{3}{2}L, \frac{1}{2}L, 0\right)$.
b $\left(\frac{3}{2}L, \frac{3}{2}L, 0\right)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{08}$ Quanto valgono i momenti principali d'inerzia del corpo rispetto a O'?
a $\frac{1}{3}(10 - 3\sqrt{5})ML^2$, $\frac{1}{3}(10 + 3\sqrt{5})ML^2$, $\frac{20}{3}ML^2$.
b $\frac{1}{3}(12 - 3\sqrt{5})ML^2$, $\frac{1}{3}(12 + 3\sqrt{5})ML^2$, $\frac{20}{3}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{09}$ Quanto vale il momento angolare del corpo calcolato usando come polo di riduzione il centro di massa?
a $\frac{35}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
b $\frac{34}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, ..., $(\boldsymbol{X}_n, m_n)$ è soggetto ai vincoli olonomi
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,,$$
con $\boldsymbol{f} \in C^3(\boldsymbol{R}^{3n+1})$, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m$, $1 \le m < 3n$; qui denotiamo
$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n) = (z_1, \dots, z_{3n}) \in \boldsymbol{R}^{3n}\,.$$
Si supponga che il vincolo sia olonomo regolare.
$\boxed{10}$ Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ dipende dalla scelta delle coordinate lagrangiane.
a Sì in genere, ma non se queste sono scelte come le coordinate indipendenti date dal teorema del Dini.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{11}$ Supponiamo che $n = 6$ e che, scelta la parametrizzazione lagrangiana
$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t) = (\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t), \dots, \boldsymbol{X}_6^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t))\,,$$
si sappia che per ogni $h = 1, \dots, \ell$, vale
$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^{i+1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_{i+1}^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} = 0\,,$$
$i = 1, 3, 5$. Vale allora l'ipotesi dei lavori virtuali?
a Sicuramente no.
b Sicuramente sì.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{12}$ Supponiamo che i vincoli siano fissi, ossia che $\boldsymbol{f}$ non dipenda esplicitamente da t.
Sia scelta una parametrizzazione lagrangiana $\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}} : Q \to \boldsymbol{R}^{n_c}$. Sia $\boldsymbol{q} : \boldsymbol{R} \to Q$ un moto lagrangiano.

a Lo spazio normale $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ ove $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}(t))$ è di fatto indipendente dal tempo t.
b Se $\boldsymbol{q}(t_1) \neq \boldsymbol{q}(t_2)$, e $\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}(t_i))$, $i = 1, 2$, allora certamente $N_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} \neq N_{\boldsymbol{z}_2,t_2}\boldsymbol{f}$.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Si consideri un moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,.$$

Indichiamo con (x, p) le coordinate nel relativo piano delle fasi, ossia $p = \dot{x}$. Si noti che per il momento non facciamo ipotesi sulla regolarità di f.
Indichiamo l'energia meccanica con

$$W(x,p) = \frac{m}{2}p^2 - U(x)\,, \qquad \text{ove} \quad U'(x) = f(x)\,.$$

$\boxed{\mathbf{13}}$ Sia $f \in C(R)$; allora il problema di Cauchy

$$m\ddot{x} = f(x)\,, \qquad x(0) = x_0\,, \quad \dot{x}(0) = v_0\,,$$

con x_0, $v_0 \in \boldsymbol{R}$ ha soluzione massimale e questa è unica.
a Esistono casi in cui le soluzioni non sono uniche, ma sono definite su tutto $\boldsymbol{R}$.
b È sicuramente unica solo se $x_0 \neq 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Sia $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Consideriamo due moti x_1, $x_2 \in C^2(\boldsymbol{R})$ entrambi soluzioni dell'equazione di moto. Dire in quali ipotesi i due moti hanno la stessa orbita nel piano delle fasi.
a Se hanno lo stesso livello energetico, ossia se

$$W(x_1, \dot{x}_1) = W(x_2, \dot{x}_2)\,.$$

b Se esiste un istante $\bar{t}$ tale che

$$x_1(0) = x_2(\bar{t})\,, \qquad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(\bar{t})\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Sia $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Assumiamo che

$$U(x) > U(-L) = U(L)\,, \qquad -L < x < L\,,$$

per un dato $L > 0$.
a Esiste almeno un punto di equilibrio stabile in $(-L, L)$.
b Esiste un unico punto di equilibrio in $(-L, L)$.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando la base di un cono omogeneo circolare retto a una delle due basi di un cilindro omogeneo circolare retto in modo che l'asse di simmetria del cono e quello del cilindro siano coincidenti. Il cilindro e il cono hanno stessa massa, stesso raggio di base e stessa altezza. Il corpo si muove di moto sferico e il vincolo è stato realizzato mediante un giunto ideale. La sola sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso.
16 Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del corpo, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?
a La componente della velocità angolare relativa all'asse verticale passante per il centro di massa del corpo.
b La componente della velocità angolare relativa all'asse di simmetria del corpo.
c Nessuna delle precedenti.
17 Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del corpo, che moto esibisce il corpo se l'atto di moto iniziale è nullo e nella configurazione iniziale l'asse di simmetria del corpo forma un angolo di ampiezza $\pi/3$ con la retta verticale passante per il centro di massa del corpo?
a Un moto rotatorio attorno a un asse orizzontale passante per il centro di massa.
b Un moto rotatorio attorno all'asse verticale passante per il centro di massa.
c Nessuna delle precedenti.
18 Supponendo che il polo del moto sia il vertice del cono, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?
a L'energia cinetica.
b L'energia meccanica totale.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 11/01/2021 II

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 11/01/2021 II

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza L e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1 \sin(\beta t) + x_2 \cos(\beta t) = 0 \,,$$

ove $\beta > 0$ è costante. Inoltre il centro G di AB deve avere quota $x_{3G} = 0$.
Sull'asta agisce la forza (applicata in G)

$$\boldsymbol{F}_G = -k|\boldsymbol{X}_G|^2 \boldsymbol{X}_G \,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(r, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che se

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

allora

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = L(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_3) \,, \quad \boldsymbol{X}_G = r\boldsymbol{u}_1 \,.$$

Sotto $\boldsymbol{X}_O$ denota l'origine del sistema di riferimento fisso, che ha coordinate (x_h).
01 Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze apparenti sono conservative nel senso lagrangiano e quindi esiste il loro potenziale lagrangiano U^{L}_{app}.
a Sì, e il potenziale è dato da

$$U^{\mathrm{L}}_{app}(r, \varphi) = \frac{m}{2}\beta^2\Big(r^2 + \frac{L^2}{12}\cos^2\varphi\Big) \,.$$

b No, le forze apparenti non sono conservative in senso lagrangiano.
c Nessuna delle precedenti.
02 Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze direttamente applicate ammettono potenziale lagrangiano.
a Sì ed esso vale

$$U^{\mathrm{L}}_{da} = -\frac{k}{4}(r^4 + L^2 r^2 \cos^4\varphi) \,.$$

b Sì ed esso vale

$$U^{\mathrm{L}}_{da} = -\frac{k}{4} r^4 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
03 Esistono posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $r = 0$.
a Sì e sono sempre instabili.
b Sì e sono stabili per una opportuna scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,,$$

ove R, $h > 0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea.
Il vincolo è scabro.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \gamma x_2 \boldsymbol{T} - \delta \boldsymbol{N} \,,$$

con γ, $\delta > 0$ costanti. Qui (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca dell'elica, che viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R \cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{B}(s) &= \alpha h \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h \cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

e la curvatura $k(s) = R\alpha^2$.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Si supponga $\dot{s} \neq 0$ e che la reazione vincolare soddisfi

$$|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| = \mu |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Allora l'equazione di moto è:

a

$$m\ddot{s} = \gamma R \sin(\alpha s) - \mu \,\mathrm{sign}(\dot{s})(\dot{s}^2 m k + \delta) \,.$$

b

$$m\ddot{s} = \gamma R \sin(\alpha s) - \mu\delta \,\mathrm{sign}(\dot{s}) \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{05}}$ Si supponga che $s(0) = \pi/(2\alpha)$, $\dot{s}(0) = 0$, e che la reazione vincolare soddisfi all'equilibrio

$$|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| \leq \mu_s |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| \,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Allora il punto materiale resta in equilibrio.

a Sì, ma solo se $R \geq R_0$ con $R_0 > 0$ opportuno.

b Sì, ma solo se $\mu_s \geq \mu^0$ con $\mu^0 > 0$ opportuno.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{06}}$ Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0 < 0$, e che la reazione vincolare soddisfi, se $\dot{s} \neq 0$,

$$|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| = \mu |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| \,,$$

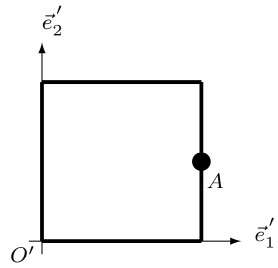
con $\mu > 0$ costante. Dire quale delle seguenti proprietà soddisfa $s(t)$.

a Se $\mu\delta > \gamma R$, vale $\dot{s}(t) \to 0$ per $t \to t_0-$, con $t_0 < +\infty$.

b Vale in ogni caso $\dot{s}(t) < 0$ per ogni $t \in (0, +\infty)$.

c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando l'elemento A di massa M a una lamina rigida omogenea di forma quadrata di massa M e lato $2L$. In figura è rappresentato il corpo assieme al riferimento solidale $\{O', \vec{e}^{\,\prime}_i\}$. Si nota che $\overrightarrow{O'A} = 2L\vec{e}^{\,\prime}_1 + L\vec{e}^{\,\prime}_2$.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo O' sull'asse fisso 1 e l'asse 3 solidale costantemente parallelo all'omologo asse fisso 3. Come coordinate lagrangiane si possono usare la coordinata cartesiana 1 di O' e l'anomalia φ individuata dall'asse fisso 1 e dall'asse solidale 1 orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.

$\boxed{\textbf{07}}$ Quanto valgono le coordinate del centro di massa del corpo rispetto al riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i'\}$?

a $\left(\frac{3}{2}L, \frac{1}{2}L, 0\right)$.

b $\left(\frac{3}{2}L, L, 0\right)$.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{08}}$ Quanto valgono i momenti principali d'inerzia del corpo rispetto a O'?

a $\frac{1}{3}(10-3\sqrt{5})ML^2$, $\frac{1}{3}(10+3\sqrt{5})ML^2$, $\frac{23}{3}ML^2$.

b $\frac{1}{6}(23-9\sqrt{5})ML^2$, $\frac{1}{6}(23+9\sqrt{5})ML^2$, $\frac{23}{3}ML^2$.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{09}}$ Quanto vale il momento angolare del corpo calcolato usando come polo di riduzione il centro di massa?

a $\frac{7}{6}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.

b $\frac{79}{6}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.

c Nessuna delle precedenti.

I.4 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, …, $(\boldsymbol{X}_n, m_n)$ è soggetto ai vincoli olonomi

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,,$$

con $\boldsymbol{f} \in C^3(\boldsymbol{R}^{3n+1})$, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m$, $1 \le m < 3n$; qui denotiamo

$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n) = (z_1, \dots, z_{3n}) \in \boldsymbol{R}^{3n}\,.$$

Si supponga che il vincolo sia olonomo regolare.

$\boxed{\textbf{10}}$ Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ coincide con quello degli spostamenti effettivi.

a Sì se $\ell = 1$.

b Sì se $\boldsymbol{f}$ non dipende da t.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{11}}$ Supponiamo che $n = 6$ e che, scelta la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t) = (\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t), \dots, \boldsymbol{X}_6^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t))\,,$$

si sappia che per ogni $h = 1, \dots, \ell$, vale

$$\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\text{L}}}{\partial q_h} = \mathbf{f}_{\text{vin}}{}^{i+1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_{i+1}^{\text{L}}}{\partial q_h} \,,$$

$i = 1, 3, 5$. Vale allora l'ipotesi dei lavori virtuali?
a Sicuramente no.
b Sicuramente sì.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che i vincoli siano fissi, ossia che $\boldsymbol{f}$ non dipenda esplicitamente da t.
Sia scelta una parametrizzazione lagrangiana $\boldsymbol{z}^{\text{L}} : Q \to \boldsymbol{R}^{n_c}$. Sia $\boldsymbol{q} : \boldsymbol{R} \to Q$ un moto lagrangiano.
a Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ ove $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^{\text{L}}(\boldsymbol{q}(t))$ è di fatto indipendente dal tempo t.
b Se $\boldsymbol{q}(t_1) \neq \boldsymbol{q}(t_2)$, e $\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{z}^{\text{L}}(\boldsymbol{q}(t_i))$, $i = 1, 2$, allora certamente $V_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} \neq V_{\boldsymbol{z}_2,t_2}\boldsymbol{f}$.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Si consideri un moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x) \,,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Indichiamo con (x, p) le coordinate nel relativo piano delle fasi, ossia $p = \dot{x}$.
Indichiamo l'energia meccanica con

$$W(x, p) = \frac{m}{2} p^2 - U(x) \,, \qquad \text{ove} \quad U'(x) = f(x) \,.$$

$\boxed{\mathbf{13}}$ Il problema di Cauchy

$$m\ddot{x} = f(x) \,, \qquad x(0) = x_0 \,, \quad \dot{x}(0) = v_0 \,,$$

con x_0, $v_0 \in \boldsymbol{R}$ ha soluzione massimale e questa è unica. Quale dei seguenti intervalli può esserne l'intervallo di definizione?
a $[-1, +\infty)$.
b $(-1,1)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Consideriamo due moti x_1, $x_2 \in C^2(\boldsymbol{R})$ entrambi soluzioni dell'equazione di moto. Dire in quali ipotesi i due moti hanno la stessa orbita nel piano delle fasi.
a Se hanno lo stesso livello energetico in un certo istante, ossia se per $\bar{t}$ opportuno

$$W(x_1(\bar{t}), \dot{x}_1(\bar{t})) = W(x_2(\bar{t}), \dot{x}_2(\bar{t})) \,.$$

b Se le due orbite hanno un punto in comune.

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Assumiamo che

$$U(x) > U(-L) = U(L) \,, \qquad -L < x < L \,,$$

per un dato $L > 0$.
a Se esiste un solo punto di equilibrio in $(-L, L)$, allora esso è stabile.
b Esistono al più due punti di equilibrio in $(-L, L)$.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando la base di un cono omogeneo circolare retto a una delle due basi di un cilindro omogeneo circolare retto in modo che l'asse di simmetria del cono e quello del cilindro siano coincidenti. Il cilindro e il cono hanno stessa massa, stesso raggio di base e stessa altezza. Il corpo si muove di moto sferico e il vincolo è stato realizzato mediante un giunto ideale. La sola sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Supponendo che il polo del moto sia il vertice del cono, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?
a Il momento angolare calcolato usando il vertice del cono come polo di riduzione.
b La quantità di moto totale del corpo.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del corpo, che moto esibisce il corpo se la velocità angolare iniziale forma un angolo di ampiezza $\pi/4$ con l'asse di simmetria del corpo?
a Un moto di precessione.
b Un moto rotatorio.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del cilindro, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?
a L'energia cinetica.
b L'energia meccanica totale.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 11/01/2021 III

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 11/01/2021 III

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$x_1 \sin(\beta t) - x_2 \cos(\beta t) = 0 \,,$$

ove $\beta > 0$ è costante. Inoltre il centro G di AB deve avere quota $x_{3G} = 0$. Sull'asta agisce la forza (applicata in B)

$$\boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{X}_B \,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(r, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

allora

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_3) \,, \quad \boldsymbol{X}_G = r\boldsymbol{u}_1 \,.$$

Sotto $\boldsymbol{X}_O$ denota l'origine del sistema di riferimento fisso, che ha coordinate (x_h).

$\boxed{\textbf{01}}$ Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze apparenti sono conservative nel senso lagrangiano e quindi esiste il loro potenziale lagrangiano U^{L}_{app}.

a Sì, e il potenziale è dato da

$$U^{\mathrm{L}}_{app}(r, \varphi) = \frac{m}{2}\beta^2\Big(r^2 + \frac{L^2}{3}\Big) \,.$$

b No, le forze apparenti non sono conservative in senso lagrangiano.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{02}}$ Nel sistema fisso di riferimento le forze direttamente applicate ammettono potenziale lagrangiano.

a Sì ed esso può essere preso uguale a

$$U^{\mathrm{L}}_{da} = -\frac{k}{2}(r^2 + 2rL\cos\varphi) \,.$$

b Sì ed esso può essere preso uguale a

$$U^{\mathrm{L}}_{da} = -\frac{k}{2}(r^2 + 2rL\sin\varphi) \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{03}}$ Dire quali delle seguenti espressioni dà l'energia cinetica dell'asta nel sistema fisso di riferimento. Qui I è il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse ad essa ortogonale nel suo centro.

a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\beta^2) + \frac{I}{2}(\dot{\varphi}^2 + \beta^2(\sin\varphi)^2) \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\beta^2) + \frac{I}{2}(\dot{\varphi}^2 + \beta^2(\cos\varphi)^2)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove R, $h > 0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea.
Il vincolo è scabro.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \gamma x_3 \boldsymbol{T} + \delta \boldsymbol{B}\,,$$

con γ, $\delta > 0$ costanti. Qui (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca dell'elica, che viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{B}(s) &= \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e la curvatura $k(s) = R\alpha^2$.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Si supponga $\dot{s} \neq 0$ e che la reazione vincolare soddisfi

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Allora l'equazione di moto è:
a

$$m\ddot{s} = \gamma h\alpha s - \mu\,\mathrm{sign}(\dot{s})\sqrt{\dot{s}^4 m^2 k^2 + \delta^2}\,.$$

b

$$m\ddot{s} = \gamma R\cos(\alpha s) - \mu\,\mathrm{sign}(\dot{s})\sqrt{\dot{s}^4 m^2 k^2 + \delta^2}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Si supponga che $s(0) = 1/\alpha$, $\dot{s}(0) = 0$, e che la reazione vincolare soddisfi all'equilibrio

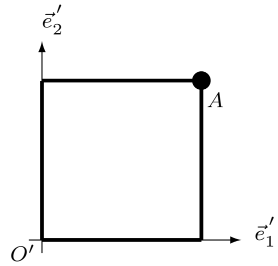
$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu_s|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Allora il punto materiale resta in equilibrio.
a Sì, se $0 < h \leq h_0$ con $h_0 > 0$ opportuno.
b Sì, se $R \geq R_0$ con $R_0 > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0 > 0$, e che la reazione vincolare soddisfi, se $\dot{s} \neq 0$,

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Dire quale delle seguenti proprietà soddisfa $s(t)$.
a Esistono scelte dei parametri μ, h, R, γ, δ tali che $\ddot{s}(t) > 0$ per $t \in (0, \bar{t})$, con $\bar{t} > 0$ opportuno.
b Il moto è indipendente dal valore di μ.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando l'elemento A di massa M a una lamina rigida omogenea di forma quadrata di massa M e lato $2L$. In figura è rappresentato il corpo assieme al riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i^{\,\prime}\}$. Si nota che $\overrightarrow{O'A} = 2L\vec{e}_1^{\,\prime} + 2L\vec{e}_2^{\,\prime}$.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo O' sull'asse fisso 1 e l'asse 3 solidale costantemente parallelo all'omologo asse fisso 3. Come coordinate lagrangiane si possono usare la coordinata cartesiana 1 di O' e l'anomalia φ individuata dall'asse fisso 1 e dall'asse solidale 1 orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.
$\boxed{\textbf{07}}$ Quanto valgono le coordinate del centro di massa del corpo rispetto al riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i^{\,\prime}\}$?
a $\left(\frac{3}{2}L, \frac{3}{2}L, 0\right)$.
b $\left(\frac{3}{2}L, L, 0\right)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Quanto valgono i momenti principali d'inerzia del corpo relativi agli assi principali che giacciono nel piano del corpo e passano per O'?
a $\frac{1}{3}(10 - 3\sqrt{5})ML^2$, $\frac{1}{3}(10 + 3\sqrt{5})ML^2$.
b $\frac{1}{3}ML^2$, $\frac{31}{3}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ Quanto vale il momento angolare del corpo calcolato usando come polo di riduzione il centro di massa?
a $\frac{47}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
b $\frac{7}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, …, $(\boldsymbol{X}_n, m_n)$ è soggetto ai vincoli olonomi

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,,$$

con $\boldsymbol{f} \in C^3(\boldsymbol{R}^{3n+1})$, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m$, $1 \leq m < 3n$; qui denotiamo

$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n) = (z_1, \dots, z_{3n}) \in \boldsymbol{R}^{3n} .$$

Si supponga che il vincolo sia olonomo regolare.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ è indipendente dalla scelta delle coordinate lagrangiane.

a Sì.

b Non in generale, ma è vero se i vincoli sono fissi.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che $n = 6$ e che, scelta la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t) = (\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t), \dots, \boldsymbol{X}_6^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t)) ,$$

si sappia che per ogni $h = 1, \dots, \ell$, vale

$$\mathbf{f_{vin}}^{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} = -\mathbf{f_{vin}}^{6-i+1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_{6-i+1}^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} ,$$

$i = 1, 2, 3$. Vale allora l'ipotesi dei lavori virtuali?

a Sicuramente sì.

b Sicuramente no.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che i vincoli siano fissi, ossia che $\boldsymbol{f}$ non dipenda esplicitamente da t.

a Lo spazio degli spostamenti effettivi coincide con lo spazio normale.

b Lo spazio degli spostamenti effettivi è uno spazio vettoriale.

c Nessuna delle precedenti.

I.5 Si consideri un moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x) .$$

Sia $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Sia

$$\inf_{x \in \boldsymbol{R}} U(x) > -\infty ,$$

e si consideri l'orbita del piano delle fasi corrispondente al livello energetico $E \in \boldsymbol{R}$.

a Esistono E per cui l'orbita è illimitata, ma in genere non sono tutti i valori $E \in \boldsymbol{R}$.

b Per tutti i valori di E l'orbita è illimitata.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Se due moti x_1 e x_2 hanno la stessa orbita nel piano delle fasi, allora esiste $T \in \boldsymbol{R}$ tale che $x_1(t + T) = x_2(t)$ per i t per cui è definito x_2.

a Non in generale, ma può verificarsi.

b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Assumiamo che

$$U(x) > U(-L) = U(L)\,, \qquad -L < x < L\,,$$

per un dato $L > 0$.
a Se esiste al massimo un numero finito di punti di equilibrio in $(-L, L)$, allora almeno uno di essi è stabile.
b Esistono almeno due punti di equilibrio in $(-L, L)$.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando il vertice di un cono omogeneo circolare retto al centro di una delle due basi di un cilindro omogeneo circolare retto in modo che l'asse di simmetria del cono e quello del cilindro siano coincidenti. Il cilindro e il cono hanno stessa massa, stesso raggio di base e stessa altezza. Il corpo si muove di moto sferico e il vincolo è stato realizzato mediante un giunto ideale. La sola sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del corpo, che moto esibisce il corpo se l'atto di moto iniziale è nullo e nella configurazione iniziale l'asse di simmetria del corpo forma un angolo di ampiezza $\pi/6$ con la retta verticale passante per il centro di massa del corpo?
a Un moto rotatorio attorno a un asse orizzontale passante per il centro di massa.
b Un moto rotatorio attorno all'asse verticale passante per il centro di massa.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Supponendo che il polo del moto sia il vertice del cono, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?
a L'energia cinetica.
b L'energia meccanica totale.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del corpo, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?
a La componente della velocità angolare relativa all'asse verticale passante per il centro di massa del corpo.
b La componente della velocità angolare relativa all'asse di simmetria del corpo.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 08/02/2021 (1)

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 08/02/2021 (1)

I.1 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$ e $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ sono soggetti ai vincoli:

- $\boldsymbol{X}_1$ appartiene al paraboloide S dato da

$$x_3 = -a(x_1^2 + x_2^2) \,, \qquad (x_1, x_2) \neq (0{,}0) \,;$$

- i due punti $\boldsymbol{X}_i$ hanno la stessa quota x_3;
- $\boldsymbol{X}_2$ appartiene all'asse x_3.

Sui due punti agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e le forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_{\text{el1}} = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) = -\boldsymbol{F}_{\text{el2}} \,.$$

Qui a, $k > 0$ sono costanti, e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso.

$\boxed{\textbf{01}}$ Dire quale delle seguenti parametrizzazioni lagrangiane è valida.

a

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = \sqrt{\frac{|z|}{a}} \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sqrt{\frac{|z|}{a}} \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 \,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = z\boldsymbol{e}_3 \,,$$

$(\varphi, z) \in (-\pi, \pi) \times (-\infty, 0)$.

b

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = r\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 - ar^2\boldsymbol{e}_3 \,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = ar^2\boldsymbol{e}_3 \,,$$

$(\varphi, r) \in (-\pi, \pi) \times (0, +\infty)$.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{02}}$ Dire quale è il potenziale lagrangiano del sistema, nelle coordinate lagrangiane $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0{,}0)\}$ di $\boldsymbol{X}_1$.

a

$$U^{\text{L}}(x_1, x_2) = \frac{k}{2} a(x_1^2 + x_2^2) + m_1 ga(x_1^2 + x_2^2) + m_2 ga(x_1^2 + x_2^2) \,.$$

b

$$U^{\text{L}}(x_1, x_2) = -\frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) + (m_1 + m_2) ga(x_1^2 + x_2^2) \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{03}}$ Le equazioni di moto nelle coordinate $(s, \theta) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = \frac{s}{\sqrt{a}} \cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \frac{s}{\sqrt{a}} \sin\theta \boldsymbol{e}_2 - s^2\boldsymbol{e}_3 \,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = -s^2\boldsymbol{e}_3 \,,$$

sono date da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\dot{s}}{a}(m_1 + 4m_1 a s^2 + 4m_2 a s^2)\Big] - 4m_1 \dot{s}^2 s - \frac{m_1}{a} s\dot{\theta}^2 - 4m_2 s\dot{s}^2 \\ + \Big(\frac{k}{a} - 2(m_1+m_2)g\Big)s = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{m_1}{a}s^2\dot{\theta}\Big] = 0\,.$$

Sono possibili moti (diversi dalla quiete) in cui i punti restino a quota x_3 costante?
a Sì, è sufficiente che $m_1 = m_2$.
b Sì, se $k > k_0$ opportuno, con k_0 dipendente dagli altri parametri.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie sferica S parametrizzata da

$$\boldsymbol{r}(\varphi,\theta) = R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,,$$

ove $(\varphi,\theta) \in (-\pi,\pi)\times(0,\pi)$ si prendono come coordinate lagrangiane e $R > 0$. Il vincolo è scabro.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Supponiamo che sul punto non agiscano forze direttamente applicate e che valga la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico, con coefficiente d'attrito $\mu > 0$. Le equazioni di moto sono allora

$$R^2(\sin\theta)^2\ddot{\varphi} = -2R^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} - \mu R^2\sqrt{(\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2}(\sin\theta)^2\dot{\varphi}\,,$$

$$R^2\ddot{\theta} = R^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 - \mu R^2\sqrt{(\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2}\dot{\theta}\,.$$

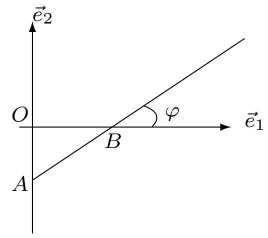
È possibile un moto diverso dalla quiete a quota x_3 costante?
a Sì, ma solo se $\theta = \pi/2$.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Nelle ipotesi della domanda precedente, è possibile un moto diverso dalla quiete con φ costante?
a Sì, ma solo se $\varphi = 0$.
b Sì, per ogni $\varphi \in (-\pi,\pi)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Supponiamo che il punto sia fermo e su di esso sia applicata la forza $\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{e}_2$, con $k > 0$. Vale la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico, ossia

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \le \mu_s|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Dire quale dei seguenti è l'insieme delle posizioni di equilibrio.

a $S \cap \{x_2 \geq r_0\}$, con $r_0 \in (0, R)$ opportuno.
b $S \cap \{|x_2| \leq r_0\}$, con $r_0 \in (0, R)$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un corpo rigido piano è stato ottenuto saldando una sbarretta omogenea di massa M e lunghezza $2R$ su un diametro di un disco omogeneo di medesima massa M e raggio R. Gli estremi della sbarretta, che ovviamente appartengono al bordo del disco, sono indicati con A e B.
Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ con A vincolato a scorrere sull'asse 2, verticale ascendente, e B sull'asse 1. Come coordinata lagrangiana si usa l'anomalia φ orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3 e indicata in figura.



Si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{07}}$ Quanto valgono i momenti principali di inerzia relativi al punto A?
a $\frac{1}{4}MR^2$, $\frac{31}{12}MR^2$, $\frac{17}{6}MR^2$.
b $\frac{1}{4}MR^2$, $\frac{5}{4}MR^2$, $\frac{3}{2}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento fisso?
a $\frac{31}{24}MR^2\dot{\varphi}^2$.
b $\frac{5}{6}MR^2\dot{\varphi}^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ Quanto vale il momento della sollecitazione peso agente sul corpo rispetto al polo O?
a $-2MgR\cos\varphi\vec{e}_3$.
b $2MgR\cos\varphi\vec{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si considerino due sistemi mobili di riferimento $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ e $\Sigma = (\boldsymbol{X}_\Omega, \mathcal{N})$. Qui $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ e $\boldsymbol{v}_\mathcal{S}$, $\boldsymbol{v}_\Sigma$ denotano le velocità di $\boldsymbol{X}$ relative rispettivamente a $\mathcal{S}$ e a Σ.
$\boxed{\textbf{10}}$ Dire quale delle seguenti formule è valida per un qualunque moto $\boldsymbol{X} \in C^2(I)$.
a
$$\boldsymbol{v}_\mathcal{S} = \boldsymbol{v}_{\Omega,\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_\Omega) + \boldsymbol{v}_\Sigma\,.$$

b

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{v}_{\Omega,\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O) + \boldsymbol{v}_{\Sigma} \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{11}}$ Supponiamo che

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \alpha \boldsymbol{u}_1 \,, \quad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = k\boldsymbol{u}_1 \,, \quad \boldsymbol{v}_{\Omega,\mathcal{S}} = 0 \,.$$

Qui α, $k > 0$ sono costanti.

È possibile che il moto $\boldsymbol{X}$ sia solidale a Σ?

a Sì, ma non per tutti i valori di α, $k > 0$.

b No, per nessuna scelta di α, $k > 0$.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{12}}$ Si sa che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = k \cos(\alpha t) \boldsymbol{u}_1(t) \,,$$

con k, $\alpha > 0$ costanti. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

a Il moto di $\mathcal{M}$ rispetto a $\mathcal{N}$ è una rotazione.

b Il vettore $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ è un vettore costante in $\mathcal{N}$.

c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un punto si muove soggetto all'equazione di moto

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) \,.$$

$\boxed{\textbf{13}}$ Supponiamo che per un'opportuna $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$ valga

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \nabla U(\boldsymbol{X}) \,,$$

con $\nabla U(0) = 0$.

Dire in quale caso si possono definire le piccole oscillazioni in $\boldsymbol{x} = 0$. Qui α_1, α_2, $\alpha_3 > 0$ sono costanti.

a

$$U(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 \,.$$

b

$$U(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 x_1^4 + \alpha_2 x_2^4 + \alpha_3 x_3^4 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{14}}$ Se tutti i punti $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ sono di equilibrio, cioè se

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, 0) = 0 \,, \qquad \text{per ogni } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3,$$

allora esistono punti di equilibrio instabile.

a No, possono anche essere tutti di equilibrio stabile.

b Sì, esistono almeno 2 diversi punti di equilibrio instabile.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) = \nabla U(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}),$$

con $U \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$, $\boldsymbol{h} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^6)$, e che $\nabla U(0) = 0$.
In quale dei seguenti casi $\boldsymbol{x} = 0$ è di equilibrio stabile?
a Se $\det D^2U(0) > 0$, $D^2U(0)$ ha un autovalore negativo e per $\beta > 0$ costante

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) = -\beta \dot{\boldsymbol{X}}.$$

b Se $D^2U(0) = \mathrm{diag}(-1, -2, -3)$ e per $\beta > 0$ costante

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) = -\beta |\boldsymbol{X}|^2 \dot{\boldsymbol{X}}.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando un elemento di massa M al punto A del bordo di un disco omogeneo di massa M. Il corpo è vincolato a muoversi in un piano verticale fisso rispetto all'osservatore terrestre mantenendosi a contatto dall'esterno con una guida circolare giacente nel medesimo piano. L'atto di moto è in ogni istante con assenza di strisciamento.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera.
a L'atto di moto è in ogni istante rotatorio e il centro di istantanea rotazione è il punto di contatto tra corpo e guida.
b L'atto di moto è in ogni istante rotatorio e il centro di istantanea rotazione è il punto A.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera.
a La centroide fissa (base) coincide con il bordo del disco.
b La centroide fissa (base) è un curva degenere coincidente con il centro della guida.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento fisso?
a $\frac{1}{2}I\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e I il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro di massa del corpo e ortogonale al corpo stesso.
b $\frac{1}{2}J\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e J il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il punto di contatto e ortogonale al corpo stesso.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 08/02/2021 (2)

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 08/02/2021 (2)

I.1 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$ e $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ sono soggetti ai vincoli:

- $\boldsymbol{X}_2$ appartiene al cono S dato da
$$x_3 = -a\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, \qquad (x_1, x_2) \neq (0{,}0)\,;$$
- i due punti $\boldsymbol{X}_i$ hanno la stessa quota x_3;
- $\boldsymbol{X}_1$ appartiene all'asse x_3.

Sui due punti agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e le forze elastiche
$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{el1}} = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{el2}}\,.$$
Qui a, $k > 0$ sono costanti, e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso.

$\boxed{\mathbf{01}}$ Dire quale delle seguenti parametrizzazioni lagrangiane è valida.

a
$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} = -a\sqrt{r}\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}} = r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 - a\sqrt{r}\boldsymbol{e}_3\,,$$
$(\varphi, r) \in (-\pi, \pi) \times (0, +\infty)$.

b
$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} = z\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}} = \frac{|z|}{a}\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \frac{|z|}{a}\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\,,$$
$(\varphi, z) \in (-\pi, \pi) \times (-\infty, 0)$.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{02}}$ Dire quale è il potenziale lagrangiano del sistema, ammettendo che una delle coordinate lagrangiane sia la $z = x_3 < 0$ di $\boldsymbol{X}_1$.

a
$$U^{\mathrm{L}} = -\frac{k}{2}\Big(\frac{z}{a}\Big)^2 - m_1 g z - m_2 g z\,.$$

b
$$U^{\mathrm{L}} = -\frac{k}{2}\Big(\frac{z}{a}\Big)^2 - m_1 g z - \frac{k}{2}\Big(\frac{z}{a}\Big)^2 - m_2 g z\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{03}}$ Le equazioni di moto nelle coordinate $(s, \theta) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$ tali che
$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} = -s\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}} = \frac{s}{a}\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \frac{s}{a}\sin\theta\boldsymbol{e}_2 - s\boldsymbol{e}_3\,,$$
sono date da
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\dot{s}}{a^2}(m_1 a^2 + m_2(1 + a^2))\Big] - \frac{m_2}{a^2}s\dot{\theta}^2 + \frac{k}{a^2}s - (m_1 + m_2)g = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{m_2}{a^2}s^2\dot{\theta}\Big] = 0\,.$$

Sono possibili moti (diversi dalla quiete) in cui i punti restino a quota x_3 costante?
a Sì, se $x_3 > -s_0$ opportuno, con s_0 dipendente dai parametri.
b Sì, se $x_3 < -s_0$ opportuno, con s_0 dipendente dai parametri.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie sferica S parametrizzata da

$$\boldsymbol{r}(\varphi, \theta) = R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,,$$

ove $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi)\times(0, \pi)$ si prendono come coordinate lagrangiane e $R > 0$. Il vincolo è scabro.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Supponiamo che valga la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico, con coefficiente d'attrito $\mu > 0$. Sul punto agisce una forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ tale che le equazioni di moto siano, per una opportuna $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ determinata da $\boldsymbol{F}$,

$$\begin{aligned} R^2(\sin\theta)^2\ddot\varphi &= -2R^2\sin\theta\cos\theta\dot\varphi\dot\theta - \mu R^2\sqrt{(\sin\theta)^2\dot\varphi^2 + \dot\theta^2}(\sin\theta)^2\dot\varphi\,,\\ R^2\ddot\theta &= R^2\sin\theta\cos\theta\dot\varphi^2 + f(\theta) - \mu R^2\sqrt{(\sin\theta)^2\dot\varphi^2 + \dot\theta^2}\dot\theta\,. \end{aligned}$$

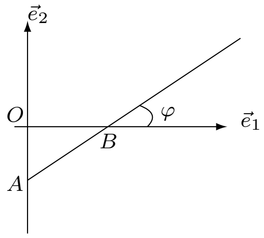
È possibile un moto diverso dalla quiete a una quota $x_3 \neq 0$ costante?
a Sì, per ogni $R > |x_3| > 0$ esiste un'opportuna scelta di $f(\theta)$ che rende possibile quel moto.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Nelle ipotesi della domanda precedente (e quindi con le stesse equazioni di moto), è possibile un moto diverso dalla quiete con φ costante?
a Se $(\varphi_0, \theta(t))$ è un moto, allora $\varphi_0 = 0$.
b Se $(\varphi_0, \theta(t))$ è un moto, allora $f(\varphi_0) = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Supponiamo che il punto sia fermo e su di esso sia applicata la forza $\boldsymbol{F} = kx_2\boldsymbol{e}_2$, con $k > 0$ costante. Vale la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico, ossia

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| \leq \mu_s|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta per l'insieme delle posizioni di equilibrio su S.
a L'insieme delle posizioni di equilibrio non coincide mai con tutta la sfera.
b L'insieme delle posizioni di equilibrio coincide con tutta la sfera se k è abbastanza grande.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un corpo rigido piano è stato ottenuto saldando una sbarretta omogenea di massa M e lunghezza $\sqrt{2}L$ sulla diagonale di una lamina omogenea

quadrata di medesima massa M e lato di lunghezza L. Gli estremi della sbarretta, che ovviamente coincidono con due vertici del quadrato, sono indicati con A e B.
Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ con A vincolato a scorrere sull'asse 2, verticale ascendente, e B sull'asse 1. Come coordinata lagrangiana si usa l'anomalia φ orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3 e indicata in figura.



Si risponda alle seguenti domande:
$\boxed{\textbf{07}}$ Quanto valgono i momenti principali di inerzia relativi al punto A?
a $\frac{1}{12}ML^2$, $\frac{7}{12}ML^2$, $\frac{8}{12}ML^2$.
b $\frac{1}{12}ML^2$, $\frac{5}{4}ML^2$, $\frac{4}{3}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento fisso?
a $\frac{1}{24}ML^2\dot{\varphi}^2$.
b $\frac{7}{24}ML^2\dot{\varphi}^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ Quanto vale il momento della sollecitazione peso agente sul corpo rispetto al polo O?
a $\sqrt{2}MgL\cos\varphi\vec{e}_3$.
b $-\sqrt{2}MgL\cos\varphi\vec{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si considerino due sistemi mobili di riferimento $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ e $\Sigma = (\boldsymbol{X}_\Omega, \mathcal{N})$. Qui $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ e $\boldsymbol{v}_\mathcal{S}$, $\boldsymbol{v}_\Sigma$ denotano le velocità di $\boldsymbol{X}$ relative rispettivamente a $\mathcal{S}$ e a Σ.
$\boxed{\textbf{10}}$ Dire quale delle seguenti formule è valida per un qualunque moto $\boldsymbol{X} \in C^2(I)$.
a

$$\boldsymbol{v}_\mathcal{S} = \boldsymbol{v}_{\Omega,\Sigma} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_\Omega) + \boldsymbol{v}_\Sigma\,.$$

b

$$\boldsymbol{v}_\mathcal{S} = \boldsymbol{v}_{O,\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_\Omega) + \boldsymbol{v}_\Sigma\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{11}}$ Supponiamo che

$$\boldsymbol{v}_\Sigma = \alpha\boldsymbol{w}_3\,, \quad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} = k\boldsymbol{w}_3\,, \quad \boldsymbol{v}_{\Omega,\mathcal{S}} = 0\,.$$

Qui α, $k \in \boldsymbol{R}$.
È possibile che il moto $\boldsymbol{X}$ sia solidale a $\mathcal{S}$?
a Sì, ma solo se $\alpha = 0$.
b Sì, anche per certi valori tali che $\alpha \neq 0$ e $k \neq 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Si sa che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = 3\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\,.$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.
a Non esistono funzioni vettoriali non nulle che siano costanti sia in $\mathcal{M}$ che in $\mathcal{N}$.
b Il vettore $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ è un vettore costante in $\mathcal{N}$.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un punto si muove soggetto all'equazione di moto

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})\,.$$

$\boxed{\mathbf{13}}$ Supponiamo che per un'opportuna $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$ valga

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \nabla U(\boldsymbol{X})\,,$$

con $\nabla U(0) = 0$.
Dire in quale caso il punto $\boldsymbol{x} = 0$ è sicuramente di equilibrio stabile. Qui $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ sono costanti.
a

$$-\alpha_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leq U(\boldsymbol{x}) \leq -\alpha_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\,.$$

b

$$\lim_{(x_1,x_2,x_3)\to 0} \frac{U(\boldsymbol{x})}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Se

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\dot{\boldsymbol{X}})\,,$$

ossia se $\boldsymbol{F}$ dipende solo dalla velocità, allora i punti di $\boldsymbol{R}^3$ sono tutti di equilibrio stabile o sono tutti di equilibrio instabile.
a Sì.
b No, esistono sempre punti di equilibrio instabile e altri di equilibrio stabile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) = \nabla U(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})\,,$$

con $U \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$, $\boldsymbol{h} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^6)$, e che $\nabla U(0) = 0$.
In quale dei seguenti casi è possibile che $\boldsymbol{x} = 0$ sia di equilibrio stabile?

a Se $\det D^2U(0) < 0$, e per $\beta > 0$ costante

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) = -\beta |\boldsymbol{X}|^4 \dot{\boldsymbol{X}} .$$

b Se $\det D^2U(0) > 0$, e per $\beta > 0$ costante

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) = 0 .$$

c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando un elemento di massa M al punto A del bordo di un disco omogeneo di massa M. Il corpo è vincolato a muoversi in un piano verticale fisso rispetto all'osservatore terrestre mantenendosi a contatto dall'interno con una guida circolare giacente nel medesimo piano. L'atto di moto è in ogni istante con assenza di strisciamento.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera.
a L'atto di moto è in ogni istante elicoidale e l'asse del moto è tangente alla guida nel punto di contatto tra corpo e guida.
b L'atto di moto è in ogni istante rotatorio e il centro di istantanea rotazione è il punto A.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento del centro di massa?
a $\frac{1}{2}I\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e I il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro di massa del corpo e ortogonale al corpo stesso.
b $\frac{1}{2}J\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e J il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro geometrico del disco e ortogonale al corpo stesso.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera.
a La centroide mobile (rulletta) coincide con il bordo del disco.
b La centroide mobile (rulletta) è un curva degenere coincidente con il centro della guida.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 31/03/2021

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 31/03/2021

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi su una superficie regolare S, data dal piano $x_3 = 0$, ossia

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,.$$

Il vincolo è scabro, secondo la legge

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si supponga $\boldsymbol{v}(t) \neq 0$ per ogni t.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k(x\boldsymbol{e}_1 + \dot{y}\boldsymbol{e}_2 - R\boldsymbol{e}_3)$$

con $k > 0$, $R \geq 0$.
$\boxed{\mathbf{01}}$ Dire quale dei seguenti è il sistema delle equazioni di moto.
a

$$m\ddot{x} = -kx - \mu kR \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \,,$$
$$m\ddot{y} = -k\dot{y} - \mu kR \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \,.$$

b

$$m\ddot{x} = -kx + \mu kR \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \,,$$
$$m\ddot{y} = -k\dot{y} + \mu kR \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dall'energia meccanica del punto definita da

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2} |\boldsymbol{v}(t)|^2 + \frac{k}{2} x(t)^2 \,.$$

a Esistono moti (diversi dalla quiete) per cui $\dot{\mathcal{E}}(t) < -\mu kR |\boldsymbol{v}(t)|$.
b Esistono moti (diversi dalla quiete) per cui $\dot{\mathcal{E}}(t) = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Dire quando è possibile che il moto sia circolare uniforme con traiettoria $x^2 + y^2 = L^2 > 0$.
a Se $R = 0$ per ogni valore di $L > 0$ esiste un tale moto.
b Se $R > 0$ esistono opportuni valori di $L > 0$ per cui esiste un tale moto.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Una lamina ellittica di massa m e semiassi $a > b$ è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G sulla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

ove $(O,(x_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Su di esso agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP}\,\mathrm{d}s\,,$$

ove $\mathrm{d}s$ è la misura di lunghezza sul bordo della lamina e P denota il suo generico punto. Si tratta quindi di una sollecitazione distribuita. Qui $\beta > 0$ è costante e con I_{33} si denota il momento della lamina rispetto all'asse a essa ortogonale in G.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi,\theta) \in (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G = L\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + L\sin\theta \boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{GA} = a\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + a\sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,,$$

ove A è un vertice fissato del bordo della lamina, sull'asse maggiore.
$\boxed{\textbf{04}}$ Dire quale è l'espressione corretta dell'energia cinetica in forma lagrangiana.
a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}(a^2+b^2)\dot\theta^2 + \frac{I_{33}}{2}\dot\varphi^2\,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}L^2\dot\theta^2 - \frac{I_{33}}{2}\dot\varphi^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{05}}$ Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dalle componenti lagrangiane della forza distribuita $\beta \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP}\,\mathrm{d}s$.
a $Q_\varphi > 0$ per ogni (φ,θ).
b $Q_\varphi < 0$ per ogni (φ,θ).
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{06}}$ La componente lagrangiana Q_φ dipende da θ?
a No.
b Solo se a, b, β, L soddisfano una opportuna relazione.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un corpo rigido piano omogeneo di massa M giace nel piano 1–2 ed è delimitato dai medesimi assi e da un arco di parabola di equazione $x_2 = \alpha(x_1-L)^2$ per $x_1 \in [0,L]$, con α e L due numeri positivi. In figura $\overrightarrow{OA} = L\vec{e}_1$ e $\overrightarrow{OB} = \alpha L^2\vec{e}_2$.

Nei punti A e B sono applicate, rispettivamente, le forze $\vec{f}_A = \lambda\vec{e}_2$ e $\vec{f}_B = 2\lambda\vec{e}_1$, con $\lambda > 0$.

Si risponda alle seguenti domande:
$\boxed{\mathbf{07}}$ Quanto vale la coordinata 1 del centro di massa del corpo rispetto al riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i\}$?
a $\frac{3}{4}L$.
b $\frac{1}{4}L$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Quanto vale il prodotto d'inerzia del corpo rispetto agli assi coordinati 1 e 2 del riferimento solidale?
a $-\frac{19}{20}M\alpha L^3$.
b $-\frac{1}{20}M\alpha L^3$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ L'asse della sollecitazione $\{\vec{f}_A, \vec{f}_B\}$ di punti di applicazione A e B è la retta di equazione parametrica
a $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}L(1 - 2\alpha L)$, $x_3 = 0$ con $a \in \mathbb{R}$.
b $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}L(1 - 2\alpha L)$, $x_3 = a$ con $a \in \mathbb{R}$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, e il piano delle fasi (x, p).
$\boxed{\mathbf{10}}$ Se la curva (non chiusa, si noti)

$$\{(x, p) \mid x^2 + p^2 = L^2\,, p > 0\}\,,$$

con $L > 0$ è un'orbita, quale conclusione si può trarre?
a Almeno uno dei due punti $(\pm L{,}0)$ è di equilibrio, ma non necessariamente entrambi.
b Entrambi i punti $(\pm L{,}0)$ sono di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Si assuma che l'orbita $p = p(x)$, $x \in J$, ove J è l'intervallo aperto di definizione della funzione $p(x)$, soddisfi $p(x) > p_0 > 0$ per ogni $x \in J$, per qualche $p_0 > 0$.
a Allora $J = \boldsymbol{R}$.
b Non può esistere un'orbita nelle condizioni descritte.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Se il potenziale U soddisfa $U(x) \to 1$ per $x \to \pm\infty$, e $U(x) > 1$ per ogni x, allora esiste almeno un punto di equilibrio stabile.
a Sì, ne esiste esattamente uno.
b Sicuramente non ne esistono.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi sulla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.

$\boxed{\textbf{13}}$ Dire in quale caso, se il vincolo è liscio, l'energia cinetica si conserva; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$.
a Se la curva è una circonferenza.
b Se la forza soddisfa $\boldsymbol{F} = c_1(s, \dot{s})\boldsymbol{N}(s) + c_2(s, \dot{s})\boldsymbol{B}(s)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{14}}$ Sia il vincolo liscio, la forza sia il peso $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3$, e la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia illimitata nella direzione x_3 sia superiormente che inferiormente.
a Allora tutti i moti sono illimitati.
b La curva può avere geometria tale che tutti i moti sono limitati.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{15}}$ Il vincolo sia scabro, con

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si assuma sempre $\dot{s} > 0$, e anche che $\boldsymbol{F}$ sia identicamente nulla; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$.
a L'energia cinetica non si conserva per nessun moto.
b L'energia cinetica si conserva per ogni moto.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando un elemento di massa $M > 0$ al vertice C di una lamina rettangolare omogenea di stessa massa M i cui lati hanno lunghezza $a \geq b > 0$. I vertici A e B sono tali che $\|\overrightarrow{CA}\| = a$ e $\|\overrightarrow{CB}\| = b$. Considerato il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ con asse 2 verticale ascendente, il corpo è vincolato a muoversi nel piano 1–2 in modo che A e B scorrano, rispettivamente, sugli assi 1 e 2 di detto riferimento.
$\boxed{\textbf{16}}$ È possibile determinare moti tali che in ogni istante il trinomio invariante dell'atto di moto sia diverso da zero?
a Sì, scegliendo opportunamente a e b.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{17}}$ Supponendo che il corpo non sia a riposo, quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento del centro di massa?
a $\frac{1}{2}J\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e J il momento d'inerzia relativo all'asse passante per A e ortogonale alla lamina.
b $\frac{1}{2}I\|\vec{\omega}\|^2 + \frac{1}{2}(2M)\|\vec{v}_A\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo, I il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro di massa del corpo e ortogonale al corpo stesso e $\vec{v}_A$ la velocità del punto A.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{18}}$ Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
a È possibile scegliere a e b in modo che la centroide fissa (base) sia un'ellisse con assi l'uno il doppio dell'altro.
b La centroide (fissa) è una circonferenza.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 31/05/2021

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 31/05/2021

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile $r(t)$

$$x_1 \sin\Big(\frac{\pi}{4}\cos(\alpha t)\Big) - x_2 \cos\Big(\frac{\pi}{4}\cos(\alpha t)\Big) = 0\,, \quad x_3 = 0\,,$$

con $\alpha > 0$ costante. Si tratta quindi di una retta che oscilla tra le posizioni $x_1 = x_2$ e $x_1 = -x_2$ passando per l'asse x_1.
Sul punto agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{X}\,,$$

con $k > 0$ costante.
Si scelga come coordinata lagrangiana l'ascissa s del punto su $r(t)$, con origine in (0,0,0).
$\boxed{\textbf{01}}$ Quale delle seguenti è l'energia cinetica nel sistema fisso?
a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}\Big\{\dot{s}^2 + \frac{\pi^2}{16}\alpha^2 s^2\Big\}\,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}\Big\{\dot{s}^2 + \frac{\pi^2}{16}\alpha^2 s^2[\sin(\alpha t)]^2\Big\}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
a Il potenziale lagrangiano U^{L} esiste ed è funzione solo di s: $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(s)$.
b Il potenziale lagrangiano U^{L} esiste ed è funzione sia di s che di t: $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(s,t)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ ove $\boldsymbol{X}_O = 0$, $\boldsymbol{u}_1(t)$ è il versore tangente alla retta $r(t)$, $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{u}_2(t) = \boldsymbol{u}_3(t) \times \boldsymbol{u}_1(t)$. Allora:
a La forza di trascinamento $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ in $\mathcal{S}$ è diretta lungo $\boldsymbol{u}_1(t)$.
b La forza di Coriolis $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$ in $\mathcal{S}$ è nulla.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze di potenziale

$$U(x_1, x_2, x_3) = -\alpha(x_1^2 + x_2^2)\,, \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3\,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Il punto sia vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \,,$$

$R > 0$. Il vincolo è liscio.
a Esistono almeno due posizioni di equilibrio stabile.
b Esiste esattamente una posizione di equilibrio stabile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Il punto sia vincolato alla curva

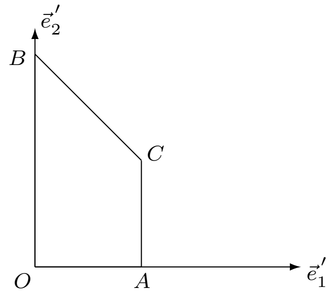
$$x_1 = 0 \,, \qquad x_2 = \beta x_3^2 \,,$$

ove $\beta > 0$ è costante. Il vincolo è liscio. Si scelga $z = x_3 \in \boldsymbol{R}$ come coordinata lagrangiana.
a In $z = 0$ si possono definire le piccole oscillazioni.
b Per alcuni valori di $\beta > 0$ in $z = 0$ si ha equilibrio instabile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Il punto sia vincolato alla circonferenza

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2 \,,$$

con $s \in (-\pi R, \pi R)$, $R > 0$. Si prenda s come coordinata lagrangiana. Il vincolo sia scabro con legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico, e si assuma sempre $\dot{s} \neq 0$.
a Tutti i moti sono indipendenti da α.
b Esistono moti uniformi.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un sistema olonomo a vincoli perfetti è costituito da una lamina rigida pesante omogenea di massa M ottenuta saldando una lamina quadrata a una a forma di triangolo rettangolo isoscele come illustrato in figura.
In figura è rappresentata la lamina assieme al riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$. Si nota che $\overrightarrow{OA} = L\vec{e}_1^{\,\prime}$, $\overrightarrow{OB} = 2L\vec{e}_2^{\,\prime}$ e $\overrightarrow{OC} = L\vec{e}_1^{\,\prime} + L\vec{e}_2^{\,\prime}$.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 2 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 2 mediante un vincolo di cerniera ideale.
Come coordinata lagrangiana si usi l'anomalia φ individuata dagli assi 3 fisso e solidale orientata in verso antiorario rispetto all'asse 2.
Si risponda alle seguenti domande:
$\boxed{\mathbf{07}}$ Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse coordinato 2 del riferimento solidale?
a $\frac{5}{6}ML^2$
b $\frac{19}{9}ML^2$
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Quanto vale il momento angolare del corpo calcolato usando come polo O?
a $\frac{5}{18}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_2'$
b $-\frac{11}{36}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_1' + \frac{5}{18}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_2'$
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento fisso?
a $\frac{41}{24}ML^2\dot{\varphi}^2$
b $\frac{5}{36}ML^2\dot{\varphi}^2$
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Un sistema di n punti materiali si muove soggetto a vincoli olonomi non degeneri, con ℓ gradi di libertà.
$\boxed{\mathbf{10}}$ L'ipotesi dei lavori virtuali permette di:
a Scrivere l'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana.
b Trovare almeno una parametrizzazione lagrangiana.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Quale delle seguenti affermazioni sull'energia cinetica in forma lagrangiana è corretta?
a Se $\ell = 1$ e i vincoli sono fissi, $T^{\mathrm{L}} = a(q_1)\dot{q}_1^2$, con a funzione positiva.
b Se i vincoli sono mobili, può essere $T^{\mathrm{L}} < 0$ in qualche caso.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali, la reazione vincolare totale (data qui come vettore colonna)

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = (\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^1, \dots, \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^n)^{\mathrm{t}}$$

soddisfa (i prodotti indicati sono righe per colonne):
a Se $(\frac{\partial f_k}{\partial z_j})$ è la iacobiana dei vincoli,

$$\Big(\frac{\partial f_k}{\partial z_j}\Big)\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = 0\,.$$

b Se $(\frac{\partial z_j^{\mathrm{L}}}{\partial q_h})$ è la iacobiana della parametrizzazione lagrangiana,

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^{\mathrm{t}}\Big(\frac{\partial z_j^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}\Big) = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ si muove in $\boldsymbol{R}^3$ soggetto all'azione della forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) = \nabla U(\boldsymbol{X}) + \alpha(\boldsymbol{X})\dot{\boldsymbol{X}}\,,$$

ove $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$ e $\alpha \in C^1(\boldsymbol{R}^3)$.

$\boxed{13}$ Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
a Se $\nabla U(\boldsymbol{x}_0) = 0$ allora $\boldsymbol{x}_0$ è di equilibrio stabile.
b Se $\alpha(\boldsymbol{x}_0) = 0$, allora $\boldsymbol{x}_0$ è di equilibrio stabile.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{14}$ Quale delle seguenti condizioni assicura che esista almeno un punto di equilibrio stabile?
a Vale $\alpha(\boldsymbol{x}) \leq 0$ per ogni $\boldsymbol{x}$ e U è un polinomio di grado 2 tale che $U(\boldsymbol{x}) \to -\infty$ se $|\boldsymbol{x}| \to +\infty$.
b Vale $\alpha(\boldsymbol{x}) \leq 0$ per ogni $\boldsymbol{x}$ e $\nabla U(\boldsymbol{x}_0) = 0$ per un unico $\boldsymbol{x}_0$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{15}$ Definiamo l'energia

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))\,.$$

Supponiamo che $\mathcal{E}(t)$ si mantenga costante lungo ciascun fissato moto $\boldsymbol{X}(t)$. Allora sicuramente si ha:
a La forza $\alpha(\boldsymbol{X})\dot{\boldsymbol{X}}$ ammette un potenziale lagrangiano.
b Vale $\alpha(\boldsymbol{x}) = 0$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido di massa M è sottoposto al vincolo di giunto ideale di polo O. Pertanto il moto è sferico di polo O rispetto al riferimento terrestre $\{O, \vec{e}_i\}$ con asse 3 verticale ascendente.

$\boxed{16}$ Quanto vale la componente 1 relativa al riferimento terrestre del momento totale della sollecitazione vincolare calcolato rispetto al polo O?
a 0
b Mg
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{17}$ Si supponga che il punto O coincida con il centro di massa del corpo e l'unica sollecitazione attiva agente sul corpo sia il peso. Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
a La velocità angolare è una costante del moto.
b Il momento angolare calcolato rispetto al polo O è una costante del moto.

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Si supponga che il corpo sia a simmetria cilindrica rispetto a O e che il centro di massa non coincida con O. Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
a L'energia cinetica è una costante del moto.
b La componente 3 relativa al riferimento terrestre del momento angolare calcolato rispetto al polo O è una costante del moto.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 02/07/2021

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 02/07/2021

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza L e massa m è soggetta ai vincoli

$$x_{1A} = 0\,, \quad x_{2A} = 0\,, \quad x_{3A} = 0\,, \quad x_{3B} = L\sin(\alpha t)\,,$$

con $\alpha > 0$ costante. Si usi come coordinata lagrangiana $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{L}} = L\cos\varphi\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 + L\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_3\,.$$

Sull'asta agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = (\beta x_1\boldsymbol{e}_1 + \gamma x_2\boldsymbol{e}_2)\,\mathrm{d}s\,,$$

con β, $\gamma \in \boldsymbol{R}$ costanti.
$\boxed{\mathbf{01}}$ Dire quale delle seguenti è la componente lagrangiana delle forze per ogni valore di α, β, γ.
a

$$Q_\varphi = 0\,.$$

b

$$Q_\varphi = \cos\varphi\sin\varphi(\cos(\alpha t))^2(\gamma - \beta)\frac{L^3}{3}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Quale delle seguenti condizioni iniziali è compatibile con il vincolo?
a $\boldsymbol{X}_B(0) = L\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{v}_B(0) = L\alpha(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3)$.
b $\boldsymbol{X}_B(0) = L\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{v}_B(0) = L\alpha(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3)$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{03}}$ Se è noto che all'istante iniziale

$$\boldsymbol{X}_B(0) = L\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{v}_B(0) \cdot \boldsymbol{e}_2 = v_0 \,,$$

allora:
a

$$\dot\varphi(0) = \frac{v_0}{L} \,.$$

b

$$\dot\varphi(0) = \alpha + \frac{v_0}{L} \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (R\cos(\alpha s), R\sin(\alpha s), h\alpha s) \,,$$

con $\alpha = (R^2 + h^2)^{-1/2}$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea. Si scelga s come coordinata lagrangiana.
Si ricordi:

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h) \,, \quad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0) \,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R) \,, \quad k(s) = R\alpha^2 \,, \quad \tau(s) = -\alpha^2 h \,.$$

$\boxed{\textbf{04}}$ Il vincolo sia liscio. Il punto sia soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \beta |\boldsymbol{v}|^2 \boldsymbol{e}_3 \,,$$

con $\beta > 0$ costante. Le condizioni iniziali siano $s(0) = 0$, $\dot s(0) = v_0 > 0$. Allora il moto $s(t)$ soddisfa:
a Per $t \to +\infty$ si ha $s(t) \to +\infty$.
b Il moto non è definito su $[0, +\infty)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{05}}$ Il vincolo sia scabro e tale che per $\mu > 0$ costante

$$|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| = \mu |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| \,.$$

Sul punto sia applicata la forza (ove $c > 0$ è costante)

$$\boldsymbol{F} = c|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{e}_3 \,.$$

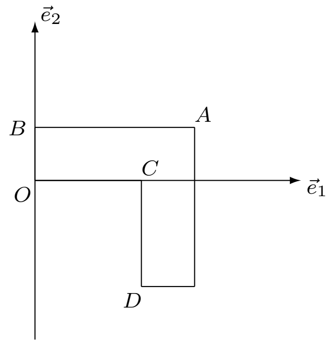
Le condizioni iniziali siano $s(0) = 0$, $\dot s(0) = v_0 > 0$.
a Esiste un valore $\bar\mu > 0$, indipendente da v_0, tale che se $\mu > \bar\mu$ allora $\dot s(t)$ è decrescente per $t > 0$.
b Esiste un valore $\bar v_0 > 0$, indipendente da μ, tale che se $v_0 > \bar v_0$ allora $\dot s(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{06}}$ Il vincolo sia scabro, e valga la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico con coefficiente $\mu_s > 0$. Sul punto in quiete nella posizione $(R,0,0)$ viene applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3 \,,$$

con λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \boldsymbol{R}$.
a Fissati μ_s, λ_2, λ_3 esiste sempre $\lambda_1 \neq 0$ tale che il punto resti in quiete.
b Se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ il punto resta in quiete per ogni scelta di λ_3, μ_s.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un sistema olonomo a vincoli perfetti è costituito da una lamina rigida pesante omogenea di massa M.
In figura è rappresentata la lamina assieme al riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i\}$. Si nota che i punti A, B, C e D sono tali che $\overrightarrow{OA} = \frac{3}{2}L\vec{e}_1 + \frac{1}{2}L\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}L\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC} = L\vec{e}_1$ e $\overrightarrow{OD} = L\vec{e}_1 - L\vec{e}_2$, con L una costante positiva.



Nei punti A e B sono applicate, rispettivamente, le forze $\vec{f}_A = \lambda\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ e $\vec{f}_B = \lambda\vec{e}_3$, con $\lambda > 0$.
Si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\textbf{07}}$ Quanto vale la coordinata 1 del centro di massa del corpo rispetto al riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i\}$?
a $\frac{3}{4}L$.
b $\frac{1}{20}L$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Quanto vale il prodotto d'inerzia del corpo rispetto agli assi coordinati 1 e 2 del riferimento solidale?
a $-\frac{19}{15}ML^2$.
b $\frac{11}{80}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ L'asse della sollecitazione $\{\vec{f}_A, \vec{f}_B\}$ di punti di applicazione A e B è la retta di equazione parametrica
a $x_1 = a + \frac{1}{2}L$, $x_2 = a$, $x_3 = a$ con $a \in \mathbb{R}$.
b $x_1 = a - \frac{1}{2}L$, $x_2 = a$, $x_3 = a$ con $a \in \mathbb{R}$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Un sistema di n punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$ è soggetto a m vincoli olonomi regolari, in modo da avere $\ell = 3n - m > 0$ gradi di libertà. Denotiamo con ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^i$ la reazione vincolare che agisce su $\boldsymbol{X}_i$.
$\boxed{\mathbf{10}}$ L'ipotesi dei lavori virtuali implica:
a Per ogni $t_1 < t_2$ e $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{X}}_i(t) \cdot {\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^i(t) \, \mathrm{d}t = 0 \, .$$

b L'atto di moto del sistema appartiene allo spazio degli spostamenti virtuali.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che $\boldsymbol{q} \in Q \subset \boldsymbol{R}^\ell$ siano coordinate lagrangiane, e anche che le forze direttamente applicate siano conservative con potenziale

$$U(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) \, .$$

Valga l'ipotesi dei lavori virtuali.
a Esiste il potenziale lagrangiano come funzione delle sole $\boldsymbol{q}$.
b Può non esistere il potenziale lagrangiano.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo $n = 2$ e che il vincolo sia

$$|\boldsymbol{X}_1(t) - \boldsymbol{X}_2(t)|^2 = R(t)^2 \, ,$$

con $R : \boldsymbol{R} \to (0, +\infty)$, $R \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. L'ipotesi dei lavori virtuali implica che:
a ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^1$ e ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^2$ sono ortogonali fra di loro.
b ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^1$ e ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^2$ sono parallele fra di loro.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}))$ ove

$$\boldsymbol{X}_O(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t)) \, , \qquad t \in \boldsymbol{R} \, ,$$

e la terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è calcolata in $s(t)$. Qui $\boldsymbol{\psi}$ è una curva regolare con curvatura $k > 0$, e l'ascissa curvilinea $s(t)$ di $\boldsymbol{X}_O(t)$ è data da $s \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Supponiamo sempre $\dot{s}(t) \neq 0$.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Si consideri il moto

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_O(t) + r(t)\boldsymbol{B}(s(t)) \, ,$$

con $r \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Allora se la curva $\boldsymbol{\psi}$ è piana
a La forza di trascinamento in $\mathcal{S}$ su $\boldsymbol{X}$ è nulla.
b La forza di Coriolis in $\mathcal{S}$ su $\boldsymbol{X}$ è nulla.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Consideriamo un moto $\boldsymbol{X}$ vincolato al piano per $\boldsymbol{X}_O$ perpendicolare a $\boldsymbol{B}$. Allora, supponendo $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(t) \neq 0$ per tale moto, si ha:

a La forza di Coriolis su $\boldsymbol{X}(t)$ non è mai nulla.
b La forza di Coriolis su $\boldsymbol{X}(t)$ può annullarsi, ma solo se la curva è piana.
c Nessuna delle precedenti.
15 Un punto materiale sia vincolato alla retta mobile per $\boldsymbol{X}_O$ parallela a $\boldsymbol{T}$. Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali allora
a La reazione vincolare risulta ortogonale a $\boldsymbol{T}$ in ogni istante.
b La reazione vincolare risulta parallela a $\boldsymbol{T}$ in ogni istante.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando la base di un cono omogeneo circolare retto a una delle due basi di un cilindro omogeneo circolare retto in modo che l'asse di simmetria del cono e quello del cilindro siano coincidenti. Il cilindro e il cono hanno stessa massa, stesso raggio di base e stessa altezza. Il corpo si muove di moto sferico e il vincolo è stato realizzato mediante un giunto ideale. La sola sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso.
16 Supponendo che il polo del moto sia il vertice del cono, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?
a La quantità di moto totale del corpo.
b Il momento angolare calcolato usando il vertice del cono come polo di riduzione.
c Nessuna delle precedenti.
17 Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del corpo, che moto esibisce il corpo se la velocità angolare iniziale forma un angolo di ampiezza $\pi/16$ con l'asse di simmetria del corpo?
a Un moto rotatorio.
b Un moto di precessione.
c Nessuna delle precedenti.
18 Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del cilindro, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?
a L'energia meccanica totale.
b L'energia cinetica.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 02/09/2021

MODEL MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 02/09/2021

I.1 Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere il centro G sulla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

con $R > L$. Inoltre l'asta è vincolata a mantenersi ortogonale alla tangente $\boldsymbol{T}_G$ della circonferenza in G.
Sull'asta agisce la forza applicata in B

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha \boldsymbol{T}_G + \beta \boldsymbol{T}_G \times \overrightarrow{GB} \,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti assegnate.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $s \in (-\pi R, \pi R)$ e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G = R \cos \frac{s}{R} \boldsymbol{e}_1 + R \sin \frac{s}{R} \boldsymbol{e}_2 \,, \quad \overrightarrow{GB} = L \cos \varphi \frac{\boldsymbol{X}_G}{R} + L \sin \varphi \boldsymbol{e}_3 \,.$$

$\boxed{\textbf{01}}$ Sia I il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse a essa ortogonale in G. L'energia cinetica dell'asta è:
a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2} \dot{s}^2 + \frac{I}{2} \Big[\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{s}^2}{R^2} (\cos \varphi)^2 \Big] \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2} \dot{s}^2 + \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ La componente lagrangiana Q_φ delle forze è:
a Indipendente da α.
b Indipendente da β.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ La forza $\boldsymbol{F}_B$ è conservativa.
a Sì.
b Sì, ma solo se $\beta = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Il vincolo è scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico con coefficiente μ; si assuma sempre $\boldsymbol{v} \neq 0$.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{T} + \beta \boldsymbol{N} \,,$$

con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ terna intrinseca della curva e α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti assegnate.
$\boxed{\textbf{04}}$ L'equazione di moto è:

a

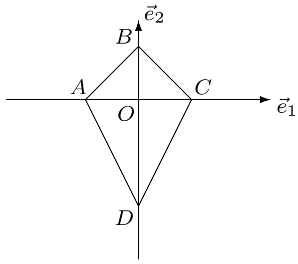
$$m\ddot{s} = \alpha - \mathrm{sign}(\dot{s})\mu\beta \,.$$

b

$$m\ddot{s} = \alpha - \mathrm{sign}(\dot{s})\mu \left| m\frac{\dot{s}^2}{R} - \beta \right| \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Sono possibili moti uniformi.
a Solo se $\alpha = 0$.
b Per ogni valore di (α, β) con $\beta > 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Sono possibili moti in cui $\ddot{s}$ è una costante diversa da 0?
a Sì, ma solo se $\alpha \neq 0$.
b No.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Una lamina rigida omogenea di massa M ha la forma in figura, ove $\overrightarrow{OA} = -L\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = L\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC} = L\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OD} = -2L\vec{e}_2$, con $L > 0$.



Il riferimento $\{O, \vec{e}_i\}$ in figura è solidale alla lamina. In B e in D agisce la forza $-\lambda\vec{e}_1$, con $\lambda > 0$. La lamina è vincolata in modo da mantenersi in quiete rispetto a un riferimento fisso.
$\boxed{\mathbf{07}}$ Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse coordinato 1 del riferimento solidale?
a $\frac{1}{2}ML^2$.
b $\frac{1}{6}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Quanto vale la coordinata 2 del centro di massa rispetto al riferimento in figura?
a $-\frac{1}{2}L$.
b $-\frac{1}{6}L$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Per quanto riguarda la sollecitazione considerata si può affermare che
a l'asse della sollecitazione è la retta parallela all'asse 1 passante per il punto medio del segmento $\overline{BD}$ e la sollecitazione è equivalente alla forza $-2\lambda\vec{e}_1$ applicata in tale punto medio.

b l'asse della sollecitazione è la retta parallela all'asse 2 passante per il punto medio del segmento $\overline{BD}$ e la sollecitazione è equivalente alla forza $2\lambda\vec{e}_2$ applicata in tale punto medio.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 In ciascuno dei seguenti casi dire se il moto nel piano (x_1, x_2) soggetto al campo di forze indicato ha un punto di equilibrio stabile in (0,0).
Qui α, β, $\gamma > 0$ sono costanti positive assegnate.
10

$$\boldsymbol{F} = -\alpha x_1 \boldsymbol{e}_1 + \beta x_2 \boldsymbol{e}_2 \,.$$

a Sì.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
11

$$\boldsymbol{F} = -\alpha x_1 \boldsymbol{e}_1 - \beta x_2 \boldsymbol{e}_2 - \gamma \dot{x}_2 \boldsymbol{e}_2 \,.$$

a Sì.
b Sì, ma solo se $\alpha = \beta$.
c Nessuna delle precedenti.
12

$$\boldsymbol{F} = (-\alpha x_1 - \gamma \dot{x}_1) \boldsymbol{e}_1 \,.$$

a No.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Si considerino i due moti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1 \boldsymbol{e}_1 + z_2 \boldsymbol{e}_2 + z_3 \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{X}_1 = z_4 \boldsymbol{e}_1 + z_5 \boldsymbol{e}_2 + z_6 \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Dire quali dei seguenti vincoli sono olonomi non singolari in ogni posizione compatibile.
Qui α, $\beta > 0$ sono costanti positive assegnate.
13 I vincoli sono

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 - z_4^2 - z_5^2 &= \alpha \,, \\ z_3 &= \beta \,. \end{aligned}$$

a No, per ogni valore di α, β.
b Sì, per ogni valore di α, β.
c Nessuna delle precedenti.
14 I vincoli sono

$$\begin{aligned} z_1^4 - z_6^2 &= 0 \,, \\ z_2 &= \alpha \,. \end{aligned}$$

a No, per ogni valore di α.
b Sì, per ogni valore di α.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ I vincoli sono

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 - z_5^2 - z_6^2 = \alpha\,, \\ z_3 = \beta\,. \end{aligned}$$

a Sì, per ogni valore di α, β.
b No, per ogni valore di α, β.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido è vincolato in modo che il suo moto è piano, il piano del moto è il piano 1–2 del riferimento fisso e due punti solidali distinti, detti A e B, sono vincolati a muoversi rispettivamente sull'asse 1 e sull'asse 2 del riferimento fisso.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Dove si trova il centro di istantanea rotazione?
a Qualunque sia la geometria del corpo, coincide in ogni istante con il suo centro di massa.
b Coincide in ogni istante con il punto medio del segmento $\overline{AB}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Che tipo di curva è la centroide fissa (base)?
a Una circonferenza.
b Una ellisse.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ La centroide fissa (base) e quella mobile (rulletta) sono mutuamente tangenti in ogni istante?
a No, lo sono solo quando il centro di massa cade su uno degli assi coordinati.
b No, lo sono solo quando il segmento $\overline{AB}$ giace su uno degli assi coordinati.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 16/09/2021

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 16/09/2021

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a muoversi sul piano verticale $x_3 = 0$ mantenendo l'estremo A nell'origine O del sistema

di riferimento fisso.
Sull'asta agiscono il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_2$ e la distribuzione di forza elastica

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{P'P}\,\mathrm{d}s\,,$$

ove P è il generico punto dell'asta e P' la sua proiezione ortogonale sull'asse $x_2 = 0$. Qui $k > 0$ è costante e $\mathrm{d}s$ è la misura di lunghezza dell'asta.
Si usi come coordinata lagrangiana $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_B = 2L(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2)\,.$$

$\boxed{\textbf{01}}$ Le forze applicate sono conservative in senso lagrangiano?
a Sì, e

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -mgL\sin\varphi - \frac{4kL^3}{3}(\cos\varphi)^2\,.$$

b Sì, e

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -mgL\sin\varphi - \frac{4kL^3}{3}(\sin\varphi)^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ Le posizioni di equilibrio dell'asta soddisfano:
a Sono esattamente 3.
b Sono tutte stabili.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ L'energia cinetica dell'asta in forma lagrangiana:
a È di fatto dipendente sia da φ che da $\dot\varphi$, ossia in genere

$$\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} \neq 0\,, \qquad \frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial\dot\varphi} \neq 0\,.$$

b Dipende da $\dot\varphi$ ma non da φ, ossia per ogni φ, $\dot\varphi$ si ha

$$\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.2 Dire in ciascuno dei seguenti casi quale è una parametrizzazione lagrangiana corretta per i due moti $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ vincolati come indicato.
Le q_h indicano le coordinate lagrangiane.
$\boxed{\textbf{04}}$ Il moto $\boldsymbol{X}_2$ è vincolato a appartenere al piano individuato dall'asse x_3 e dal moto $\boldsymbol{X}_1$ (che si assume non appartenente all'asse x_3).
a Si ha $(q_1, \dots, q_5) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times \boldsymbol{R}^3$ e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h\boldsymbol{e}_h\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = q_4\boldsymbol{e}_1 + \frac{q_2q_4}{q_1}\boldsymbol{e}_2 + q_5\boldsymbol{e}_3\,.$$

b Si ha $(q_1, \dots, q_5) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times \boldsymbol{R}^3$ e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h \boldsymbol{e}_h \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = q_4 \boldsymbol{e}_1 + q_5 \boldsymbol{e}_2 - \frac{q_2 q_4}{q_1} \boldsymbol{e}_3 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{05}}$ I due moti appartengono alla stessa sfera mobile

$$(x_1 - \alpha(t))^2 + (x_2 - \beta(t))^2 + x_3^2 = R^2 \,,$$

e al piano $x_3 = 0$. Qui α, $\beta \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ e $R > 0$ è costante.

a Si ha $(q_1, \dots, q_4) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1 &= [\alpha(t) + R \cos q_1 \sin q_2] \boldsymbol{e}_1 + [\beta(t) + R \sin q_1 \sin q_2] \boldsymbol{e}_2 + R \cos q_2 \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{X}_2 &= [\alpha(t) + R \cos q_3 \sin q_4] \boldsymbol{e}_1 + [\beta(t) + R \sin q_3 \sin q_4] \boldsymbol{e}_2 + R \cos q_4 \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

b Si ha $(q_1, q_2, q_3) \in (-\pi, \pi) \times \boldsymbol{R}^2$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1 &= [\alpha(t) + R \cos q_1] \boldsymbol{e}_1 + [\beta(t) + R \sin q_1] \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{X}_2 &= [q_2 - \alpha(t) - R \cos q_1] \boldsymbol{e}_1 + [q_3 - \beta(t) - R \sin q_1] \boldsymbol{e}_2 \,. \end{aligned}$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{06}}$ I due moti sono vincolati a restare a distanza costante $R > 0$.

a Si ha $(q_1, q_2, q_3) \in \boldsymbol{R}^3$ e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h \boldsymbol{e}_h \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = \sum_{h=1}^{3} \Big(q_h - \frac{R}{\sqrt{3}} \Big) \boldsymbol{e}_h \,.$$

b Si ha

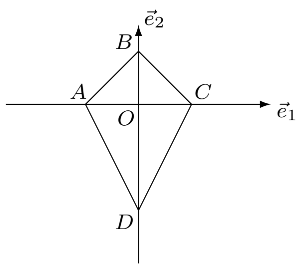
$$(q_1, \dots, q_5) \in \{ \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^5 \mid (q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 < R^2 \} \,,$$

e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h \boldsymbol{e}_h \,, \quad \boldsymbol{X}_2 = q_4 \boldsymbol{e}_1 + q_5 \boldsymbol{e}_2 + [q_3 + \sqrt{R^2 - (q_1 - q_4)^2 - (q_2 - q_5)^2}] \boldsymbol{e}_3 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.3 Una lamina rigida omogenea di massa M ha la forma in figura, ove $\overrightarrow{OA} = -L\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = L\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC} = L\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OD} = -2L\vec{e}_2$, con $L > 0$.



Il riferimento $\{O, \vec{e}_i\}$ in figura è solidale alla lamina. In B e in D agisce la forza $-\lambda\vec{e}_1$, con $\lambda > 0$. La lamina è vincolata in modo da mantenersi in quiete rispetto a un riferimento fisso.

$\boxed{\mathbf{07}}$ Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse coordinato 1 del riferimento solidale?
a $\frac{1}{6}ML^2$.
b $\frac{1}{2}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Quanto vale la coordinata 2 del centro di massa rispetto al riferimento in figura?
a $-\frac{5}{12}L$.
b $-\frac{1}{2}L$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{09}}$ Per quanto riguarda la sollecitazione considerata si può affermare che
a l'asse della sollecitazione è la retta parallela all'asse 2 passante per il punto medio del segmento $\overline{BD}$ e la sollecitazione è equivalente alla forza $2\lambda\vec{e}_2$ applicata in tale punto medio.
b l'asse della sollecitazione è la retta parallela all'asse 1 passante per il punto medio del segmento $\overline{BD}$ e la sollecitazione è equivalente alla forza $-2\lambda\vec{e}_1$ applicata in tale punto medio.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Qui $\boldsymbol{\psi} \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è una curva regolare γ con ascissa curvilinea $s \in \boldsymbol{R}$, curvatura $k(s) > 0$ e torsione $\tau(s) \in \boldsymbol{R}$. Un disco di massa m è vincolato in modo che il suo centro G appartenga alla curva γ (questo significa che può muoversi su γ) e che un suo diametro solidale AB sia sempre tangente alla curva γ in G. I vincoli sono lisci.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Quanti sono i gradi di libertà ℓ del disco?
a $\ell = 2$.
b $\ell = 3$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Se la curva è piana, la velocità angolare del disco
a È parallela alla binormale $\boldsymbol{B}$ della curva.
b È parallela alla tangente $\boldsymbol{T}$ della curva.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che l'unica forza applicata sia il peso, γ sia un'elica circolare con asse parallelo alla direzione del peso e il disco parta da fermo. Allora
a La velocità angolare del disco si mantiene nulla per tutto il moto.
b La conservazione dell'energia implica

$$\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G(t)|^2 + mg\lambda s(t) = E\,,$$

per ogni t, ove $\lambda > 0$ è una costante legata alla geometria della curva e E è una costante determinata dai dati iniziali.

c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un corpo rigido è vincolato in modo che il suo moto è piano, il piano del moto è il piano 1–2 del riferimento fisso e due punti solidali distinti, detti A e B, sono vincolati a muoversi rispettivamente sull'asse 1 e sull'asse 2 del riferimento fisso.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Dove si trova il centro di istantanea rotazione?
a Coincide in ogni istante con il punto medio del segmento $\overline{AB}$.
b Se il corpo ha simmetria di rotazione, coincide in ogni istante con il suo centro di massa.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Che tipo di curva è la centroide fissa (base)?
a Una iperbole.
b Una circonferenza.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{15}}$ La centroide fissa (base) e quella mobile (rulletta) sono mutuamente tangenti in ogni istante?
a No, lo sono solo quando il centro di istantanea rotazione cade su uno degli assi coordinati.
b No, lo sono solo quando il segmento $\overline{AB}$ contiene il centro di massa.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Dire in quali dei seguenti casi si possono definire le piccole oscillazioni del sistema a vincoli lisci e fissi, soggetto a forze conservative, considerato. Qui $\ell = 2$ e il punto di equilibrio è $(q_1, q_2) = (0,0)$.

$\boxed{\mathbf{16}}$ $U^{\mathrm{L}}(q_1, q_2) = \alpha q_1^2 + \beta q_2^2$ con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti.
a Se $\alpha < 0$, $\beta > 0$ o se $\alpha > 0$, $\beta < 0$.
b Se $\alpha < 0$, $\beta < 0$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{17}}$ $U^{\mathrm{L}}(q_1, q_2) = -\alpha q_1^4 - \beta q_2^8$ con α, $\beta > 0$ costanti.
a In nessun caso.
b Solo se $T^{\mathrm{L}} \geq C|\dot{\boldsymbol{q}}|^2$ con $C > 0$ abbastanza grande.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{18}}$ Se $U^{\mathrm{L}}(0,0) = 0$ e per ogni (q_1, q_2) si ha

$$U^{\mathrm{L}}(q_1, q_2) \leq -c(q_1^2 + q_2^2)\,,$$

con $c > 0$ costante opportuna.
a No in generale.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 00/01/2021

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 00/01/2021

I.1 Un disco di massa M e raggio R è vincolato a avere il centro G sul cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2 \,,$$

e a mantenersi a esso tangente. Qui $L > 0$ e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso. Si usino le coordinate lagrangiane $z = x_{3G} \in \boldsymbol{R}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ angolo di rotazione del disco intorno all'asse a esso ortogonale in G, e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}}(z, \theta, \varphi) = L \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + L \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + z \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui I indica il momento d'inerzia del disco relativo a un suo diametro.
$\boxed{\mathbf{01}}$ Calcolare l'energa cinetica del disco nel sistema di riferimento fisso.
a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{M}{2}(R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2) \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{M}{2}(L^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2) \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Quale affermazione è vera per il momento delle quantità di moto rispetto a G?
a È sempre ortogonale al disco.
b Scomposto nella base solidale $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al disco, ha le prime due componenti uguali.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Da quali coordinate lagrangiane dipende la quantità di moto del disco?
a φ e z.
b θ e z.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un disco di massa M e raggio R è vincolato a avere il centro G sul cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2 \,,$$

e a mantenersi a esso tangente. Qui $L > 0$ e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso. Si usino le coordinate lagrangiane $z = x_{3G} \in \boldsymbol{R}$,

$\theta \in (-\pi, \pi)$ angolo di rotazione del disco intorno all'asse a esso ortogonale in G, e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_G^{\text{L}}(z, \theta, \varphi) = L \cos \varphi \boldsymbol{e}_1 + L \sin \varphi \boldsymbol{e}_2 + z \boldsymbol{e}_3 .$$

Qui I indica il momento d'inerzia del disco relativo a un suo diametro.

04 Calcolare l'energa cinetica del disco nel sistema di riferimento fisso.

a

$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(2I\dot{\theta}^2 + I\dot{\varphi}^2) .$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(L^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(2I\dot{\theta}^2 + I\dot{\varphi}^2) .$$

c Nessuna delle precedenti.

05 Quale affermazione è vera per il momento delle quantità di moto rispetto a G?

a È sempre ortogonale al disco.

b Scomposto nella base solidale $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al disco, ha le prime due componenti uguali.

c Nessuna delle precedenti.

06 Da quali coordinate lagrangiane dipende la quantità di moto del disco?

a φ e z.

b θ e z.

c Nessuna delle precedenti.

I.3 Unc disco di massa M e raggio R è vincolato a avere il centro G sul cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2 ,$$

e a mantenersi a esso tangente. Qui $L > 0$ e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso. Si usino le coordinate lagrangiane $z = x_{3G} \in \boldsymbol{R}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ angolo di rotazione del disco intorno all'asse a esso ortogonale in G, e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_G^{\text{L}}(z, \theta, \varphi) = L \cos \varphi \boldsymbol{e}_1 + L \sin \varphi \boldsymbol{e}_2 + z \boldsymbol{e}_3 .$$

Qui I indica il momento d'inerzia del disco relativo a un suo diametro.

07 Calcolare l'energa cinetica del disco nel sistema di riferimento fisso.

a

$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(2I\dot{\theta}^2 + I\dot{\varphi}^2) .$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(L^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(2I\dot{\theta}^2 + I\dot{\varphi}^2) .$$

c Nessuna delle precedenti.

08 Quale affermazione è vera per il momento delle quantità di moto rispetto a G?

a È sempre ortogonale al disco.
b Scomposto nella base solidale $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al disco, ha le prime due componenti uguali.
c Nessuna delle precedenti.
09 Da quali coordinate lagrangiane dipende la quantità di moto del disco?
a φ e z.
b θ e z.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Und disco di massa M e raggio R è vincolato a avere il centro G sul cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2 \,,$$

e a mantenersi a esso tangente. Qui $L > 0$ e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso. Si usino le coordinate lagrangiane $z = x_{3G} \in \boldsymbol{R}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ angolo di rotazione del disco intorno all'asse a esso ortogonale in G, e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}}(z, \theta, \varphi) = L \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + L \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui I indica il momento d'inerzia del disco relativo a un suo diametro.
10 Calcolare l'energa cinetica del disco nel sistema di riferimento fisso.
a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{M}{2}(R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2) \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{M}{2}(L^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2) \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
11 Quale affermazione è vera per il momento delle quantità di moto rispetto a G?
a È sempre ortogonale al disco.
b Scomposto nella base solidale $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al disco, ha le prime due componenti uguali.
c Nessuna delle precedenti.
12 Da quali coordinate lagrangiane dipende la quantità di moto del disco?
a φ e z.
b θ e z.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Une disco di massa M e raggio R è vincolato a avere il centro G sul cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2 \,,$$

e a mantenersi a esso tangente. Qui $L > 0$ e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso. Si usino le coordinate lagrangiane $z = x_{3G} \in \boldsymbol{R}$,

$\theta \in (-\pi, \pi)$ angolo di rotazione del disco intorno all'asse a esso ortogonale in G, e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}}(z, \theta, \varphi) = L \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + L \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + z \boldsymbol{e}_3 .$$

Qui I indica il momento d'inerzia del disco relativo a un suo diametro.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Calcolare l'energa cinetica del disco nel sistema di riferimento fisso.
a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{M}{2}(R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2) .$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{M}{2}(L^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2) .$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Quale affermazione è vera per il momento delle quantità di moto rispetto a G?
a È sempre ortogonale al disco.
b Scomposto nella base solidale $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al disco, ha le prime due componenti uguali.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Da quali coordinate lagrangiane dipende la quantità di moto del disco?
a φ e z.
b θ e z.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Unf disco di massa M e raggio R è vincolato a avere il centro G sul cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2 ,$$

e a mantenersi a esso tangente. Qui $L > 0$ e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso. Si usino le coordinate lagrangiane $z = x_{3G} \in \boldsymbol{R}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ angolo di rotazione del disco intorno all'asse a esso ortogonale in G, e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}}(z, \theta, \varphi) = L \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + L \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + z \boldsymbol{e}_3 .$$

Qui I indica il momento d'inerzia del disco relativo a un suo diametro.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Calcolare l'energa cinetica del disco nel sistema di riferimento fisso.
a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{M}{2}(R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2) .$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{M}{2}(L^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2) .$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Quale affermazione è vera per il momento delle quantità di moto rispetto a G?

a È sempre ortogonale al disco.
b Scomposto nella base solidale $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al disco, ha le prime due componenti uguali.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Da quali coordinate lagrangiane dipende la quantità di moto del disco?
a φ e z.
b θ e z.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 18/01/2021 II

MECCANICA RAZIONALE ING. MECCANICA

Prova scritta del 18/01/2021 II

I.1 Una lamina rettangolare $ABCD$, di lati a, b con $a < b$, è vincolata a ruotare intorno alla diagonale AC con vincolo liscio.
È soggetta alla distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}\delta_D$$

(ossia a una forza concentrata nel vertice D), con $\alpha > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ versore solidale e normale alla lamina.
Il sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ ha $\boldsymbol{X}_O$ nel centro della lamina (che è anche l'origine del sistema di riferimento fisso), e

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2\,.$$

In questo sistema le coordinate di D sono date da

$$\boldsymbol{X}_D = \boldsymbol{X}_O + \sum_{h=2}^{3} \lambda_{hD} \boldsymbol{u}_h\,,$$

e denotiamo il tensore di inerzia $\boldsymbol{\sigma}_O = (I_{hk})$.
Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo di rotazione $\varphi \in (-\pi, \pi)$ della lamina rispetto al sistema di riferimento fisso, tale che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{01}}$ Dire quale delle seguenti è la corretta equazione di moto.
a $I_{22}\ddot{\varphi} = \lambda_{2D}\alpha$.
b $I_{22}\ddot{\varphi} = -\lambda_{3D}\alpha$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Dire quale delle seguenti proprietà ha $\boldsymbol{L}_O$.
a $\boldsymbol{L}_O(t) \cdot \boldsymbol{u}_2(t) = 0$, per ogni t.
b $\boldsymbol{L}_O(t) \cdot \boldsymbol{u}_3(t) = 0$, per ogni t.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Dire quale delle funzioni seguenti rappresenta l'energia cinetica della lamina.
a
$$T = \frac{1}{2}(I_{22} + I_{33})\dot{\varphi}^2 .$$
b
$$T = \frac{1}{2}I_{22}\dot{\varphi}^2 .$$
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi su una superficie regolare S, data dal piano $x_3 = 0$, ossia
$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 , \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 .$$
Il vincolo è scabro, secondo la legge
$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| ,$$
con $\mu > 0$ costante. Si supponga $\boldsymbol{v}(t) \neq 0$ per ogni t.
Sul punto agisce la forza
$$\boldsymbol{F} = -kx\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_3$$
con $k > 0$, $b \geq 0$.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Dire quale dei seguenti è il sistema delle equazioni di moto.
a
$$m\ddot{x} = -kx - \mu b\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} ,$$
$$m\ddot{y} = -\mu b\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} .$$
b
$$m\ddot{x} = -kx - \mu b\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} ,$$
$$m\ddot{y} = -\mu b\frac{\dot{y}}{|\dot{y}|} .$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{05}}$ Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dall'energia meccanica del punto definita da

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 + \frac{k}{2}x(t)^2 .$$

a $\dot{\mathcal{E}}(t) = -\mu b|\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2|$.
b $\dot{\mathcal{E}}(t) = -\mu b\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{06}}$ Dire quando è possibile che il moto sia rettilineo uniforme (diverso dalla quiete) con traiettoria parallela a uno degli assi cartesiani nel piano.
a Se $b = 0$ esistono tali moti su ogni retta parallela all'asse x_1.
b Se $b = 0$ esistono tali moti su ogni retta parallela all'asse x_2.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Dire quali delle seguenti forze direttamente applicate ammettano un potenziale lagrangiano, nei casi indicati. Il sistema di corpi rigidi è in ogni caso costituito dal singolo punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$.
Qui R, a, b, c, d, μ, $k > 0$ sono costanti.

$\boxed{\mathbf{07}}$ Il punto è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = a\tau\boldsymbol{e}_1 + b\tau^2\boldsymbol{e}_2 + ce^{d\tau}\boldsymbol{e}_3 , \qquad \tau \in \boldsymbol{R} .$$

Qui $\tau \in \boldsymbol{R}$ è la coordinata lagrangiana.
a $\boldsymbol{F} = \mu x_1 \sin(kt)\boldsymbol{e}_3$.
b $\boldsymbol{F} = \mu\dot{x}_1\boldsymbol{e}_1$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Il punto è vincolato alla sfera mobile

$$x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - at)^2 = R^2 , \qquad t > 0 .$$

Si scelga la parametrizzazione lagrangiana

$$x_1 = R\cos\varphi\sin\theta , \quad x_2 = R\sin\varphi\sin\theta , \quad x_3 = at + R\cos\theta ,$$

con $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$.
a $\boldsymbol{F} = x_1^2\boldsymbol{e}_1 + x_3^3\boldsymbol{e}_3$.
b $\boldsymbol{F} = x_2\boldsymbol{e}_1 - x_1\boldsymbol{e}_2$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{09}}$ Il punto è vincolato al paraboloide

$$x_3 = a(x_1^2 + x_2^2) , \qquad x_3 > 0 .$$

Si usino $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$ come coordinate lagrangiane.
a $\boldsymbol{F} = -kx_1\boldsymbol{e}_1 + \mu\dot{x}_2\boldsymbol{e}_2$.

b $\boldsymbol{F} = \mu e^{d\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \boldsymbol{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 In ciascuno dei seguenti casi dire se il sistema di vincoli olonomi è regolare in tutte le configurazioni compatibili o no.
In tutti i casi il sistema di corpi rigidi è costituito dai due punti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3\,.$$

10 I vincoli sono

$$\begin{aligned} (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 &= R^2\,, \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= L_1^2\,, \\ z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 &= L_2^2\,, \end{aligned}$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^6$. Qui $L_2 > L_1 > 0$, $R > 0$ sono costanti.
a Sì, per ogni L_1, L_2, R.
b Sì, se $L_1 + L_2 > R > L_2 - L_1$.
c Nessuna delle precedenti.
11 Il vincolo è

$$z_1^{4p} + z_2^{6p} + z_3^{8p} + z_4^{4p} - z_5^{6p} - z_6^{8p} = 0\,,$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^6$. Qui $p \geq 1$ è un intero positivo.
a No, mai.
b Solo se p è pari.
c Nessuna delle precedenti.
12 I vincoli sono

$$\mu z_1 - \lambda z_6 = 0\,, \quad \mu z_2 - z_4 = 0\,, \quad \mu z_3 - \lambda z_5 = 0\,,$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^6$. Qui λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$ sono costanti con $(\lambda, \mu) \neq (0{,}0)$.
a Sì, per ogni λ, μ come sopra.
b Sì, ma solo se $\lambda > 0$.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un corpo rigido non degenere C è vincolato a muoversi di moto polare con polo O.
Il momento delle forze esterne è dato da

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = -\alpha\boldsymbol{\omega}\,,$$

con $\alpha > 0$ costante.
13 L'energia cinetica si conserva durante il moto.
a Se e solo se il moto è la quiete.
b Se e solo se il moto è una rotazione.

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Si supponga $\boldsymbol{\omega} \neq 0$. Esistono moti che sono rotazioni.
a Non in generale, se non si fanno ipotesi speciali su α e $\boldsymbol{\sigma}_O$.
b Sì, qualunque forma abbia il corpo.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Si assuma $T(0) > 0$. Dire se è possibile che esista una costante $\beta > 0$ tale che

$$T(t) \geq \beta > 0 \,, \qquad \text{per ogni } t \in (0, +\infty) \,.$$

a Se e solo se $0 < \alpha < \alpha_0$ con $\alpha_0 \in (0, +\infty)$ opportuno.
b Se e solo se $T(0) > \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi sulla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Supponiamo che per un altro campo di forze $\boldsymbol{F}_1$ valga che $\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_1$ sia ortogonale al versore tangente $\boldsymbol{T}$ in ogni punto della curva. È vero che i due moti corrispondenti alle due forze (a parità di condizioni iniziali) coincidono?
a Sì sempre.
b Sì se il vincolo è liscio.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Se il vincolo è scabro e la forza $\boldsymbol{F}$ è conservativa, l'energia meccanica può conservarsi? (Si assuma che il moto non sia la quiete.)
a No, mai.
b Sì, indipendentemente dal valore del coefficiente d'attrito.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Il vincolo sia liscio, e $\boldsymbol{\psi}$ sia l'elica cilindrica

$$x_1 = R\cos(\alpha s) \,, \quad x_2 = R\sin(\alpha s) \,, \quad x_3 = h\alpha s \,,$$

con $h > 0$, $R > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ costanti, e $s \in \boldsymbol{R}$. Sia inoltre $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{L}}(s)$ con

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{L}}(s) = -\alpha s \boldsymbol{T}(s) \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,,$$

con $\alpha > 0$ costante.
a Tutti i moti sono limitati.
b Tutti i moti (diversi dalla quiete) sono illimitati.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 18/01/2021

MECCANICA RAZIONALE 6CFU
ING. MECCANICA

Prova scritta del 18/01/2021

I.1 Una lamina rettangolare $ABCD$, di lati a, b con $a < b$, è vincolata a ruotare intorno alla diagonale AC con vincolo liscio.
È soggetta alla distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\delta_D$$

(ossia a una forza concentrata nel vertice D), con $\alpha > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ versore solidale e normale alla lamina.
Il sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ ha $\boldsymbol{X}_O$ nel centro della lamina (che è anche l'origine del sistema di riferimento fisso), e

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u} \,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 \,.$$

In questo sistema le coordinate di D sono date da

$$\boldsymbol{X}_D = \boldsymbol{X}_O + \sum_{h=2}^{3} \lambda_{hD} \boldsymbol{u}_h \,,$$

e denotiamo il tensore di inerzia $\boldsymbol{\sigma}_O = (I_{hk})$.
Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo di rotazione $\varphi \in (-\pi, \pi)$ della lamina rispetto al sistema di riferimento fisso, tale che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{01}}$ Dire quale delle seguenti è la corretta equazione di moto.
a $I_{22}\ddot{\varphi} = \lambda_{2D}\alpha$.
b $I_{22}\ddot{\varphi} = -\lambda_{3D}\alpha$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ Dire quale delle seguenti proprietà ha $\boldsymbol{L}_O$.
a $\boldsymbol{L}_O(t) \cdot \boldsymbol{u}_2(t) = 0$, per ogni t.
b $\boldsymbol{L}_O(t) \cdot \boldsymbol{u}_3(t) = 0$, per ogni t.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ Dire quale delle funzioni seguenti rappresenta l'energia cinetica della lamina.
a

$$T = \frac{1}{2}(I_{22} + I_{33})\dot{\varphi}^2 \,.$$

b

$$T = \frac{1}{2} I_{22} \dot{\varphi}^2 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi su una superficie regolare S, data dal piano $x_3 = 0$, ossia

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,.$$

Il vincolo è scabro, secondo la legge

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si supponga $\boldsymbol{v}(t) \neq 0$ per ogni t.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -kx\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_3$$

con $k > 0$, $b \geq 0$.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Dire quale dei seguenti è il sistema delle equazioni di moto.
a

$$m\ddot{x} = -kx - \mu b\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \,,$$
$$m\ddot{y} = -\mu b\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \,.$$

b

$$m\ddot{x} = -kx - \mu b\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \,,$$
$$m\ddot{y} = -\mu b\frac{\dot{y}}{|\dot{y}|} \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dall'energia meccanica del punto definita da

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 + \frac{k}{2}x(t)^2 \,.$$

a $\dot{\mathcal{E}}(t) = -\mu b|\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2|$.
b $\dot{\mathcal{E}}(t) = -\mu b\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Dire quando è possibile che il moto sia rettilineo uniforme (diverso dalla quiete) con traiettoria parallela a uno degli assi cartesiani nel piano.
a Se $b = 0$ esistono tali moti su ogni retta parallela all'asse x_1.
b Se $b = 0$ esistono tali moti su ogni retta parallela all'asse x_2.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Dire quali delle seguenti forze direttamente applicate ammettano un potenziale lagrangiano, nei casi indicati. Il sistema di corpi rigidi è in ogni caso costituito dal singolo punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$.
Qui R, a, b, c, d, μ, $k > 0$ sono costanti.
$\boxed{\mathbf{07}}$ Il punto è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = a\tau\boldsymbol{e}_1 + b\tau^2\boldsymbol{e}_2 + ce^{d\tau}\boldsymbol{e}_3 , \qquad \tau \in \boldsymbol{R} .$$

Qui $\tau \in \boldsymbol{R}$ è la coordinata lagrangiana.
a $\boldsymbol{F} = \mu x_1 \sin(kt)\boldsymbol{e}_3$.
b $\boldsymbol{F} = \mu \dot{x}_1 \boldsymbol{e}_1$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Il punto è vincolato alla sfera mobile

$$x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - at)^2 = R^2 , \qquad t > 0 .$$

Si scelga la parametrizzazione lagrangiana

$$x_1 = R\cos\varphi\sin\theta , \quad x_2 = R\sin\varphi\sin\theta , \quad x_3 = at + R\cos\theta ,$$

con $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$.
a $\boldsymbol{F} = x_1^2\boldsymbol{e}_1 + x_3^3\boldsymbol{e}_3$.
b $\boldsymbol{F} = x_2\boldsymbol{e}_1 - x_1\boldsymbol{e}_2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Il punto è vincolato al paraboloide

$$x_3 = a(x_1^2 + x_2^2) , \qquad x_3 > 0 .$$

Si usino $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$ come coordinate lagrangiane.
a $\boldsymbol{F} = -kx_1\boldsymbol{e}_1 + \mu\dot{x}_2\boldsymbol{e}_2$.
b $\boldsymbol{F} = \mu e^{d\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\boldsymbol{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 ESERCIZIO PER 6CFU
Sia

$$m\ddot{x} = f(x)$$

l'equazione di un moto unidimensionale, con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Supponiamo che

$$|f(x)| \leq |\sin x| , \qquad \text{per ogni } x \in \boldsymbol{R}.$$

a Esistono infiniti punti di equilibrio stabile.
b Esistono infiniti punti di equilibrio, ma può darsi che nessuno sia stabile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che

$$f(x) \geq x^2 , \qquad \text{per ogni } x > 0.$$

Consideriamo le orbite nel piano delle fasi del moto.
a Esistono orbite definite per $x \in (x_0, +\infty)$, per qualche $x_0 \in \boldsymbol{R}$.
b Non esistono orbite illimitate.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Sia $f(x) \geq e^{-x^2}$ per ogni $x \in \boldsymbol{R}$.
a Non esistono punti di equilibrio.
b Esiste esattamente un punto di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un corpo rigido non degenere C è vincolato a muoversi di moto polare con polo O.
Il momento delle forze esterne è dato da

$$\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = -\alpha \boldsymbol{\omega} \,,$$

con $\alpha > 0$ costante. Si supponga sempre $\boldsymbol{\omega} \neq 0$.
$\boxed{\mathbf{13}}$ L'energia cinetica si conserva durante il moto.
a Se e solo se il moto è la quiete.
b Se e solo se il moto è una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Esistono moti che sono rotazioni.
a Non in generale, se non si fanno ipotesi speciali su α e $\boldsymbol{\sigma}_O$.
b Sì, qualunque forma abbia il corpo.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Si assuma $T(0) > 0$. Dire se è possibile che esista una costante $\beta > 0$ tale che

$$T(t) \geq \beta > 0 \,, \qquad \text{per ogni } t \in (0, +\infty) \,.$$

a Se e solo se $0 < \alpha < \alpha_0$ con $\alpha_0 \in (0, +\infty)$ opportuno.
b Se e solo se $T(0) > \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi sulla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Supponiamo che per un altro campo di forze $\boldsymbol{F}_1$ valga che $\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_1$ sia ortogonale al versore tangente $\boldsymbol{T}$ in ogni punto della curva. È vero che i due moti corrispondenti alle due forze (a parità di condizioni iniziali) coincidono?
a Sì sempre.
b Sì se il vincolo è liscio.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Se il vincolo è scabro e la forza $\boldsymbol{F}$ è conservativa, l'energia meccanica può conservarsi? (Si assuma che il moto non sia la quiete.)
a No, mai.
b Sì, indipendentemente dal valore del coefficiente d'attrito.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{18}}$ Il vincolo sia liscio, e $\boldsymbol{\psi}$ sia l'elica cilindrica

$$x_1 = R\cos(\alpha s)\,, \quad x_2 = R\sin(\alpha s)\,, \quad x_3 = h\alpha s\,,$$

con $h > 0$, $R > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ costanti, e $s \in \boldsymbol{R}$. Sia inoltre $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{L}}(s)$ con

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{L}}(s) = -\alpha s \boldsymbol{T}(s)\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $\alpha > 0$ costante.

a Tutti i moti sono limitati.

b Tutti i moti (diversi dalla quiete) sono illimitati.

c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 18/01/2021

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 18/01/2021

I.1 Una lamina rettangolare $ABCD$, di lati a, b con $a > b$, è vincolata a ruotare intorno alla diagonale AC con vincolo liscio.
È soggetta alla distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}\delta_B$$

(ossia a una forza concentrata nel vertice B), con $\alpha > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ versore solidale e normale alla lamina.
Il sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ ha $\boldsymbol{X}_O$ nel centro della lamina (che è anche l'origine del sistema di riferimento fisso), e

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\,.$$

In questo sistema le coordinate di B sono date da

$$\boldsymbol{X}_B = \boldsymbol{X}_O + \sum_{h=2}^{3} \lambda_{hB} \boldsymbol{u}_h\,,$$

e denotiamo il tensore di inerzia $\boldsymbol{\sigma}_O = (I_{hk})$.

Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo di rotazione $\varphi \in (-\pi, \pi)$ della lamina rispetto al sistema di riferimento fisso, tale che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{01}}$ Dire quale delle seguenti è la corretta equazione di moto.
a $I_{33}\ddot{\varphi} = -\lambda_{2B}\alpha$.
b $I_{33}\ddot{\varphi} = \lambda_{3B}\alpha$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Dire quale delle seguenti proprietà ha $\boldsymbol{L}_O$.
a $\boldsymbol{L}_O(t) \cdot \boldsymbol{u}_1(t) = 0$, per ogni t.
b $\boldsymbol{L}_O(t) \cdot \boldsymbol{u}_2(t) = 0$, per ogni t.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Dire quale delle funzioni seguenti rappresenta l'energia cinetica della lamina.
a

$$T = \frac{1}{2}(I_{23} + I_{33})\dot{\varphi}^2 \,.$$

b

$$T = \frac{1}{2} I_{13}\dot{\varphi}^2 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi su una superficie regolare S, data dal piano $x_3 = 0$, ossia

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,.$$

Il vincolo è scabro, secondo la legge

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si supponga $\boldsymbol{v}(t) \neq 0$ per ogni t.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + R\boldsymbol{e}_3)$$

con $k > 0$, $R \geq 0$.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Dire quale dei seguenti è il sistema delle equazioni di moto.
a

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -kx - \mu kR\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \,, \\
m\ddot{y} &= -ky - \mu kR\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \,.
\end{aligned}$$

b

$$m\ddot{x} = -kx - \mu kR\dot{x} \,,$$
$$m\ddot{y} = -ky - \mu kR\dot{y} \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

05 Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dall'energia meccanica del punto definita da

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 + \frac{k}{2}[x(t)^2 + y(t)^2] \,.$$

a $\dot{\mathcal{E}}(t) = -\mu kR|\boldsymbol{v}(t)|$.
b $\dot{\mathcal{E}}(t) = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

06 Dire quando è possibile che il moto sia circolare uniforme con traiettoria $x^2 + y^2 = L^2 > 0$.
a Se $R = 0$ per ogni valore di $L > 0$ esiste un tale moto.
b Se $R > 0$ esistono opportuni valori di $L > 0$ per cui esiste un tale moto.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Dire quali delle seguenti forze direttamente applicate ammettano un potenziale lagrangiano, nei casi indicati. Il sistema di corpi rigidi è in ogni caso costituito dal singolo punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$.
Qui a, b, c, d, μ, $k > 0$ sono costanti.

07 Il punto è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = a\tau\boldsymbol{e}_1 + b\tau^2\boldsymbol{e}_2 + ce^{d\tau}\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \tau \in \boldsymbol{R} \,.$$

Qui $\tau \in \boldsymbol{R}$ è la coordinata lagrangiana.
a $\boldsymbol{F} = \mu x_3 e^{kt}\boldsymbol{e}_1$.
b $\boldsymbol{F} = \mu\dot{x}_2\boldsymbol{e}_2$.
c Nessuna delle precedenti.

08 Il punto è vincolato alla sfera mobile

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2t^2 \,, \qquad t > 0 \,.$$

Si scelga la parametrizzazione lagrangiana

$$x_1 = at\cos\varphi\sin\theta \,, \quad x_2 = at\sin\varphi\sin\theta \,, \quad x_3 = at\cos\theta \,,$$

con $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$.
a $\boldsymbol{F} = -x_2\boldsymbol{e}_1 + x_1\boldsymbol{e}_2$.
b $\boldsymbol{F} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.

09 Il punto è vincolato al piano $x_3 = 0$. Si usino $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$ come coordinate lagrangiane.

a $\boldsymbol{F} = -k\dot{x}_1\boldsymbol{e}_1 + \mu x_2\boldsymbol{e}_2$.
b $\boldsymbol{F} = x_1\boldsymbol{e}_2 + ae^{bx_3}\boldsymbol{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 In ciascuno dei seguenti casi dire se il sistema di vincoli olonomi è regolare in tutte le configurazioni compatibili o no.
In tutti i casi il sistema di corpi rigidi è costituito dai due punti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3 \,.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ I vincoli sono

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= R_1^2 \,, \\ z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 &= R_2^2 \,, \\ (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 &= L^2 \,, \end{aligned}$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^6$. Qui L, R_1, $R_2 > 0$ sono costanti con $R_1 > R_2$.
a Sì, ma solo se $R_1 + R_2 > L > R_1 - R_2$.
b Sì, per ogni L, R_1, R_2.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Il vincolo è

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 - z_5^2 - z_6^2 + R^2 = 0 \,,$$

con $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 > 0$. Qui $R > 0$ è costante.
a No, mai.
b Sì, sempre.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ I vincoli sono

$$z_1 - \lambda z_4 = 0 \,, \quad z_2 - \lambda z_5 = 0 \,, \quad z_3 - \lambda z_6 = 0 \,,$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^6$. Qui $\lambda \in \boldsymbol{R}$ è costante.
a Sì, per ogni λ.
b Sì, ma solo se $\lambda > 0$.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un corpo rigido non degenere C è vincolato a muoversi di moto polare con polo O.
Il momento delle forze esterne è dato da

$$\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = -\alpha\boldsymbol{\omega} \,,$$

con $\alpha > 0$ costante. Si supponga sempre $\boldsymbol{\omega} \neq 0$.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Tutti i moti sono delle rotazioni.
a No, esistono sempre moti non rotatori, in qualunque ipotesi sul corpo.

b Sì, sotto la sola ipotesi che $\boldsymbol{\sigma}_O$ abbia forma opportuna.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ L'energia cinetica è decrescente in t.
a Sì, sempre.
b Solo per alcune condizioni iniziali, ma non per tutte.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Dire se è possibile che

$$T(t) \to 0\,, \qquad t \to t_0 < +\infty\,.$$

a Se e solo se $\alpha > \alpha_0$ con $\alpha_0 \in (0, +\infty)$ opportuno.
b Se e solo se $T(0) < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi sulla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Dire in quale caso, se il vincolo è liscio, l'energia cinetica si conserva.
a Se la curva è piana.
b Se la forza $\boldsymbol{F}$ è ortogonale al vettore tangente $\boldsymbol{T}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Se il vincolo è liscio, la forza $\boldsymbol{F}$ è posizionale, e la curva $\boldsymbol{\psi}$ è chiusa, allora il moto è periodico.
a Sì.
b Sì, ma solo se la curva è piana.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Il vincolo sia scabro, con

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si assuma sempre $\dot{s} \neq 0$, e anche che $\boldsymbol{F}$ sia conservativa.
a La conservazione dell'energia non vale per nessun moto.
b La conservazione dell'energia vale se $\mathbf{f}_{\text{vin}} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 15/02/2021 (1)

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 15/02/2021 (1)

I.1 Un disco di massa m e raggio R è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G sulla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

ove $(O, (x_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Su di esso agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha \overrightarrow{GP} \times \boldsymbol{e}_3 \,\mathrm{d}S + k\boldsymbol{e}_1 \,\mathrm{d}\delta_A \,,$$

ove $\mathrm{d}S$ è la misura di area sul disco, A è un punto solidale al disco che appartiene alla sua circonferenza bordo e P denota il generico punto del disco. Si tratta quindi della somma di una sollecitazione distribuita e di una forza concentrata in A. Qui α, $k > 0$ sono costanti e con I_{33} si denota il momento del disco rispetto all'asse a esso ortogonale in G.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G = L\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,, \quad \overrightarrow{GA} = R\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta \boldsymbol{e}_2 \,.$$

$\boxed{\mathbf{01}}$ Dire quale è l'espressione corretta dell'energia cinetica in forma lagrangiana.
a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2} L^2 \dot\theta^2 + \frac{I_{33}}{2} \dot\varphi^2 \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2} L^2 \dot\varphi^2 + \frac{I_{33}}{2} \dot\theta^2 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Dire quale è la corretta espressione delle componenti lagrangiane della forza concentrata $k\boldsymbol{e}_1 \,\mathrm{d}\delta_A$.
a $Q_\varphi^A = -kL\sin\varphi$, $Q_\theta^A = -kR\sin\theta$.
b $Q_\varphi^A = -kL\cos\theta$, $Q_\theta^A = -kR\sin\theta$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dalle componenti lagrangiane della forza distribuita $\alpha\overrightarrow{GP} \times \boldsymbol{e}_3 \,\mathrm{d}S$.
a $Q_\varphi^{\mathrm{dist}} = 0$ per ogni (φ, θ).
b $Q_\theta^{\mathrm{dist}} = 0$ per ogni (φ, θ).
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (R\cos(\alpha s), R\sin(\alpha s), h\alpha s) \,,$$

$\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, R, $h > 0$, $s \in \boldsymbol{R}$. Il vincolo è scabro, con legge

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

$\mu > 0$. Si prenda $s(t)$ come coordinata lagrangiana.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca dell'elica e k, τ curvatura e torsione rispettivamente (si ricordi che nell'elica k e τ sono costanti).
$\boxed{\textbf{04}}$ Sia $\dot{s}(0) = v_0 > 0$, e sul punto agisca la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{N}(s) + \beta \boldsymbol{B}(s)\,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti. Come si devono scegliere α e β in modo da rendere minima $|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}|$ all'istante $t = 0$?
a $\alpha = mv_0^2 k$, $\beta = 0$.
b $\alpha = \beta = mv_0^2 k/2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{05}}$ Sul punto agisce la forza $\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{B}$, con $\beta > 0$ costante. Il moto con condizioni iniziali $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$ è illimitato? (Il moto è definito finché $\dot{s} > 0$.)
a Può esserlo, se v_0 è abbastanza grande.
b No, è sempre limitato.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{06}}$ Supponiamo che sia $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(s)$ (ossia $\boldsymbol{F}$ sia posizionale). Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.
a La forza vincolare tangente all'istante iniziale $t = 0$ è indipendente da $\dot{s}(0)$.
b La forza vincolare tangente all'istante iniziale $t = 0$ è indipendente da $s(0)$.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Sull'asta agisce la forza, applicata nell'estremo B

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{e}_3 - k(\boldsymbol{X}_B - L\boldsymbol{e}_1)\,.$$

Qui α, $k > 0$ sono costanti.
Si usi la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}_B^{\text{L}} = L\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,,$$

$\varphi \in (-\pi, \pi)$.
$\boxed{\textbf{07}}$ Si può definire un potenziale lagrangiano $U^{\text{L}} \in C^2((-\pi, \pi))$?
a No.
b Solo se $k = \alpha$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ All'interno dell'intervallo $(-\pi, \pi)$ quante posizioni di equilibrio esistono al massimo?
a 4.
b 2.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{09}}$ Se $2\alpha \leq k$ esiste la posizione di equilibrio

$$\varphi_0 = -\arcsin\frac{2\alpha}{k} \in \Big[-\frac{\pi}{2}, 0\Big)\,.$$

In questa posizione si possono definire le piccole oscillazioni?
a Sì, sempre.
b Solo se $2\alpha < k$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, e il piano delle fasi (x, p).
$\boxed{\mathbf{10}}$ Se la curva

$$x^2 + p^2 = L^2\,,$$

con $L > 0$ è un'orbita, quale conclusione si può trarre?
a Esiste almeno un punto di equilibrio $\boldsymbol{x}_{\text{eq}}$ con $|\boldsymbol{x}_{\text{eq}}| < L$.
b Esiste almeno un punto di equilibrio $\boldsymbol{x}_{\text{eq}}$ con $|\boldsymbol{x}_{\text{eq}}| \geq L$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Se un'orbita è limitata, cioè contenuta in un insieme

$$\{(x, p) \mid x^2 + p^2 \leq R^2\}\,,$$

con $R < +\infty$, e non è un punto di equilibrio, è sempre una curva chiusa.
a Sì, se $U(x)$ è una funzione limitata.
b No in generale.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Si considerino due moti $x_1(t)$ e $x_2(t)$, tali che $x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$, $\dot{x}_1(t_0) \neq \dot{x}_2(t_0)$ per un t_0 assegnato.
a Allora i due moti hanno certamente orbite diverse.
b Se x_1 e x_2 hanno la stessa orbita, sono entrambi moti periodici.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare intorno al polo O.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Se $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) \neq 0$ per ogni t, e il moto è una rotazione intorno a un asse principale d'inerzia in O, allora $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t)$ ha direzione costante.
a Sì.
b Se è vero allora C ha ellissoide d'inerzia sferico.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Supponiamo che il moto sia una rotazione uniforme non nulla intorno a un asse non principale d'inerzia in O, e che $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) \neq 0$ per ogni t.
a $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t)$ può essere un vettore solidale al corpo.

b $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t)$ può essere un vettore costante nel sistema fisso.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{15}}$ Sia $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) = 0$ per ogni t. Dire quale delle seguenti quantità si conserva sempre in riferimento al moto alla Poinsot dell'ellissoide d'inerzia che rotola sul piano fisso Π ortogonale a $\boldsymbol{L}_O$.
a La direzione di $\boldsymbol{\omega}$.
b La componente di $\boldsymbol{\omega}$ normale a Π.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Si consideri un sistema di punti materiali liberi

$$(\boldsymbol{X}_1, m_1), \dots, (\boldsymbol{X}_n, m_n), \qquad n \geq 100.$$

Sui punti agiscono le forze esterne $\boldsymbol{F}_1^{\text{ext}}, \dots, \boldsymbol{F}_n^{\text{ext}}$, e si assumono le usuali ipotesi sulle forze interne.
Qui $\boldsymbol{F}^{\text{ext}}$ è la risultante delle forze esterne e $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}$ è il momento risultante delle forze esterne rispetto al centro di massa G. Si suppongono note le condizioni iniziali.
$\boxed{\textbf{16}}$ Se $\boldsymbol{F}^{\text{ext}}(t) = 0$ e $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}(t) = 0$ per ogni t, allora le equazioni globali (o cardinali) della dinamica determinano il moto del sistema.
a In genere no.
b Sì, se si conoscono le $\boldsymbol{F}_i^{\text{ext}}$ per ciascun $i = 1, \dots, n$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{17}}$ Supponiamo inoltre che il sistema sia rigido non degenere e che abbia quindi 6 gradi di libertà. A esso si aggiunge un altro moto $\boldsymbol{X}_{n+1}$, che è vincolato da vincoli rigidi solo a p tra gli n moti precedenti.
a In genere il numero dei gradi di libertà aumenta se $p \geq 3$.
b Il numero dei gradi di libertà può diminuire.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{18}}$ Supponiamo che il sistema sia rigido non degenere, e che si conosca il moto del centro di massa G. Allora la seconda equazione globale

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_G}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}$$

determina il moto del sistema.
a In genere no, a meno che $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = 0$.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 15/02/2021 (2)

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 15/02/2021 (2)

I.1 Un disco di massa m e raggio R è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G sulla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2 , \qquad x_3 = 0 ,$$

ove $(O, (x_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Su di esso agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP} \, \mathrm{d}S + \alpha \boldsymbol{e}_1 \, \mathrm{d}\delta_A ,$$

ove $\mathrm{d}S$ è la misura di area sul disco, A è un punto solidale al disco che appartiene alla sua circonferenza bordo e P denota il generico punto del disco. Si tratta quindi della somma di una sollecitazione distribuita e di una forza concentrata in A. Qui α, $\beta > 0$ sono costanti e con I_{33} si denota il momento del disco rispetto all'asse a esso ortogonale in G.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G = L \cos\theta \boldsymbol{e}_1 + L \sin\theta \boldsymbol{e}_2 , \quad \overrightarrow{GA} = R \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 .$$

$\boxed{\textbf{01}}$ Dire quale è l'espressione corretta dell'energia cinetica in forma lagrangiana.
a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2} L^2 \dot\theta^2 + \frac{I_{33}}{2} \dot\varphi^2 .$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2} L^2 \dot\varphi^2 + \frac{I_{33}}{2} \dot\theta^2 .$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ Dire quale è la corretta espressione delle componenti lagrangiane della forza concentrata $\alpha \boldsymbol{e}_1 \, \mathrm{d}\delta_A$.
a $Q^A_\theta = -\alpha R \sin\theta$, $Q^A_\varphi = -\alpha L \sin\varphi$.
b $Q^A_\theta = -\alpha L \sin\varphi$, $Q^A_\varphi = -\alpha R \sin\theta$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dalle componenti lagrangiane della forza distribuita $\beta \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP} \, \mathrm{d}S$.
a $Q^{\mathrm{dist}}_\varphi = 0$ per ogni (φ, θ).
b $Q^{\mathrm{dist}}_\varphi \neq 0$ per ogni (φ, θ).
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (R \cos(\alpha s), R \sin(\alpha s), h \alpha s) ,$$

$\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, R, $h > 0$, $s \in \boldsymbol{R}$. Il vincolo è scabro, con legge

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

$\mu > 0$. Si prenda $s(t)$ come coordinata lagrangiana.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca dell'elica e k, τ curvatura e torsione rispettivamente (si ricordi che nell'elica k e τ sono costanti).
$\boxed{\mathbf{04}}$ Sia $\dot{s}(0) = v_0 > 0$, e sul punto agisca la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{N}(s) + \beta \boldsymbol{B}(s) \,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Come si devono scegliere α e β in modo da rendere minima $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}|$ all'istante $t = 0$?
a $\alpha = 1$, $\beta = 0$.
b $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Sul punto non agiscono forze direttamente applicate. Il moto con condizioni iniziali $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$ si arresta in un tempo finito (cioè $\dot{s}(t) \to 0$ per $t \to t_0 < +\infty$)?
a No.
b No, ma solo se $v_0 > V > 0$ con V opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Supponiamo che sia $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{T}$ con α costante. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.
a Il moto è indipendente da μ.
b La quantità $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}|$ all'istante iniziale $t = 0$ è indipendente da $s(0)$.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Sull'asta agisce la forza, applicata nell'estremo B

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{e}_3 - k \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Qui α, $k > 0$ sono costanti.
Si usi la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{L}} = L \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + L \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,,$$

$\varphi \in (-\pi, \pi)$.
$\boxed{\mathbf{07}}$ Si può definire un potenziale lagrangiano $U^{\mathrm{L}} \in C^2((-\pi, \pi))$?
a No.
b Solo se $k = \alpha$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Se esiste una posizione di equilibrio $\varphi_0 > 0$ ne esiste una simmetrica $-\varphi_0$.

a Sì.
b Questo dipende dalla scelta di $L > 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ Possono esistere infinite posizioni di equilibrio?
a Sì se $k = \alpha$.
b Sì, se L è sufficientemente piccolo in dipendenza degli altri parametri.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x),$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, e il piano delle fasi (x, p).
$\boxed{\textbf{10}}$ Se la curva (non chiusa, si noti)

$$\{(x, p) \mid x^2 + p^2 = L^2, x < L\},$$

con $L > 0$ è un'orbita, quale conclusione si può trarre?
a Il punto $x = L$ non è di equilibrio.
b Il punto $x = L$ è di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{11}}$ Se un'orbita $p = p(x)$, $x \in J$, ove J è l'intervallo aperto di definizione della funzione $p(x)$, soddisfa $p(x) > 0$ per ogni $x \in J$, allora $p(x) > p_0 > 0$ per ogni $x \in J$, per un $p_0 > 0$ opportuno.
a Sì, ma solo se U ha punti di flesso.
b No in generale.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{12}}$ Se il potenziale U soddisfa $U(x) \to -\infty$ per $x \to \pm\infty$, allora esiste almeno un punto di equilibrio stabile.
a Sì, ne esiste esattamente uno.
b Sicuramente non ne esistono.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare intorno al polo O.
$\boxed{\textbf{13}}$ Se $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}(t) \neq 0$ per ogni t, e non mantiene direzione costante, il moto può essere una rotazione intorno a un asse principale d'inerzia in O.
a Sì, se C ha ellissoide d'inerzia sferico.
b Sì, se C non ha ellissoide d'inerzia sferico.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{14}}$ Se $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}(t) \neq 0$ per ogni t è costante nel sistema fisso, il moto può essere una rotazione uniforme non nulla intorno a un asse non principale d'inerzia in O.
a No.
b Sì se l'ellissoide d'inerzia è sferico.

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Sia $\boldsymbol{M}_O^{\rm ext}(t) = 0$ per ogni t. Dire quale delle seguenti quantità si conserva sempre.
a Il modulo $|\boldsymbol{\omega}|$.
b Il modulo $|\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}|$.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Si consideri un sistema di punti materiali liberi

$$(\boldsymbol{X}_1, m_1), \dots, (\boldsymbol{X}_n, m_n), \qquad n \geq 100.$$

Sui punti agiscono le forze esterne $\boldsymbol{F}_1^{\rm ext}$, ..., $\boldsymbol{F}_n^{\rm ext}$, e si assumono le usuali ipotesi sulle forze interne.
Qui $\boldsymbol{F}^{\rm ext}$ è la risultante delle forze esterne e $\boldsymbol{M}_G^{\rm ext}$ è il momento risultante delle forze esterne rispetto al centro di massa G. Si suppongono note le condizioni iniziali.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Sia $\boldsymbol{F}^{\rm ext}(t) = 0$ e $\boldsymbol{M}_G^{\rm ext}(t) = 0$ per ogni t. Dire quali dei seguenti moti sono determinati dalle equazioni globali della dinamica.
a Il moto di un punto del sistema, ma non di tutti.
b Il moto del centro di massa del sistema.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Supponiamo inoltre che il sistema sia rigido non degenere e che abbia quindi 6 gradi di libertà. A esso si aggiunge un altro moto $\boldsymbol{X}_{n+1}$, che è vincolato da vincoli rigidi solo a 2 tra gli n moti precedenti.
a Il numero dei gradi di libertà aumenta.
b Il numero dei gradi di libertà può diminuire.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Supponiamo che il sistema sia rigido non degenere, e che si conosca il momento $\boldsymbol{M}_G^{\rm ext}(t)$ come funzione del tempo. Allora si può determinare $\boldsymbol{L}_G(t)$.
a Sì.
b In genere no, a meno che $\boldsymbol{M}_G^{\rm ext} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 15/02/2021 (6cfu)

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 15/02/2021 (6cfu)

I.1 Un disco di massa m e raggio R è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G sulla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

ove $(O, (x_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Su di esso agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP} \,\mathrm{d}S + \alpha \boldsymbol{e}_1 \,\mathrm{d}\delta_A \,,$$

ove $\mathrm{d}S$ è la misura di area sul disco, A è un punto solidale al disco che appartiene alla sua circonferenza bordo e P denota il generico punto del disco. Si tratta quindi della somma di una sollecitazione distribuita e di una forza concentrata in A. Qui α, $\beta > 0$ sono costanti e con I_{33} si denota il momento del disco rispetto all'asse a esso ortogonale in G.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G = L \cos\theta \boldsymbol{e}_1 + L \sin\theta \boldsymbol{e}_2 \,, \quad \overrightarrow{GA} = R \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,.$$

$\boxed{\textbf{01}}$ Dire quale è l'espressione corretta dell'energia cinetica in forma lagrangiana.
a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2} L^2 \dot\theta^2 + \frac{I_{33}}{2} \dot\varphi^2 \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2} L^2 \dot\varphi^2 + \frac{I_{33}}{2} \dot\theta^2 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ Dire quale è la corretta espressione delle componenti lagrangiane della forza concentrata $\alpha \boldsymbol{e}_1 \,\mathrm{d}\delta_A$.
a $Q^A_\theta = -\alpha R \sin\theta$, $Q^A_\varphi = -\alpha L \sin\varphi$.
b $Q^A_\theta = -\alpha L \sin\varphi$, $Q^A_\varphi = -\alpha R \sin\theta$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dalle componenti lagrangiane della forza distribuita $\beta \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP} \,\mathrm{d}S$.
a $Q^{\mathrm{dist}}_\varphi = 0$ per ogni (φ, θ).
b $Q^{\mathrm{dist}}_\varphi \neq 0$ per ogni (φ, θ).
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (R \cos(\alpha s), R \sin(\alpha s), h \alpha s) \,,$$

$\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, R, $h > 0$, $s \in \boldsymbol{R}$. Il vincolo è scabro, con legge

$$|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| = \mu |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| \,,$$

$\mu > 0$. Si prenda $s(t)$ come coordinata lagrangiana.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca dell'elica e k, τ curvatura e torsione rispettivamente (si ricordi che nell'elica k e τ sono costanti).
$\boxed{\mathbf{04}}$ Sia $\dot{s}(0) = v_0 > 0$, e sul punto agisca la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{N}(s) + \beta \boldsymbol{B}(s) ,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Come si devono scegliere α e β in modo da rendere minima $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}|$ all'istante $t = 0$?
a $\alpha = 1$, $\beta = 0$.
b $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Sul punto non agiscono forze direttamente applicate. Il moto con condizioni iniziali $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$ si arresta in un tempo finito (cioè $\dot{s}(t) \to 0$ per $t \to t_0 < +\infty$)?
a No.
b No, ma solo se $v_0 > V > 0$ con V opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Supponiamo che sia $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{T}$ con α costante. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.
a Il moto è indipendente da μ.
b La quantità $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}|$ all'istante iniziale $t = 0$ è indipendente da $s(0)$.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Sull'asta agisce la forza, applicata nell'estremo B

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{e}_3 - k \boldsymbol{e}_2 .$$

Qui α, $k > 0$ sono costanti.
Si usi la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{L}} = L \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + L \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 ,$$

$\varphi \in (-\pi, \pi)$.
$\boxed{\mathbf{07}}$ Si può definire un potenziale lagrangiano $U^{\mathrm{L}} \in C^2((-\pi, \pi))$?
a No.
b Solo se $k = \alpha$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Se esiste una posizione di equilibrio $\varphi_0 > 0$ ne esiste una simmetrica $-\varphi_0$.
a Sì.
b Questo dipende dalla scelta di $L > 0$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{09}}$ Possono esistere infinite posizioni di equilibrio?
a Sì se $k = \alpha$.
b Sì, se L è sufficientemente piccolo in dipendenza degli altri parametri.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, e il piano delle fasi (x, p).
$\boxed{\textbf{10}}$ Se la curva (non chiusa, si noti)

$$\{(x, p) \mid x^2 + p^2 = L^2\,, x < L\}\,,$$

con $L > 0$ è un'orbita, quale conclusione si può trarre?
a Il punto $x = L$ non è di equilibrio.
b Il punto $x = L$ è di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{11}}$ Se un'orbita $p = p(x)$, $x \in J$, ove J è l'intervallo aperto di definizione della funzione $p(x)$, soddisfa $p(x) > 0$ per ogni $x \in J$, allora $p(x) > p_0 > 0$ per ogni $x \in J$, per un $p_0 > 0$ opportuno.
a Sì, ma solo se U ha punti di flesso.
b No in generale.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{12}}$ Se il potenziale U soddisfa $U(x) \to -\infty$ per $x \to \pm\infty$, allora esiste almeno un punto di equilibrio stabile.
a Sì, ne esiste esattamente uno.
b Sicuramente non ne esistono.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi si muove soggetto a forze conservative di potenziale lagrangiano $U^{\mathrm{L}}(x, y)$, ove $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate cartesiane. Si sa che (0,0) è un punto di equilibrio.
$\boxed{\textbf{13}}$ Supponiamo che l'hessiana sia

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\,.$$

a Si possono definire le piccole oscillazioni.
b Il punto è di equilibrio instabile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{14}}$ Supponiamo che l'hessiana sia

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}\,.$$

a Si possono definire le piccole oscillazioni.

b Il punto è di equilibrio instabile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che (0,0) sia di equilibrio stabile, con $U(0,0) = 0$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se

$$x(0)^2 + y(0)^2 + \dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2 \leq \delta^2$$

allora

$$|U(x(t), y(t))| \leq \varepsilon\,, \qquad t > 0\,.$$

a In genere non è vero, a meno che non si abbiano informazioni ulteriori sull'hessiana.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Si consideri un corpo rigido il cui supporto è un cubo. Dire quanti gradi di libertà ha il corpo sottoposto a ciascuno dei vincoli seguenti.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Due vertici A e B del cubo appartengono al piano fisso $x_3 = 0$.
a 4.
b 3.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Il centro del cubo è a distanza fissa R dall'origine.
a 3.
b 5.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Una diagonale del cubo AB deve mantenersi parallela all'asse fisso x_3.
a 1.
b 5.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 29/03/2021

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 29/03/2021

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza L e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0\,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Inoltre il centro G di AB deve avere quota $x_{3G} = 0$. Sull'asta agisce la forza (applicata in B)

$$\boldsymbol{F}_B = k|\boldsymbol{X}_B|^2 \boldsymbol{X}_B \,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(r, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

allora

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_3) \,, \quad \boldsymbol{X}_G = r\boldsymbol{u}_1 \,.$$

Sotto $\boldsymbol{X}_O$ denota l'origine del sistema di riferimento fisso, che ha coordinate (x_h).
01 Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze apparenti sono conservative nel senso lagrangiano e quindi esiste il loro potenziale lagrangiano U^{L}_{app}.
a Sì, e il potenziale è dato da

$$U^{\mathrm{L}}_{app}(r, \varphi) = \frac{m}{2} \alpha^2 \Big(r^2 + \frac{L^2}{3} \cos^2 \varphi \Big) \,.$$

b No, le forze apparenti non sono conservative in senso lagrangiano.
c Nessuna delle precedenti.
02 Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze direttamente applicate ammettono potenziale lagrangiano.
a Sì ed esso vale

$$U^{\mathrm{L}}_{da} = \frac{k}{4} (r^2 + L^2 + 2rL\cos\varphi) \,.$$

b Sì ed esso vale

$$U^{\mathrm{L}}_{da} = \frac{k}{4} (r^2 + L^2 + 2rL\cos\varphi)^2 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
03 Esistono posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $r = 0$.
a Sì ne esistono almeno 2.
b Non ne esistono, per una opportuna scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,,$$

ove R, $h > 0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea.
Il vincolo è scabro.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \gamma x_3 \boldsymbol{N} + \delta \boldsymbol{B} \,,$$

con γ, $\delta > 0$ costanti. Qui (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca dell'elica, che viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R \cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha \boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{B}(s) &= \alpha h \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h \cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e la curvatura $k(s) = R\alpha^2$.

04 Si supponga $\dot{s} \neq 0$ e che la reazione vincolare soddisfi

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Allora l'equazione di moto è:

a

$$m\ddot{s} = -\mu \operatorname{sign}(\dot{s}) \sqrt{(\dot{s}^2 m k - \gamma h \alpha s)^2 + \delta^2}\,.$$

b

$$m\ddot{s} = -\mu\delta \operatorname{sign}(\dot{s})\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

05 Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$, e che la reazione vincolare soddisfi all'equilibrio

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu_s |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Allora il punto materiale resta in equilibrio.

a Sì, ma solo se $0 < h \leq h_0$ con $h_0 > 0$ opportuno.

b Sì, ma solo se $\mu_s \geq \mu^0$ con $\mu^0 > 0$ opportuno.

c Nessuna delle precedenti.

06 Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0 > 0$, e che la reazione vincolare soddisfi, se $\dot{s} \neq 0$,

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Dire quale delle seguenti proprietà soddisfa $s(t)$.

a Vale in ogni caso $\dot{s}(t) > 0$ per ogni $t \in (0, +\infty)$.

b Vale $\dot{s}(t) \to 0$ per $t \to t_0-$, con $t_0 < +\infty$.

c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un cubo omogeneo C di spigolo L e massa m è vincolato ad avere il centro G nell'origine del sistema fisso.

Su di esso agisce una distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = [f_1(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{u}_1 + f_2(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{u}_2 + f_3(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{u}_3]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}\,,$$

ove $\boldsymbol{\lambda}$ denota le coordinate nel sistema solidale al cubo $\mathcal{S} = (G, (\boldsymbol{u}_h))$, e le f_h sono funzioni continue su C.

07 Si assuma che il cubo parta da fermo all'istante iniziale $t = 0$. Allora il moto è una rotazione.

a No, a meno che almeno 2 tra le f_h si annullino identicamente.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$, e che $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0$, ossia che tutte le f_h si annullino identicamente. Allora il moto è una rotazione.
a Sì.
b Solo se il cubo parte da certe posizioni opportune.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Supponiamo che $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = f_1(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{u}_1 \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$ (ossia che f_2, f_3 si annullino identicamente). Allora una delle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ in $(\boldsymbol{u}_h)$ si mantiene costante.
a Solo se f_1 è costante su C.
b No, mai.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si consideri un moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x) = U'(x)\,.$$

Sia $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia

$$\inf_{x\in\boldsymbol{R}} U(x) = -\infty\,,$$

e si consideri un'orbita del piano delle fasi corrispondente al livello energetico $E \in \boldsymbol{R}$.
a Esistono E per cui l'orbita è definita per ogni $x \in \boldsymbol{R}$.
b Per tutti i valori di E l'orbita è limitata.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Se due orbite nel piano delle fasi hanno un punto in comune, allora coincidono.
a Sì.
b Non in generale, ma può verificarsi.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Assumiamo che

$$U(x) < U(-L) = U(L)\,, \qquad -L < x < L\,,$$

per un dato $L > 0$.
a Se esiste al massimo un numero finito di punti di equilibrio in $(-L, L)$, allora almeno uno di essi è stabile.
b Esistono almeno due punti di equilibrio in $(-L, L)$.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi sulla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Dire in quale caso, se il vincolo è liscio, l'energia cinetica si conserva.
a Se la curva è piana.
b Se la forza $\boldsymbol{F}$ è parallela al vettore normale principale $\boldsymbol{N}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Se il vincolo è liscio, la forza $\boldsymbol{F}$ è posizionale, e la curva $\boldsymbol{\psi}$ è chiusa, allora la velocità si mantiene limitata durante tutto il moto.
a Sì.
b Sì, ma solo se la curva è piana.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Il vincolo sia scabro, con

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si assuma sempre $\dot{s} \neq 0$, e anche che $\boldsymbol{F}$ sia conservativa.
a La conservazione dell'energia vale, purché $\mu > 0$ sia abbastanza piccolo.
b La conservazione dell'energia vale, purché sia $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Si considerino due sistemi mobili di riferimento $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ e $\Sigma = (\boldsymbol{X}_\Omega, \mathcal{N})$. Qui $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ e $\boldsymbol{v}_\mathcal{S}$, $\boldsymbol{v}_\Sigma$ denotano le velocità di $\boldsymbol{X}$ relative rispettivamente a $\mathcal{S}$ e a Σ.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Dire quale delle seguenti formule è valida per un qualunque moto $\boldsymbol{X} \in C^2(I)$.
a

$$\boldsymbol{v}_\mathcal{S} = \boldsymbol{v}_{\Omega,\Sigma} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_\Omega) + \boldsymbol{v}_\Sigma\,.$$

b

$$\boldsymbol{v}_\mathcal{S} = \boldsymbol{v}_{\Omega,\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_\Omega) + \boldsymbol{v}_\Sigma\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Supponiamo che

$$\boldsymbol{v}_\Sigma = k\boldsymbol{w}_1\,, \quad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \alpha\boldsymbol{w}_1\,, \quad \boldsymbol{v}_{\Omega,\mathcal{S}} = 0\,.$$

Qui α, $k \in \boldsymbol{R}$.
È possibile che il moto $\boldsymbol{X}$ sia solidale a $\mathcal{S}$?
a Sì, è solidale a $\mathcal{S}$ se $k = 0$, senza altre condizioni.
b Sì, in alcuni casi anche se $\alpha \neq 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Si sa che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}}\,,$$

ove $\mathcal{P}$ è la terna fissa.
Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.
a La terna $\mathcal{N}$ è fissa.
b La terna $\mathcal{M}$ è fissa.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 03/06/2021

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 03/06/2021

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato dal vincolo mobile

$$\lambda_3 = \beta\lambda_1^3 \,, \qquad \lambda_2 = 0 \,,$$

ove $\beta > 0$ è costante e $\boldsymbol{\lambda}$ denota le coordinate nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, con $\boldsymbol{X}_O = 0$ e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 \,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 \,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.\end{aligned}$$

Sul punto agisce il peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Si scelga $x = \lambda_1 \in \boldsymbol{R}$ come coordinata lagrangiana.
$\boxed{\textbf{01}}$ Quale affermazione soddisfa il potenziale lagrangiano U^{L} delle forze apparenti in $\mathcal{S}$?
a

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{app}} = \frac{m}{2}\alpha^2(x^2 + \beta^2 x^6) \,.$$

b

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{app}} = \frac{m}{2}\alpha^2 x^2 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ Quale delle seguenti affermazioni concernenti le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ è corretta?
a Ne esiste esattamente 1, ed è stabile.
b Ne esistono due, una stabile e l'altra instabile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ L'energia cinetica $T^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ relativa al sistema $\mathcal{S}$ è data da
a

$$T^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + 9\beta^2 x^4) \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + 9\beta^2 x^2) \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un corpo rigido è formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R e da un'asta AB solidale al disco, ortogonale a esso con il punto medio nel centro G del disco. L'asta ha lunghezza $2L$ e massa m.
Si scelga come sistema di riferimento solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_G, (\boldsymbol{u}_h))$, con $\boldsymbol{u}_3 = \overrightarrow{AB}/(2L)$.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Il corpo si muove di moto polare per inerzia di polo G.
a Fissati M, R, $L > 0$, per un'opportuna scelta di m tutti i moti sono di rotazione uniforme.
b Esistono sempre moti per inerzia non periodici, per qualunque scelta di M, m, R, $L > 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Il corpo si muove di moto polare di polo G, soggetto a un momento delle forze esterne dato da

$$\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = \beta \boldsymbol{u}_2 \,,$$

con $\beta > 0$ costante; inoltre

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \boldsymbol{u}_1(0) \,,$$

$\alpha > 0$ costante.
a Vale $\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{u}_1(t) = \beta$ per ogni t.
b Vale $|\boldsymbol{\omega}(t)| =$costante.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Il corpo si muove di moto polare di polo A. Il momento delle forse esterne soddisfa

$$\boldsymbol{M}_A^{\text{ext}} = -\mu \boldsymbol{\omega} \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si assuma $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$; T indica l'energia cinetica.
a Il seguente limite esiste finito:

$$\lim_{t \to +\infty} T(t) \,.$$

b Vale

$$\lim_{t \to +\infty} T(t) = +\infty \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ si muove vincolato alla sfera S

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \,,$$

soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$. Il vincolo è liscio.
$\boxed{\mathbf{07}}$ Sia

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) = \alpha \boldsymbol{e}_1 - \beta |\dot{\boldsymbol{X}}|^2 \boldsymbol{X} \,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti.
a La forza non ammette potenziale lagrangiano.
b L'energia meccanica si conserva lungo tutti i moti.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Sia

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -k(\boldsymbol{x} - R\boldsymbol{e}_3)\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
a L'insieme dei punti di equilibrio dipende da $k > 0$.
b La reazione vincolare è parallela a $\boldsymbol{F}$ lungo ogni moto.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ Sia

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \nabla U(\boldsymbol{x})\,,$$

e $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$.
a Se $U(\boldsymbol{x}) = g(|\boldsymbol{x}|)$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$, per un'opportuna $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, allora l'energia cinetica si conserva lungo tutti i moti.
b Se U (come funzione di 3 variabili) ha un punto di sella in $x_0 = R\boldsymbol{e}_3$, questo è un punto di equilibrio instabile per il moto vincolato.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Consideriamo un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi regolari, con ℓ gradi di libertà, e il relativo potenziale lagrangiano U^{L} delle forze direttamente applicate.
$\boxed{\textbf{10}}$ Sia $\ell = 1$ e i vincoli siano mobili. Allora
a U^{L} esiste sempre.
b U^{L} non esiste mai.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{11}}$ Sia $\ell = 2$ e le componenti lagrangiane delle forze siano per $(q_1, q_2) \in \boldsymbol{R}^2$

$$Q_1 = q_1 t + q_2\,, \qquad Q_2 = q_1 + q_2\,.$$

a U^{L} esiste, in tutto $\boldsymbol{R}^2$.
b U^{L} esiste, ma non in tutto $\boldsymbol{R}^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{12}}$ Le forze direttamente applicate sono nulle.
a U^{L} esiste sicuramente se i vincoli sono fissi.
b Tutti i punti di equilibrio sono stabili.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia di polo $\boldsymbol{X}_O$.
$\boxed{\textbf{13}}$ Supponiamo che in $\boldsymbol{X}_O$ i 3 momenti principali d'inerzia soddisfino

$$I_{11} = I_{22}\,, \qquad I_{33} > I_{11}\,.$$

a Tutti i moti sono rotazioni uniformi.

b Tutti i moto sono periodici, ma alcuni non sono rotazioni.
c Nessuna delle precedenti.
14 Supponiamo che in $\boldsymbol{X}_O$ la terna $(\boldsymbol{u}_h)$ sia solidale e principale d'inerzia, e che

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \boldsymbol{u}_1(0) + \beta \boldsymbol{u}_2(0) \,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti. Si sappia inoltre che il moto risulta essere una rotazione uniforme.
a Allora ciascuno dei due versori $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ si mantiene costante (rispetto alla terna fissa) durante il moto.
b Allora esistono infinite direzioni solidali che possono essere l'asse di una rotazione uniforme.
c Nessuna delle precedenti.
15 Supponiamo che C sia una lamina e che il polo $\boldsymbol{X}_O$ sia sulla retta perpendicolare a C nel centro di massa G, con $d = |\boldsymbol{X}_O - \boldsymbol{X}_G| > 0$. Sia fissato $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$ parallelo a $\boldsymbol{X}_O - \boldsymbol{X}_G$. Indichiamo con T l'energia cinetica del corpo.
a Allora T è indipendente da d.
b Allora T è costante nel tempo, ma dipende da d.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un punto materiale è vincolato a muoversi su una curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea. Si assuma che la curvatura $k(s)$ sia ovunque strettamente positiva e che il vincolo sia liscio. Si scelga s come coordinata lagrangiana.
16 Supponiamo che per due istanti $t_1 \neq t_2$ si abbia

$$\boldsymbol{v}(t_1) = \boldsymbol{v}(t_2) \neq 0 \,, \qquad \boldsymbol{a}(t_1) = \boldsymbol{a}(t_2) \,.$$

Allora:
a $k(s(t_1)) = k(s(t_2))$.
b La curva è piana nel tratto percorso tra t_1 e t_2.
c Nessuna delle precedenti.
17 La forza direttamente applicata $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(s)$ sia posizionale. Allora:
a Se la curva è piana e chiusa il moto è periodico.
b Esiste una funzione $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ tale che valga lungo ciascun moto

$$\frac{m}{2} \dot{s}(t)^2 = g(s(t)) + C \,,$$

per un'opportuna $C \in \boldsymbol{R}$ dipendente dal moto.
c Nessuna delle precedenti.
18 La curva sia una circonferenza di centro l'origine e raggio R:

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Si assuma $\dot{s}(t) \neq 0$ per ogni t e che la forza direttamente applicata sia

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_3 \,,$$

con λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$ costanti.
a Se $\lambda = 0$ allora esistono moti per cui $|\mathbf{f}_{\text{vin}}(t)|$ è costante.
b Se $\mu = 0$ allora esistono moti per cui $|\mathbf{f}_{\text{vin}}(t)|$ è costante.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 02/07/2021

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 02/07/2021

I.1 In ciascuno dei seguenti casi rispondere alla domanda sui sistemi di coordinate lagrangiane ammissibili.
$\boxed{\mathbf{01}}$ Un'asta rigida AB di lunghezza L e massa m è vincolata a mantenere l'estremo A sul piano $x_3 = 0$ e l'estremo B sul piano $x_3 = R < L$. Poniamo $r = \sqrt{L^2 - R^2}$.
Quale dei seguenti sistemi di coordinate lagrangiane è ammissibile?
a $(q_1, q_2, q_3) \in \boldsymbol{R}^2 \times (-\pi, \pi)$ con

$$\boldsymbol{X}_A^{\text{L}} = q_1 \boldsymbol{e}_1 + q_2 \boldsymbol{e}_2 \,,$$
$$\boldsymbol{X}_B^{\text{L}} = (r \cos q_3 + q_1) \boldsymbol{e}_1 + (r \sin q_3 + q_2) \boldsymbol{e}_2 + R \boldsymbol{e}_3 \,.$$

b $(q_1, q_2, q_3) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ con

$$\boldsymbol{X}_A^{\text{L}} = q_1 \cos q_2 \boldsymbol{e}_1 + q_1 \sin q_2 \boldsymbol{e}_2 \,,$$
$$\boldsymbol{X}_B^{\text{L}} = (r q_3 + q_1 \cos q_2) \boldsymbol{e}_1 + (r q_3 + q_1 \sin q_2) \boldsymbol{e}_2 + R \boldsymbol{e}_3 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L è vincolata ad avere i due vertici opposti A, C sulla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{L^2}{2} \,.$$

Si assuma che $x_{3A} > 0$.
Dire quali delle seguenti scelte di coordinate cartesiane possono far parte dello stesso sistema di coordinate lagrangiane.
a x_{1A}, x_{1C}.
b x_{1A}, x_{2A}, x_{3C}.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{03}}$ Un punto $\boldsymbol{X}$ è vincolato alla superficie

$$x_3 = x_1 x_2 \,.$$

Dire quale delle seguenti parametrizzazioni lagrangiane è ammissibile.
a $(q_1, q_2) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}} = e^{-q_1^2} \cos q_2 \boldsymbol{e}_1 + e^{-q_1^2} \sin q_2 \boldsymbol{e}_2 + e^{-2q_1^2} \cos q_2 \sin q_2 \boldsymbol{e}_3 \,.$$

b $(q_1, q_2) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}} = q_1^3 \boldsymbol{e}_1 + q_2 \boldsymbol{e}_2 + q_1^3 q_2 \boldsymbol{e}_3 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un cilindro di raggio $R > 0$, e altezza $2H > 0$ si muove di moto polare con polo nel centro di massa G.
$\boxed{\textbf{04}}$ Si assuma che il moto sia polare per inerzia. Allora tutti i moti sono rotazioni.
a Sì, per una scelta opportuna di R, H.
b No, non si può mai esserne certi.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{05}}$ Si assuma che il moto sia polare per inerzia. Sia $(G, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale tale che $\boldsymbol{u}_3$ sia parallelo all'asse del cilindro. Sia $\omega_3(0) > 0$.
a Allora $\omega_3(t)$ cambia segno infinite volte per $t > 0$.
b Allora $\omega_3(t) > 0$ per ogni $t > 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{06}}$ Si assuma che sul corpo sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u} \times \overrightarrow{GA} \,,$$

nel punto solidale A che appartiene a una circonferenza di base del cilindro. Qui $k > 0$ è una costante e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale al corpo. Il cilindro parte da fermo all'istante $t = 0$.
Dire quale affermazione è corretta.
a La componente della velocità angolare lungo l'asse del cilindro è funzione lineare del tempo.
b Se la componente della velocità angolare lungo l'asse del cilindro è identicamente nulla, allora il moto è la quiete.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (R\cos(\alpha s), R\sin(\alpha s), h\alpha s) \,, \quad s \in \boldsymbol{R} \,,$$

con $\alpha = (R^2 + h^2)^{-1/2}$, s lunghezza d'arco.
Il vincolo è scabro, con legge di attrito dinamico

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\tan}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

$\mu > 0$ costante. Sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.
Si ricordi:

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h)\,, \quad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0)\,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R)\,, \quad k(s) = R\alpha^2\,, \quad \tau(s) = -\alpha^2 h\,.$$

07 Si assuma $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) < 0$. Allora
a L'energia cinetica T soddisfa $T(t) \geq T(0)/2$ per ogni $t \geq 0$ per cui è definito il moto.
b Si ha che $\dot{s}(t) \to 0$ per $t \to t_0 < +\infty$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Si assuma $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) > 0$. Allora
a L'energia cinetica T soddisfa $T(t) \geq T(0)/2$ per ogni $t \geq 0$ per cui è definito il moto.
b Si ha che $\dot{s}(t) \to 0$ per $t \to t_0 < +\infty$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Si assuma $\dot{s}(t) < 0$. È possibile un moto tale che $\dot{s}(t) \to -\infty$ per $t \to +\infty$?
a No, per nessun valore di $\mu > 0$.
b Sì, per qualsiasi valore di $\mu > 0$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Un punto materiale si muove vincolato a una curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, con curvatura $k(s) > 0$ e torsione $\tau(s)$.
10 La terna intrinseca $(\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s))$ si può definire se e solo se:
a $\tau(s) > 0$.
b $\tau(s) \neq 0$.
c Nessuna delle precedenti.
11 L'accelerazione $\boldsymbol{a}$ nella posizione s può essere:
a Un qualunque vettore nella forma $\alpha\boldsymbol{T}(s) + \beta\boldsymbol{N}(s)$, con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ arbitrari.
b Un qualunque vettore nella forma $\alpha\boldsymbol{T}(s) + \beta\boldsymbol{B}(s)$, con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ arbitrari.
c Nessuna delle precedenti.
12 È possibile che risulti $\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{a}(t) = 0$ anche se $\boldsymbol{v}(t) \neq 0$, $\boldsymbol{a}(t) \neq 0$?
a Sì per ogni curva $\boldsymbol{\psi}$ come sopra.
b Sì, ma solo se la curva $\boldsymbol{\psi}$ è piana.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di m vincoli olonomi regolari, con $\ell = 3n - m$ gradi di libertà.
13 L'energia meccanica si conserva se:
a Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e le forze direttamente applicate sono conservative.
b Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e le componenti lagrangiane delle forze sono conservative in senso lagrangiano.

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ L'insieme degli atti di moto del sistema in una fissata configurazione compatibile costituisce:
a Tutto $\boldsymbol{R}^{3n}$.
b Un sottospazio affine di $\boldsymbol{R}^{3n}$ di dimensione ℓ.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che $n = 2$ e i vincoli siano per i due moti $\boldsymbol{X}_1 = (z_1, z_2, z_3)$, $\boldsymbol{X}_2 = (z_4, z_5, z_6)$,

$$f_1(z_1, z_2, z_3) = 0\,, \quad f_2(z_4, z_5, z_6) = 0\,, \quad z_1 = z_4\,.$$

Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e le forze direttamente applicate sono nulle.
a Possono non esistere punti di equilibrio.
b L'energia cinetica si conserva lungo ciascun moto.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Sia C un corpo rigido non degenere.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Sia $I^P_{\boldsymbol{uu}}$ il momento d'inerzia relativo all'asse passante per P e parallelo al versore $\boldsymbol{u}$; P e $\boldsymbol{u}$ sono solidali al corpo rigido. Quale dei seguenti casi è possibile?
a

$$\sup_{P\in\boldsymbol{R}^3} I^P_{\boldsymbol{uu}} < +\infty\,, \qquad \boldsymbol{u} \text{ fissato.}$$

b

$$\inf_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^3\,, |\boldsymbol{u}|=1} I^P_{\boldsymbol{uu}} > 0\,, \qquad P \text{ fissato.}$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Tra i moti polari per inerzia di polo O esistono moti in cui $\boldsymbol{\omega}$ mantiene direzione costante, ma modulo non costante?
a Solo per geometrie particolari del corpo.
b No, mai.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Supponiamo che il corpo sia soggetto a una distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \beta \sin(\alpha x_2)\boldsymbol{e}_1 \,\mathrm{d}\mu\,,$$

ove α, $\beta > 0$ sono costanti e $\mathrm{d}\mu$ è la misura caratteristica del corpo. In assenza di vincoli, le equazioni globali della dinamica sono sufficienti a determinare il moto di C?
a Sì.
b Solo sotto l'ipotesi che le forze interne siano nulle.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 16/09/2021

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 16/09/2021

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a muoversi sul piano verticale $x_3 = 0$ mantenendo l'estremo A nell'origine O del sistema di riferimento fisso.
Sull'asta agiscono il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_2$ e la distribuzione di forza elastica

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{P'P}\,\mathrm{d}s\,,$$

ove P è il generico punto dell'asta e P' la sua proiezione ortogonale sull'asse $x_2 = 0$. Qui $k > 0$ è costante e $\mathrm{d}s$ è la misura di lunghezza dell'asta.
Si usi come coordinata lagrangiana $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_B = 2L(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2)\,.$$

$\boxed{\mathbf{01}}$ Le forze applicate sono conservative in senso lagrangiano?
a Sì, e

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -mgL\sin\varphi - \frac{4kL^3}{3}(\cos\varphi)^2\,.$$

b Sì, e

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -mgL\sin\varphi - \frac{4kL^3}{3}(\sin\varphi)^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Le posizioni di equilibrio dell'asta soddisfano:
a Sono esattamente 3.
b Sono tutte stabili.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ L'energia cinetica dell'asta in forma lagrangiana:
a È di fatto dipendente sia da φ che da $\dot\varphi$, ossia in genere

$$\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} \neq 0\,, \qquad \frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial\dot\varphi} \neq 0\,.$$

b Dipende da $\dot\varphi$ ma non da φ, ossia per ogni φ, $\dot\varphi$ si ha

$$\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.2 Dire in ciascuno dei seguenti casi quale è una parametrizzazione lagrangiana corretta per i due moti $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ vincolati come indicato.
Le q_h indicano le coordinate lagrangiane.

$\boxed{\textbf{04}}$ Il moto $\boldsymbol{X}_2$ è vincolato a appartenere al piano individuato dall'asse x_3 e dal moto $\boldsymbol{X}_1$ (che si assume non appartenente all'asse x_3).

a Si ha $(q_1, \dots, q_5) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times \boldsymbol{R}^3$ e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h \boldsymbol{e}_h \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = q_4 \boldsymbol{e}_1 + \frac{q_2 q_4}{q_1} \boldsymbol{e}_2 + q_5 \boldsymbol{e}_3 \,.$$

b Si ha $(q_1, \dots, q_5) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times \boldsymbol{R}^3$ e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h \boldsymbol{e}_h \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = q_4 \boldsymbol{e}_1 + q_5 \boldsymbol{e}_2 - \frac{q_2 q_4}{q_1} \boldsymbol{e}_3 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{05}}$ I due moti appartengono alla stessa sfera mobile

$$(x_1 - \alpha(t))^2 + (x_2 - \beta(t))^2 + x_3^2 = R^2 \,,$$

e al piano $x_3 = 0$. Qui α, $\beta \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ e $R > 0$ è costante.

a Si ha $(q_1, \dots, q_4) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1 &= [\alpha(t) + R \cos q_1 \sin q_2] \boldsymbol{e}_1 + [\beta(t) + R \sin q_1 \sin q_2] \boldsymbol{e}_2 + R \cos q_2 \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{X}_2 &= [\alpha(t) + R \cos q_3 \sin q_4] \boldsymbol{e}_1 + [\beta(t) + R \sin q_3 \sin q_4] \boldsymbol{e}_2 + R \cos q_4 \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

b Si ha $(q_1, q_2, q_3) \in (-\pi, \pi) \times \boldsymbol{R}^2$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1 &= [\alpha(t) + R \cos q_1] \boldsymbol{e}_1 + [\beta(t) + R \sin q_1] \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{X}_2 &= [q_2 - \alpha(t) - R \cos q_1] \boldsymbol{e}_1 + [q_3 - \beta(t) - R \sin q_1] \boldsymbol{e}_2 \,. \end{aligned}$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{06}}$ I due moti sono vincolati a restare a distanza costante $R > 0$.

a Si ha $(q_1, q_2, q_3) \in \boldsymbol{R}^3$ e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h \boldsymbol{e}_h \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = \sum_{h=1}^{3} \Big(q_h - \frac{R}{\sqrt{3}} \Big) \boldsymbol{e}_h \,.$$

b Si ha

$$(q_1, \dots, q_5) \in \{ \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^5 \mid (q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 < R^2 \} \,,$$

e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h \boldsymbol{e}_h \,, \quad \boldsymbol{X}_2 = q_4 \boldsymbol{e}_1 + q_5 \boldsymbol{e}_2 + [q_3 + \sqrt{R^2 - (q_1 - q_4)^2 - (q_2 - q_5)^2}] \boldsymbol{e}_3 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.3 Una piramide con base quadrata, di massa m, altezza H e spigolo di base L, è vincolata a muoversi di moto polare intorno al suo centro di massa G. Il vincolo è liscio.

$\boxed{\textbf{07}}$ Supponiamo che l'unica forza applicata sia il peso. Allora:
a Tutti i moti sono delle rotazioni.
b Esiste un versore solidale $\boldsymbol{u}$ tale che se $\boldsymbol{\omega}(0) \cdot \boldsymbol{u}(0) = 0$, allora il moto è una rotazione, altrimenti in genere non lo è.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{08}}$ Supponiamo che l'unica forza applicata sia il peso. Allora:
a Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_G(t)$ si mantiene parallelo a $\boldsymbol{\omega}(t)$ durante il moto.
b Il prodotto $\boldsymbol{L}_G(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t)$ si mantiene costante durante il moto.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{09}}$ Supponiamo che l'unica forza applicata sia

$$\boldsymbol{F}_V = \alpha \boldsymbol{u} ,$$

ove V è il vertice della piramide, $\alpha > 0$ è costante e il versore solidale $\boldsymbol{u}$ è parallelo alla base della piramide. La forza è applicata in V. Il corpo parte da fermo.
Allora:
a Il moto è sempre una rotazione.
b Il moto può essere una rotazione per una scelta opportuna dei parametri, ma in genere non lo è.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Qui $\boldsymbol{\psi} \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è una curva regolare γ con ascissa curvilinea $s \in \boldsymbol{R}$, curvatura $k(s) > 0$ e torsione $\tau(s) \in \boldsymbol{R}$. Un disco di massa m è vincolato in modo che il suo centro G appartenga alla curva γ (questo significa che può muoversi su γ) e che un suo diametro solidale AB sia sempre tangente alla curva γ in G. I vincoli sono lisci.

$\boxed{\textbf{10}}$ Quanti sono i gradi di libertà ℓ del disco?
a $\ell = 2$.
b $\ell = 3$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{11}}$ Se la curva è piana, la velocità angolare del disco
a È parallela alla binormale $\boldsymbol{B}$ della curva.
b È parallela alla tangente $\boldsymbol{T}$ della curva.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{12}}$ Supponiamo che l'unica forza applicata sia il peso, γ sia un'elica circolare con asse parallelo alla direzione del peso e il disco parta da fermo. Allora
a La velocità angolare del disco si mantiene nulla per tutto il moto.

b La conservazione dell'energia implica

$$\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G(t)|^2 + mg\lambda s(t) = E \,,$$

per ogni t, ove $\lambda > 0$ è una costante legata alla geometria della curva e E è una costante determinata dai dati iniziali.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Una lamina rettangolare $ABCD$ di massa m e lati $a > b > 0$ è vincolata a ruotare intorno alla diagonale AC. Il vincolo rispetta l'ipotesi dei lavori virtuali.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Non sono applicate forze. Sia $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.
a Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{\omega}(t) = 0 \,.$$

b Il momento delle reazioni vincolari non è nullo.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Supponiamo che alla lamina venga applicata la forza solidale

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u} \,,$$

nel vertice A, con $k > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ solidale e ortogonale alla lamina.
a La forza indicata è incompatibile con il vincolo assegnato.
b Applicare o meno la forza indicata non cambia le reazioni vincolari.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Alla lamina viene applicato un campo di forze, peraltro incognito. Sappiamo anche che il moto risultante è tale che $\boldsymbol{\omega}(t)$ non è costante. Allora
a Il campo di forze applicato ha componente del momento (rispetto a G) lungo l'asse di rotazione non identicamente nulla.
b Il campo di forze applicato non è conservativo.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Dire in quali dei seguenti casi si possono definire le piccole oscillazioni del sistema a vincoli lisci e fissi, soggetto a forze conservative, considerato. Qui $\ell = 2$ e il punto di equilibrio è $(q_1, q_2) = (0,0)$.
$\boxed{\mathbf{16}}$ $U^{\mathrm{L}}(q_1, q_2) = \alpha q_1^2 + \beta q_2^2$ con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti.
a Se $\alpha < 0$, $\beta > 0$ o se $\alpha > 0$, $\beta < 0$.
b Se $\alpha < 0$, $\beta < 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ $U^{\mathrm{L}}(q_1, q_2) = -\alpha q_1^4 - \beta q_2^8$ con α, $\beta > 0$ costanti.
a In nessun caso.
b Solo se $T^{\mathrm{L}} \geq C|\dot{\boldsymbol{q}}|^2$ con $C > 0$ abbastanza grande.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Se $U^{\mathrm{L}}(0,0) = 0$ e per ogni (q_1, q_2) si ha

$$U^{\mathrm{L}}(q_1, q_2) \leq -c(q_1^2 + q_2^2) \,,$$

con $c > 0$ costante opportuna.
a No in generale.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 19/10/2021

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 19/10/2021

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1 \sin(\beta t) + x_2 \cos(\beta t) = 0\,,$$

ove $\beta > 0$ è costante. Inoltre il centro G di AB deve avere quota $x_{3G} = 0$. Sull'asta agisce la forza (applicata in B)

$$\boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{X}_B\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(r, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che se

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

allora

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L(\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{u}_3)\,, \quad \boldsymbol{X}_G = r\boldsymbol{u}_1\,.$$

Sotto $\boldsymbol{X}_O$ denota l'origine del sistema di riferimento fisso, che ha coordinate (x_h).
$\boxed{\mathbf{01}}$ Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze apparenti sono conservative nel senso lagrangiano e quindi esiste il loro potenziale lagrangiano U^{L}_{app}.
a Sì, e il potenziale è dato da

$$U^{\mathrm{L}}_{app}(r, \varphi) = \frac{m}{2}\beta^2 r^2\,.$$

b Sì, ma il potenziale non è quello dato nella risposta precedente.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{02}}$ Nel sistema fisso di riferimento le forze direttamente applicate ammettono potenziale lagrangiano.
a Sì ed esso può essere preso uguale a

$$U^{\mathrm{L}}_{da} = -\frac{k}{2} r^2 .$$

b Sì ed esso può essere preso uguale a

$$U^{\mathrm{L}}_{da} = -\frac{k}{2} r L \sin\varphi .$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ Dire quali delle seguenti espressioni dà l'energia cinetica dell'asta nel sistema fisso di riferimento. Qui I è il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse ad essa ortogonale nel suo centro.
a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2} r^2 \beta^2 + \frac{I}{2}(\dot\varphi^2 + \beta^2 (\sin\varphi)^2) .$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\beta^2) + \frac{I}{2}\beta^2 (\cos\varphi)^2 .$$

c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 , \qquad s \in \boldsymbol{R} ,$$

ove R, $h > 0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea.
Il vincolo è scabro.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \gamma x_3 \boldsymbol{T} + \delta \boldsymbol{B} ,$$

con γ, $\delta > 0$ costanti. Qui (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca dell'elica, che viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3 , \\
\boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{B}(s) &= \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3 ,
\end{aligned}$$

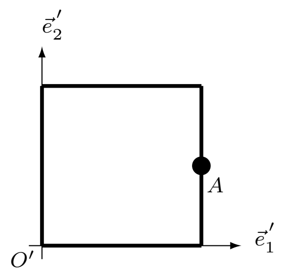
e la curvatura $k(s) = R\alpha^2$.
$\boxed{\textbf{04}}$ Si supponga $\dot s > 0$ e che la reazione vincolare soddisfi

$$|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| = \mu |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| ,$$

con $\mu > 0$ costante. Allora l'equazione di moto è:

a
$$m\ddot{s} = \delta - \mu \operatorname{sign}(\dot{s})\sqrt{\dot{s}^4 m^2 k^2 + \delta^2}\,.$$
b
$$m\ddot{s} = \gamma h \alpha s - \mu\sqrt{\dot{s}^4 m^2 k^2 + \delta^2}\,.$$
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Si supponga che $s(0) = 1/\alpha$, $\dot{s}(0) = 0$, e che la reazione vincolare soddisfi all'equilibrio
$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \le \mu_s |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$
con $\mu_s > 0$ costante. Allora il punto materiale resta in equilibrio.
a Sì, se $R \ge R_0$ con $R_0 > 0$ opportuno.
b Sì, se $\delta \ge \delta_0$ con $\delta_0 > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0 < 0$, e che la reazione vincolare soddisfi, se $\dot{s} \ne 0$,
$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$
con $\mu > 0$ costante. Dire quale delle seguenti proprietà soddisfa $s(t)$.
a Vale $\ddot{s}(t) > 0$ per $t \in (0, \bar{t})$, con $\bar{t} > 0$ opportuno.
b Il moto è indipendente dal valore di μ.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando l'elemento A di massa M a una lamina rigida omogenea di forma quadrata di massa M e lato $2L$. In figura è rappresentato il corpo assieme al riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i^{\,\prime}\}$. Si nota che $\overrightarrow{O'A} = 2L\vec{e}_1^{\,\prime} + L\vec{e}_2^{\,\prime}$.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo O' sull'asse fisso 1 e l'asse 3 solidale costantemente parallelo all'omologo asse fisso 3. Come coordinate lagrangiane si possono usare la coordinata cartesiana 1 di O' e l'anomalia φ individuata dall'asse fisso 1 e dall'asse solidale 1 orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.
$\boxed{\mathbf{07}}$ Quanto valgono le coordinate del centro di massa del corpo rispetto al riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i^{\,\prime}\}$?
a $\left(\frac{3}{2}L, L, 0\right)$.
b $\left(\frac{3}{2}L, \frac{1}{2}L, 0\right)$.

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Quanto vale il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse 3 solidale?
a $\frac{23}{3}ML^2$.
b $\frac{16}{3}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Quanto vale il momento angolare del corpo calcolato usando come polo di riduzione il centro di massa?
a $\frac{23}{6}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
b $\frac{7}{6}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, e il piano delle fasi (x, p).
$\boxed{\mathbf{10}}$ Se la curva (non chiusa, si noti)

$$\{(x,p) \mid x^2 + p^2 = L^2\,, x < L\}\,,$$

con $L > 0$ è un'orbita, quale conclusione si può trarre?
a Il punto $x = L$ non è di equilibrio.
b Il moto non è periodico.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Se un'orbita $p = p(x)$, $x \in J$, ove J è l'intervallo aperto di definizione della funzione $p(x)$, soddisfa $p(x) > 0$ per ogni $x \in J$, allora $p(x) > p_0 > 0$ per ogni $x \in J$, per un $p_0 > 0$ opportuno.
a Non può succedere.
b Può succedere o no.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Se il potenziale U soddisfa $U(x) \to -\infty$ per $x \to \pm\infty$, allora esiste almeno un punto di equilibrio stabile.
a Sì, sotto l'ulteriore ipotesi che esista esattamente un punto di equilibrio.
b Sicuramente non ne esistono.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi sulla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Dire in quale caso, se il vincolo è liscio, l'energia cinetica si conserva.
a Se la curva è piana.
b Se la forza $\boldsymbol{F}$ è ortogonale al vettore normale principale $\boldsymbol{N}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Se il vincolo è liscio, la forza $\boldsymbol{F}$ è conservativa, allora l'energia meccanica si conserva.

a Sì sempre.
b No, in generale.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Il vincolo sia scabro, con

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si assuma sempre $\dot{s} < 0$, e anche che $\boldsymbol{F}$ sia conservativa.
a La conservazione dell'energia vale se $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}| = 0$.
b La conservazione dell'energia vale se la torsione della curva è una costante.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando un elemento di massa M al punto A del bordo di un disco omogeneo di massa M. Il corpo è vincolato a muoversi in un piano verticale fisso rispetto all'osservatore terrestre mantenendosi a contatto dall'interno con una guida circolare giacente nel medesimo piano. L'atto di moto è in ogni istante con assenza di strisciamento.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
a L'atto di moto è in ogni istante elicoidale e l'asse del moto è tangente alla guida nel punto di contatto tra corpo e guida.
b L'atto di moto è in ogni istante rotatorio e il centro di istantanea rotazione è il punto del bordo del disco opposto ad A.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento del centro di massa?
a $\frac{1}{2}I\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e I il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro geometrico del disco e ortogonale al disco stesso.
b $\frac{1}{2}J\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e J il momento d'inerzia relativo all'asse ortogonale al disco e passante per il punto medio tra il centro del disco e il punto A.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
a La centroide fissa (base) è una curva degenere coincidente con il centro della guida.
b La centroide fissa (base) coincide con la guida.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 14/01/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 14/01/2022

I.1 Un disco di centro G, raggio R e massa m è vincolato a giacere sul piano mobile $\Pi(t) = \langle \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_3(t) \rangle$ e a avere un punto solidale A della circonferenza suo bordo appartenente alla curva

$$\lambda_3 = \alpha \cos(\beta\lambda_1)\,, \qquad \lambda_2 = 0\,,$$

ove $\boldsymbol{\lambda}$ indica le coordinate nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\gamma t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\gamma t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\gamma t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\gamma t)\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

per ogni $t \in \boldsymbol{R}$.
Sul disco agisce la forza, applicata in G,

$$\boldsymbol{F}_G = \delta \overrightarrow{AG} \times \boldsymbol{u}_2\,.$$

Qui α, β, γ, $\delta > 0$. Si prendano come coordinate lagrangiane $(x, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_A^{\mathrm{L}} = x\boldsymbol{u}_1(t) + \alpha\cos(\beta x)\boldsymbol{u}_3(t)\,, \quad \overrightarrow{AG} = R\cos\varphi \boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\varphi \boldsymbol{u}_3(t)\,.$$

$\boxed{\mathbf{01}}$ Allora l'energia cinetica lagrangiana $T_{\mathcal{S}}^{\mathrm{L}}$ del disco, relativa al sistema $\mathcal{S}$:
a Dipende da α, β.
b È un polinomio di grado 2 in $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$, con un termine non nullo di grado 0.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Le componenti lagrangiane di $\boldsymbol{F}_G$ sono:
a

$$Q_x^G = -\delta R(\sin\varphi + \alpha\beta\cos\varphi\sin(\beta x))\dot{x}\,, \quad Q_\varphi^G = \delta R^2 \dot{\varphi}\,.$$

b

$$Q_x^G = -\delta R(\sin\varphi + \alpha\beta\cos\varphi\sin(\beta x))\,, \quad Q_\varphi^G = \delta R^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ In $\mathcal{S}$ la distribuzione di forze di trascinamento $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ sul disco:
a Ha una corrispondente distribuzione di potenziale

$$\mathrm{d}U_{\mathrm{T}} = \frac{m\delta^2}{\pi R^2} \frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}{2}\,.$$

b Non ha una corrispondente distribuzione di potenziale.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie

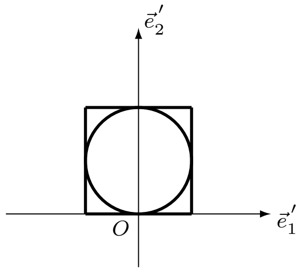
$$x_3 = \alpha x_1 x_2 \,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,,$$

con vincolo scabro secondo la legge di Coulomb-Morin.
Il punto è soggetto alla forza costante

$$\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{e}_1 \,.$$

Qui α, $\beta > 0$ sono costanti.
$\boxed{\textbf{04}}$ Consideriamo il caso di attrito statico $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu_s |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|$, $\mu_s > 0$ costante. Allora l'insieme delle posizioni di equilibrio:
a Dipende in effetti da α ma non da β.
b Comprende in ogni caso entrambi gli assi.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{05}}$ Consideriamo il caso di attrito dinamico $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|$, $\mu > 0$ costante, ove si suppone $\boldsymbol{v} \neq 0$. Allora:
a Si ha nelle equazioni di moto $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}|$.
b Sono possibili moti rettilinei uniformi sull'asse x_1.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{06}}$ Consideriamo il caso di attrito dinamico $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|$, $\mu > 0$ costante, ove si suppone $\boldsymbol{v} \neq 0$. Allora:
a Esistono moti per cui l'energia meccanica si conserva.
b Il modulo della velocità $|\boldsymbol{v}(t)|$ è funzione non crescente di t.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Una lamina pesante rigida omogenea di massa M è stata ottenuta praticando un foro circolare di raggio $a/2$ a una lamina quadrata di lato a in modo che il centro del foro e quello della lamina quadrata siano coincidenti. Il riferimento $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ in figura è solidale alla lamina.



Il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ ha asse 2 verticale ascendente. La lamina è vincolata in modo che l'asse 3 solidale è costantemente coincidente con l'omologo asse fisso e la lamina si muove di moto rotatorio attorno all'asse 3. I vincoli sono perfetti. Sul sistema agisce il peso. Si usi come coordinata lagrangiana l'anomalia φ associata all'angolo di vertice O e di primo e secondo lato gli assi 1 fisso e solidale e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.
$\boxed{\textbf{07}}$ Quanto vale il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse coordinato 2 del riferimento solidale in figura?

a $\frac{16-3\pi}{48(4-\pi)}Ma^2$
b $\frac{64-15\pi}{48(4-\pi)}Ma^2$
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Quanto vale l'energia cinetica della lamina?
a $\frac{64-15\pi}{96(4-\pi)}Ma^2\dot{\varphi}^2$
b $\frac{40-9\pi}{48(4-\pi)}Ma^2\dot{\varphi}^2$
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Qual è l'equazione pura del moto?
a $\frac{64-15\pi}{24(4-\pi)}Ma^2\ddot{\varphi} = (Mga/2)\sin\varphi$
b $\frac{40-9\pi}{24(4-\pi)}Ma^2\ddot{\varphi} = (Mga/2)\sin\varphi$
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si consideri un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ che si muove vincolato alla curva regolare γ intersezione delle due superfici

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0\,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0\,.$$

Si assuma che su γ i due vettori ∇f_1 e ∇f_2 siano sempre linearmente indipendenti, in modo che per ogni $\boldsymbol{x} \in \gamma$ risulti ben definito il piano

$$\Pi(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla f_1(\boldsymbol{x}), \nabla f_2(\boldsymbol{x}) \rangle\,.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Se sul punto agisce la forza $\boldsymbol{F}$ allora:
a La reazione vincolare appartiene a $\Pi(\boldsymbol{x})$ sia nel caso di vincolo liscio che scabro.
b Se il vincolo è liscio, le componenti di $\boldsymbol{F}$ che giacciono su $\Pi(\boldsymbol{x})$ sono irrilevanti per il moto.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ soddisfa
a $\boldsymbol{a}(t)$ è normale a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$.
b $\boldsymbol{a}(t) \in \Pi(\boldsymbol{X}(t))$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ La velocità $\boldsymbol{v}(t)$ soddisfa:
a $\boldsymbol{v}(t)$ è normale a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$.
b $\boldsymbol{v}(t) \in \Pi(\boldsymbol{X}(t))$.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$, e il suo diagramma di fase con orbite $(x(t), p(t))$.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Supponiamo che esista un solo punto di equilibrio e che questo sia stabile. Allora:
a Esistono sempre orbite illimitate.

b Tutte le orbite sono limitate.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{14}}$ Supponiamo che

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0 \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} p(t) = p_0 \in \boldsymbol{R}\,.$$

Allora:
a I due limiti dati sono incompatibili.
b Si ha che x_0 è di equilibrio e che $p_0 = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{15}}$ Supponiamo che

$$f(x) = \alpha x e^{-\alpha^2 x^2}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $\alpha < 0$ costante. Allora:
a Il punto $x = 0$ è di equilibrio stabile.
b Non esistono orbite illimitate.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Una lamina rigida è stata ottenuta saldando due dischi omogenei di massa M e $2M$ e di raggio R in modo che i due dischi risultino complanari e mutuamente tangenti. La lamina si muove appoggiata a un piano liscio orizzontale e l'unica sollecitazione attiva agente su di essa è il peso.
$\boxed{\textbf{16}}$ Dove si trova il centro di massa della lamina?
a nel centro del disco di massa $2M$;
b nel punto medio del segmento avente per estremi i centri dei due dischi;
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{17}}$ Cosa si può dire della sollecitazione vincolare?
a ha trinomio invariante nullo;
b ha momento totale ortogonale al piano di appoggio;
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{18}}$ Cosa si può dire del moto del centro di massa della lamina se la sua velocità iniziale è non nulla e parallela al piano d'appoggio e la velocità angolare iniziale è diversa da zero?
a è rettilineo uniforme;
b è circolare uniforme;
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 14/01/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 14/01/2022

I.1 Un disco di centro G, raggio R e massa m è vincolato a giacere sul piano mobile $\Pi(t) = \langle \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_3(t) \rangle$ e a avere un punto solidale A della circonferenza suo bordo appartenente alla curva

$$\lambda_3 = \alpha \cos(\beta \lambda_1) , \qquad \lambda_2 = 0 ,$$

ove $\boldsymbol{\lambda}$ indica le coordinate nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\delta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\delta t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\delta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\delta t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 , \end{aligned}$$

per ogni $t \in \boldsymbol{R}$.
Sul disco agisce la forza, applicata in G,

$$\boldsymbol{F}_G = \gamma \overrightarrow{GA} \times \boldsymbol{u}_2 .$$

Qui α, β, γ, $\delta > 0$. Si prendano come coordinate lagrangiane $(x, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_A^{\mathrm{L}} = x \boldsymbol{u}_1(t) + \alpha \cos(\beta x) \boldsymbol{u}_3(t) , \quad \overrightarrow{AG} = R \cos\varphi \boldsymbol{u}_1(t) + R \sin\varphi \boldsymbol{u}_3(t) .$$

$\boxed{\mathbf{01}}$ Allora l'energia cinetica lagrangiana $T_{\mathcal{S}}^{\mathrm{L}}$ del disco, relativa al sistema $\mathcal{S}$:
a Dipende da α, β e δ.
b È una forma quadratica in $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Le componenti lagrangiane di $\boldsymbol{F}_G$ sono:
a

$$Q_x^G = \gamma R(\sin\varphi + \alpha\beta \cos\varphi \sin(\beta x)) , \quad Q_\varphi^G = -\gamma R^2 .$$

b

$$Q_x^G = -\gamma R \alpha \beta^2 \dot{x} \cos\varphi \sin(\beta x) , \quad Q_\varphi^G = R\dot{\varphi}(x \sin\varphi + \alpha \cos\varphi \cos(\beta x)) .$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ In $\mathcal{S}$ la distribuzione di forze di trascinamento $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ sul disco:
a Ha una corrispondente distribuzione di potenziale

$$\mathrm{d}U_{\mathrm{T}} = \frac{m\delta^2}{\pi R^2} \frac{\lambda_1^2}{2} .$$

b Ha una corrispondente distribuzione di potenziale

$$\mathrm{d}U_{\mathrm{T}} = \frac{m\delta^2}{\pi R^2} \frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}{2} .$$

c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie

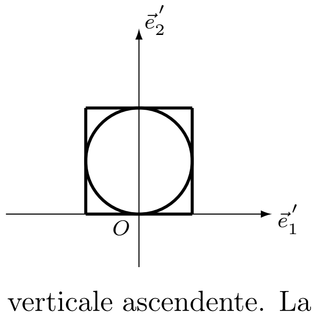
$$x_3 = \alpha x_1 x_2 \,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,,$$

con vincolo scabro secondo la legge di Coulomb-Morin.
Il punto è soggetto alla forza costante

$$\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{e}_1 \,.$$

Qui α, $\beta > 0$ sono costanti.
$\boxed{\textbf{04}}$ Consideriamo il caso di attrito statico $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu_s |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|$, $\mu_s > 0$ costante. Allora l'insieme delle posizioni di equilibrio:
a Dipende in effetti sia da α che da β.
b Comprende in ogni caso entrambi gli assi.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{05}}$ Consideriamo il caso di attrito dinamico $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|$, $\mu > 0$ costante, ove si suppone $\boldsymbol{v} \neq 0$. Allora:
a Si ha nelle equazioni di moto $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}|$.
b Sono possibili moti rettilinei su uno degli assi.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{06}}$ Consideriamo il caso di attrito dinamico $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|$, $\mu > 0$ costante, ove si suppone $\boldsymbol{v} \neq 0$. Allora:
a Lungo tutti i possibili moti si ha che l'energia cinetica $T(t)$ è una funzione decrescente di t.
b Esistono moti per cui l'energia meccanica si conserva.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Una lamina pesante rigida omogenea di massa M è stata ottenuta praticando un foro circolare di raggio $a/2$ a una lamina quadrata di lato a in modo che il centro del foro e quello della lamina quadrata siano coincidenti. Il riferimento $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ in figura è solidale alla lamina.



Il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ ha asse 2 verticale ascendente. La lamina è vincolata in modo che l'asse 3 solidale è costantemente coincidente con l'omologo asse fisso e la lamina si muove di moto rotatorio attorno all'asse 3. I vincoli sono perfetti. Sul sistema agisce il peso. Si usi come coordinata lagrangiana l'anomalia φ associata all'angolo di vertice O e di primo e secondo lato gli assi 1 fisso e solidale e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.

$\boxed{\mathbf{07}}$ Quanto vale il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse coordinato 1 del riferimento solidale in figura?

a $\frac{64-15\pi}{48(4-\pi)}Ma^2$

b $\frac{16-3\pi}{48(4-\pi)}Ma^2$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Quanto vale il momento angolare $\vec{L}_O$ della lamina?

a $\frac{64-15\pi}{48(4-\pi)}Ma^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$

b $\frac{40-9\pi}{24(4-\pi)}Ma^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{09}}$ Qual è l'equazione pura del moto?

a $\frac{40-9\pi}{24(4-\pi)}Ma^2\dot{\varphi}^2 = (Mga/2)\sin\varphi$

b $\frac{64-15\pi}{48(4-\pi)}Ma^2\ddot{\varphi} = (Mga/2)\cos\varphi$

c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si consideri un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ che si muove vincolato alla curva regolare γ intersezione delle due superfici

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0\,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0\,.$$

Si assuma che su γ i due vettori ∇f_1 e ∇f_2 siano sempre linearmente indipendenti, in modo che per ogni $\boldsymbol{x} \in \gamma$ risulti ben definito il piano

$$\Pi(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla f_1(\boldsymbol{x}), \nabla f_2(\boldsymbol{x}) \rangle\,.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ soddisfa

a $\boldsymbol{a}(t) \in \Pi(\boldsymbol{X}(t))$.

b $\boldsymbol{a}(t)$ è normale a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{11}}$ La velocità $\boldsymbol{v}(t)$ soddisfa:

a $\boldsymbol{v}(t) \in \Pi(\boldsymbol{X}(t))$.

b $\boldsymbol{v}(t)$ è normale a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Se sul punto agisce la forza $\boldsymbol{F}$ allora:

a Se il vincolo è liscio, le componenti di $\boldsymbol{F}$ che giacciono su $\Pi(\boldsymbol{x})$ sono irrilevanti per il moto.

b La reazione vincolare appartiene a $\Pi(\boldsymbol{x})$ sia nel caso di vincolo liscio che scabro.

c Nessuna delle precedenti.

I.5 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$, e il suo diagramma di fase con orbite $(x(t), p(t))$.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Supponiamo che

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0 \in \boldsymbol{R}, \qquad \lim_{t\to+\infty} p(t) = p_0 \in \boldsymbol{R}.$$

Allora:
a Si ha $p_0 = 0$ e x_0 è di equilibrio.
b I due limiti dati sono incompatibili.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Supponiamo che esista un solo punto di equilibrio e che questo sia stabile. Allora:
a Tutte le orbite sono limitate.
b Esistono sempre orbite illimitate.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che

$$f(x) = \alpha x e^{-\alpha^2 x^2}, \qquad x \in \boldsymbol{R},$$

con $\alpha \neq 0$ costante. Allora:
a Il punto $x = 0$ è di equilibrio stabile.
b Esistono orbite illimitate.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Una lamina rigida rettangolare di lati di lunghezza a e $2a$ è stata ottenuta saldando lungo un lato due lamine quadrate omogenee di massa M e $2M$ e di lato di lunghezza a. La lamina si muove appoggiata a un piano liscio orizzontale e l'unica sollecitazione attiva agente su di essa è il peso.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Dove si trova il centro di massa della lamina rettangolare?
a nel punto medio del segmento avente per estremi i centri delle due lamine quadrate;
b nel centro della lamina quadrata di massa $2M$;
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Cosa si può dire della sollecitazione vincolare?
a è equivalente a una forza applicata in un punto della lamina;
b è equivalente a una coppia;
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Cosa si può dire dell'atto di moto?
a l'atto di moto non è né traslatorio né rotatorio;
b l'atto di moto è traslatorio oppure rotatorio;
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 04/02/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA

ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 04/02/2022

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla circonferenza mobile di raggio $R > 0$

$$\boldsymbol{\psi}(s,t) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3(t)\,, \qquad s \in (0,2\pi R)\,,$$

ove

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante.
Sul punto non sono applicate sollecitazioni dirette. Si usi s come coordinata lagrangiana; $\boldsymbol{X}_O$ indica l'origine del sistema di riferimento fisso, centro della circonferenza.
$\boxed{\mathbf{01}}$ Il vincolo sia liscio. Allora l'equazione di moto è:
a

$$m\ddot{s} = -m\alpha^2 R\cos^2\frac{s}{R}\,.$$

b

$$m\ddot{s} = -m\alpha^2 R\cos\frac{s}{R}\sin\frac{s}{R}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Il vincolo soddisfi la legge di attrito statico di Coulomb-Morin con coefficiente di attrito $\mu_s > 0$. Allora:
a Esistono infinite posizioni di equilibrio relativo alla circonferenza.
b Esistono solo 4 posizioni di equilibrio relativo alla circonferenza.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico (quindi assumiamo $\boldsymbol{v} \neq 0$), con coefficiente d'attrito $\mu > 0$. Scrivendo le equazioni di moto nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, quale forza apparente può essere trascurata?
a La forza di trascinamento.
b La forza di Coriolis.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato $2L$ è vincolata a mantenere il lato AB parallelo all'asse x_1 del sistema di riferimento fisso, ossia più precisamente

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L\boldsymbol{e}_1\,.$$

Sulla lamina agisce la forza

$$F_C = \alpha \overrightarrow{AC} \times e_1 ,$$

applicata nel vertice C opposto a A; qui $\alpha > 0$ è costante.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Quale delle seguenti è compatibile con una corretta rappresentazione lagrangiana? Qui $(x, y, z, \varphi) \in \boldsymbol{R}^3 \times (-\pi, \pi)$ sono le coordinate lagrangiane.

a

$$\boldsymbol{X}_A^{\mathrm{L}}(x, y, x, \varphi) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 ,$$
$$\boldsymbol{X}_C^{\mathrm{L}}(x, y, z, \varphi) = (x + 2L)\boldsymbol{e}_1 + (y + 2L)\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + (z + 2L)\sin\varphi\boldsymbol{e}_3 .$$

b

$$\boldsymbol{X}_A^{\mathrm{L}}(x, y, x, \varphi) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 ,$$
$$\boldsymbol{X}_C^{\mathrm{L}}(x, y, z, \varphi) = (x + 2L)\boldsymbol{e}_1 + (y + 2L\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2 + (z + 2L\sin\varphi)\boldsymbol{e}_3 .$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{05}}$ Supponiamo di usare come coordinate lagrangiane

$$(x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, x_{2C}) \in Q ,$$

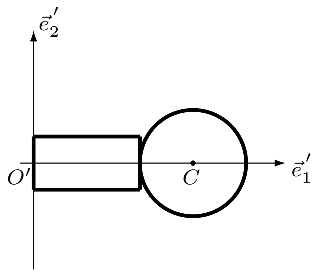
in un opportuno $Q \subset \boldsymbol{R}^4$. Allora le componenti lagrangiane delle forze (ossia di $\boldsymbol{F}_C$) soddisfano:

a $Q_{x_{3A}} = 0$.
b $Q_{x_{1A}} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{06}}$ La forza $\boldsymbol{F}_C$:

a È conservativa nel sistema di riferimento fisso.
b È costante nel sistema di riferimento solidale alla lamina.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un corpo rigido piano pesante di massa $2M$ è stato ottenuto saldando una lamina rettangolare omogenea di lati di lunghezza R e $2R$ e di massa M a un disco di raggio R e massa M in modo che il disco risulti tangente al lato corto della lamina rettangolare nel punto medio del suo lato. Il riferimento $\{O', \vec{e}_i'\}$ in figura è solidale al corpo.



Rispetto a un riferimento fisso terrestre con asse 2 verticale ascendente, il corpo si muove in modo che il piano solidale 1–2 è costantemente coincidente con l'omologo piano fisso. Inoltre il punto O' è vincolato a scorrere sull'asse fisso 2 e il centro del disco C è vincolato a scorrere sull'asse fisso 1. Si usi come coordinata lagrangiana l'anomalia φ associata all'angolo di vertice C e di primo e secondo lato gli assi 1 fisso e solidale e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.
L'unica sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso e i vincoli sono perfetti.
$\boxed{\mathbf{07}}$ Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse coordinato 1 del riferimento solidale in figura?
a $\frac{127}{12}MR^2$.
b $\frac{1}{3}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Quanto vale il momento angolare del corpo calcolato usando come polo il centro di massa?
a $\frac{35}{12}MR^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
b $\frac{131}{12}MR^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Da quale relazione sono legate le componenti della somma e del momento totale della sollecitazione vincolare relative agli assi fissi in corrispondenza di un qualsiasi moto del sistema?
a $M^{\mathrm{v}}_{G,3} = 0$, $f^{\mathrm{v}}_1 = 0$, $f^{\mathrm{v}}_2 = 0$.
b $M^{\mathrm{v}}_{G,3} = R\sin\varphi f^{\mathrm{v}}_1 + 3R\cos\varphi f^{\mathrm{v}}_2$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \dots, n$, è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$f_k(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad k = 1, \dots, m\,.$$

Si assume l'ipotesi dei lavori virtuali.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Supponiamo che i vincoli siano mobili, ma che risultino fissi nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$. Sui punti materiali non sono direttamente applicate sollecitazioni. Allora le equazioni di Lagrange scritte in $\mathcal{S}$:
a Possono essere sempre scritte mediante la lagrangiana $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ scritta in $\mathcal{S}$.
b Non contengono il tempo come variabile esplicita, ossia esso vi appare solo attraverso le $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$, $\ddot{\boldsymbol{q}}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che i vincoli siano nella forma

$$f_k(\boldsymbol{z}, t) = g_k(\boldsymbol{z}) + b_k(t)\,, \qquad k = 1, \dots, m\,,$$

per opportune funzioni g_k, b_k. Allora in due posizioni compatibili che differiscono solo per t, ossia

$$(\boldsymbol{z}_1, t_1)\,, \qquad (\boldsymbol{z}_1, t_2)\,,$$

quale delle seguenti vale?
a Si ha $V_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} = V_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$, ma $N_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} \neq N_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$.
b Si ha $V_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} \neq V_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$, ma $N_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} = N_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che nessuna delle f_k dipenda di fatto dalle coordinate del punto $\boldsymbol{X}_1$. Allora:
a La reazione vincolare su $\boldsymbol{X}_1$ è nulla.
b Questo non può accadere se il sistema di vincoli è regolare.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a vincoli olonomi regolari fissi lisci e a forze di potenziale

$$U(x_1, x_2, x_3) = -\alpha(x_1^2 + x_3^2), \qquad (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 .$$

Qui $\alpha > 0$ è costante.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Nelle ipotesi fatte vale la conservazione dell'energia.
a In generale no, dipende dai vincoli.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
a Solo punti ove

$$\nabla U(x_1, x_2, x_3) = -2\alpha(x_1, 0, x_3) = 0$$

possono essere di equilibrio.
b Qualunque punto di $\boldsymbol{R}^3$ può essere di equilibrio, per un'opportuna scelta dei vincoli.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che (0,0,0) risulti di equilibrio. Allora esso:
a È necessariamente instabile.
b È necessariamente stabile.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido di massa M è vincolato mediante una cerniera cilindrica perfetta ed il peso è l'unica sollecitazione attiva. Si indica con $\{O, \vec{e}_i\}$ un riferimento fisso con asse 2 verticale ascendente, ove O è un punto dell'asse della cerniera.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Cosa si può dire del momento totale $\vec{M}_O^{\mathrm{v}}$ della sollecitazione vincolare?
a Ha la componente lungo l'asse della cerniera nulla comunque sia orientato l'asse della cerniera e qualunque sia lo stato di moto del sistema.
b È uguale a $\overrightarrow{OG} \times (Mg\vec{e}_3) + \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$, ove $\vec{L}_O$ è il momento totale della quantità di moto e G il centro di massa del corpo.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Cosa si può dire della somma della sollecitazione vincolare?

a Ha la componente lungo l'asse della cerniera nulla comunque sia orientato l'asse della cerniera e qualunque sia lo stato di moto del sistema.
b È uguale a $Mg\vec{e}_2 + \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$, ove $\vec{P}$ è la quantità di moto totale.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Cosa si può dire dei moti del sistema se il centro di massa appartiene all'asse della cerniera?
a A seconda del dato iniziale il corpo è in quiete oppure in moto rotatorio uniforme.
b A seconda del dato iniziale il corpo è in quiete oppure in moto rotatorio uniformemente accelerato.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 04/02/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 04/02/2022

I.1 Una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato $2L$ è vincolata a mantenere il lato AB parallelo all'asse x_1 del sistema di riferimento fisso, ossia più precisamente
$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L\boldsymbol{e}_1 \,.$$
Sulla lamina agisce la forza
$$\boldsymbol{F}_C = \alpha\overrightarrow{AC} \times \boldsymbol{e}_1 \,,$$
applicata nel vertice C opposto a A; qui $\alpha > 0$ è costante.
$\boxed{\mathbf{01}}$ Quale delle seguenti è compatibile con una corretta rappresentazione lagrangiana? Qui $(x, y, z, \varphi) \in \boldsymbol{R}^3 \times (-\pi, \pi)$ sono le coordinate lagrangiane.
a
$$\boldsymbol{X}_A^{\mathrm{L}}(x, y, x, \varphi) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 \,,$$
$$\boldsymbol{X}_C^{\mathrm{L}}(x, y, z, \varphi) = (x + 2L)\boldsymbol{e}_1 + (y + 2L\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2 + (z + 2L\sin\varphi)\boldsymbol{e}_3 \,.$$
b
$$\boldsymbol{X}_A^{\mathrm{L}}(x, y, x, \varphi) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 \,,$$
$$\boldsymbol{X}_C^{\mathrm{L}}(x, y, z, \varphi) = (x + 2L)\boldsymbol{e}_1 + (y + 2L)\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + (z + 2L)\sin\varphi\boldsymbol{e}_3 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ La forza $\boldsymbol{F}_C$:
a È conservativa nel sistema di riferimento fisso.
b È costante nel sistema di riferimento solidale alla lamina.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Supponiamo di usare come coordinate lagrangiane

$$(x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, x_{2C}) \in Q\,,$$

in un opportuno $Q \subset \boldsymbol{R}^4$. Allora le componenti lagrangiane delle forze (ossia di $\boldsymbol{F}_C$) soddisfano:
a $Q_{x_{1A}} = 0$.
b $Q_{x_{3A}} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla circonferenza mobile di raggio $R > 0$

$$\boldsymbol{\psi}(s,t) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3(t)\,, \qquad s \in (0{,}2\pi R)\,,$$

ove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante.
Sul punto non sono applicate sollecitazioni dirette. Si usi s come coordinata lagrangiana; $\boldsymbol{X}_O$ indica l'origine del sistema di riferimento fisso, centro della circonferenza.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico (quindi assumiamo $\boldsymbol{v} \neq 0$), con coefficiente d'attrito $\mu > 0$. Scrivendo le equazioni di moto nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, quale forza apparente può essere trascurata?
a La forza di trascinamento.
b La forza di Coriolis.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Il vincolo sia liscio. Allora l'equazione di moto è:
a

$$m\ddot{s} = -m\alpha^2 R\cos\frac{s}{R}\sin\frac{s}{R}\,.$$

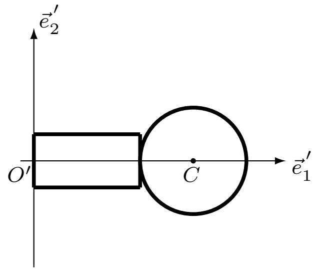
b

$$m\ddot{s} = -m\alpha^2 R\cos^2\frac{s}{R}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{06}}$ Il vincolo soddisfi la legge di attrito statico di Coulomb-Morin con coefficiente di attrito $\mu_s > 0$. Allora:
a Esistono solo 4 posizioni di equilibrio relativo alla circonferenza.
b Esistono infinite posizioni di equilibrio relativo alla circonferenza.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un corpo rigido piano pesante di massa $2M$ è stato ottenuto saldando una lamina rettangolare omogenea di lati di lunghezza R e $2R$ e di massa M a un disco di raggio R e massa M in modo che il disco risulti tangente al lato corto della lamina rettangolare nel punto medio del suo lato. Il riferimento $\{O', \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ in figura è solidale al corpo.



Rispetto a un riferimento fisso terrestre con asse 2 verticale ascendente, il corpo si muove in modo che il piano solidale 1–2 è costantemente coincidente con l'omologo piano fisso. Inoltre il punto O' è vincolato a scorrere sull'asse fisso 2 e il centro del disco C è vincolato a scorrere sull'asse fisso 1. Si usi come coordinata lagrangiana l'anomalia φ associata all'angolo di vertice C e di primo e secondo lato gli assi 1 fisso e solidale e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.
L'unica sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso e i vincoli sono perfetti.
$\boxed{\textbf{07}}$ Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse coordinato 2 del riferimento solidale in figura?
a $\frac{127}{12} MR^2$.
b $\frac{131}{12} MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Quanto vale il momento angolare del corpo calcolato usando come polo il centro di massa?
a $\frac{127}{12} MR^2 \dot{\varphi} \vec{e}_3$.
b $\frac{35}{12} MR^2 \dot{\varphi} \vec{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ Da quale relazione sono legate le componenti della somma e del momento totale della sollecitazione vincolare relative agli assi fissi in corrispondenza di un qualsiasi moto del sistema?
a $M^{\mathrm{v}}_{G,3} = 2R \sin\varphi f^{\mathrm{v}}_1 + R\cos\varphi f^{\mathrm{v}}_2$.
b $M^{\mathrm{v}}_{G,3} = 0$, $f^{\mathrm{v}}_1 = 0$, $f^{\mathrm{v}}_2 = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \dots, n$, è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$f_k(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad k = 1, \dots, m\,.$$

Si assume l'ipotesi dei lavori virtuali.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Supponiamo che nessuna delle f_k dipenda di fatto dalle coordinate del punto $\boldsymbol{X}_1$. Allora:
a Questo non può accadere se il sistema di vincoli è regolare.
b La reazione vincolare su $\boldsymbol{X}_1$ è nulla.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che i vincoli siano nella forma

$$f_k(\boldsymbol{z}, t) = g_k(\boldsymbol{z}) + b_k(t)\,, \qquad k = 1, \dots, m\,,$$

per opportune funzioni g_k, b_k. Allora in due posizioni compatibili che differiscono solo per t, ossia

$$(\boldsymbol{z}_1, t_1)\,, \qquad (\boldsymbol{z}_1, t_2)\,,$$

quale delle seguenti vale?
a Si ha $V_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} = V_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$, ma $N_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} \neq N_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$.
b Si ha $V_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} \neq V_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$, ma $N_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} = N_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che i vincoli siano mobili, ma che risultino fissi nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$. Sui punti materiali non sono direttamente applicate sollecitazioni. Allora le equazioni di Lagrange scritte in $\mathcal{S}$:
a Non contengono il tempo come variabile esplicita, ossia esso vi appare solo attraverso le $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$, $\ddot{\boldsymbol{q}}$.
b Possono essere sempre scritte mediante la lagrangiana $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ scritta in $\mathcal{S}$.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a vincoli olonomi regolari fissi lisci e a forze di potenziale

$$U(x_1, x_2, x_3) = -\alpha(x_1^2 + x_3^2)\,, \qquad (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3\,.$$

Qui $\alpha > 0$ è costante.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
a Solo punti ove

$$\nabla U(x_1, x_2, x_3) = -2\alpha(x_1, 0, x_3) = 0$$

possono essere di equilibrio.
b Qualunque punto di $\boldsymbol{R}^3$ può essere di equilibrio, per un'opportuna scelta dei vincoli.

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Supponiamo che (0,0,0) risulti di equilibrio. Allora esso:
a È necessariamente stabile.
b È necessariamente instabile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Nelle ipotesi fatte vale la conservazione dell'energia.
a Sì.
b In generale no, dipende dai vincoli.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido di massa M è vincolato mediante una cerniera cilindrica perfetta ed il peso è l'unica sollecitazione attiva. Si indica con $\{O, \vec{e}_i\}$ un riferimento fisso con asse 3 verticale ascendente, ove O è un punto dell'asse della cerniera.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Cosa si può dire della somma della sollecitazione vincolare?
a È uguale a $Mg\vec{e}_3 + \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$, ove $\vec{P}$ è la quantità di moto totale.
b Ha la componente lungo l'asse della cerniera nulla comunque sia orientato l'asse della cerniera e qualunque sia lo stato di moto del sistema.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Cosa si può dire del momento totale $\vec{M}^{\mathrm{v}}_O$ della sollecitazione vincolare?
a Ha la componente lungo l'asse della cerniera nulla comunque sia orientato l'asse della cerniera e qualunque sia lo stato di moto del sistema.
b È uguale a $\overrightarrow{OG} \times (Mg\vec{e}_3) + \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$, ove $\vec{P}$ è la quantità di moto totale e G il centro di massa del corpo.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Cosa si può dire delle configurazioni di equilibrio se il centro di massa appartiene all'asse della cerniera?
a Tutte le configurazioni sono di equilibrio.
b Esistono solo due configurazioni di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 21/03/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 21/03/2022

I.1 Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$.

Sul vertice A è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = kx_1\boldsymbol{e}_1 ,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si usino come coordinate lagrangiane $(x, y, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_A = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 , \quad \overrightarrow{AB} = L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 .$$

La scelta è tale che la diagonale AC è data da

$$\overrightarrow{AC} = L\sqrt{2}\Big(\cos\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big)\boldsymbol{e}_1 + \sin\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big)\boldsymbol{e}_2\Big) ,$$

$\boxed{\textbf{01}}$ Il potenziale lagrangiano U^{L}:
a Non esiste.
b Vale

$$U^{\mathrm{L}} = \frac{k}{2}x^2 .$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ Sia I il momento d'inerzia della lamina nel centro di massa, relativo a $\boldsymbol{e}_3$. Allora l'energia cinetica della lamina vale:
a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}\Big[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{L^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \sqrt{2}L\dot{x}\dot{\varphi}\sin\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big) + \sqrt{2}L\dot{y}\dot{\varphi}\cos\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big)\Big] + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 .$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 .$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ L'equazione di Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial\dot{\varphi}}\Big] - \frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = Q_\varphi \ :$$

a Si riduce con calcoli opportuni a $\ddot{\varphi} = 0$.
b Presenta $Q_\varphi = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 , \qquad x_3 = 0 ,$$

ove $R > 0$.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3 ,$$

ove α, β, $\gamma \in \boldsymbol{R}$.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Il vincolo sia scabro di attrito dinamico (assumiamo quindi $\boldsymbol{v} \neq 0$) del tipo $|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| = \mu|\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}|$, con $\mu > 0$. Allora:
a Le equazioni di moto dipendono da α, β, ma non da γ.
b Si possono scegliere le coordinate lagrangiane in modo che le equazioni di moto siano indipendenti da α o da β a scelta.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Il vincolo sia liscio. Allora:
a Le equazioni di moto dipendono da α, β, ma non da γ.
b Si possono scegliere le coordinate lagrangiane in modo che le equazioni di moto siano indipendenti da α o da β a scelta.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Il vincolo sia scabro di attrito statico, del tipo $|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| \leq \mu|\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}|$, con $\mu > 0$. Allora:
a Qualunque sia $\mu > 0$ esistono sempre infinite posizioni di equilibrio.
b Per certe scelte di α, β, $\gamma \in \boldsymbol{R}$, $\mu > 0$, non esistono posizioni di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un corpo rigido piano omogeneo di massa M ha la forma di un triangolo rettangolo con cateti di lunghezza L e $2L$. Il riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ ha origine nel vertice dell'angolo retto e asse 3 perpendicolare alla lamina; inoltre, il cateto di lunghezza maggiore giace sul semiasse positivo 1 e quello di lunghezza minore sul semiasse positivo 2.
$\boxed{\mathbf{07}}$ Quanto vale il prodotto d'inerzia relativo agli assi 1 e 2?
a $\frac{1}{6}ML^2$.
b $-\frac{1}{6}ML^2$
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Il corpo viene mantenuto in rotazione uniforme con velocità angolare costante di modulo λ attorno a un asse fisso coincidente con l'asse 1 solidale. La rotazione è antioraria rispetto allo stesso asse. Quanto vale il momento angolare calcolato usando come polo di riduzione O?
a $\frac{1}{6}ML^2\lambda\vec{e}_1^{\,\prime} - \frac{1}{6}ML^2\lambda\vec{e}_2^{\,\prime}$
b $\frac{1}{6}ML^2\lambda\vec{e}_1^{\,\prime}$
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Il corpo viene mantenuto in rotazione uniforme con velocità angolare costante di modulo λ attorno a un asse fisso coincidente con l'asse 2 solidale. Quanto vale l'energia cinetica?
a $\frac{1}{12}ML^2\lambda^2$
b $\frac{1}{6}ML^2\lambda^2$
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Consideriamo un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi regolari, con ℓ gradi di libertà e il relativo potenziale lagrangiano U^{L} delle forze direttamente applicate.

$\boxed{\mathbf{10}}$ I vincoli siano mobili nel sistema di riferimento fisso, ma fissi nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$. Allora, volendo scrivere la lagrangiana in $\mathcal{S}$ (ove quindi si deve tener conto anche delle forze apparenti)
a U^{L} nel sistema di riferimento $\mathcal{S}$ non esiste sicuramente a causa della forza di Coriolis.
b Se U^{L} esiste nel sistema di riferimento fisso può esistere o no nel sistema di riferimento mobile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Sia $\ell = 2$ e le componenti lagrangiane delle forze siano per $(q_1, q_2) \in \boldsymbol{R}^2$

$$Q_1 = q_1 + q_2 t \,, \qquad Q_2 = q_1 + q_2 \,.$$

a U^{L} esiste, in tutto $\boldsymbol{R}^2$.
b U^{L} non esiste in nessun aperto di $\boldsymbol{R}^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Le forze direttamente applicate sono nulle.
a U^{L} esiste sicuramente (nel sistema di riferimento fisso).
b U^{L} può non esistere nel sistema di riferimento fisso, ma si può sempre trovare un sistema di riferimento mobile in cui esiste.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di m vincoli olonomi regolari, con $\ell = 3n - m$ gradi di libertà.
$\boxed{\mathbf{13}}$ L'energia meccanica si conserva se:
a Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e i vincoli sono fissi.
b Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e le componenti lagrangiane delle forze sono conservative in senso lagrangiano.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ I vincoli siano fissi. L'insieme degli atti di moto del sistema in una fissata configurazione compatibile costituisce:
a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{3n}$ di dimensione ℓ.
b Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{3n}$ di dimensione m.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che $n = 2$ e i vincoli siano per i due moti $\boldsymbol{X}_1 = (z_1, z_2, z_3)$, $\boldsymbol{X}_2 = (z_4, z_5, z_6)$,

$$f_1(z_1, z_2, z_3) = 0 \,, \quad f_2(z_4, z_5, z_6) = 0 \,, \quad z_1 = z_4 \,.$$

Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e le forze direttamente applicate sono costanti ma non nulle.
a Non esistono configurazioni compatibili con i vincoli che siano di equilibrio.
b L'energia meccanica del sistema si conserva lungo ciascun moto.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un disco è vincolato a muoversi in un piano rotolando senza strisciare su una retta di tale piano.

$\boxed{\mathbf{16}}$ Cosa si può dire dell'atto di moto?
a È rototraslatorio.
b È rotatorio.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Cosa si può dire dell'asse di istantanea rotazione?
a Non è definito.
b È perpendicolare al piano su cui si svolge il moto.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Cosa si può dire della centroide fissa (base) e di quella mobile (rulletta)?
a La base coincide con la retta di appoggio e la rulletta con il bordo del disco.
b La base coincide con la retta d'appoggio e la rulletta degenera nel punto di contatto.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 07/06/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 07/06/2022

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza R e massa m è vincolata a avere l'estremo B sull'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove R, $h > 0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea. Inoltre l'estremo A dell'asta è vincolato a stare sull'asse x_3 alla stessa quota di B.
Si usi l'ascissa curvilinea s di B come coordinata lagrangiana. Qui (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca dell'elica, che viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{B}(s) &= \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3\,;
\end{aligned}$$

la curvatura è $k(s) = R\alpha^2$.
$\boxed{\mathbf{01}}$ Denotiamo con I il momento d'inerzia dell'asta nel centro di massa, relativo a un asse ortogonale all'asta. L'energia cinetica dell'asta è data da:

a
$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}\alpha^2(R^2+h^2)\dot{s}^2 + \frac{I}{2}\alpha^2\dot{s}^2 \,.$$
b
$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}\alpha^2\Big(\frac{R^2}{4}+h^2\Big)\dot{s}^2 + \frac{I}{2}\alpha^2\dot{s}^2 \,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{02}}$ Sull'asta agisce, come unica forza direttamente applicata, il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$. L'asta all'istante iniziale $t=0$ è ferma con $s(0)=0$. La velocità lagrangiana $\dot{s}(t)$ all'istante $t>0$ può essere determinata come funzione:
a Necessariamente di entrambi $s(t)$ e R (oltre che di altre quantità).
b Di $s(t)$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{03}}$ Sull'asta agisce l'unica forza direttamente applicata data da

$$\boldsymbol{F}_B = f(s)\boldsymbol{T}(s) \,, \qquad f \in C^1(\boldsymbol{R}) \,,$$

applicata in B. L'equazione di Lagrange ha la forma (ove $K>0$ è una costante opportuna):
a $K\ddot{s} = f(s)$.
b $K\ddot{s} = -f(s)$.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,,$$

ove R, $h>0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2+h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea. La terna intrinseca dell'elica viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{B}(s) &= \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3 \,;
\end{aligned}$$

la curvatura è $k(s) = R\alpha^2$.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Sul punto agisce, come unica forza direttamente applicata,

$$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{e}_2 \,,$$

ove $k>0$ è costante. Il vincolo è liscio.
a Esistono infinite posizioni di equilibrio, qualunque sia $k>0$.
b Per certi valori di $k>0$ non esistono posizioni di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{05}}$ Sul punto agisce, come unica forza direttamente applicata,

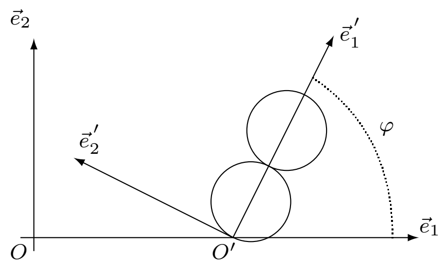
$$\boldsymbol{F} = kx_3\boldsymbol{e}_3 \,,$$

ove $k > 0$ è costante. Il vincolo è scabro, secondo la legge dell'attrito statico di Coulomb-Morin, con coefficiente d'attrito $\mu_s > 0$.
a Per certi valori dei parametri h, R, k, m, μ_s non esistono posizioni di equilibrio.
b Fissati h, R, k, m, μ_s ad arbitrio, esistono posizioni di equilibrio con $|s|$ grande a piacere.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{06}}$ Sul punto agisce, come unica forza direttamente applicata,

$$\boldsymbol{F} = c_1 \boldsymbol{T} + c_2 \boldsymbol{N} \,,$$

ove c_1, $c_2 > 0$ sono costanti. Il vincolo è scabro, secondo la legge dell'attrito statico di Coulomb-Morin, con coefficiente d'attrito $\mu_s > 0$.
a L'esistenza di posizioni di equilibrio dipende dal valore di c_1, c_2, μ_s, ma non da quello di h, R.
b Le eventuali posizioni di equilibrio sono in numero finito.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un sistema olonomo a vincoli perfetti è costituito da una lamina rigida pesante ottenuta saldando come illustrato in figura due dischi di medesima massa $M/2$ e medesimo raggio R. Il corpo è vincolato a muoversi in un piano verticale fisso rispetto al riferimento terrestre. Il punto O' solidale al corpo è vincolato a scorrere su una retta orizzontale del piano del moto.



Il riferimento terrestre $\{O, \vec{e}_i\}$ ha piano 1–2 coincidente con quello del moto, asse 1 coincidente con la retta su cui scorre O' e asse 2 verticale ascendente. Il riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ ha piano 1–2 coincidente con quello della lamina e $\vec{e}_3^{\,\prime} = \vec{e}_3$.
Posto $\overrightarrow{OO'} = q\vec{e}_1$, si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa q appena definita e l'anomalia φ indicata in figura.
$\boxed{\textbf{07}}$ Quanto vale il momento d'inerzia rispetto all'asse solidale 3?
a $\frac{11}{2}MR^2$.
b $-\frac{11}{12}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Quanto vale la coordinata 1 del centro di massa relativa al riferimento fisso?
a $R\sin\varphi$.

b $q + 2R\cos\varphi$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Quanto vale l'energia cinetica del corpo rispetto al riferimento del centro di massa?
a $\frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2$.
b $-\frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si considerino i seguenti vincoli per il moto

$$\boldsymbol{X} = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3 \,.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Il vincolo è

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = \begin{pmatrix} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - \alpha t^2 \\ z_3 - \beta t \end{pmatrix} = 0 \,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti. Qui $t > 0$.
a Esiste sempre almeno un intervallo $t \in (0, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$ in cui il vincolo è olonomo regolare.
b Fissato $\beta > 0$, esistono $\alpha > 0$ per cui il vincolo non è regolare.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Il vincolo è

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = \begin{pmatrix} z_1 - 3 \\ z_2 - 2t \end{pmatrix} = 0 \,,$$

con $t > 0$.
a Il vincolo è equivalente a un vincolo fisso.
b Il sistema vincolato ha 2 gradi di libertà.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Il vincolo è

$$f(\boldsymbol{z}, t) = z_1 - \alpha z_2 z_3 - \beta t = 0 \,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti.
a L'insieme delle configurazioni ammissibili è una superficie regolare (eventualmente mobile) di $\boldsymbol{R}^3$, per qualunque scelta di α, $\beta \in \boldsymbol{R}$.
b Per vincoli di questo tipo non si può porre l'ipotesi dei lavori virtuali.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x) \,,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$. Denotiamo con U il potenziale, ossia assumiamo $U' = f$.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Per alcune scelte di f si può concludere che ciascun moto è limitato.
a È vero, per infinite scelte di f.
b L'unico caso in cui è vero è quello di f identicamente nulla.

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Sia $U(x) \geq 0$ e $U(0) = U(L) = 0$.
a Esiste almeno un punto di equilibrio stabile.
b Esiste almeno un punto di equilibrio, che però può essere instabile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Consideriamo il piano delle fasi per il moto. Supponiamo che $(x(t), p(t))$, $t \in \boldsymbol{R}$, sia un'orbita.
a Se l'orbita è illimitata allora $p(t)$ è illimitata.
b Se l'orbita è limitata, allora corrisponde a un moto periodico.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando un elemento di massa M a un punto del bordo di un disco omogeneo di massa M e raggio r. Il corpo è vincolato a muoversi in un piano verticale fisso rispetto all'osservatore terrestre mantenendosi a contatto dall'esterno con una guida circolare giacente nel medesimo piano. L'atto di moto è in ogni istante con assenza di strisciamento.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
a L'atto di moto è in ogni istante traslatorio.
b L'atto di moto è in ogni istante rotatorio e il centro di istantanea rotazione cade nel punto di contatto tra corpo e guida.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Per quanto riguarda la sollecitazione peso si può dire che
a È equivalente a una forza applicata nel punto di contatto.
b È equivalente a una coppia di momento $2Mgr$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
a La centroide fissa (base) coincide con la traiettoria del centro di massa del corpo.
b La centroide fissa (base) coincide con la guida.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 12/07/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 12/07/2022

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 > 0\,,$$

con vincolo liscio. Si usino come coordinate lagrangiane le coordinate $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$ della parametrizzazione

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\varphi \sin\theta \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3 .$$

Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -\lambda \sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \lambda\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 ,$$

con $\lambda > 0$ costante. Le equazioni di Lagrange sono

$$R\ddot{\varphi}\sin\theta = -2R\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{\lambda}{m} ,$$
$$\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta .$$

$\boxed{\textbf{01}}$ Il punto parta da fermo. Allora:
a Possono esistere moti non di quiete con θ costante.
b Possono esistere moti non di quiete con φ costante.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ Il potenziale lagrangiano in questo caso
a Non esiste.
b Esiste e si ha almeno per qualche (φ, θ)

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi}(\varphi,\theta) \neq 0 , \qquad \frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial\theta}(\varphi,\theta) \neq 0 .$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ Il punto parta da fermo con $\theta(0) = \pi/4$. Allora esiste un intervallo di tempi $(0, \bar{t})$ in cui
a $\theta(t) < \pi/4$.
b $\theta(t) > \pi/4$.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conervative; si assume l'ipotesi dei lavori virtuali. Indichiamo con U^{L} il potenziale lagrangiano. Si assume che $\ell = 2$ e che $\boldsymbol{q} = 0$ sia una posizione di equilibrio.
$\boxed{\textbf{04}}$ Si sa che

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

a Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ è stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ non è stabile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{05}}$ Si sa che

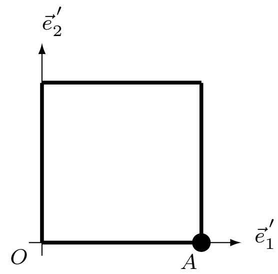
$$D^2U^{\mathrm{L}}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} .$$

a Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ è stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ non è stabile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{06}}$ Si ha

$$U^{\mathrm{L}}(q_1, q_2) = -q_1^2 - q_2^4\,, \qquad (q_1, q_2) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

a Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ è stabile, e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ non è stabile.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando l'elemento A di massa M a una lamina rigida omogenea di forma quadrata di medesima massa M e lato $2L$. In figura è rappresentato il corpo assieme al riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$. Si nota che $\overrightarrow{OA} = 2L\vec{e}_1^{\,\prime}$.



Il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ ha asse 2 verticale ascendente. Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse solidale 2 costantemente coincidente con l'omologo asse fisso.
Come coordinata lagrangiana si usa l'anomalia φ individuata dall'asse fisso 1 e dall'asse solidale 1 orientata in verso antiorario rispetto all'asse 2.
Si risponda alle seguenti domande:
$\boxed{\textbf{07}}$ Quanto vale il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse 1 del riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$?
a $\frac{4}{3}ML^2$.
b $\frac{17}{3}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Quanto vale il prodotto d'inerzia del corpo relativo agli assi 1 e 2 del riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$?
a $\frac{1}{3}ML^2$.
b $-ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ Si scriva lo sviluppo rispetto alla base solidale del momento angolare $\vec{L}_O$.
a $-ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_1^{\,\prime} + \frac{16}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_2^{\,\prime}$.
b $+ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_1^{\,\prime} + \frac{16}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_2^{\,\prime}$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con ascissa curvilinea s.
Consideriamo il moto

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t)) \,, \qquad t \in \boldsymbol{R} \,,$$

vincolato alla curva.
Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva, assumendo che la curvatura $k(s)$ sia strettamente positiva.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Se $\boldsymbol{v}(\bar{t}) = 0$ allora l'accelerazione $\boldsymbol{a}(\bar{t})$ soddisfa
a $\boldsymbol{a}(\bar{t})$ è parallela a $\boldsymbol{B}(s(\bar{t}))$.
b $\boldsymbol{a}(\bar{t})$ è parallela a $\boldsymbol{T}(s(\bar{t}))$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Se la curva è piana, allora
a $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) = 0$ per ogni t.
b $\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{v}(t) = 0$ per ogni t.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Se si ha

$$s(t_1) = s(t_2) \,,$$

per due istanti $t_1 < t_2$ allora
a $\boldsymbol{a}(t_1)$ e $\boldsymbol{a}(t_2)$ sono parallele.
b $\boldsymbol{v}(t_1)$ e $\boldsymbol{v}(t_2)$ sono parallele.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Si consideri un moto unidimensionale di equazione

$$m\ddot{x} = f(x) \,,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Quale delle seguenti curve può essere un'orbita nel piano delle fasi (x, p)?
a

$$\frac{x^2}{4} + p^2 = 1 \,.$$

b

$$(x-1)^2 + (p-1)^2 = 4 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Se il moto $x(t)$ è definito per ogni $t \in (-\infty, +\infty)$ e non è di quiete, allora
a L'orbita corrispondente nel piano delle fasi è illimitata.
b Devono esistere punti di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Sia $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$. Allora
a Esiste almeno un punto di equilibrio stabile.
b Esiste almeno un punto di equilibrio instabile.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando un elemento di massa M nel punto A di un disco omogeno di massa M e raggio R. Il punto A dista $r < R$ dal centro geometrico C del disco. Considerato il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ con asse 2 verticale ascendente, il corpo è vincolato a muoversi nel piano 1–2 in modo che A e C scorrano, rispettivamente, sugli assi 1 e 2 di detto riferimento.

16 È possibile determinare moti tali che in ogni istante il trinomio invariante dell'atto di moto sia diverso da zero?
a No.
b Sì, scegliendo opportunamente r.
c Nessuna delle precedenti.

17 Supponendo che il corpo non sia a riposo, quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento del centro di massa?
a $\frac{1}{2}J\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e J il momento d'inerzia relativo all'asse passante per A e ortogonale alla lamina.
b $\frac{1}{2}I\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e I il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro di massa del corpo e ortogonale al corpo stesso.
c Nessuna delle precedenti.

18 Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
a È possibile scegliere r in modo che la centroide mobile (rulletta) sia un'ellisse con assi l'uno il doppio dell'altro.
b La centroide mobile (rulletta) è una circonferenza.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 06/09/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 06/09/2022

I.1 Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conservative; si assume l'ipotesi dei lavori virtuali. Indichiamo con U^{L} il potenziale lagrangiano. Si assume che $\ell = 3$ e che $\boldsymbol{q} = 0$ sia una posizione di equilibrio.

01 Si sa che

$$D^2U^{\mathrm{L}}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ è stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ non è stabile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Si sa che

$$D^2 U^{\mathrm{L}}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

a Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ è stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non ci sono informazioni sufficienti neppure per dire se $\boldsymbol{q} = 0$ sia stabile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Si ha

$$U^{\mathrm{L}}(q_1, q_2, q_3) = -q_1^2 - q_2^4 - q_3^4 - q_1^4 q_2^8 q_3 , \qquad (q_1, q_2, q_3) \in \boldsymbol{R}^3 .$$

a Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ non è stabile.
b Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ è stabile, ma non vi possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato al paraboloide

$$x_3 = a x_1 x_2 ,$$

con vincolo liscio. Si usino come coordinate lagrangiane le coordinate $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ della parametrizzazione

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(x, y) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + axy\boldsymbol{e}_3 .$$

Sul punto agisce la forza $\boldsymbol{F}$, che viene specificata sotto nei vari casi.
Le equazioni di Lagrange sono

$$m(1 + a^2 y^2)\ddot{x} + 2ma^2 y\dot{x}\dot{y} + ma^2 xy\ddot{y} = Q_x ,$$
$$ma^2 xy\ddot{x} + 2ma^2 x\dot{x}\dot{y} + m(1 + a^2 x^2)\ddot{y} = Q_y .$$

$\boxed{\mathbf{04}}$ Supponiamo che $\boldsymbol{F} = 0$ (cioè le forze direttamente applicate sono nulle). Allora:
a Possono esistere moti non di quiete con $x \neq 0$ costante.
b Tutti i moti sono limitati.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Supponiamo che $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{X}$, con $k > 0$ costante. Allora:
a Non esistono moti con x costante.
b Tutti i moti sono limitati.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Supponiamo che $\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{e}_1$, con $k > 0$ costante. Allora:
a Non esistono moti con y costante.
b Tutti i moti sono limitati.

c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un corpo rigido piano omogeneo di massa M ha la forma di un triangolo rettangolo con cateti di lunghezza L e $2L$. Il riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ ha origine nel vertice dell'angolo retto e asse 3 perpendicolare alla lamina; inoltre, il cateto di lunghezza minore giace sul semiasse positivo 1 e quello di lunghezza maggiore sul semiasse positivo 2.

$\boxed{\mathbf{07}}$ Quanto vale il prodotto d'inerzia relativo agli assi 1 e 2?
a $-\frac{1}{6}ML^2$
b $\frac{1}{6}ML^2$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Il corpo viene mantenuto in rotazione uniforme con velocità angolare costante di modulo λ attorno a un asse fisso coincidente con l'asse 1 solidale. La rotazione è antioraria rispetto allo stesso asse. Quanto vale il momento angolare calcolato usando come polo di riduzione O?
a $\frac{2}{3}ML^2\lambda\vec{e}_1^{\,\prime} - \frac{1}{6}ML^2\lambda\vec{e}_2^{\,\prime}$
b $\frac{1}{6}ML^2\lambda\vec{e}_1^{\,\prime}$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{09}}$ Il corpo viene mantenuto in rotazione uniforme con velocità angolare costante di modulo λ attorno a un asse fisso coincidente con l'asse 2 solidale. Quanto vale l'energia cinetica?
a $\frac{1}{12}ML^2\lambda^2$
b $\frac{2}{7}ML^2\lambda^2$
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si consideri un moto unidimensionale di equazione

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Quale delle seguenti curve può essere un'orbita nel piano delle fasi (x, p)?
a

$$x^2 + p^2 = 4\,, \qquad p > 1\,.$$

b

$$x^2 + p^2 = 4\,, \qquad p > 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Se il moto (massimale) $x(t)$ è definito solo per $t < 1$, allora
a Per $t \to 1-$ l'orbita deve tendere a un punto di equilibrio.
b Per $t \to 1-$ l'orbita deve diventare illimitata.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Sia $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ $x \notin \{0{,}1\}$. Allora
a Esiste almeno un punto di equilibrio stabile.
b Non esistono punti di equilibrio stabile.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con ascissa curvilinea s.
Consideriamo il moto

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t)), \qquad t \in \boldsymbol{R},$$

vincolato alla curva.
Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva, assumendo che la curvatura $k(s)$ sia strettamente positiva.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Se $\boldsymbol{a}(\bar{t}) = 0$ allora la velocità $\boldsymbol{v}(\bar{t})$:
a Può essere qualunque vettore parallelo a $\boldsymbol{T}(s(\bar{t}))$.
b È univocamente determinata.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Si consideri la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ della terna $(\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$ e si assuma $\ddot{s}(t) > 0$ per ogni t. Allora:
a $\boldsymbol{\omega}$ può mantenere direzione costante.
b $\boldsymbol{\omega}(t)$ si annulla almeno per un t.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che valga $\dot{s}(t) \neq 0$ per ogni $t \in \boldsymbol{R}$, e che la curva non sia chiusa, cosicché il moto non possa risultare periodico. Allora:
a Il moto è illimitato.
b Può accadere che $\boldsymbol{v}(t_1) = \boldsymbol{v}(t_2)$ per due istanti $t_1 \neq t_2$.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido di massa M è vincolato mediante una cerniera cilindrica perfetta ed il peso è l'unica sollecitazione attiva. Si indica con $\{O, \vec{e}_i\}$ un riferimento fisso con asse 2 verticale ascendente, ove O è un punto dell'asse della cerniera.
$\boxed{\mathbf{16}}$
Cosa si può dire della somma della sollecitazione vincolare?
a è nulla qalunque sia lo stato di moto del sistema;
b è uguale a $Mg\vec{e}_2 + \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$, ove $\vec{P}$ è la quantità di moto totale;
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Cosa si può dire del momento totale $\vec{M}_O^{\mathrm{v}}$ della sollecitazione vincolare?
a ha componente 2 nulla qualunque sia lo stato di moto del sistema e comunque sia orientato l'asse della cerniera;
b ha la componente lungo l'asse della cerniera nulla comunque sia orientato l'asse della cerniera e qualunque sia lo stato di moto del sistema;
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Cosa si può dire delle configurazioni di equilibrio se l'asse della cerniera coincide con l'asse 2?
a tutte le configurazioni sono di equilibrio;
b esistono solo due configurazioni di equilibrio;
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 19/10/2021

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 19/10/2021

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1 \sin(\beta t) + x_2 \cos(\beta t) = 0 \,,$$

ove $\beta > 0$ è costante. Inoltre il centro G di AB deve avere quota $x_{3G} = 0$.
Sull'asta agisce la forza (applicata in B)

$$\boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{X}_B \,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(r, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

allora

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_3) \,, \quad \boldsymbol{X}_G = r\boldsymbol{u}_1 \,.$$

Sotto $\boldsymbol{X}_O$ denota l'origine del sistema di riferimento fisso, che ha coordinate (x_h).
$\boxed{\textbf{01}}$ Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze apparenti sono conservative nel senso lagrangiano e quindi esiste il loro potenziale lagrangiano U^{L}_{app}.
a Sì, e il potenziale è dato da

$$U^{\mathrm{L}}_{app}(r, \varphi) = \frac{m}{2}\beta^2 r^2 \,.$$

b Sì, ma il potenziale non è quello dato nella risposta precedente.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ Nel sistema fisso di riferimento le forze direttamente applicate ammettono potenziale lagrangiano.
a Sì ed esso può essere preso uguale a

$$U^{\mathrm{L}}_{da} = -\frac{k}{2}r^2 \,.$$

b Sì ed esso può essere preso uguale a

$$U^{\mathrm{L}}_{da} = -\frac{k}{2} r L \sin\varphi \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{03}}$ Dire quali delle seguenti espressioni dà l'energia cinetica dell'asta nel sistema fisso di riferimento. Qui I è il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse ad essa ortogonale nel suo centro.

a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2} r^2 \beta^2 + \frac{I}{2} (\dot\varphi^2 + \beta^2 (\sin\varphi)^2) \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2} (\dot r^2 + r^2 \beta^2) + \frac{I}{2} \beta^2 (\cos\varphi)^2 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,,$$

ove R, $h > 0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea. Il vincolo è scabro.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \gamma x_3 \boldsymbol{T} + \delta \boldsymbol{B} \,,$$

con γ, $\delta > 0$ costanti. Qui (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca dell'elica, che viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R \cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{B}(s) &= \alpha h \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h \cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

e la curvatura $k(s) = R\alpha^2$.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Si supponga $\dot s > 0$ e che la reazione vincolare soddisfi

$$|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| = \mu |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Allora l'equazione di moto è:

a

$$m\ddot s = \delta - \mu \operatorname{sign}(\dot s) \sqrt{\dot s^4 m^2 k^2 + \delta^2} \,.$$

b

$$m\ddot s = \gamma h \alpha s - \mu \sqrt{\dot s^4 m^2 k^2 + \delta^2} \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{05}}$ Si supponga che $s(0) = 1/\alpha$, $\dot{s}(0) = 0$, e che la reazione vincolare soddisfi all'equilibrio

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu_s |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Allora il punto materiale resta in equilibrio.
a Sì, se $R \geq R_0$ con $R_0 > 0$ opportuno.
b Sì, se $\delta \geq \delta_0$ con $\delta_0 > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{06}}$ Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0 < 0$, e che la reazione vincolare soddisfi, se $\dot{s} \neq 0$,

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Dire quale delle seguenti proprietà soddisfa $s(t)$.
a Vale $\ddot{s}(t) > 0$ per $t \in (0, \bar{t})$, con $\bar{t} > 0$ opportuno.
b Il moto è indipendente dal valore di μ.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Sull'asta agisce la forza, applicata nell'estremo B

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{e}_3 - k\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui α, $k > 0$ sono costanti.
Si usi la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{L}} = L\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,,$$

$\varphi \in (-\pi, \pi)$.
$\boxed{\textbf{07}}$ Si può definire un potenziale lagrangiano $U^{\mathrm{L}} \in C^2((-\pi, \pi))$?
a Sì, e vale la conservazione dell'energia.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Esiste almeno una posizione di equilibrio?
a Sì.
b Questo dipende dalla scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ Possono esistere infinite posizioni di equilibrio?
a Sì se α è sufficientemente piccolo in dipendenza degli altri parametri.
b No.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, e il piano delle fasi (x, p).

$\boxed{10}$ Se la curva (non chiusa, si noti)

$$\{(x,p) \mid x^2 + p^2 = L^2 \,, x < L\} \,,$$

con $L > 0$ è un'orbita, quale conclusione si può trarre?
a Il punto $x = L$ non è di equilibrio.
b Il moto non è periodico.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{11}$ Se un'orbita $p = p(x)$, $x \in J$, ove J è l'intervallo aperto di definizione della funzione $p(x)$, soddisfa $p(x) > 0$ per ogni $x \in J$, allora $p(x) > p_0 > 0$ per ogni $x \in J$, per un $p_0 > 0$ opportuno.
a Non può succedere.
b Può succedere o no.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{12}$ Se il potenziale U soddisfa $U(x) \to -\infty$ per $x \to \pm\infty$, allora esiste almeno un punto di equilibrio stabile.
a Sì, sotto l'ulteriore ipotesi che esista esattamente un punto di equilibrio.
b Sicuramente non ne esistono.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi sulla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.
$\boxed{13}$ Dire in quale caso, se il vincolo è liscio, l'energia cinetica si conserva.
a Se la curva è piana.
b Se la forza $\boldsymbol{F}$ è ortogonale al vettore normale principale $\boldsymbol{N}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{14}$ Se il vincolo è liscio, la forza $\boldsymbol{F}$ è conservativa, allora l'energia meccanica si conserva.
a Sì sempre.
b No, in generale.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{15}$ Il vincolo sia scabro, con

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si assuma sempre $\dot{s} < 0$, e anche che $\boldsymbol{F}$ sia conservativa.
a La conservazione dell'energia vale se $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}| = 0$.
b La conservazione dell'energia vale se la torsione della curva è una costante.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare intorno al polo O.
$\boxed{16}$ Se $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}(t) \neq 0$ per ogni t, e non mantiene direzione costante, il moto può essere una rotazione intorno a un asse principale d'inerzia in O.

a Sì, se C ha ellissoide d'inerzia con due soli assi uguali.
b Sì, se C ha ellissoide d'inerzia sferico.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Se $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) \neq 0$ per ogni t è costante nel sistema fisso, il moto può essere una rotazione uniforme non nulla intorno a un asse non principale d'inerzia in O con $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ parallelo a tale asse.
a No.
b Sì se l'ellissoide d'inerzia è sferico.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Sia $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) = 0$ per ogni t. Dire quale delle seguenti quantità si conserva sempre.
a Il versore di $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$.
b Il versore di $\boldsymbol{\omega}$.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 26/01/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 26/01/2022

I.1 Un cilindro di massa m, altezza H e raggio R è vincolato a muoversi di moto polare con polo nel centro A di una delle due basi, che coincide con l'origine del sistema di riferimento fisso.
Nel centro B dell'altra base è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha x_3 \boldsymbol{u} \,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale al cilindro e ortogonale a $\overrightarrow{AB}$; $\alpha > 0$ è una costante e (x_h) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso.
All'istante $t = 0$ il cilindro parte da fermo nella posizione tale che $\overrightarrow{AB}(0) = H\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{e}_2$.
$\boxed{\mathbf{01}}$ L'energia cinetica del cilindro soddisfa:
a L'energia cinetica si mantiene costante durante il moto.
b L'energia cinetica si mantiene decrescente durante il moto.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Il moto del cilindro è:
a Tale che $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ si mantiene costante.
b Una rotazione.

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
a Non esiste il potenziale della forza $\boldsymbol{F}_B$ nella forma $U \in C^2(E)$ per nessun aperto non vuoto $E \subset \boldsymbol{R}^3$.
b Esiste il potenziale U della forza $\boldsymbol{F}_B$ come $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(\varphi) = Re^{\varphi}(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2) , \quad \varphi \in \boldsymbol{R} ,$$

ove $R > 0$ è costante. Si assuma come noto che la curvatura k non si annulla. Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{T} ,$$

ove $\alpha > 0$ è costante e $\boldsymbol{T}$ denota il versore tangente alla curva nella posizione $\boldsymbol{X}$, ossia

$$\boldsymbol{T}(s(\varphi)) = \frac{\boldsymbol{\Psi}'(\varphi)}{|\boldsymbol{\Psi}'(\varphi)|} , \quad ' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} .$$

$\boxed{\textbf{04}}$ Il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| ,$$

e sia $\boldsymbol{v} \neq 0$.
Si assumano prescritte le condizioni iniziali e quindi determinato univocamente il moto $\boldsymbol{X}$.
a Esistono sia moti per cui la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(t)$ si annulla per qualche t, sia moti per cui non lo fa.
b La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(t)$ si annulla sempre per qualche t.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{05}}$ Il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu_s |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| ,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Allora:
a Non esistono posizioni di equilibrio.
b Esistono infinite posizioni di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{06}}$ Il vincolo sia liscio. Allora l'equazione di moto è:
a $m\ddot{\varphi} = \alpha$.
b $m\sqrt{2}Re^{\varphi}(\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}) = \alpha$.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m)$ e $(\boldsymbol{X}_2, m)$ entrambi di uguale massa m sono vincolati come segue:

- $\boldsymbol{X}_1$ è vincolato alla circonferenza
$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,;$$
- $\boldsymbol{X}_2$ è vincolato alla sfera
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$
e ad appartenere allo stesso piano che contiene $\boldsymbol{X}_1$ e l'asse x_3.

Sui due punti agiscono le forze elastiche
$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}_1} = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) = -\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}_2}\,.$$
Qui k, $R > 0$ sono costanti.
$\boxed{\textbf{07}}$ Supponiamo che i due punti partano da fermi, con $\boldsymbol{X}_1(0) = R\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{X}_2(0) = R\boldsymbol{e}_3$. Allora:
a Vale $\boldsymbol{X}_2(t) = \boldsymbol{X}_2(0)$ per ogni t.
b L'energia cinetica $T(t)$ soddisfa $T(t) \leq kR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Dire quale delle seguenti è una parametrizzazione lagrangiana corretta del sistema.
a
$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} &= R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}} &= R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$
$(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0, \pi)$.
b
$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{R^2 - y_1^2 - y_2^2}\boldsymbol{e}_3\,,$$
$(y_1, y_2) \in \{y_1^2 + y_2^2 < R^2\}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ L'energia cinetica in forma lagrangiana del sistema (nelle coordinate lagrangiane denotate da $(q_1, q_2) \in Q$):
a Può assumere ogni valore reale, su opportuni moti lagrangiani.
b Dipende esplicitamente dal tempo t.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia rispetto al polo O (sulla cui posizione non si fanno ipotesi).
$\boxed{\textbf{10}}$ Se $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ si mantiene costante durante il moto, allora anche $\boldsymbol{\omega}(t)$ è costante.
a Non è vero in generale.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{11}$ Tutti i moti per cui la direzione di $\boldsymbol{\omega}(t)$ si mantiene costante (si assuma $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per ogni t) sono periodici.
a È sempre vero.
b È vero solo se l'ellissoide d'inerzia in O è sferico.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{12}$ Se il corpo è un cilindro (solido) circolare retto omogeneo allora tutti i moti sono periodici.
a Può accadere, ma in genere non è vero.
b È sempre vero.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.
$\boxed{13}$ Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:
a Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
b Esistono infinite terne principali d'inerzia.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{14}$ Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:
a Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
b Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{15}$ Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R}.$$

Allora:
a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
b Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Dire quali dei seguenti vincoli per due punti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{u}_1 + z_2\boldsymbol{u}_2 + z_3\boldsymbol{u}_3, \quad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{u}_1 + z_5\boldsymbol{u}_2 + z_6\boldsymbol{u}_3,$$

sono olonomi regolari nell'aperto $A \subset \boldsymbol{R}^6$ indicato.
$\boxed{16}$ Qui $A = \{z_3 > 0, z_6 > 0\}$.
a

$$(z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 - R^2 = 0, \quad z_1^2 + z_4^2 = 0.$$

b

$$z_3 - \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = 0\,, \quad z_6 - \sqrt{z_4^2 + z_5^2} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{17}}$ Qui $A = \boldsymbol{R}^6$.

a

$$z_1 - |z_2 - z_3| = 0\,, \quad z_4 = 0\,.$$

b

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 4(z_4^2 + z_5^2 + z_6^2) = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{18}}$ Qui $A = \boldsymbol{R}^6$.

a

$$z_1 - 2z_4 = 0\,, \quad \sin(2z_1) - \sin(4z_4) = 0\,.$$

b

$$z_1 - 2z_4 = 0\,, \quad z_2 - 2z_5 = 0\,, \quad z_3 - 2z_6 = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 26/01/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 26/01/2022

I.1 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m)$ e $(\boldsymbol{X}_2, m)$ entrambi di uguale massa m sono vincolati come segue:

- $\boldsymbol{X}_1$ è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,;$$

- $\boldsymbol{X}_2$ è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

  e ad appartenere allo stesso piano che contiene $\boldsymbol{X}_1$ e l'asse x_3.

Sui due punti agiscono le forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}_1} = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) = -\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}_2}\,.$$

Qui k, $R > 0$ sono costanti.
$\boxed{\mathbf{01}}$ Dire quale delle seguenti è una parametrizzazione lagrangiana corretta del sistema.
a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} &= R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}} &= R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

$(\varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0, \pi)$.
b

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{R^2 - y_1^2 - y_2^2}\boldsymbol{e}_3\,,$$

$(y_1, y_2) \in \{y_1^2 + y_2^2 < R^2\}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ L'energia cinetica in forma lagrangiana del sistema (nelle coordinate lagrangiane denotate da $(q_1, q_2) \in Q$):
a Dipende esplicitamente dal tempo t.
b Può assumere ogni valore reale, su opportuni moti lagrangiani.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Supponiamo che i due punti partano da fermi, con $\boldsymbol{X}_1(0) = R\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{X}_2(0) = R\boldsymbol{e}_3$. Allora:
a L'energia cinetica $T(t)$ soddisfa $T(t) \le kR^2$.
b Vale $\boldsymbol{X}_2(t) = \boldsymbol{X}_2(0)$ per ogni t.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un cilindro di massa m, altezza H e raggio R è vincolato a muoversi di moto polare con polo nel centro A di una delle due basi, che coincide con l'origine del sistema di riferimento fisso.
Nel centro B dell'altra base è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha x_3 \boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale al cilindro e ortogonale a $\overrightarrow{AB}$; $\alpha > 0$ è una costante e (x_h) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso.
All'istante $t = 0$ il cilindro parte da fermo nella posizione tale che $\overrightarrow{AB}(0) = H\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{e}_2$.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Il moto del cilindro è:
a Una rotazione.
b Tale che $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ si mantiene costante.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ L'energia cinetica del cilindro soddisfa:

a L'energia cinetica si mantiene costante durante il moto.
b L'energia cinetica si mantiene decrescente durante il moto.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
a Esiste il potenziale U della forza $\boldsymbol{F}_B$ come $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$.
b Non esiste il potenziale della forza $\boldsymbol{F}_B$ nella forma $U \in C^2(E)$ per nessun aperto non vuoto $E \subset \boldsymbol{R}^3$.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(\varphi) = Re^{\varphi}(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2)\,, \quad \varphi \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove $R > 0$ è costante. Si assuma come noto che la curvatura k non si annulla. Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{T}\,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante e $\boldsymbol{T}$ denota il versore tangente alla curva nella posizione $\boldsymbol{X}$, ossia

$$\boldsymbol{T}(s(\varphi)) = \frac{\boldsymbol{\Psi}'(\varphi)}{|\boldsymbol{\Psi}'(\varphi)|}\,, \quad {}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,.$$

$\boxed{\mathbf{07}}$ Il vincolo sia liscio. Allora l'equazione di moto è:
a $m\ddot{\varphi} = \alpha$.
b $m\sqrt{2}Re^{\varphi}(\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}) = \alpha$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

e sia $\boldsymbol{v} \neq 0$.
Si assumano prescritte le condizioni iniziali e quindi determinato univocamente il moto $\boldsymbol{X}$.
a La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(t)$ si annulla sempre per qualche t.
b Esistono sia moti per cui la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(t)$ si annulla per qualche t, sia moti per cui non lo fa.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu_s |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Allora:
a Esistono infinite posizioni di equilibrio.
b Non esistono posizioni di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:
a Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
b Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)], \qquad s \in \boldsymbol{R}.$$

Allora:
a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
b Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:
a Esistono infinite terne principali d'inerzia.
b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Dire quali dei seguenti vincoli per due punti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{u}_1 + z_2\boldsymbol{u}_2 + z_3\boldsymbol{u}_3, \quad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{u}_1 + z_5\boldsymbol{u}_2 + z_6\boldsymbol{u}_3,$$

sono olonomi regolari nell'aperto $A \subset \boldsymbol{R}^6$ indicato.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Qui $A = \{z_3 > 0, z_6 > 0\}$.
a

$$z_3 - \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = 0, \quad z_6 - \sqrt{z_4^2 + z_5^2} = 0.$$

b

$$(z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 - R^2 = 0, \quad z_1^2 + z_4^2 = 0.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Qui $A = \boldsymbol{R}^6$.
a

$$z_1 - 2z_4 = 0, \quad z_2 - 2z_5 = 0, \quad z_3 - 2z_6 = 0.$$

b

$$z_1 - 2z_4 = 0, \quad \sin(2z_1) - \sin(4z_4) = 0.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Qui $A = \boldsymbol{R}^6$.

a
$$z_1 - |z_2 - z_3| = 0\,, \quad z_4 = 0\,.$$
b
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 4(z_4^2 + z_5^2 + z_6^2) = 0\,.$$
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia rispetto al polo O (sulla cui posizione non si fanno ipotesi).
$\boxed{\mathbf{16}}$ Se il corpo è un cilindro (solido) circolare retto omogeneo allora tutti i moti sono periodici.
a Può accadere, ma in genere non è vero.
b È sempre vero.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Se $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ si mantiene costante durante il moto, allora anche $\boldsymbol{\omega}(t)$ è costante.
a Sì.
b Non è vero in generale.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Tutti i moti per cui la direzione di $\boldsymbol{\omega}(t)$ si mantiene costante (si assuma $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per ogni t) sono periodici.
a È vero solo se l'ellissoide d'inerzia in O è sferico.
b È sempre vero.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 16/02/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 16/02/2022

I.1 Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,;
\end{aligned}$$

qui $\alpha > 0$ è una costante. Denotiamo con $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ le coordinate in $\mathcal{S}$.
Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$\lambda_2 = 0\,,$$

e a avere l'estremo A sulla retta

$$\lambda_1 = \lambda_3\,, \qquad \lambda_2 = 0\,.$$

Sull'asta agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.
Si usino come coordinate lagrangiane $x = \lambda_{1A}$ e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_3)\,.$$

$\boxed{\textbf{01}}$ Il vincolo è:
a Mobile sia rispetto al sistema di riferimento fisso che a quello mobile.
b Mobile rispetto al sistema di riferimento fisso, ma fisso rispetto a quello mobile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ Il potenziale lagrangiano della forza di trascinamento in $\mathcal{S}$ è dato da:
a

$$U^{\mathrm{T}}(x,\varphi) = \frac{m\alpha^2}{4L}\int_0^{2L}(x + s\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}s\,.$$

b

$$U^{\mathrm{T}}(x,\varphi) = \frac{m}{4L}\Big[\alpha\int_0^{2L}(x + s\cos\varphi)\,\mathrm{d}s\Big]^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ Denotiamo con I il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse a essa ortogonale nel centro di massa G. Se si scrive l'energia cinetica dell'asta nel sistema fisso con il teorema di König, il termine $\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}/2$ che ivi appare è dato da:
a

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{I}{2}[\dot\varphi^2 + \alpha^2(\cos\varphi)^2]\,.$$

b

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{I}{2}[\dot\varphi^2 + \alpha^2(\sin\varphi)^2]\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un cilindro di massa m, raggio R e altezza H è vincolato a muoversi di moto polare con polo nel centro del cilindro, coincidente con l'origine del sistema di riferimento fisso $\boldsymbol{X}_O$. Consideriamo il sistema di riferimento solidale con il cilindro $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, con $\boldsymbol{u}_3$ parallelo all'asse del cilindro.

Sul cilindro, nel punto solidale B appartenente a una delle circonferenze di base dato da

$$\boldsymbol{X}_B = R\boldsymbol{u}_2 + \frac{H}{2}\boldsymbol{u}_3\,,$$

è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_B = \lambda\boldsymbol{u}\,,$$

con $\lambda > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ versore solidale al cilindro.
Il cilindro parte da fermo.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Allora:
a Il moto è polare per inerzia.
b Esiste un piano solidale Π tale che se $\boldsymbol{u} \in \Pi$ allora il moto è una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Supponiamo che $\boldsymbol{u}$ sia parallelo all'asse del cilindro. Allora:
a Il moto è periodico.
b L'energia cinetica aumenta durante il moto, ma rimane limitata.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Qualunque sia la direzione di $\boldsymbol{u}$, il sistema delle equazioni di Eulero può essere visto come un sistema differenziale del primo ordine nelle componenti di $\boldsymbol{\omega}$.
a Sì.
b In generale no, ma è vero per speciali geometrie del cilindro.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a vincoli olonomi regolari fissi e lisci, e a forze direttamente applicate conservative. Ha lagrangiana

$$\mathcal{L} = \alpha(1+x^2)\dot{x}^2 + 2\sqrt{\alpha\gamma}xy\dot{x}\dot{y} + \gamma(1+y^2)\dot{y}^2 - \delta x^2 - \varepsilon y^2 - \eta x^3\,,$$

con α, γ, δ, ε, $\eta > 0$ costanti. Qui $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate lagrangiane.
Si considerano le piccole oscillazioni in (0,0).
$\boxed{\mathbf{07}}$ La lagrangiana ridotta è data da
a

$$\mathcal{L}^* = \alpha(1+x^2)\dot{x}^2 + \gamma(1+y^2)\dot{y}^2 - \delta x^2 - \varepsilon y^2\,.$$

b

$$\mathcal{L}^* = \alpha\dot{x}^2 + \gamma\dot{y}^2 - \delta x^2 - \varepsilon y^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Le frequenze normali $\omega_i/(2\pi)$, $i = 1$, 2 sono date da:
a

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}\,.$$

b

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\varepsilon}}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ In questo caso, i moti delle piccole oscillazioni coincidono esattamente con quelli del sistema originario?
a Sì se

$$|x| + |\dot{x}| + |y| + |\dot{y}| \leq c\,,$$

con $c > 0$ opportuno.
b Sì se $y(t) = 0$ per ogni t.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia di polo $\boldsymbol{X}_O$. Si assuma $\boldsymbol{\omega} \neq 0$.
Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ un sistema di riferimento solidale con C, con $\mathcal{M}$ principale d'inerzia in $\boldsymbol{X}_O$. Denotiamo con I_{hh} il momento d'inerzia relativo a $\boldsymbol{u}_h$ in $\boldsymbol{X}_O$.
$\boxed{\mathbf{10}}$ È possibile garantire a priori che tutti i moti siano periodici?
a Sì, se il corpo ha geometria delle masse particolare.
b No, esistono sempre moti non periodici.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ sia un vettore solidale. Allora il moto è di rotazione.
a Sì.
b In genere no.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Si considerino le due funzioni del tempo

$$f_1(t) = \sum_{h=1}^{3} I_{hh}\omega_h(t)^2\,, \qquad f_2(t) = \sum_{h=1}^{3} I_{hh}^2\omega_h(t)^2\,.$$

Allora:
a La f_1 si mantiene costante, ma la f_2 in genere no.
b La f_2 si mantiene costante, ma la f_1 in genere no.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie regolare S. Il vincolo è scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico; si assuma $\boldsymbol{v} \neq 0$.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata conservativa $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, di potenziale $U(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$.
Denotiamo con $\boldsymbol{\nu}$ la normale alla superficie.
$\boxed{\mathbf{13}}$ L'energia meccanica $T - U$:
a Certamente non si conserva.
b Esistono sia casi in cui si conserva che casi in cui non si conserva.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{14}$ Supponiamo che

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) = 0\,, \qquad \text{per ogni } \boldsymbol{x} \in S.$$

Allora:
a Di fatto i moti sono indipendenti dal coefficiente di attrito μ.
b S è una superficie di livello per U.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{15}$ Supponiamo che la traiettoria di $\boldsymbol{X}$ sia data da una curva regolare

$$\{\boldsymbol{\psi}(s) \mid s \in I\} \subset S\,,$$

con s ascissa curvilinea e terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ (assumiamo che la curvatura k sia positiva). Allora:
a I tre prodotti $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nu}$ possono in genere assumere qualunque valore in $[-1,1]$.
b Se l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ soddisfa $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{N} = 0$ in qualche tempo $\bar{t}$, allora in quel $\bar{t}$ vale anche $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, 2$, è soggetto a vincoli olonomi regolari. Assumiamo l'ipotesi dei lavori virtuali.
Si usi la notazione

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3\,.$$

$\boxed{16}$ Supponiamo che i vincoli siano mobili. Se la reazione vincolare ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^1$ fa lavoro nullo, allora anche ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^2$ fa lavoro nullo?
a Può essere, ma in genere no.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{17}$ Supponiamo che il vincolo sia di rigidità, cioè sia dato da

$$f(\boldsymbol{z}) = |\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^2 - L^2 = 0\,,$$

con $L > 0$. Allora:
a La reazione vincolare ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^1$ è parallela a $\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2$.
b La reazione vincolare ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^1$ è ortogonale a $\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{18}$ Supponiamo che che i vincoli siano fissi e che ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^1$ faccia lavoro nullo. Allora:
a La reazione vincolare ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^2$ fa lavoro virtuale nullo, ma in genere non fa lavoro nullo.
b La reazione vincolare ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^2$ fa lavoro nullo.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 21/03/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 21/03/2022

I.1 Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Sul vertice A è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = kx_1\boldsymbol{e}_1\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si usino come coordinate lagrangiane $(x, y, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_A = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{AB} = L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

La scelta è tale che la diagonale AC è data da

$$\overrightarrow{AC} = L\sqrt{2}\Big(\cos\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big)\boldsymbol{e}_1 + \sin\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big)\boldsymbol{e}_2\Big)\,,$$

$\boxed{\mathbf{01}}$ Il potenziale lagrangiano U^{L}:
a Non esiste.
b Vale

$$U^{\mathrm{L}} = \frac{k}{2}x^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Sia I il momento d'inerzia della lamina nel centro di massa, relativo a $\boldsymbol{e}_3$. Allora l'energia cinetica della lamina vale:
a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}\Big[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{L^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \sqrt{2}L\dot{x}\dot{\varphi}\sin\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big) + \sqrt{2}L\dot{y}\dot{\varphi}\cos\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big)\Big] + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2\,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{03}}$ L'equazione di Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial \dot\varphi}\Big] - \frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = Q_\varphi \ :$$

a Si riduce con calcoli opportuni a $\ddot\varphi = 0$.
b Presenta $Q_\varphi = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

ove $R > 0$.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2 + \gamma \boldsymbol{e}_3\,,$$

ove α, β, $\gamma \in \boldsymbol{R}$.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Il vincolo sia scabro di attrito dinamico (assumiamo quindi $\boldsymbol{v} \neq 0$) del tipo $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|$, con $\mu > 0$. Allora:
a Le equazioni di moto dipendono da α, β, ma non da γ.
b Si possono scegliere le coordinate lagrangiane in modo che le equazioni di moto siano indipendenti da α o da β a scelta.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Il vincolo sia liscio. Allora:
a Le equazioni di moto dipendono da α, β, ma non da γ.
b Si possono scegliere le coordinate lagrangiane in modo che le equazioni di moto siano indipendenti da α o da β a scelta.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Il vincolo sia scabro di attrito statico, del tipo $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|$, con $\mu > 0$. Allora:
a Qualunque sia $\mu > 0$ esistono sempre infinite posizioni di equilibrio.
b Per certe scelte di α, β, $\gamma \in \boldsymbol{R}$, $\mu > 0$, non esistono posizioni di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un cilindro omogeneo di raggio R, altezza H e massa m si muove di moto polare intorno al centro A di una delle basi.
Sul cilindro sono applicate sollecitazioni dirette tali che il loro momento rispetto a A sia

$$\boldsymbol{M}_A^{\mathrm{ext}} = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_3\,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ non entrambi nulli.
Qui si considera il sistema di riferimento solidale al cilindro $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_A, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{u}_3$ parallelo all'asse del cilindro. Scriviamo come usuale per la velocità angolare del cilindro

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h\,.$$

$\boxed{\textbf{07}}$ Esistono condizioni iniziali per cui il moto risulta di rotazione?
a Se $\alpha = 0$ sì.
b No, mai.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Supponiamo che la geometria del cilindro sia tale che in A valga $I_{11} = I_{22} = I_{33}$, e che il cilindro parta da fermo. Allora:
a Il moto è di rotazione.
b Se $\alpha \neq \beta$ il moto non è di rotazione.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ Quando possiamo concludere che per un certo $\bar{t}$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(\bar{t}) = 0?$$

Qui T è l'energia cinetica.
a Se $\alpha = 0$ e $\omega_2(\bar{t}) = 0$.
b Se $\beta = 0$ e $\omega_1(\bar{t}) = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Consideriamo un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi regolari, con ℓ gradi di libertà e il relativo potenziale lagrangiano U^{L} delle forze direttamente applicate.
$\boxed{\textbf{10}}$ I vincoli siano mobili nel sistema di riferimento fisso, ma fissi nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$. Allora, volendo scrivere la lagrangiana in $\mathcal{S}$ (ove quindi si deve tener conto anche delle forze apparenti)
a U^{L} nel sistema di riferimento $\mathcal{S}$ non esiste sicuramente a causa della forza di Coriolis.
b Se U^{L} esiste nel sistema di riferimento fisso può esistere o no nel sistema di riferimento mobile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{11}}$ Sia $\ell = 2$ e le componenti lagrangiane delle forze siano per $(q_1, q_2) \in \boldsymbol{R}^2$

$$Q_1 = q_1 + q_2 t\,, \qquad Q_2 = q_1 + q_2\,.$$

a U^{L} esiste, in tutto $\boldsymbol{R}^2$.
b U^{L} non esiste in nessun aperto di $\boldsymbol{R}^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{12}}$ Le forze direttamente applicate sono nulle.
a U^{L} esiste sicuramente (nel sistema di riferimento fisso).
b U^{L} può non esistere nel sistema di riferimento fisso, ma si può sempre trovare un sistema di riferimento mobile in cui esiste.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di m vincoli olonomi regolari, con $\ell = 3n - m$ gradi di libertà.
$\boxed{\textbf{13}}$ L'energia meccanica si conserva se:

a Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e i vincoli sono fissi.
b Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e le componenti lagrangiane delle forze sono conservative in senso lagrangiano.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ I vincoli siano fissi. L'insieme degli atti di moto del sistema in una fissata configurazione compatibile costituisce:
a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{3n}$ di dimensione ℓ.
b Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{3n}$ di dimensione m.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che $n = 2$ e i vincoli siano per i due moti $\boldsymbol{X}_1 = (z_1, z_2, z_3)$, $\boldsymbol{X}_2 = (z_4, z_5, z_6)$,

$$f_1(z_1, z_2, z_3) = 0\,, \quad f_2(z_4, z_5, z_6) = 0\,, \quad z_1 = z_4\,.$$

Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e le forze direttamente applicate sono costanti ma non nulle.
a Non esistono configurazioni compatibili con i vincoli che siano di equilibrio.
b L'energia meccanica del sistema si conserva lungo ciascun moto.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Sia C un corpo rigido non degenere.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Sia $I^P_{\boldsymbol{uu}}$ il momento d'inerzia relativo all'asse passante per P e parallelo al versore $\boldsymbol{u}$; P e $\boldsymbol{u}$ sono solidali al corpo rigido. Quale dei seguenti casi è possibile?
a

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^3,|\boldsymbol{u}|=1} I^P_{\boldsymbol{uu}} = \inf_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^3,|\boldsymbol{u}|=1} I^P_{\boldsymbol{uu}}\,, \qquad P \text{ fissato.}$$

b

$$\inf_{P\in\boldsymbol{R}^3} I^P_{\boldsymbol{uu}} = 0\,, \qquad \boldsymbol{u} \text{ fissato.}$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Tra i moti polari per inerzia di polo O esistono moti in cui $\boldsymbol{\omega}$ mantiene modulo non costante?
a Sì, ma solo sotto ipotesi sulla geometria delle masse del corpo.
b Sì, sempre.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Supponiamo che il corpo sia soggetto a una distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \beta f(\dot{x}_1)\boldsymbol{e}_1\,\mathrm{d}\mu\,,$$

ove α, $\beta > 0$ sono costanti, $\mathrm{d}\mu$ è la misura caratteristica del corpo e $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ è una funzione. In assenza di vincoli, le equazioni globali della dinamica sono sufficienti a determinare il moto di C?
a No, a meno che f sia costante.
b Sì, almeno se si assume $f \in C^1(\boldsymbol{R})$.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 22/06/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 22/06/2022

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva

$$\lambda_3 = f(\lambda_1)\,, \qquad \lambda_2 = 0\,,$$

ove $(\boldsymbol{\lambda})$ rappresenta le coordinate nel sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ con O origine del sistema fisso e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

Qui $\alpha > 0$ è costante e $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, con $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$.
Sul punto agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.
$\boxed{\textbf{01}}$ Dire per quale delle seguenti scelte $\boldsymbol{\lambda} = 0$ è una posizione di equilibrio stabile relativo a $\mathcal{S}$. Qui $\beta > 0$ è una costante.
a $f(\lambda_1) = \beta\lambda_1^4$, per $\beta > 0$ opportuna.
b $f(\lambda_1) = \beta\lambda_1^2$, per $\beta > 0$ opportuna.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$
Si dia per noto che l'equazione di moto del punto è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigl[m\dot\lambda_1\bigl(1 + f'(\lambda_1)^2\bigr)\bigr] - m\dot\lambda_1^2 f'(\lambda_1)f''(\lambda_1) - m\alpha^2\lambda_1 + mgf'(\lambda_1) = 0\,.$$

Possono esistere moti in cui $\lambda_1(t)$ è costante, con $\lambda_1 \neq 0$?
a Se f è scelta opportunamente, possono esisterne infiniti.
b Considerate le condizioni $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ già poste, esiste una sola scelta di f per cui moti di questo tipo sono ammissibili.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ Quale delle seguenti condizioni garantisce che tutti i moti siano limitati? Qui $\beta > 0$ è una costante.
a $f(\lambda_1) = \beta\lambda_1^4$, con $\beta > 0$ fissata ad arbitrio.
b $f(\lambda_1) = \beta\lambda_1^2$, con $\beta > 0$ fissata ad arbitrio.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Una lamina rettangolare $ABCD$ di massa m e lati $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{BC} = b$, con $a > b > 0$, è vincolata a muoversi di moto polare di polo il centro di massa G della lamina.
Nel seguito $\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}}$ denota il momento delle forze esterne rispetto a G, e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ una base solidale principale in G, con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al piano della lamina.
$\boxed{\mathbf{04}}$ L'asse solidale passante per G di versore

$$\boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

con α, $\beta > 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ può essere principale?
a No.
b Solo se $a = nb$ con n intero.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Si sa che il moto è polare per inerzia, con

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \lambda \boldsymbol{u}_1(0) + \mu \boldsymbol{u}_2(0) \,,$$

con λ, $\mu > 0$ costanti.
a $\boldsymbol{\omega}(t)$ può mantenere direzione costante nel sistema fisso.
b $\boldsymbol{\sigma}_G \boldsymbol{\omega}(t)$ può mantenere direzione costante nel sistema solidale.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Scegliere l'enunciato corretto.
a L'energia cinetica $T(t)$ può assumere qualunque valore in $(-\infty, +\infty)$ per $t > 0$ fissato, se $\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}}$ è opportuno.
b L'energia cinetica T si può scrivere come una forma quadratica nelle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ in $(\boldsymbol{u}_h)$, con coefficienti dipendenti solo da a, b, m.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Rispondere alle seguenti domande sui vincoli specificati.
Qui:

$$\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_6) \in \boldsymbol{R}^6 \,,$$

sono le coordinate locali di un sistema formato dai due moti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1 \boldsymbol{e}_1 + z_2 \boldsymbol{e}_2 + z_3 \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4 \boldsymbol{e}_1 + z_5 \boldsymbol{e}_2 + z_6 \boldsymbol{e}_3 \,.$$

$\boxed{\mathbf{07}}$ I vincoli sono

$$f_1(\boldsymbol{z}) = z_3 = 0 \,, \qquad f_2(\boldsymbol{z}) = z_6 - z_4^2 - z_5^2 = 0 \,.$$

a I vincoli sono olonomi regolari in ogni configurazione ammissibile.
b Esiste esattamente una configurazione ammissibile in cui i vincoli non sono regolari.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{08}}$ I vincoli sono

$$f_1(\boldsymbol{z}) = z_3 - z_6 - L = 0\,,$$
$$f_2(\boldsymbol{z}) = (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 - L^2 = 0\,,$$

con $L > 0$ costante.
a I vincoli sono olonomi regolari in ogni configurazione ammissibile.
b Esiste esattamente una configurazione ammissibile in cui i vincoli non sono regolari.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ I vincoli sono

$$f_1(\boldsymbol{z}) = z_3 = 0\,, \qquad f_2(\boldsymbol{z}) = z_6 - L = 0\,,$$
$$f_3(\boldsymbol{z}) = (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 - L^2 = 0\,,$$

con $L > 0$ costante.
a I vincoli sono olonomi regolari in ogni configurazione ammissibile.
b Esiste esattamente una configurazione ammissibile in cui i vincoli non sono regolari.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.
$\boxed{\textbf{10}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:
a Indipendente da $\boldsymbol{F}$ se il vincolo è liscio.
b Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{11}}$ Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali
a Non si può porre.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{12}}$ Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:
a Una traslazione.
b Una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Una lamina non omogenea a forma di superficie sferica S di raggio $R > 0$ ha densità

$$\rho(P) > 0 \quad \text{non uniforme.}$$

Qui P denota il punto generico di S e $(\boldsymbol{\lambda})$ un sistema di coordinate solidali a S con origine nel centro (geometrico) della sfera S.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Il centro di massa G della lamina
a Non è mai esterno alla sfera, ma non è necessariamente nel centro geometrico.
b È sempre nel centro geometrico della sfera, per qualunque scelta della densità ρ.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Se per una funzione $\tilde{\rho}$ opportuna

$$\rho(\boldsymbol{\lambda}) = \tilde{\rho}(|\lambda_1|)\,,$$

allora
a Il centro di massa appartiene al piano $\lambda_1 = 0$.
b I 3 momenti d'inerzia principali in G sono uguali.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Se per una funzione $\tilde{\rho}$ opportuna

$$\rho(\boldsymbol{\lambda}) = \tilde{\rho}(\lambda_1)\,,$$

allora
a Il centro di massa appartiene al piano $\lambda_1 = 0$.
b Il centro di massa appartiene all'asse λ_1.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Sia C un corpo rigido non degenere.
Denotiamo con $\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}$ la risultante delle forze esterne e con $\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}}$ il momento delle forze esterne rispetto al centro di massa G, sotto le usuali ipotesi sulle forze interne.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Sia C libero da vincoli. Fissate le condizioni iniziali il moto di C dipende solo da $\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}$ e da $\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}}$.
a Sì.
b In genere no, anche se è vero per particolari geometrie del corpo.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Supponiamo che C mantenga un punto solidale Z fisso, cioè che il moto sia polare di polo Z. Il vincolo sia liscio.
a Se il momento delle forze esterne rispetto a Z è identicamente nullo, tutti i moti sono di rotazione.
b Se il momento delle forze esterne rispetto a Z è identicamente nullo, l'energia cinetica si conserva durante il moto.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Supponiamo che C sia vincolato a muoversi di rotazione intorno all'asse fisso r con vincolo liscio. Il momento delle forze direttamente applicate rispetto a un punto fisso $Z \in r$ è nullo. Per un moto generico e senza ulteriori ipotesi su r:
a Il momento delle reazioni vincolari rispetto a Z è certamente nullo.
b Il momento delle reazioni vincolari rispetto a Z è certamente non nullo.

c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 20/07/2022

MECCANICA RAZIONALE 6cfu
ING. MECCANICA

Prova scritta del 20/07/2022

I.1 Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata al piano mobile $\langle \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_3(t)\rangle$ ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e $\alpha > 0$ è costante. Su di essa agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica applicata in A data da $\boldsymbol{F}_A = -kM\overrightarrow{OA}$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e $k > 0$ è costante. Introduciamo le coordinate lagrangiane $(x, y, \varphi) \in \boldsymbol{R}^2 \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_A = x\boldsymbol{u}_1 + z\boldsymbol{u}_3\,, \quad \overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_3)\,.$$

Le equazioni di Lagrange allora sono:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{x} - L\dot{\varphi}\sin\varphi] - \alpha^2 x - \alpha^2 L\cos\varphi + kx = 0\,,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\dot{z} + L\dot{\varphi}\cos\varphi\Big] + g + kz = 0\,,\\
\frac{4}{3}L\ddot{\varphi} + \ddot{z}\cos\varphi - \ddot{x}\sin\varphi + \alpha^2 x\sin\varphi + \frac{2}{3}L\alpha^2\sin(2\varphi) + g\cos\varphi = 0\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{01}$ Esistono moti in cui x, z, φ si mantengono costanti con $x = 0$?
a Sì.
b No, se non per speciali valori dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{02}$ Esistono moti in cui x, z, φ si mantengono costanti con $\varphi = 0$?
a Sì, per speciali valori dei parametri.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{03}$ Esistono moti in cui x, z, φ si mantengono costanti con $z = 0$?

a Sì, se $k > 1$.
b No.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un cilindro di raggio R, altezza $2H$ e massa M è vincolato ad avere il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Nel centro A di una delle due basi è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{u} \,,$$

con $\boldsymbol{u}$ versore solidale al cilindro ortogonale a $\overrightarrow{GA}$, e $\alpha \geq 0$ costante.
$\boxed{\textbf{04}}$ Sia $\alpha > 0$ e il cilindro sia fermo all'istante iniziale. Allora:
a Il moto è una rotazione uniforme.
b Lungo il moto non si conserva l'energia cinetica.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{05}}$ Sia $\alpha > 0$. Allora il moto può essere una rotazione?
a Solo se il cilindro parte da fermo, cioè $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$.
b Esistono infinite condizioni iniziali diverse per $\boldsymbol{\omega}(0)$ per cui il moto è una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{06}}$ Sia $\alpha = 0$. Allora si può essere certi che il moto sia una rotazione (escludiamo la quiete)?
a Solo per speciali geometrie del cilindro.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.
$\boxed{\textbf{07}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 \,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{09}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 \,.$$

Allora:
a Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, con curvatura $k(s) > 0$. Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva. Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$. Nel seguito α, $\beta > 0$ sono costanti, il moto non è di quiete e il vincolo scabro va inteso nel senso di Coulomb-Morin.
$\boxed{\textbf{10}}$ Se $\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{T} + \beta\boldsymbol{N}$, allora sotto quali ulteriori ipotesi $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$?
a Nessuna, è sempre vero.
b Non è vero se il vincolo è scabro, ma è vero se il vincolo è liscio.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{11}}$ Se la curva è piana e $\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{B}$, allora il moto è indipendente da α.
a In ogni caso.
b Solo se il vincolo è scabro.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{12}}$ Se $\boldsymbol{F} = \beta\boldsymbol{N}$ e il vincolo è scabro, allora ammettendo che $\boldsymbol{F}$ sia conservativa, si può concludere che:
a L'energia meccanica si conserva.
b L'energia meccanica non si conserva.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Consideriamo un sistema di n punti materiali soggetti al vincolo olonomo regolare

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0 \,,$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^{n_c}$, $n_c = 3n$, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{n_c+1} \to \boldsymbol{R}^m$.
$\boxed{\textbf{13}}$ L'ipotesi dei lavori virtuali
a Si può porre solo se i vincoli sono fissi.
b Nel caso di un solo punto vincolato a una curva equivale a quella di vincolo scabro.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{14}}$ Sia $(\bar{\boldsymbol{z}},\bar{t})$ una configurazione ammissibile. Tutti i sistemi di coordinate lagrangiane in un intorno di $(\bar{\boldsymbol{z}},\bar{t})$
a Hanno lo stesso numero di coordinate.
b Parametrizzano lo stesso sottoinsieme dello spazio delle configurazioni compatibili.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{15}}$ Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali, in una data configurazione ammissibile le singole reazioni vincolari su ciascun punto

a Sono nulle.
b Possono fare lavoro diverso da zero.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido C ha massa M e centro di massa G. I vincoli sotto introdotti soddisfano tutti l'ipotesi dei lavori virtuali.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Supponiamo che le sollecitazioni direttamente applicate al corpo abbiano momento totale rispetto a G nullo. Il corpo è vincolato ad avere G fisso.
a È possibile scegliere le condizioni iniziali in modo che il moto sia una rotazione (diversa dalla quiete).
b Il moto non è una rotazione, salvo il caso in cui l'ellissoide d'inerzia in G sia sferico.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Il moto sia polare per inerzia di polo G. Allora
a Il momento delle quantità di moto di polo G è nullo.
b L'energia cinetica è nulla.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Il corpo è vincolato ad avere il centro di massa G fisso. Allora l'energia cinetica del corpo è una forma quadratica a coefficienti costanti
a Nelle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ nella terna fissa.
b Nelle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ nella terna solidale.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 20/07/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 20/07/2022

I.1 Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata al piano mobile $\langle \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_3(t) \rangle$ ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

e $\alpha > 0$ è costante. Su di essa agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica applicata in A data da $\boldsymbol{F}_A = -kM\overrightarrow{OA}$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e $k > 0$ è costante. Introduciamo le coordinate lagrangiane $(x, y, \varphi) \in \boldsymbol{R}^2 \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_A = x\boldsymbol{u}_1 + z\boldsymbol{u}_3 \,, \quad \overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{u}_3) \,.$$

Le equazioni di Lagrange allora sono:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{x} - L\dot{\varphi}\sin\varphi] - \alpha^2 x - \alpha^2 L\cos\varphi + kx = 0 \,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\dot{z} + L\dot{\varphi}\cos\varphi\Big] + g + kz = 0 \,,$$

$$\frac{4}{3}L\ddot{\varphi} + \ddot{z}\cos\varphi - \ddot{x}\sin\varphi + \alpha^2 x\sin\varphi + \frac{2}{3}L\alpha^2\sin(2\varphi) + g\cos\varphi = 0 \,.$$

$\boxed{\textbf{01}}$ Esistono moti in cui x, z, φ si mantengono costanti con $x = 0$?
a Sì.
b No, se non per speciali valori dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ Esistono moti in cui x, z, φ si mantengono costanti con $\varphi = 0$?
a Sì, per speciali valori dei parametri.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ Esistono moti in cui x, z, φ si mantengono costanti con $z = 0$?
a Sì, se $k > 1$.
b No.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un cilindro di raggio R, altezza $2H$ e massa M è vincolato ad avere il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Nel centro A di una delle due basi è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{u} \,,$$

con $\boldsymbol{u}$ versore solidale al cilindro ortogonale a $\overrightarrow{GA}$, e $\alpha \geq 0$ costante.
$\boxed{\textbf{04}}$ Sia $\alpha > 0$ e il cilindro sia fermo all'istante iniziale. Allora:
a Il moto è una rotazione uniforme.
b Lungo il moto non si conserva l'energia cinetica.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{05}}$ Sia $\alpha > 0$. Allora il moto può essere una rotazione?
a Solo se il cilindro parte da fermo, cioè $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$.
b Esistono infinite condizioni iniziali diverse per $\boldsymbol{\omega}(0)$ per cui il moto è una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{06}}$ Sia $\alpha = 0$. Allora si può essere certi che il moto sia una rotazione (escludiamo la quiete)?
a Solo per speciali geometrie del cilindro.

b Sì.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.
$\boxed{\mathbf{07}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4 ,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2 .$$

Allora:
a Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, con curvatura $k(s) > 0$. Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva. Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$. Nel seguito α, $\beta > 0$ sono costanti, il moto non è di quiete e il vincolo scabro va inteso nel senso di Coulomb-Morin.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Se $\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{T} + \beta\boldsymbol{N}$, allora sotto quali ulteriori ipotesi $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$?
a Nessuna, è sempre vero.
b Non è vero se il vincolo è scabro, ma è vero se il vincolo è liscio.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Se la curva è piana e $\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{B}$, allora il moto è indipendente da α.
a In ogni caso.
b Solo se il vincolo è scabro.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Se $\boldsymbol{F} = \beta\boldsymbol{N}$ e il vincolo è scabro, allora ammettendo che $\boldsymbol{F}$ sia conservativa, si può concludere che:

a L'energia meccanica si conserva.
b L'energia meccanica non si conserva.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Consideriamo un sistema di n punti materiali soggetti al vincolo olonomo regolare

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,,$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^{n_c}$, $n_c = 3n$, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{n_c+1} \to \boldsymbol{R}^m$.
$\boxed{13}$ Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$
a Dipende dalla scelta delle coordinate lagrangiane.
b Non si può definire se non vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{14}$ Sia $(\bar{\boldsymbol{z}},\bar{t})$ una configurazione ammissibile. Tutti i sistemi di coordinate lagrangiane in un intorno di $(\bar{\boldsymbol{z}},\bar{t})$
a Hanno lo stesso numero di coordinate.
b Parametrizzano lo stesso sottoinsieme dello spazio delle configurazioni compatibili.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{15}$ Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali, in una data configurazione ammissibile la reazione vincolare complessiva

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = ({\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^1, \dots, {\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^n) \in \boldsymbol{R}^{n_c}\,,$$

di fatto
a È nulla.
b Deve appartenere a un sottospazio vettoriale di dimensione $< n_c$, ma non è in genere nulla.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido C ha massa M e centro di massa G. I vincoli sotto introdotti soddisfano tutti l'ipotesi dei lavori virtuali.
$\boxed{16}$ Supponiamo che le sollecitazioni direttamente applicate al corpo abbiano momento totale rispetto a G parallelo al versore fisso $\boldsymbol{e}_1$. Il corpo è vincolato ad avere G fisso. Il corpo parte da fermo.
a È possibile disporre il corpo all'istante iniziale in modo che il moto sia una rotazione.
b Il moto non è una rotazione, salvo il caso in cui l'ellissoide d'inerzia in G sia sferico.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{17}$ Il corpo è vincolato a ruotare intorno all'asse fisso per G parallelo a $\boldsymbol{e}_1$ (con G fisso). Allora:
a $\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}}$ deve essere parallelo a $\boldsymbol{e}_1$.
b $\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}}$ non può essere parallelo a $\boldsymbol{e}_1$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{18}}$ Il corpo è vincolato ad avere il centro di massa G fisso. Allora l'energia cinetica del corpo è una forma quadratica a coefficienti costanti
a Nelle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ nella terna fissa.
b Nelle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ nella terna solidale.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 21/09/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 21/09/2022

I.1 Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata al piano mobile $\langle \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_3(t) \rangle$ ove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

e $\alpha > 0$ è costante. Su di essa agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$. Introduciamo le coordinate lagrangiane $(x, z, \varphi) \in \boldsymbol{R}^2 \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_A = x\boldsymbol{u}_1 + z\boldsymbol{u}_3 \,, \quad \overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_3) \,.$$

$\boxed{\mathbf{01}}$ Vale per il sistema la conservazione dell'energia (nel sistema di riferimento fisso)?
a Sì, ma solo se $\alpha > 0$ assume valori particolari.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Quali relazioni soddisfano le le componenti lagrangiane delle forze nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$?
a

$$Q_x = M\alpha^2(x + L\cos\varphi) \,, \qquad Q_z = 0 \,.$$

b

$$Q_\varphi = 0 \,, \qquad Q_z = -Mg \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Esistono posizioni di equilibrio relativo al sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$?
a Sì, se $\alpha > 0$ è opportuno.

b No.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un cilindro di raggio R, altezza $2H$ e massa M è vincolato ad avere il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Nel centro A di una delle due basi è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \cos(\beta t) \boldsymbol{u} ,$$

con $\boldsymbol{u}$ versore solidale al cilindro ortogonale a $\overrightarrow{GA}$, e $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ costanti.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Sia $\alpha > 0$ e il cilindro sia fermo all'istante iniziale. Allora:
a Il cilindro resta fermo per ogni $t > 0$.
b Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_G$ è solidale al cilindro.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Sia $\alpha > 0$ e $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0 \boldsymbol{u}(0)$, con $\omega_0 > 0$. Allora:
a Esistono infiniti istanti t in cui $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$.
b Non esiste alcun istante t in cui $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Sia $\alpha = 0$. Allora:
a Il momento $\boldsymbol{L}_G$ è costante nel sistema fisso e anche solidale al cilindro.
b Il momento $\boldsymbol{L}_G$ è costante nel sistema fisso o solidale al cilindro, ma in genere non ha entrambe le proprietà.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.
$\boxed{\mathbf{07}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 + \beta xy - \gamma y^2 .$$

Allora nel punto di equilibrio (0,0) si possono definire le piccole oscillazioni se:
a $\alpha > \beta$.
b $\alpha\gamma > \beta^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha x^2 + \beta x^4 y^6 - \gamma y^4 .$$

Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\mathrm{L}}(x, y) = -\alpha (x-1)^2 - \beta (y-2)^6 + \gamma .$$

Allora:
a Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, con curvatura $k(s) > 0$. Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva. Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$. Nel seguito α, $\beta > 0$ sono costanti, si assume $\dot{s}(t) \neq 0$ per ogni t e il vincolo scabro va inteso nel senso di Coulomb-Morin.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Se $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{T} + \beta \boldsymbol{B}$, allora sotto quali ulteriori ipotesi $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} = 0$ all'istante t?
a Nessuna, è sempre vero.
b Nelle ipotesi fatte non è mai vero.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ La curva sia una circonferenza e $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{T}$; il vincolo sia scabro e sia $\dot{s} > 0$. Allora:
a L'energia meccanica si conserva.
b L'equazione di moto assume la forma, per una costante $c > 0$ opportuna,

$$m\ddot{s} = \alpha - c\dot{s}^2 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ La curva sia una circonferenza e $\boldsymbol{F} = 0$; il vincolo sia scabro e sia $\dot{s} > 0$. Allora:
a L'energia meccanica si conserva.
b L'energia meccanica non si conserva.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Consideriamo un sistema di n punti materiali soggetti al vincolo olonomo regolare

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0 \,,$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^{n_c}$, $n_c = 3n$, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{n_c+1} \to \boldsymbol{R}^m$.
$\boxed{\mathbf{13}}$ L'ipotesi dei lavori virtuali
a Determina la forma funzionale dell'energia cinetica lagrangiana del sistema.
b Nel caso di un solo punto vincolato a una superficie equivale a quella di vincolo liscio.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Sia $(\bar{\boldsymbol{z}},\bar{t})$ una configurazione ammissibile.
a Esiste sempre un sistema di coordinate lagrangiane che parametrizza le configurazioni ammissibili in un intorno di $(\bar{\boldsymbol{z}},\bar{t})$.
b Il numero delle coordinate lagrangiane può dipendere dalla particolare posizione sullo spazio delle configurazioni ammissibili.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{15}}$ Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali e i vincoli sono fissi, le singole reazioni vincolari su ciascun punto
a Sono sicuramente diverse da zero.
b Possono fare lavoro diverso da zero.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido C ha massa M e centro di massa G. I vincoli sotto introdotti soddisfano tutti l'ipotesi dei lavori virtuali.
$\boxed{\textbf{16}}$ Supponiamo che G sia fisso e che le sollecitazioni direttamente applicate al corpo abbiano momento totale rispetto a G nullo; escludiamo il moto di quiete.
a È possibile scegliere $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$ in modo che il moto sia una rotazione.
b Il moto non è una rotazione, salvo il caso in cui l'ellissoide d'inerzia in G sia sferico.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{17}}$ Il corpo è vincolato a ruotare intorno a un asse fisso r per G (con G fisso). Allora:
a Il versore di r è sempre solidale.
b $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}$ deve essere parallelo a r.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{18}}$ Il corpo è libero da vincoli ed è soggetto a una distribuzione di forze $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ non identicamente nulla. Allora
a $\boldsymbol{X}_G(t)$ non può essere costante.
b $\boldsymbol{\omega}(t)$ non può essere costante.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 11/10/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 11/10/2022

I.1 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m)$ e $(\boldsymbol{X}_2, m)$ entrambi di uguale massa m sono vincolati come segue:

- $\boldsymbol{X}_1$ è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,;$$

- $\boldsymbol{X}_2$ è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 ,$$

e ad appartenere allo stesso piano che contiene $\boldsymbol{X}_1$ e l'asse x_3.

Sui due punti agiscono le forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}_1} = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) = -\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}_2} .$$

Qui k, $R > 0$ sono costanti.
$\boxed{\textbf{01}}$ Dire quale delle seguenti è una parametrizzazione lagrangiana corretta del sistema.
a

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 , \quad \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{R^2 - y_1^2 - y_2^2}\boldsymbol{e}_3 ,$$

$(y_1, y_2) \in \{y_1^2 + y_2^2 = R^2\}$.
b

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}} = R\cos\psi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\psi\boldsymbol{e}_2 ,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}} = R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3 ,$$

$(\psi, \varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi) \times (0, \pi)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ L'energia cinetica in forma lagrangiana del sistema:
a È costante lungo ciascun moto del sistema.
b Può assumere ogni valore reale positivo, su opportuni moti lagrangiani.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ Supponiamo che i due punti partano da fermi, con $\boldsymbol{X}_1(0) = R\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{X}_2(0) = -R\boldsymbol{e}_1$. Allora:
a L'energia cinetica $T(t)$ soddisfa $T(\bar{t}) > kR^2/2$ per qualche opportuno $\bar{t} > 0$.
b Vale $\boldsymbol{X}_2(t) = \boldsymbol{X}_2(0)$ per ogni t.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(\varphi) = Re^{\varphi}(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2) , \quad \varphi \in \boldsymbol{R} ,$$

ove $R > 0$ è costante. Si assuma come noto che la curvatura k non si annulla.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{T} ,$$

ove $\alpha > 0$ è costante e $\boldsymbol{T}$ denota il versore tangente alla curva nella posizione $\boldsymbol{X}$, ossia

$$\boldsymbol{T}(s(\varphi)) = \frac{\boldsymbol{\Psi}'(\varphi)}{|\boldsymbol{\Psi}'(\varphi)|} , \quad ' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} .$$

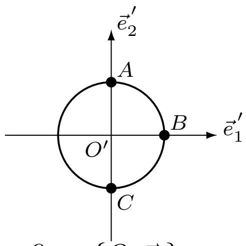
$\boxed{\textbf{04}}$ Il vincolo sia liscio e il punto fermo per $t = 0$. Allora durante il moto

a $\ddot{\varphi}$ si mantiene costante.
b $\ddot{\varphi}$ si mantiene positivo almeno in un intervallo $(0, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|,$$

e sia $\boldsymbol{v} \neq 0$.
Si assumano prescritte le condizioni iniziali e quindi determinato univocamente il moto $\boldsymbol{X}$.
a Il moto in genere non coincide con quello che si avrebbe con vincolo liscio.
b Il moto coincide con quello che si avrebbe con vincolo liscio perché la forza applicata è tangente.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Il vincolo sia liscio. Allora:
a Per tutti i moti $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$.
b Esistono infiniti moti per cui $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_3 \neq 0$.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un corpo rigido piano di massa $4M$ è stato ottenuto saldando a un disco omogeneo di raggio R e massa M tre elementi, ciascuno di massa M, nei punti A, B, e C riportati in figura. In figura sono rapprentati il corpo e il riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i^{\,\prime}\}$.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ con O' vincolato a scorrere sull'asse fisso 1 e l'asse tre solidale vincolato a mantenersi costantemente parallelo all'omologo asse tre fisso.
$\boxed{\mathbf{07}}$ Quanto vale il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse 1 del riferimento solidale?
a $\frac{9}{4}MR^2$
b $\frac{1}{6}MR^2$
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Quanto vale il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse solidale parallelo all'asse 3 e passante per il centro di massa?
a $\frac{13}{4}MR^2$
b $\frac{15}{4}MR^2$
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Posto $\overrightarrow{OO'} = q\vec{e}_1$ e detta φ l'anomalia associata all'angolo di primo lato l'asse 1 fisso, secondo lato l'asse 1 solidale e vertice O', si determinino

le coordinate c_i' del centro di istantanea rotazione rispetto al riferimento solidale:
a $c_1' = (\dot{q}/\dot{\varphi})\cos\varphi$, $c_2' = -(\dot{q}/\dot{\varphi})\sin\varphi$, $c_3' = 0$
b $c_1' = (\dot{q}/\dot{\varphi})\sin\varphi$, $c_2' = (\dot{q}/\dot{\varphi})\cos\varphi$, $c_3' = 0$
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Dire quali dei seguenti vincoli per due punti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{u}_1 + z_2\boldsymbol{u}_2 + z_3\boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{u}_1 + z_5\boldsymbol{u}_2 + z_6\boldsymbol{u}_3\,,$$

sono olonomi regolari nell'aperto $A \subset \boldsymbol{R}^6$ indicato.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Qui $A = \boldsymbol{R}^6$.
a

$$z_3 + (z_1^2 + z_2^2)^2 = 0\,, \quad z_6 + (z_4^2 + z_5^2)^4 = 0\,.$$

b

$$z_1^4 - 3z_3^2 = 0\,, \quad (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 - R^2 = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Qui $A = \boldsymbol{R}^6$.
a

$$z_1 + z_5 = 0\,, \quad z_2 - 2\sqrt{|z_4|} = 0\,, \quad z_3 - 2z_6 = 0\,.$$

b

$$z_1 - 2z_4 = 0\,, \quad e^{(2z_4 - z_1)^3}\operatorname{arctg} z_3 - \pi = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Qui $A = \{z_2 > z_3\}$.
a

$$z_1 - \sqrt[4]{z_2 - z_3} = 0\,, \quad z_4 - \cos(z_2) = 0\,.$$

b

$$z_1^2 + z_2^2 - (z_4^2 + z_5^2 + z_6^2) = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie regolare S. Il vincolo sia liscio.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata conservativa $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, di potenziale $U(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$.
Denotiamo con $\boldsymbol{\nu}$ la normale alla superficie.
$\boxed{\mathbf{13}}$ L'energia meccanica $T - U$:
a Se S è un compatto deve mantenersi limitata su ciascun moto.
b Esistono sia casi in cui si conserva che casi in cui non si conserva.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Supponiamo che

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \quad \text{sia parallela a} \quad \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})\,, \quad \text{per ogni } \boldsymbol{x} \in S.$$

Allora:
a Tutti i punti di S sono di equilibrio.
b È impossibile che questo si verifichi.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che la traiettoria di $\boldsymbol{X}$ sia data da una curva regolare

$$\{\boldsymbol{\psi}(s) \mid s \in I\} \subset S\,,$$

con s ascissa curvilinea e terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ (assumiamo che la curvatura k sia positiva). Allora:
a Si deve avere necessariamente $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{\nu}$.
b La velocità soddisfa $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

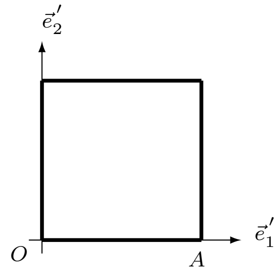
I.6 Un corpo rigido di massa M a simmetria giroscopica è soggetto al solo peso ed è vincolato in modo ideale a muoversi mantenendo fisso rispetto all'osservatore terrestre un punto del suo asse diverso dal centro di massa. Si considera un riferimento fisso con asse tre verticale ascendente e origine nel punto fisso e un riferimento solidale con medesima origine e asse tre coincidente con l'asse di simmetria del giroscopio.
$\boxed{\mathbf{16}}$ Si individui un integrale primo del moto.
a L'energia meccanica totale.
b L'energia cinetica.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{17}}$ Cosa si può dire del moto qualunque sia il dato iniziale?
a È rotatorio.
b È una precessione.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{18}}$ Il momento angolare è una costante del moto?
a Sì.
b No, ma lo sono le sue proiezioni sugli assi 3 fisso e solidale.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 00/12/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 00/12/2022

I.1 Un sistema olonomo a vincoli regolari e lisci è costituito da una lamina quadrata omogenea di massa M e lato $2L$ e da un elemento di massa M. In figura è rapprentata la lamina e il riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$. Si nota che $\overrightarrow{OA} = 2L\vec{e}_1^{\,\prime}$.



Il riferimento terrestre $\{O, \vec{e}_i\}$ ha asse 3 verticale ascendente. La lamina si muove mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso. L'elemento, la cui posizione è indicata con X, è vincolato a muoversi sull'asse 1 fisso.
La sollecitazione attiva è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante k agente tra i punti X e A.
Per descrivere il moto del sistema rispetto al riferimento terrestre si usino come coordinate lagrangiane l'anomalia φ di primo e secondo lato gli assi 1 fisso e solidale orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3 e l'ascissa q definita dalla relazione $\overrightarrow{OX} = q\vec{e}_1$.
$\boxed{\textbf{01}}$ Detto C il centro di massa della lamina quadrata, si ha
a $\overrightarrow{OC} = L(\cos\varphi - \sin\varphi)\vec{e}_1 + L(\cos\varphi + \sin\varphi)\vec{e}_2$.
b $\overrightarrow{OC} = \frac{L}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi)\vec{e}_1 + \frac{L}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi)\vec{e}_2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ Quanto vale il momento d'inerzia della lamina quadrata rispetto all'asse coordinato 1 del riferimento solidale in figura?
a $\frac{1}{6}ML^2$.
b $\frac{4}{3}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ Quanto vale il prodotto d'inerzia della lamina quadrata relativo agli assi solidali 1 e 2?
a $-ML^2$.
b $-\frac{1}{4}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{04}}$ Quanto vale il momento angolare $\vec{L}_O$?
a $\frac{4}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
b $\frac{8}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3 - ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_1$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{05}}$ Cosa si può dire a proposito della sollecitazione esplicata dal vincolo sulla lamina quadrata in corrispondenza di un qualsiasi moto del sistema?
a $f_3^{\text{v}} = 0$.
b $M_{O,3}^{\text{v}} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{06}}$ Quanto vale l'energia cinetica del sistema?
a $\frac{4}{3}ML^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}^2$.
b $\frac{8}{3}ML^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}\dot{\varphi}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{07}}$ Quanto vale l'energia potenziale della sollecitazione conservativa agente sul sistema?
a $\frac{1}{2}kq^2 - 2kLq\cos\varphi$.
b $\frac{1}{2}kq^2 - 2kL^2\cos\varphi$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Quante sono le configurazioni di equilibrio distinte a meno di ripetizioni periodiche?
a 3.
b 2.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ La configurazione $q = 0$ e $\varphi = \pi/2$ è
a di equilibrio stabile.
b di equilibrio instabile.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{10}}$ Se il sistema viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = -2L$ e $\varphi = \pi$, il momento totale della sollecitazione agente sulla lamina risulta costantemente uguale a
a $+MgL\vec{e}_1 + MgL\vec{e}_2$.
b $-MgL\vec{e}_1 + MgL\vec{e}_2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{11}}$ Si consideri il sistema costituito dalla sola lamina. Si scelgano come coordinate locali

$$x_{1O}\,, x_{2O}\,, x_{3O}\,, x_{1Z}\,, x_{2Z}\,, x_{1A}\,,$$

ove Z è il punto solidale di coordinate solidali $(0,0,R)$ nel sistema solidale assegnato (ossia un punto sull'asse ortogonale in O al piano della lamina). Allora i vincoli regolari sulla lamina sono esprimibili da:
a

$$x_{1O} = 0\,, \quad x_{2O} = 0\,, \quad x_{3O} = 0\,, \quad x_{1O} - x_{1Z} = 0\,, \quad x_{2O} - x_{2Z} = 0\,.$$

b

$$x_{1O} = 0\,, \quad x_{2O} = 0\,, \quad x_{3O} = 0\,, \quad x_{1O} - x_{1Z} = 0\,, \quad x_{3A} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 00/12/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 00/12/2022

I.1 Una circonferenza materiale γ di raggio R, centro G e massa m è vincolata a muoversi giacendo sul piano verticale $x_3 = 0$, ove $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ è il sistema di riferimento fisso con coordinate x_h. Inoltre il punto medio Q del raggio $\overrightarrow{GA}$ ove A è un punto di γ (solidale con essa) è fisso e coincidente con $\boldsymbol{X}_O$. Si noti che Q è solidale con la circonferenza, la quale perciò ruota intorno all'asse x_3. Denotiamo con $(\boldsymbol{X}_Q, (\boldsymbol{u}_h))$ il sistema di riferimento solidale a γ con $\boldsymbol{u}_1 = 2\overrightarrow{QG}/R$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$, I momenti I_{hk} sono quelli relativi a questo sistema di riferimento solidale.
Un punto materiale $(\boldsymbol{X}_P, M)$ è vincolato a muoversi su γ.
Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_1$; nel punto A è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GA}\,,$$

con $k > 0$ costante assegnata.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi/2, 3\pi/2) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}}(\theta) = \frac{R}{2}(\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2)\,,$$
$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = \frac{R}{2}(\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2) + R(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2)\,.$$

$\boxed{\mathbf{01}}$ I momenti d'inerzia principali della circonferenza γ in Q sono:
a
$$\frac{mR^2}{2}\,,\quad \frac{mR^2}{2}\,,\quad mR^2\,.$$
b
$$\frac{7mR^2}{4}\,,\quad \frac{3mR^2}{4}\,,\quad mR^2\,.$$
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Il momento d'inerzia della circonferenza rispetto all'asse x_1 è:
a $I_{11}(\cos\theta)^2 + I_{22}(\sin\theta)^2$.
b $I_{11}(\sin\theta)^2 + I_{22}(\cos\theta)^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ L'energia cinetica della circonferenza è:
a
$$\frac{I_{33}}{2}\dot\theta^2 + \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2\,.$$
b
$$\frac{I_{33}}{2}\dot\theta^2\,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{04}}$ L'energia cinetica del punto materiale è:

a
$$MR^2\Big(\frac{\dot\theta^2}{8}+\frac{\dot\varphi^2}{2}\Big)\,.$$
b
$$MR^2\Big(\frac{\dot\theta^2}{8}+\frac{\dot\varphi^2}{2}+\frac{\dot\theta\dot\varphi}{2}\cos(\varphi-\theta)\Big)\,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{05}}$ Le componenti lagrangiane della forza peso sono:

a
$$Q_\varphi^{\mathrm{peso}}=MgR\sin\varphi\,,\qquad Q_\theta^{\mathrm{peso}}=(m+M)g\frac{R}{2}\sin\theta\,.$$
b
$$Q_\varphi^{\mathrm{peso}}=mgR\sin\varphi\,,\qquad Q_\theta^{\mathrm{peso}}=(m+M)gR\sin\theta\,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{06}}$ Le componenti lagrangiane della forza $\boldsymbol{F}_A$ sono:

a
$$Q_\varphi^A=-\frac{kR^2}{2}\,,\qquad Q_\theta^A=\frac{kR^2}{2}\,.$$
b
$$Q_\varphi^A=0\,,\qquad Q_\theta^A=\frac{kR^2}{2}\,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{07}}$ Il momento angolare $\boldsymbol{L}_G^\gamma$ della circonferenza, rispetto al suo centro G, vale:

a
$$I_{33}\dot\theta\boldsymbol{e}_3\,.$$
b
$$I_{33}\dot\theta\boldsymbol{e}_3+m\boldsymbol{X}_G\times\boldsymbol{v}_G\,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{08}}$ Si assuma $kR=(m+M)g$. Le posizioni di equilibrio del sistema (a meno di ripetizioni periodiche) sono in numero di

a 1.

b 2.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{09}}$ La terza equazione di Eulero (nel polo Q) della circonferenza materiale si scrive come
$$I_{33}\ddot\theta=M_3\,.$$
Il momento delle forze esterne M_3

a Contiene solo il momento di $\boldsymbol{F}_A$ e del peso.

b Contiene anche il momento (non nullo) di alcune forze vincolari.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{10}}$ Si consideri il sistema costituito dalla sola circonferenza γ. Si scelgano come coordinate locali

$$x_{1Q}\,, x_{2Q}\,, x_{3Q}\,, x_{1Z}\,, x_{2Z}\,, x_{1A}\,,$$

ove Z è il punto solidale di coordinate solidali $(0{,}0, R)$ nel sistema solidale assegnato (ossia un punto sull'asse ortogonale in Q al piano della circonferenza). Allora i vincoli regolari sulla circonferenza sono esprimibili da:

a

$$x_{1Q} = 0\,, \quad x_{2Q} = 0\,, \quad x_{3Q} = 0\,, \quad x_{1Q} - x_{1Z} = 0\,, \quad x_{2Q} - x_{2Z} = 0\,.$$

b

$$x_{1Q} = 0\,, \quad x_{2Q} = 0\,, \quad x_{3Q} = 0\,, \quad x_{1Q} - x_{1Z} = 0\,, \quad x_{3A} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{11}}$ Nel sistema assegnato di circonferenza e punto i vincoli sono fissi o mobili?

a Sono mobili, ma solo nel sistema fisso.
b Sono fissi.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 26/01/2023

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 26/01/2023

I.1 Un sistema olonomo a vincoli regolari e lisci è costituito da un corpo rigido C e un elemento materiale P dato da $(\boldsymbol{X}_P, m)$. Il corpo rigido C è costituito da una lamina quadrata $EFHK$ omogenea, con lato L e massa M, cui è fissato rigidamente un elemento materiale di massa M nel vertice E.

Il corpo C è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$ (le x_i indicano le coordinate nel sistema di riferimento fisso). Inoltre il vertice H, che è opposto a E, è vincolato nell'origine O del sistema di riferimento fisso.

L'elemento P è vincolato ad appartenere all'asse fisso x_2.

La sollecitazione direttamente applicata è costituita dal peso diretto come $-\boldsymbol{e}_2$ e dalle forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_P = -k(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_E)\,, \qquad \text{applicata in } P,$$
$$\boldsymbol{F}_E = -k(\boldsymbol{X}_E - \boldsymbol{X}_P)\,, \qquad \text{applicata a } C \text{ nel vertice } E.$$

Qui $k > 0$ è una costante assegnata.
Si usi il sistema di riferimento solidale a C dato da $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, con

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{HE}}{\sqrt{2}L}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3.$$

In questo sistema le coordinate dei vertici della lamina quadrata sono

$$E : (\sqrt{2}L,0,0); \quad F : \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}L, -\frac{\sqrt{2}}{2}L,0\Big);$$
$$H : (0,0,0); \quad K : \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}L, \frac{\sqrt{2}}{2}L,0\Big).$$

Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, y) \in (-\pi, \pi) \times \boldsymbol{R}$ in modo che

$$\boldsymbol{u}_1 = \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(y) = y\boldsymbol{e}_2.$$

01 Quali sono le coordinate del centro di massa del corpo C rispetto al riferimento solidale?
a $(0, L,0)$.
b $(\frac{3}{4}\sqrt{2}L,0,0)$.
c Nessuna delle precedenti.
02 Quanto vale il momento d'inerzia del corpo C rispetto all'asse 3 solidale?
a $\frac{8}{3}ML^2$.
b $-\frac{31}{12}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
03 Quanto vale il prodotto d'inerzia del corpo C relativo agli assi solidali 1 e 2?
a $\frac{7}{12}ML^2$.
b $-\frac{7}{12}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
04 Quanto vale il momento angolare del corpo C usando come polo di riduzione l'origine O?
a $\frac{8}{3}ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$.
b $\frac{8}{3}ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 - \frac{7}{12}ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_1$.
c Nessuna delle precedenti.
05 Quanto vale la componente lungo $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare agente sul corpo C in corrispondenza di un generico moto del sistema?
a $\frac{8}{3}ML^2\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$.
b $\frac{8}{3}ML^2\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 + 2MgL\boldsymbol{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.
06 Quanto vale il potenziale lagrangiano delle forze direttamente applicate a C?
a

$$U_C^{\mathrm{L}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}MgL\sin\varphi - \frac{k}{2}[2L^2 + y^2 - 2\sqrt{2}Ly\sin\varphi].$$

b Non esiste.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{07}}$ Le equazioni di Lagrange del sistema sono

$$I_{33}^{O}\ddot{\varphi} + \frac{3\sqrt{2}}{2}MgL\cos\varphi - k\sqrt{2}Ly\cos\varphi = 0\,,$$
$$m\ddot{y} + ky - k\sqrt{2}L\sin\varphi + mg = 0\,.$$

Sono possibili moti diversi dalla quiete in cui
a y è costante, ma φ non lo è.
b φ è costante, ma y non lo è.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Quanto vale la forza vincolare agente sull'elemento P per un generico moto del sistema?
a $-\sqrt{2}kL\cos\varphi\boldsymbol{e}_1$.
b 0.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Quale delle seguenti quantità si conserva lungo ciascun moto?
a L'energia meccanica.
b Il momento angolare di C di polo O.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Quale delle segenti affermazioni è vera?
a Ciascun moto $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ è limitato, ma non esiste una limitazione che valga per tutti i moti.
b Esiste una costante che limita tutti i moti $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Il numero delle posizioni di equilibrio varia secondo la scelta dei parametri. Al massimo esse sono
a 2.
b Un numero finito maggiore di 2.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ La posizione di equilibrio con $\varphi = -\pi/2$, $y = -\sqrt{2}L - mg/k$ è
a stabile per ogni scelta dei parametri.
b instabile per ogni scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{13}}$ La posizione di equilibrio con $\varphi = \pi/2$, $y = \sqrt{2}L - mg/k$ è
a stabile per ogni scelta dei parametri.
b instabile per ogni scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ È vero che se $(\varphi(t), y(t))$, $t \in \boldsymbol{R}$, è una soluzione delle equazioni di Lagrange, allora anche $(\varphi(t+T), y(t+T))$, $t \in \boldsymbol{R}$, lo è? (Qui $T > 0$ è una costante fissata.)
a Se e solo se la soluzione è periodica e T è un periodo.
b Sì, per ogni soluzione e per ogni $T > 0$.

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{15}}$ Si assumano come coordinate locali del sistema

$$x_{1H}\,, x_{2H}\,, x_{3H}\,, x_{1E}\,, x_{3E}\,, x_{3F}\,, x_{1P}\,, x_{2P}\,, x_{3P}\,.$$

Allora i vincoli olonomi regolari assegnati sul sistema in termini delle coordinate locali sono dati da
a

$$x_{1H}^2 + x_{2H}^2 + x_{3H}^2 = 0\,, x_{1E} - \sqrt{2}L\cos\varphi = 0\,, x_{3E} = 0\,,$$
$$x_{3F} = 0\,, x_{1P} = 0\,, x_{2P} - y = 0\,, x_{3P} = 0\,.$$

b

$$x_{1H} = 0\,, x_{2H} = 0\,, x_{3H} = 0\,, x_{3E} = 0\,, x_{3F} = 0\,, x_{1P} = 0\,, x_{3P} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 20/02/2023

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 20/02/2023

I.1 Un sistema olonomo a vincoli regolari e lisci è costituito da un corpo rigido C e un elemento materiale P dato da $(\boldsymbol{X}_P, m)$. Il corpo rigido C è costituito da un disco omogeneo, con raggio R e massa M.
Il corpo C è vincolato a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1 (le x_i indicano le coordinate nel sistema di riferimento fisso). Inoltre il punto A è vincolato nell'origine O del sistema di riferimento fisso.
L'elemento P è vincolato ad appartenere alla circonferenza fissa

$$x_2^2 + x_3^2 = R^2\,, \qquad x_1 = 0\,.$$

Nel sistema di riferimento solidale a C, $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_H, (\boldsymbol{u}_h))$, ove H è il centro di C, si ha

$$C = \{y \in \boldsymbol{R}^3 \mid y_1^2 + y_2^2 \le R^2\,, y_3 = 0\}\,.$$

ossia $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale a C. In particolare per un D opportuno solidale a C, appartenente alla circonferenza bordo del disco,

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{HB}}{R}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{HD}}{R}\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2\,.$$

Le coordinate di D in $\mathcal{S}$ sono quindi $(0, R, 0)$.
La sollecitazione direttamente applicata è costituita dal peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$, dalle forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_P = -k(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_D)\,, \qquad \text{applicata in } P,$$
$$\boldsymbol{F}_D = -k(\boldsymbol{X}_D - \boldsymbol{X}_P)\,, \qquad \text{applicata a } C \text{ nel punto } D,$$

e da

$$\boldsymbol{F}^2_D = \mu \boldsymbol{u}_3\,, \qquad \text{applicata a } C \text{ nel punto } D.$$

Qui $k > 0$, $\mu \in \boldsymbol{R}$ sono costanti assegnate.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ in modo che

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_D(\theta) = R\boldsymbol{e}_1 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_2 + R\sin\theta\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_P(\varphi) = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_3\,.$$

01 Qual è il momento d'inerzia del corpo C rispetto all'asse solidale 1?
a $\frac{MR^2}{4}$.
b $\frac{MR^2}{8}$.
c Nessuna delle precedenti.
02 Quanto vale il momento d'inerzia del corpo C rispetto all'asse solidale passante per A e parallelo all'asse 3 solidale?
a $\frac{3}{2}MR^2$.
b $\frac{2}{3}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
03 Quanto vale il prodotto d'inerzia del corpo C relativo agli assi solidali 1 e 3?
a $\frac{2}{5}MR^2$.
b $-\frac{2}{5}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
04 Quanto vale il momento angolare del corpo C usando come polo di riduzione l'origine O?
a $\frac{5}{4}MR^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1$.
b $\frac{MR^2}{4}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1$.
c Nessuna delle precedenti.
05 Quali sono le componenti lagrangiane della forza $\boldsymbol{F}^2_D$?
a

$$Q^2_\varphi = 0\,, \qquad Q^2_\theta = \mu R\,.$$

b

$$Q^2_\varphi = 0\,, \qquad Q^2_\theta = \mu R + \theta\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
06 Quale è il potenziale lagrangiano complessivo delle sollecitazioni peso e elastica?

a
$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = -mgR\sin\varphi - \frac{kR^2}{2}[3 - 2\sin(\varphi-\theta)]\,.$$
b
$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = -mgR\sin\varphi - \frac{kR^2}{2}[3 - 2\cos(\varphi-\theta)]\,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{07}}$ Quale delle seguenti quantità si conserva lungo ciascun moto, comunque siano scelti i parametri del problema?

a L'energia cinetica dell'elemento materiale P.

b Il momento angolare di C di polo O.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{08}}$ Quanto vale l'energia cinetica del sistema?

a
$$\frac{MR^2}{8}\dot\theta^2 + \frac{mR^2}{2}\dot\varphi^2\,.$$
b
$$\frac{MR^2}{8}\dot\theta^2 + \frac{mR^2}{2}\dot\varphi^2 + 2\Big(\frac{MR^2}{8} + \frac{mR^2}{2}\Big)\dot\varphi\dot\theta\,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{09}}$ Sia $\mu > 0$. Allora

a Sicuramente non esistono posizioni di equilibrio.

b Esistono posizioni di equilibrio per opportuni valori di μ.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{10}}$ Sia $\mu = 0$, ossia in sostanza la $\boldsymbol{F}^2_D$ sia assente. Allora

a Il numero delle posizioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane è indipendente dalla scelta dei restanti parametri.

b Le posizioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane sono in numero infinito.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{11}}$ Sia $\mu = 0$, ossia in sostanza la $\boldsymbol{F}^2_D$ sia assente. La posizione di equilibrio con $\varphi = -\pi/2$, $\theta = -\pi/2$ è

a stabile per ogni scelta dei parametri.

b instabile per ogni scelta dei parametri.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{12}}$ Sia $\mu = 0$, ossia in sostanza la $\boldsymbol{F}^2_D$ sia assente. La posizione di equilibrio con $\varphi = -\pi/2$, $\theta = \pi/2$ è

a stabile per ogni scelta dei parametri.

b instabile per ogni scelta dei parametri.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{13}}$ Quale delle seguenti parametrizzazioni lagrangiane alternative per il sistema è ammissibile?

a Per $(z,s) \in (-\sqrt[3]{R}, \sqrt[3]{R}) \times (-\sqrt[3]{R}, \sqrt[3]{R})$:
$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_P(z) = z^3\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{R^2 - z^6}\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_D(s) = R\boldsymbol{e}_1 + s^3\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{R^2 - s^6}\boldsymbol{e}_3\,.$$

b Per $(z, s) \in (-R, R) \times (-R, R)$:

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_P(z) = z\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{R^2 - z^2}\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_D(s) = R\boldsymbol{e}_1 + s\boldsymbol{e}_2 - \sqrt{R^2 - s^2}\boldsymbol{e}_3\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Sia $\mu = 0$, ossia in sostanza la $\boldsymbol{F}^2_D$ sia assente. Quanto vale la forza vincolare agente sull'elemento in $\boldsymbol{X}_P$ se il sistema viene posto nella configurazione di equilibrio $\varphi = \pi/2$ e $\theta = \pi/2$ con atto di moto nullo?
a $mg\boldsymbol{e}_3 - kR\boldsymbol{e}_1$.
b 0.
c Nessuna delle precedenti.

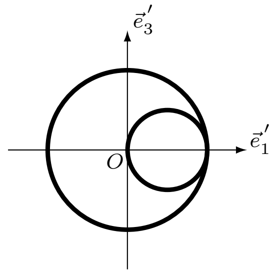
$\boxed{\mathbf{15}}$ Sia $\mu = 0$, ossia in sostanza la $\boldsymbol{F}^2_D$ sia assente. Quanto vale la componente relativa all'asse 1 del riferimento fisso del momento totale della sollecitazione vincolare agente sul corpo C calcolato usando come polo O se il sistema viene posto nella configurazione di equilibrio $\varphi = \pi/2$ e $\theta = \pi/2$ con atto di moto nullo?
a $mgR\boldsymbol{e}_3 - kR^2\boldsymbol{e}_1$.
b 0.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 24/03/2023

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 24/03/2023

I.1 Un sistema olonomo a vincoli perfetti è costituito da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$, e da una lamina rigida omogenea di uguale massa M ottenuta praticando un foro circolare di raggio $R/2$ a un disco di raggio R in modo che la distanza tra il centro del foro e quello del disco sia $R/2$. Il riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ viene scelto con O nel centro del disco, il semiasse positivo dell'asse 1 passante per il centro del foro e l'asse 2 ortogonale al disco.



Il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ ha asse 3 verticale ascendente.
La lamina si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 3 mediante un vincolo di cerniera ideale. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a muoversi sulla circonferenza di raggio R che costituisce il bordo del disco.
La sollecitazione attiva agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica agente sull'elemento $\boldsymbol{X}$ di centro il punto fisso A tale che

$$\overrightarrow{OA} = R\vec{e}_2 \,.$$

Come coordinate lagrangiane si usino l'anomalia φ individuata dagli assi 1 fisso e solidale orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3 e l'anomalia θ tale che

$$\overrightarrow{O\boldsymbol{X}} = R\cos\theta\vec{e}_1^{\,\prime} + R\sin\theta\vec{e}_3^{\,\prime} \,,$$

ovvero l'anomalia di primo lato il semiasse positivo solidale 1, secondo lato il vettore $\overrightarrow{O\boldsymbol{X}}$ e orientata in verso antiorario rispetto a $-\vec{e}_2^{\,\prime}$. Si assuma $(\varphi, \theta) \in (-\pi/4, 7\pi/4) \times (0, 2\pi)$.

$\boxed{\textbf{01}}$ Quanto valgono le coordinate del centro di massa della lamina rispetto al riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i^{\,\prime}\}$?
a $\big(-\frac{1}{6}R, 0, 0\big)$.
b $\big(-\frac{1}{6}R, 0, +\frac{1}{6}R\big)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ Quanto vale il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse coordinato 1 del riferimento solidale?
a $\frac{15}{48}MR^2$.
b $\frac{1}{6}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ Quanto vale il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse coordinato 2 del riferimento solidale?
a $\frac{11}{48}MR^2$.
b $\frac{15}{48}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{04}}$ Quanto vale il prodotto d'inerzia della lamina rispetto agli assi coordinati 1 e 3 del riferimento solidale?
a $-\frac{1}{48}MR^2$.
b $\frac{1}{48}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{05}}$ Quanto vale il momento angolare della lamina calcolato usando come polo O?
a

$$\frac{1}{6}MR^2\dot{\varphi}\vec{e}_1^{\,\prime} + \frac{11}{48}MR^2\dot{\varphi}\vec{e}_3^{\,\prime}\,.$$

b

$$\frac{11}{48}MR^2\dot{\varphi}\vec{e}_3^{\,\prime}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{06}}$ Quali sono le componenti del vettore $\overrightarrow{O\boldsymbol{X}}$ rispetto al riferimento fisso?
a

$$(R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)\,.$$

b

$$(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{07}}$ Quanto vale l'energia cinetica in forma lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$?
a

$$\frac{1}{2}MR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta)\,.$$

b

$$\frac{1}{2}MR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Quanto vale il potenziale lagrangiano della forza elastica?
a

$$\frac{1}{2}kR^2\sin\varphi - kR^2\sin\theta\,.$$

b

$$kR^2\cos\theta\sin\varphi\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ Quanto vale la funzione lagrangiana del sistema?
a

$$\frac{1}{2}MR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta) + \frac{11}{96}MR^2\dot{\varphi}^2 + kR^2\cos\theta\sin\varphi\,.$$

b

$$\frac{1}{2}MR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta) + \frac{11}{96}MR^2\dot{\varphi}^2 + kR^2\cos\theta\sin\varphi - MgR\sin\theta\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

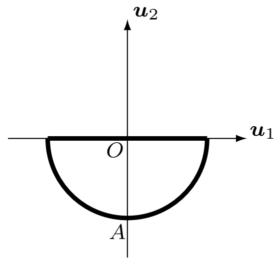
$\boxed{\mathbf{10}}$ Si dica quali delle seguenti quantità è una costante del moto:
a L'energia cinetica dell'elemento materiale.
b L'energia cinetica complessiva del sistema.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio della parametrizzazione lagrangiana?
a 4.
b 8.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri del sistema (M, R, k)?
a $(\varphi, \theta) = (0, \pi/2)$.
b $(\varphi, \theta) = (\pi/2, \pi/2)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio stabile per qualunque valore dei parametri del sistema (M, R, k)?
a $(\varphi, \theta) = (0{,}3\pi/2)$.
b $(\varphi, \theta) = (\pi/2, \pi/2)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Dire quale delle seguenti parametrizzazioni lagrangiane alternative per l'elemento materiale è ammissibile.
a
$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, s) = s^2 \vec{e}_1^{\,\prime} + \sqrt[4]{R^2 - s^4}\,\vec{e}_3^{\,\prime}\,, \qquad s \in (0, \sqrt{R})\,.$$
b
$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, s) = s \vec{e}_1^{\,\prime} + \sqrt{R^2 - s^2}\,\vec{e}_3^{\,\prime}\,, \qquad s \in (-R, R)\,.$$
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Quanto vale la componente 3 relativa al riferimento fisso del momento totale $\vec{M}_O^{\mathrm{v}}$ della sollecitazione vincolare agente sulla lamina per un generico moto del sistema?
a
$$-\frac{1}{12} M R^2 (\ddot{\varphi} \cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi)\,.$$
b 0.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 22/06/2023

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 22/06/2023

I.1
Un sistema olonomo è costituito da un elemento materiale P, $(\boldsymbol{X}_P, M)$, e da una lamina rigida omogenea della stessa massa M a forma di semidisco di raggio R. Il riferimento solidale alla lamina $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ viene scelto come illustrato in figura. Il punto solidale A è tale che $\overrightarrow{OA} = -R\boldsymbol{u}_2$.



Il riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 2 verticale ascendente.
La lamina si muove rispetto al riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 3 mediante un vincolo di cerniera ideale. L'elemento $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a muoversi sull'asse 2 fisso.
La sollecitazione attiva agente sul sistema è costituita dal peso (diretto come $-\boldsymbol{e}_2$) e dalla forza elastica agente tra l'elemento $\boldsymbol{X}_P$ e il punto A solidale alla lamina, data da

$$\boldsymbol{F}_P = -k(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_A)\,, \qquad \boldsymbol{F}_A = -k(\boldsymbol{X}_A - \boldsymbol{X}_P)\,,$$

ove $k > 0$ è una costante.
Come coordinate lagrangiane si usino la coordinata $q \in \boldsymbol{R}$ e l'anomalia $\varphi \in (-\pi/4{,}7\pi/4)$ tali che in coordinate lagrangiane $\boldsymbol{X}_P$ sia dato da $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(q) = q\boldsymbol{e}_2$, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{01}}$ Quanto valgono le coordinate del centro di massa della lamina rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$?
a $\left(0, -\frac{4}{3\pi}R{,}0\right)$.
b $\left(0, -R{,}0\right)$.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{02}}$ Quanto vale il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse coordinato 2 del sistema di riferimento solidale?
a $\frac{1}{3}MR^2$.
b $\frac{1}{4}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Quanto vale il prodotto d'inerzia della lamina rispetto agli assi coordinati 1 e 2 del riferimento solidale?
a $-\frac{1}{8}MR^2$.
b $\frac{1}{8}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Quanto vale il momento angolare della lamina calcolato usando come polo O?
a

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3 \,.$$

b

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{12}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Quanto vale l'energia cinetica in forma lagrangiana della lamina?
a

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 \,.$$

b

$$\frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}^2 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Quanto vale il potenziale lagrangiano della forza elastica?
a

$$-\frac{k}{2}[q^2 + 2Rq\cos\varphi] \,.$$

b

$$-\frac{k}{2}[q^2 - 2Rq\cos\varphi] \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{07}}$ Le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}MR^2\ddot{\varphi} + \frac{4}{3\pi}MRg\sin\varphi - kRq\sin\varphi = 0 \,, \\ M\ddot{q} + Mg + kq + kR\cos\varphi = 0 \,. \end{aligned}$$

Esistono moti in cui q è costante, ma φ non lo è?
a Sì, per qualsiasi scelta dei parametri.
b No, per qualsiasi scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Esistono moti in cui φ è costante, ma q non lo è?

a Sì, per qualsiasi scelta dei parametri.
b No, per qualsiasi scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
09 Il numero delle configurazioni di equilibrio nel campo di variabilità indicato per le coordinate lagrangiane è
a Minore o uguale a 2 per ogni scelta dei parametri.
b Può essere maggiore di 2, ma solo per alcune scelte dei parametri e non per tutte.
c Nessuna delle precedenti.
10 Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio stabile per qualunque scelta dei parametri del sistema?
a
$$(\varphi, q) = \Big(0, -\frac{Mg}{k} - R\Big)\,.$$
b
$$(\varphi, q) = \Big(\pi, -\frac{Mg}{k} + R\Big)\,.$$
c Nessuna delle precedenti.
11 Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio instabile almeno per alcune scelte dei parametri del sistema?
a
$$(\varphi, q) = \Big(0, -\frac{Mg}{k} - R\Big)\,.$$
b
$$(\varphi, q) = \Big(\frac{\pi}{2}, -\frac{Mg}{k} + R\Big)\,.$$
c Nessuna delle precedenti.
12 Quanto vale il momento $\boldsymbol{M}_{\text{vin}}$ rispetto a O della reazione vincolare che agisce sulla lamina durante il generico moto del sistema?
a $MgR\sin\varphi\boldsymbol{e}_3 + kRq\sin\varphi\boldsymbol{e}_2$.
b 0.
c Nessuna delle precedenti.
13 Esistono moti del sistema tali che per $t \to +\infty$
a L'energia meccanica del sistema diviene illimitata.
b La coordinata q diviene illimitata.
c Nessuna delle precedenti.
14 Dire quale delle seguenti parametrizzazioni lagrangiane alternative per l'elemento materiale è ammissibile.
a
$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}(s) = s^2\boldsymbol{e}_2\,, \qquad s \in (0, +\infty)\,.$$
b
$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}(s) = s^3\boldsymbol{e}_2\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Indichiamo con x_i le coordinate nel sistema fisso. Si usino come coordinate locali della lamina le seguenti coordinate cartesiane:

$$x_{1V}\,, x_{2V}\,, x_{3V}\,, x_{1A}\,, x_{3A}\,, x_{3B}\,,$$

ove V è il centro del disco da cui è ritagliata la lamina, e B è uno dei due punti angolosi del bordo della lamina.
Quali dei seguenti vincoli è un vincolo regolare coincidente con quelli assegnati nel problema per la lamina?
a

$$x_{1V} = 0\,, \quad x_{2V} = 0\,, \quad x_{3V} = 0\,, \quad x_{3A} = 0\,, \quad x_{3B} = 0\,.$$

b

$$x_{1V}^2 + x_{2V}^2 + x_{3V}^2 = 0\,, \quad x_{3A} = 0\,, \quad x_{3B} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

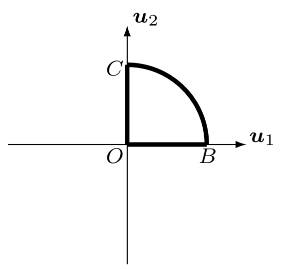
Prova scritta del 24/07/2023

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 24/07/2023

I.1

Un sistema olonomo è costituito da un elemento materiale P, $(\boldsymbol{X}_P, M)$, e da una lamina rigida omogenea della stessa massa M a forma di quarto di disco di raggio $R > 0$. Il riferimento solidale alla lamina $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ viene scelto come illustrato in figura. I punti solidali B e C sono tali che $\overrightarrow{OB} = R\boldsymbol{u}_1$, $\overrightarrow{OC} = R\boldsymbol{u}_2$.



Il riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 2 verticale ascendente.
La lamina si muove rispetto al riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ mantenendo l'asse 2 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 2 mediante un

vincolo di cerniera ideale. L'elemento $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a muoversi sull'asse 2 fisso.
La sollecitazione attiva agente sul sistema è costituita dal peso (diretto come $-\boldsymbol{e}_2$), dalla forza elastica agente tra l'elemento $\boldsymbol{X}_P$ e il punto C solidale alla lamina, data da

$$\boldsymbol{F}_P = -k(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_C)\,, \qquad \boldsymbol{F}_C = -k(\boldsymbol{X}_C - \boldsymbol{X}_P)\,,$$

e dalla forza elastica agente tra il punto fisso $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1$ e il punto B solidale alla lamina, data da

$$\boldsymbol{F}_B = -k(\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A)\,.$$

Qui $k > 0$ è una costante.
Come coordinate lagrangiane si usino la coordinata $q \in \boldsymbol{R}$ e l'anomalia $\varphi \in (-\pi/4, 7\pi/4)$ tali che in coordinate lagrangiane $\boldsymbol{X}_P$ sia dato da $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(q) = q\boldsymbol{e}_2$, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi \boldsymbol{e}_3\,.\\
\boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{01}}$ Quanto valgono le coordinate del centro di massa della lamina rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$?
a $\left(\frac{4}{3\pi}R, \frac{4}{3\pi}R, 0\right)$.
b $\left(0, \frac{4}{3\pi}R, 0\right)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ Il momento d'inerzia I della lamina rispetto all'asse solidale parallelo all'asse coordinato 3 del sistema di riferimento solidale e passante per il centro di massa, soddisfa:
a

$$I < \frac{MR^2}{2}\,.$$

b

$$I > \frac{MR^2}{2}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ Quanto vale il prodotto d'inerzia della lamina rispetto agli assi coordinati 1 e 2 del riferimento solidale?
a $\frac{1}{4\pi}MR^2$.
b $-\frac{1}{2\pi}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{04}}$ Quanto vale il momento angolare della lamina calcolato usando come polo O?

a
$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3 \,.$$
b
$$-\frac{1}{2\pi}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2 \,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{05}}$ Quanto vale l'energia cinetica in forma lagrangiana della lamina?

a
$$\frac{1}{8}MR^2\dot{\varphi}^2 \,.$$
b
$$\frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2\pi}MR^2\dot{\varphi} \,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{06}}$ Quanto vale il potenziale lagrangiano di entrambe le forze elastiche?

a
$$-\frac{k}{2}[q^2 - 2qR - 2R^2\cos\varphi] \,.$$
b
$$-\frac{k}{2}[q^2 - 2Rq\sin\varphi + 3R^2] \,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{07}}$ Le equazioni di Lagrange sono

$$\ddot{\varphi} + \frac{4k}{M}\sin\varphi = 0 \,,$$
$$\ddot{q} + g + \frac{k}{M}q - \frac{kR}{M} = 0 \,.$$

Esistono moti non di quiete per il sistema per cui $\boldsymbol{X}_P$ sia solidale alla lamina?

a Sì, per qualsiasi scelta dei parametri.

b No, per qualsiasi scelta dei parametri.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Esistono moti in cui né φ né q sono costanti, e $\boldsymbol{X}_P$ non tocca mai la lamina?

a Sì, per qualsiasi scelta dei parametri.

b No, per qualsiasi scelta dei parametri.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{09}}$ Il numero delle configurazioni di equilibrio nel campo di variabilità indicato per le coordinate lagrangiane è

a Minore o uguale a 2 per ogni scelta dei parametri.

b Può essere maggiore di 2, ma solo per alcune scelte dei parametri e non per tutte.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio stabile per qualunque scelta dei parametri del sistema?

a
$$(\varphi, q) = \Big(0, -\frac{Mg}{k} - R\Big)\,.$$
b
$$(\varphi, q) = \Big(\pi, -\frac{Mg}{k} + R\Big)\,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio instabile almeno per alcune scelte dei parametri del sistema?

a
$$(\varphi, q) = \Big(0, -\frac{Mg}{k} + R\Big)\,.$$
b
$$(\varphi, q) = \Big(\pi, -\frac{Mg}{k} + R\Big)\,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Quanto vale la forza vincolare esercitata sull'elemento materiale $\boldsymbol{X}_P$ dal vincolo durante il generico moto del sistema?

a $-k(q - R)$.

b 0.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Esistono integrali primi del moto?

a Non per il moto generico.

b Sì, per esempio il seguente:
$$\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + Mgq + \frac{1}{8}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{k}{2}[q^2 - 2Rq - 2R^2\cos\varphi]\,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Nell'unica posizione di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni, le loro frequenze normali sono date da:

a
$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M}}\,.$$
b Se E e U indicano i valori dell'energia e del potenziale lungo il moto
$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{2}{M}(E+U)}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2}{M}(E+U)}\,.$$
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Indichiamo con x_i le coordinate nel sistema fisso. Si usino come coordinate locali della lamina le seguenti coordinate cartesiane:
$$x_{1V}\,, x_{2V}\,, x_{3V}\,, x_{1C}\,, x_{3C}\,, x_{3B}\,,$$

ove V è il centro del disco da cui è ritagliata la lamina.
Quali dei seguenti vincoli è un vincolo regolare coincidente con quelli assegnati nel problema per la lamina?

a

$$x_{1V} = 0\,, \quad x_{2V} = 0\,, \quad x_{3V} = 0\,, \quad x_{3C} = 0\,.$$

b

$$x_{1V}^2 + x_{2V}^2 + x_{3V}^2 = 0\,, \quad x_{3C} = 0\,, \quad x_{1C} = 0\,.$$

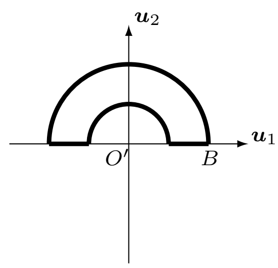
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 21/09/2023

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 21/09/2023

I.1
Un sistema olonomo a vincoli perfetti è costituito da un corpo rigido pesante omogeneo C di massa $M > 0$ a forma di semicorona circolare di raggio esterno $R > 0$ e raggio interno $R/2$. Il riferimento solidale al corpo $(O', (\boldsymbol{u}_i))$ viene scelto come illustrato in figura. Il punto solidale B è tale che $\overrightarrow{O'B} = R\boldsymbol{u}_1$.



Il riferimento fisso terrestre $(O, (\boldsymbol{e}_i))$ ha asse 2 verticale ascendente.
Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_i))$ mantenendo l'asse 2 solidale costantemente sovrapposto all'omologo asse fisso 2 mediante un vincolo di collare cilindrico ideale (nota: quindi O' scorre lungo l'asse 2 fisso).
La sollecitazione attiva agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica di richiamo di centro il punto A tale che $\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_1$ e agente sul punto B solidale al corpo. La forza elastica ha costante $k > 0$.

Come coordinate lagrangiane si usino la coordinata q tale che $\overrightarrow{OO'} = q\boldsymbol{e}_2$ e l'anomalia $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{01}}$ Quanto valgono le coordinate del centro di massa G della lamina rispetto al riferimento solidale $(O', (\boldsymbol{u}_i))$?

a

$$\left(0, \frac{4}{9\pi} R, 0\right) .$$

b

$$\left(0, \frac{14}{9\pi} R, 0\right) .$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{02}}$ Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse coordinato solidale 3?

a

$$\frac{5MR^2}{8} .$$

b

$$\frac{3MR^2}{8} .$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{03}}$ Quanto vale il momento angolare della lamina calcolato usando come polo il centro di massa G?

a

$$\frac{1}{2} MR^2 \dot\varphi \boldsymbol{u}_1 + \frac{5}{8} MR^2 \dot\varphi \boldsymbol{u}_2 .$$

b

$$\frac{5}{16} MR^2 \dot\varphi \boldsymbol{u}_2 .$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{04}}$ Quanto vale il potenziale lagrangiano $U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{el}}$ delle forze elastiche?

a

$$-kq^2 + kR^2 \cos\varphi .$$

b

$$-\frac{1}{2} kq^2 + kR^2 \sin\varphi - kqR .$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{05}}$ Quanto vale l'energia cinetica in forma lagrangiana della lamina?

a

$$\frac{1}{2} M\dot q^2 + \frac{5}{32} MR^2 \dot\varphi^2 .$$

b
$$\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{5}{32}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2\pi}MR^2\dot{q}\dot{\varphi}\,.$$
c Nessuna delle precedenti.
06 Quali sono le equazioni di Lagrange?
a
$$M\ddot{q} + kq + Mg = 0\,; \quad \frac{5}{16}MR^2\ddot{\varphi} - kR^2\cos\varphi = 0\,.$$
b
$$M\ddot{q} + kq\cos\varphi + Mg = 0\,; \quad \frac{5}{16}MR^2\ddot{\varphi} - kR^2\sin\varphi = 0\,.$$
c Nessuna delle precedenti.
07 Esistono moti non di quiete per cui l'origine del sistema fisso O è solidale al corpo rigido?
a Sì, per qualsiasi scelta dei parametri.
b No, per qualsiasi scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
08 Si consideri il moto con dato iniziale $q(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Si ha $q(t) = -Mgt^2/2k$ per ogni $t > 0$.
b Si ha $\varphi(\bar{t}) \in (-\pi/2, 0)$ per qualche $\bar{t} > 0$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio stabile per qualunque valore dei parametri M, R, k del sistema?
a
$$(q, \varphi) = \Big(-\frac{Mg}{k}, \frac{\pi}{2}\Big)\,.$$
b
$$(q, \varphi) = \Big(-\frac{Mg}{k}, 0\Big)\,.$$
c Nessuna delle precedenti.
10 Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio instabile per qualunque valore dei parametri M, R, k del sistema?
a
$$(q, \varphi) = \Big(-\frac{Mg}{k}, -\frac{\pi}{2}\Big)\,.$$
b
$$(q, \varphi) = \Big(-\frac{Mg}{k} + R, \frac{\pi}{2}\Big)\,.$$
c Nessuna delle precedenti.
11 Quanto vale la forza vincolare esercitata sul corpo rigido dal vincolo durante il generico moto del sistema?
a
$$kR(1 + \sin\varphi)\boldsymbol{e}_1\,.$$

b

$$k[R(\sin\varphi - 1)\boldsymbol{e}_1 + R\cos\varphi\boldsymbol{e}_3]\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Quale delle seguenti affermazioni è vera per il momento della reazione vincolare rispetto a G?

a Ha sempre componente nulla lungo $\boldsymbol{e}_1$.

b Ha sempre componente nulla lungo $\boldsymbol{e}_3$.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Nell'unica posizione di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni, le loro frequenze normali sono date da:

a

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}\,, \qquad \omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{5M}}\,.$$

b

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{16k}{5M}}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Quale dei seguenti è un sistema di coordinate lagrangiane (alternativo a quello dato) ammissibile?

a Le coordinate $(q_1, q_2) \in (0,\pi) \times (0,\pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_O(\boldsymbol{q}) = q_1^2\boldsymbol{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_B(\boldsymbol{q}) = R\cos q_2\boldsymbol{e}_1 + q_1^2\boldsymbol{e}_2 + R\sin q_2\boldsymbol{e}_3\,.$$

b Le coordinate $(q_1, q_2) \in \boldsymbol{R} \times (0,\pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_O(\boldsymbol{q}) = \operatorname{arctg} q_1\boldsymbol{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_B(\boldsymbol{q}) = R\cos q_2\boldsymbol{e}_1 + R\sin q_2\boldsymbol{e}_3\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Indichiamo con x_i le coordinate nel sistema fisso. Si consideri il seguente insieme di coordinate:

$$x_{1O'}\,, x_{2O'}\,, x_{3O'}\,, x_{1B}\,, x_{2B}\,, x_{3B}\,.$$

Si possono esprimere in tali coordinate i vincoli assegnati nel problema per la lamina nella forma di un vincolo olonomo regolare?

a No, per nessun valore dei parametri del problema.

b Sì, ma solo se il peso è assente.

c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 18/10/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 18/10/2022

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 x_2 \,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,.$$

Il punto è soggetto alla forza costante

$$\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{e}_1 \,.$$

Qui α, $\beta > 0$ sono costanti.
$\boxed{\mathbf{01}}$ Consideriamo il caso di attrito statico $|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| \leq \mu_s |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}|$, $\mu_s > 0$ costante. Allora l'insieme delle posizioni di equilibrio:
a Per ogni α fissato, può essere reso grande ad arbitrio prendendo β opportuno.
b Comprende in ogni caso almeno un asse.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Consideriamo il caso di attrito dinamico $|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| = \mu |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}|$, $\mu > 0$ costante, ove si suppone $\boldsymbol{v} \neq 0$. Allora:
a Sono possibili moti rettilinei su cui si conserva l'energia meccanica.
b Si ha nelle equazioni di moto $|\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| = |\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}|$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Consideriamo il caso di vincolo liscio. Allora:
a Tutti i moti sono limitati.
b Esistono moti per cui l'energia meccanica non si conserva.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato $2L$ è vincolata a mantenere il lato AB parallelo all'asse x_1 del sistema di riferimento fisso, ossia più precisamente

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Sulla lamina agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_C = \alpha \overrightarrow{AC} \times \boldsymbol{e}_1 \,,$$

applicata nel vertice C opposto a A; qui $\alpha > 0$ è costante.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Quale è il numero m di vincoli scalari necessario a rappresentare il vincolo sopra descritto per la lamina?
a $m = 1$.
b $m = 2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ La forza $\boldsymbol{F}_C$:
a È costante.

b È solidale alla lamina.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Nel sistema di riferimento fisso vale la conservazione dell'energia?
a Sì se assumiamo l'ipotesi dei lavori virtuali.
b No.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla circonferenza mobile di raggio $R > 0$

$$\boldsymbol{\psi}(s,t) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3(t)\,, \qquad s \in (0,2\pi R)\,,$$

ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante.
Sul punto non sono applicate sollecitazioni dirette. Si usi s come coordinata lagrangiana; $\boldsymbol{X}_O$ indica l'origine del sistema di riferimento fisso, centro della circonferenza e introduciamo il sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$.
$\boxed{\mathbf{07}}$ Sotto quali condizioni la forza di Coriolis può essere trascurata nelle equazioni di moto scritte in $\mathcal{S}$?
a Vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
b Il vincolo è scabro e il coefficiente d'attrito è molto grande.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Il vincolo sia liscio. Allora il potenziale lagrangiano nel sistema mobile $\mathcal{S}$:
a È dato da

$$U^{\mathrm{L}} = m\alpha^2\frac{R^2}{2}\Big(\cos\frac{s}{R}\Big)^2\,.$$

b Non è definito.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Il vincolo soddisfi la legge di attrito statico di Coulomb-Morin con coefficiente di attrito $\mu_s > 0$. Allora:
a Se μ_s è troppo piccolo non esistono posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$.
b L'insieme delle posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ dipende da α.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si consideri un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ che si muove vincolato alla curva regolare γ intersezione delle due superfici

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0\,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0\,.$$

Si assuma che su γ i due vettori ∇f_1 e ∇f_2 siano sempre linearmente indipendenti, in modo che per ogni $\boldsymbol{x} \in \gamma$ risulti ben definito il piano

$$\Pi(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla f_1(\boldsymbol{x}), \nabla f_2(\boldsymbol{x}) \rangle .$$

Si assuma che $\boldsymbol{v} \neq 0$ e che la curva abbia curvatura $k > 0$.
$\boxed{\mathbf{10}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ soddisfa
a $\boldsymbol{a}(t)$ ha una componente non nulla parallela a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$.
b $\boldsymbol{a}(t)$ è ortogonale a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Sul punto materiale vincolato a γ agisce la forza $\boldsymbol{F} = \lambda \nabla f_1$, con $\lambda > 0$ costante.
a Allora il vincolo non può essere liscio.
b La $\boldsymbol{F}$ compie lavoro nullo sul moto del punto.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Se sul punto agisce la forza generica $\boldsymbol{F}$ allora:
a Le componenti di $\boldsymbol{F}$ che giacciono su $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$ sono irrilevanti per il moto.
b La reazione vincolare appartiene a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$ nel caso di vincolo liscio, qualunque sia $\boldsymbol{F}$.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x) ,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$, e il suo diagramma di fase con orbite $(x(t), p(t))$.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Supponiamo che per un $t_0 \in \boldsymbol{R}$

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0 \in \boldsymbol{R} , \qquad \lim_{t\to t_0} p(t) = 0 .$$

Allora:
a Si ha che x_0 è di equilibrio.
b I due limiti dati sono incompatibili.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Quale delle seguenti ipotesi implica che esistano orbite limitate?
a Esiste un punto di equilibrio.
b Il potenziale è limitato.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che il potenziale sia

$$U(x) = \alpha e^{-\beta^2 x^2} , \qquad x \in \boldsymbol{R} ,$$

con α, $\beta > 0$ costanti. Allora:
a Il punto $x = 0$ è di equilibrio stabile.
b Il punto $x = 0$ è di equilibrio instabile.

c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido è vincolato a muoversi di moto polare di polo $\boldsymbol{X}_O$. Il vincolo è liscio.
$\boxed{\textbf{16}}$ Cosa si può dire della reazione vincolare?
a Ha momento nullo rispetto a $\boldsymbol{X}_O$.
b È parallela a $\boldsymbol{X}_O$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{17}}$ Se le forze direttamente applicate sono nulle, il moto è sempre periodico.
a Dipende dalla geometria delle masse del corpo rigido.
b Non è mai vero a parte il caso del moto di quiete.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{18}}$ Supponiamo che il corpo parta da fermo e sia soggetto a sollecitazioni di momento $\boldsymbol{M}_O = \alpha \boldsymbol{u}$, con $\alpha > 0$ e $\boldsymbol{u}$ versore solidale.
a Allora il moto è sempre di rotazione intorno a $\boldsymbol{u}$.
b Allora il moto non è mai di rotazione intorno a $\boldsymbol{u}$.
c Nessuna delle precedenti.

Prova del 00/12/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova del 00/12/2022

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 x_2 , \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 .$$

Il punto è soggetto alla forza costante

$$\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{e}_1 .$$

Qui α, $\beta > 0$ sono costanti.
$\boxed{\textbf{01}}$ Consideriamo il caso di attrito statico $|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| \leq \mu_s |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|$, $\mu_s > 0$ costante. Allora l'insieme delle posizioni di equilibrio:
a Per ogni α fissato, può essere reso grande ad arbitrio prendendo β opportuno.
b Comprende in ogni caso almeno un asse.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{02}}$ Consideriamo il caso di attrito dinamico $|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|$, $\mu > 0$ costante, ove si suppone $\boldsymbol{v} \neq 0$. Allora:

a Sono possibili moti rettilinei su cui si conserva l'energia meccanica.
b Si ha nelle equazioni di moto $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| = |\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}|$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Consideriamo il caso di vincolo liscio. Allora:
a Tutti i moti sono limitati.
b Esistono moti per cui l'energia meccanica non si conserva.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato $2L$ è vincolata a mantenere il lato AB parallelo all'asse x_1 del sistema di riferimento fisso, ossia più precisamente

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L\boldsymbol{e}_1 .$$

Sulla lamina agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_C = \alpha\overrightarrow{AC} \times \boldsymbol{e}_1 ,$$

applicata nel vertice C opposto a A; qui $\alpha > 0$ è costante.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Quale è il numero m di vincoli scalari necessario a rappresentare il vincolo sopra descritto per la lamina?
a $m = 1$.
b $m = 2$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ La forza $\boldsymbol{F}_C$:
a È costante.
b È solidale alla lamina.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Nel sistema di riferimento fisso vale la conservazione dell'energia?
a Sì se assumiamo l'ipotesi dei lavori virtuali.
b No.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla circonferenza mobile di raggio $R > 0$

$$\boldsymbol{\psi}(s,t) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3(t) , \qquad s \in (0,2\pi R) ,$$

ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 ,
\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante.
Sul punto non sono applicate sollecitazioni dirette. Si usi s come coordinata

lagrangiana; $\boldsymbol{X}_O$ indica l'origine del sistema di riferimento fisso, centro della circonferenza e introduciamo il sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$.
$\boxed{\textbf{07}}$ Sotto quali condizioni la forza di Coriolis può essere trascurata nelle equazioni di moto scritte in $\mathcal{S}$?
a Vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
b Il vincolo è scabro e il coefficiente d'attrito è molto grande.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Il vincolo sia liscio. Allora il potenziale lagrangiano nel sistema mobile $\mathcal{S}$:
a È dato da

$$U^{\mathrm{L}} = m\alpha^2 \frac{R^2}{2} \Big(\cos \frac{s}{R} \Big)^2 .$$

b Non è definito.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ Il vincolo soddisfi la legge di attrito statico di Coulomb-Morin con coefficiente di attrito $\mu_s > 0$. Allora:
a Se μ_s è troppo piccolo non esistono posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$.
b L'insieme delle posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ dipende da α.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si consideri un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ che si muove vincolato alla curva regolare γ intersezione delle due superfici

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 , \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 .$$

Si assuma che su γ i due vettori ∇f_1 e ∇f_2 siano sempre linearmente indipendenti, in modo che per ogni $\boldsymbol{x} \in \gamma$ risulti ben definito il piano

$$\Pi(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla f_1(\boldsymbol{x}), \nabla f_2(\boldsymbol{x}) \rangle .$$

Si assuma che $\boldsymbol{v} \neq 0$ e che la curva abbia curvatura $k > 0$.
$\boxed{\textbf{10}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ soddisfa
a $\boldsymbol{a}(t)$ ha una componente non nulla parallela a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$.
b $\boldsymbol{a}(t)$ è ortogonale a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{11}}$ Sul punto materiale vincolato a γ agisce la forza $\boldsymbol{F} = \lambda \nabla f_1$, con $\lambda > 0$ costante.
a Allora il vincolo non può essere liscio.
b La $\boldsymbol{F}$ compie lavoro nullo sul moto del punto.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{12}}$ Se sul punto agisce la forza generica $\boldsymbol{F}$ allora:
a Le componenti di $\boldsymbol{F}$ che giacciono su $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$ sono irrilevanti per il moto.
b La reazione vincolare appartiene a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$ nel caso di vincolo liscio, qualunque sia $\boldsymbol{F}$.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$, e il suo diagramma di fase con orbite $(x(t), p(t))$.
13 Supponiamo che per un $t_0 \in \boldsymbol{R}$

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0 \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \lim_{t\to t_0} p(t) = 0\,.$$

Allora:
a Si ha che x_0 è di equilibrio.
b I due limiti dati sono incompatibili.
c Nessuna delle precedenti.
14 Quale delle seguenti ipotesi implica che esistano orbite limitate?
a Esiste un punto di equilibrio.
b Il potenziale è limitato.
c Nessuna delle precedenti.
15 Supponiamo che il potenziale sia

$$U(x) = \alpha e^{-\beta^2 x^2}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti. Allora:
a Il punto $x = 0$ è di equilibrio stabile.
b Il punto $x = 0$ è di equilibrio instabile.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 19/01/2023

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 19/01/2023

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$, con s ascissa curvilinea. Si assuma $k(s) > 0$ per ogni s. Si rappresenta il moto come $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Sul punto agisce una forza $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$, $\boldsymbol{F} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$.
01 Si assuma che il vincolo sia liscio e che $\dot{s} \neq 0$.
a La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\rm vin}$ è sempre non nulla.
b La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\rm vin}$ è sempre nulla.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{02}}$ Si assuma che il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin di attrito dinamico con coefficiente di attrito $\mu > 0$, e che $\dot{s} \neq 0$.
a Si ha sempre che $\mathbf{f}_{\rm vin} \cdot \boldsymbol{T} \leq 0$.
b Anche se $\boldsymbol{F}$ è conservativa di potenziale U, l'energia meccanica $T - U$ in genere non si conserva lungo il moto.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Si assuma che il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin di attrito statico.
a A parità di altre condizioni, se $\boldsymbol{F}$ è ammissibile per l'equilibrio con coefficiente di attrito $\mu_{\rm s} > 0$, lo è anche con coefficiente $2\mu_{\rm s}$.
b A parità di altre condizioni, se $\boldsymbol{F}$ è ammissibile per l'equilibrio con coefficiente di attrito $\mu_{\rm s} > 0$, lo è anche con coefficiente $\mu_{\rm s}/2$.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.
a L'ellissoide d'inerzia in O può essere di rotazione, ma non una sfera.
b L'ellissoide d'inerzia in O può essere di rotazione, ma il corpo non può essere omogeneo.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:
a
$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$
b
$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:
a
$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \leq 2 I_{33} T(0)\,.$$
b
$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un sistema di corpi rigidi è vincolato da vincoli olonomi regolari. Le coordinate lagrangiane sono indicate da $\boldsymbol{q} \in Q \subset \boldsymbol{R}^\ell$, e indichiamo con $Q_h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ le componenti lagrangiane delle forze. Valga l'ipotesi dei lavori virtuali.
$\boxed{\mathbf{07}}$ I vincoli siano fissi.
a La lagrangiana è indipendente dal tempo.

b Se la funzione costante $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0$, $t \in \boldsymbol{R}$, risolve le equazioni di Lagrange, allora

$$Q_h(\boldsymbol{q}_0, 0, t) = 0 \,, \qquad \text{per ogni } t \in \boldsymbol{R}.$$

c Nessuna delle precedenti.

08 Le forze direttamente applicate siano conservative.

a Sicuramente si può definire la funzione lagrangiana.

b Sicuramente le Q_h sono indipendenti dal tempo, ossia $Q_h = Q_h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$.

c Nessuna delle precedenti.

09 Supponiamo che esista il potenziale lagrangiano U^{L} e che esso sia indipendente dal tempo, ossia $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})$.

a Vale la conservazione dell'energia.

b I vincoli sono fissi.

c Nessuna delle precedenti.

I.4 In ciascuno dei casi seguenti determinare ove i vincoli olonomi fissi presentati siano regolari, all'interno di $A \cap Z_{\boldsymbol{f}}$, ove A è il dominio di definizione del vincolo.

In ciascun caso $n_c = 5$ e le coordinate locali sono $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_5)$.

10 Il vincolo definito in $A = \boldsymbol{R}^5$ è dato da:

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}) &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \,, \\ f_2(\boldsymbol{z}) &= z_4 - \frac{\pi}{4} = 0 \,. \end{aligned}$$

a Il vincolo è regolare in ogni $\boldsymbol{z} \in A \cap Z_{\boldsymbol{f}}$.

b Il vincolo non è regolare per nessun $\boldsymbol{z} \in A \cap Z_{\boldsymbol{f}}$.

c Nessuna delle precedenti.

11 Il vincolo definito in

$$A = \{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^5 \mid z_5 \in (0, \pi)\} \,,$$

è dato da:

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}) &= z_3 = 0 \,, \\ f_2(\boldsymbol{z}) &= (\sin z_4)(\cos z_5) = 0 \,. \end{aligned}$$

a Il vincolo è regolare in ogni $\boldsymbol{z} \in A \cap Z_{\boldsymbol{f}}$.

b Il vincolo non è regolare per nessun $\boldsymbol{z} \in A \cap Z_{\boldsymbol{f}}$.

c Nessuna delle precedenti.

12 Il vincolo definito in

$$A = \{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^5 \mid z_3 > 0\} \,,$$

è dato da

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}) &= z_3 - a z_1 z_2 = 0 \,, \\ f_2(\boldsymbol{z}) &= z_3 - b(z_1^2 + z_2^2) = 0 \,, \end{aligned}$$

con $a > 0$, $b > 0$ costanti. Si assuma a e b siano tali che $A \cap Z_{\boldsymbol{f}} \neq \varnothing$, e che $a \neq 2b$.
a Il vincolo è regolare in ogni $\boldsymbol{z} \in A \cap Z_{\boldsymbol{f}}$.
b Il vincolo non è regolare per nessun $\boldsymbol{z} \in A \cap Z_{\boldsymbol{f}}$.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Sia C un corpo rigido non degenere; sia $\boldsymbol{X}_Z$ un moto solidale al rigido.
$\boxed{\textbf{13}}$ La matrice d'inerzia in $\boldsymbol{X}_Z$, rispetto a una qualunque terna ortonormale positiva solidale, è:
a Diagonale.
b Costante nel tempo.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{14}}$ Supponiamo che la matrice d'inerzia nel centro di massa abbia i 3 momenti principali uguali.
a Il corpo C non può essere una lamina (cioè essere contenuto in un piano).
b Il corpo C deve avere densità costante, cioè essere omogeneo.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{15}}$ Supponiamo che il corpo si muova di moto polare e che l'energia cinetica del corpo si mantenga costante durante il moto.
a $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ si mantiene costante.
b Il moto è una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 03/02/2023

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 03/02/2023

I.1 Si consideri il moto del punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ soggetto alla forza a direzione radiale

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\}\,,$$

con $F \in C^1(\boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\})$.
$\boxed{\textbf{01}}$ L'energia meccanica si conserva lungo tutti i moti?
a Esistono scelte di $\boldsymbol{F}$ per cui è vero e altre per cui non lo è.
b Vale sempre nelle ipotesi dette.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{02}}$ Il moto del punto materiale
a In generale non è piano, ma può esserlo per particolari condizioni iniziali.
b È sempre rettilineo.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{03}}$ Supponiamo che il moto avvenga sul piano $x_3 = 0$ (le x_i sono le coordinate del sistema di riferimento fisso), e che il moto sia periodico. Per un'opportuna scelta di F:
a L'orbita può essere la circonferenza $(x_1 - 5)^2 + x_2^2 = 1$.
b L'orbita può essere la circonferenza $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Consideriamo il moto del punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ vincolato alla circonferenza γ data da

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R \cos \frac{s}{R} \boldsymbol{e}_1 + R \sin \frac{s}{R} \boldsymbol{e}_2 \,, \qquad s \in (-\pi R, \pi R) \,.$$

Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva. Il punto materiale è soggetto alla forza direttamente applicata posizionale $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^3)$.
$\boxed{\textbf{04}}$ Supponiamo che il vincolo sia liscio. Allora $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N}$
a Può assumere valori in un sottoinsieme inferiormente limitato di $\boldsymbol{R}$, indipendente dal particolare moto.
b Può assumere qualunque valore in $\boldsymbol{R}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{05}}$ Supponiamo che il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico con coefficiente di attrito $\mu > 0$, e che $\dot{s} \neq 0$. La forza $\boldsymbol{F}$ sia conservativa. Allora:
a Se $|\dot{s}(0)|$ è abbastanza piccolo, si conserva l'energia meccanica.
b Qualunque sia $\boldsymbol{F}$ conservativa, esistono moti su cui non si conserva l'energia meccanica.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{06}}$ Supponiamo che il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico, con coefficiente di attrito $\mu_{\mathrm{s}} > 0$, e che la forza direttamente applicata sia la costante $\boldsymbol{F} = \alpha(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$, $\alpha > 0$.
a Se μ_{s} è abbastanza grande, tutti i punti di γ sono di equilibrio.
b Esistono sempre infiniti punti di equilibrio, per ogni $\mu_{\mathrm{s}} > 0$.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 In ciascuno dei seguenti casi si dica quali siano le coordinate lagrangiane ammissibili. In ciascun caso il sistema è formato da due moti $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$. Le x_i denotano le coordinate del sistema di riferimento fisso e le q_h le coordinate lagrangiane.
$\boxed{\textbf{07}}$ Il moto $\boldsymbol{X}_1$ è vincolato all'asse x_1, e si ha $|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2| = L > 0$.

a

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = q_1 \boldsymbol{e}_1 \,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = (q_1 + L\cos q_2 \sin q_3)\boldsymbol{e}_1 + L\sin q_2 \sin q_3 \boldsymbol{e}_2 + L\cos q_3 \boldsymbol{e}_3 \,,$$

con $\boldsymbol{q} \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$.
b

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = q_1^2 \boldsymbol{e}_1 \,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = (q_1^2 + L\cos q_2 \sin q_3)\boldsymbol{e}_1 + L\sin q_2 \sin q_3 \boldsymbol{e}_2 + L\cos q_3 \boldsymbol{e}_3 \,,$$

con $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ Il punto $\boldsymbol{X}_1$ sia vincolato al cilindro $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, $R > 0$, e si abbia inoltre $\boldsymbol{X}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3$, ossia i due punti abbiano la stessa quota.
a

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = R\cos q_1 \boldsymbol{e}_1 + R\sin q_1 \boldsymbol{e}_2 + q_2 \boldsymbol{e}_3 \,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = q_3 \boldsymbol{e}_1 + q_4 \boldsymbol{e}_2 + q_2 \boldsymbol{e}_3 \,,$$

con $\boldsymbol{q} \in (-\pi, \pi) \times \boldsymbol{R}^3$.
b

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = R\cos q_1 \boldsymbol{e}_1 + R\sin q_1 \boldsymbol{e}_2 + q_2 \boldsymbol{e}_3 \,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = q_3 \boldsymbol{e}_1 + q_4 \boldsymbol{e}_2 + q_2 \boldsymbol{e}_3 \,,$$

con $\boldsymbol{q} \in [-\pi, \pi) \times \boldsymbol{R}^2 \times (0, +\infty)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ Deve valere $(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$.
a

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = q_1 \boldsymbol{e}_1 + q_2 \boldsymbol{e}_2 + q_3 \boldsymbol{e}_3 \,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = q_4 \boldsymbol{e}_1 + q_5 \boldsymbol{e}_2 + (q_3 + q_6) \boldsymbol{e}_3 \,,$$

con $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^6$.
b

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = q_1 \cos q_2 \boldsymbol{e}_1 + q_1 \sin q_2 \boldsymbol{e}_2 + q_3 \boldsymbol{e}_3 \,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = q_4 \boldsymbol{e}_1 + q_5 \boldsymbol{e}_2 + q_3 \boldsymbol{e}_3 \,,$$

con $\boldsymbol{q} \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times \boldsymbol{R}^3$.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Consideriamo il sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \ldots, n$, soggetto a vincoli olonomi; si assume l'ipotesi dei lavori virtuali.

$\boxed{\mathbf{10}}$ La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^1$ sul punto $\boldsymbol{X}_1$
a Fa lavoro nullo se i vincoli sono fissi.
b Fa lavoro nullo se le forze direttamente applicate al sistema sono tutte nulle.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ è
a Indipendente dalla scelta delle coordinate lagrangiane.
b Definito solo nel caso dei vincoli fissi.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Sia $n = 2$ e il vincolo sia che i due punti sono a uguale distanza dall'origine del sistema di riferimento fisso (con cui non possono coincidere). Si noti che questa distanza non è prescritta dal vincolo.
a Ciascuna delle 2 reazioni vincolari ha direzione radiale.
b Le 2 reazioni vincolari sono ortogonali tra di loro.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Consideriamo un corpo rigido C non degenere, vincolato a muoversi di moto polare di polo O.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Supponiamo che il vincolo sia liscio.
a Il momento della reazione vincolare rispetto a O è nullo.
b Il momento della reazione vincolare rispetto a O non è nullo in genere, ma ha sempre componente nulla lungo $\boldsymbol{\omega}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Supponiamo che durante il moto $\boldsymbol{\omega}$ non si annulli mai e mantenga direzione costante. Allora il momento delle forze esterne con polo O soddisfa:
a Se $\boldsymbol{\omega}$ è diretto come un asse principale, può valere $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = 0$.
b Se $\boldsymbol{\omega}$ è diretto come un asse non principale, può valere $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Il corpo C sia un rettangolo omogeneo di lati $a > b > 0$. Il moto sia una rotazione intorno alla diagonale del rettangolo (con $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per ogni t).
a Il vincolo non può essere liscio.
b L'energia cinetica può mantenersi costante durante il moto.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 24/03/2023

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 24/03/2023

I.1 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$, e il suo diagramma di fase con orbite $(x(t), p(t))$.
$\boxed{\mathbf{01}}$ Supponiamo che

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0 \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} p(t) = p_0 \in \boldsymbol{R}\,.$$

Allora:
a Si ha $p_0 = 0$ e x_0 è di equilibrio.
b I due limiti dati sono incompatibili.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Supponiamo che esista un solo punto di equilibrio e che questo sia stabile. Allora:
a Tutte le orbite sono limitate.
b Esistono sempre orbite illimitate.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Supponiamo che

$$f(x) = \alpha x e^{-\alpha^2 x^2}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $\alpha \neq 0$ costante. Allora:
a Il punto $x = 0$ è di equilibrio stabile.
b Esistono orbite illimitate.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Si consideri un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ che si muove vincolato alla curva regolare γ intersezione delle due superfici

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0\,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0\,.$$

Si assuma che su γ i due vettori ∇f_1 e ∇f_2 siano sempre linearmente indipendenti, in modo che per ogni $\boldsymbol{x} \in \gamma$ risulti ben definito il piano

$$\Pi(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla f_1(\boldsymbol{x}), \nabla f_2(\boldsymbol{x}) \rangle\,.$$

$\boxed{\mathbf{04}}$ L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ soddisfa
a $\boldsymbol{a}(t) \in \Pi(\boldsymbol{X}(t))$.
b $\boldsymbol{a}(t)$ è normale a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ La velocità $\boldsymbol{v}(t)$ soddisfa:
a $\boldsymbol{v}(t) \in \Pi(\boldsymbol{X}(t))$.
b $\boldsymbol{v}(t)$ è normale a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Se sul punto agisce la forza $\boldsymbol{F}$ allora:

a Se il vincolo è liscio, le componenti di $\boldsymbol{F}$ che giacciono su $\Pi(\boldsymbol{x})$ sono irrilevanti per il moto.
b La reazione vincolare appartiene a $\Pi(\boldsymbol{x})$ sia nel caso di vincolo liscio che scabro.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.
$\boxed{\textbf{07}}$ Supponiamo che il moto non sia una rotazione.
a L'ellissoide d'inerzia in O può essere di rotazione, ma non una sfera.
b L'ellissoide d'inerzia in O può essere di rotazione, ma il corpo non può essere omogeneo.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{08}}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:
a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0 .$$

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty .$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{09}}$ Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:
a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \leq 2I_{33}T(0) .$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2 .$$

c Nessuna delle precedenti.

I.4 Si considerino i seguenti vincoli per il moto

$$\boldsymbol{X} = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3 , \qquad \boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \boldsymbol{R}^3 .$$

$\boxed{\textbf{10}}$ Il vincolo è

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = \begin{pmatrix} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - \alpha t^2 \\ z_3 - \beta t \end{pmatrix} = 0 ,$$

con α, $\beta > 0$ costanti. Qui $t > 0$.
a Esiste sempre almeno un intervallo $t \in (0, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$ in cui il vincolo è olonomo regolare.
b Fissato $\beta > 0$, esistono $\alpha > 0$ per cui il vincolo non è regolare.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\textbf{11}}$ Il vincolo è

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = \begin{pmatrix} z_1 - 3 \\ z_2 - 2t \end{pmatrix} = 0 ,$$

con $t > 0$.
a Il vincolo è equivalente a un vincolo fisso.
b Il sistema vincolato ha 2 gradi di libertà.
c Nessuna delle precedenti.
12 Il vincolo è

$$f(\boldsymbol{z}, t) = z_1 - \alpha z_2 z_3 - \beta t = 0 \,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti.
a L'insieme delle configurazioni ammissibili è una superficie regolare (eventualmente mobile) di $\boldsymbol{R}^3$, per qualunque scelta di α, $\beta \in \boldsymbol{R}$.
b Per vincoli di questo tipo non si può porre l'ipotesi dei lavori virtuali.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Sia C un corpo rigido non degenere; sia $\boldsymbol{X}_Z$ un moto solidale al rigido.
13 La matrice d'inerzia in $\boldsymbol{X}_Z$, rispetto a una qualunque terna ortonormale positiva solidale, può essere:
a Diagonale.
b Non costante nel tempo.
c Nessuna delle precedenti.
14 Supponiamo che la matrice d'inerzia nel centro di massa abbia i 3 momenti principali uguali.
a Il corpo C può essere una lamina (cioè essere contenuto in un piano).
b Il corpo C deve avere densità costante, cioè essere omogeneo.
c Nessuna delle precedenti.
15 Supponiamo che il corpo si muova di moto polare e che l'energia cinetica del corpo si mantenga costante durante il moto.
a $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ si mantiene costante.
b Il moto è una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 09/06/2023

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 09/06/2023

I.1 Sia C un corpo rigido non degenere.

$\boxed{\mathbf{01}}$ Nel centro di massa del corpo è possibile trovare una terna ortonormale $\mathcal{M}$ solidale rispetto a cui la matrice d'inerzia sia

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} ,$$

con $I > 0$ opportuno.
a È sempre vero.
b È vero per i corpi omogenei, ma non in generale.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Se C si muove di moto polare, si ha che per ogni t

$$T(t) = \frac{1}{2} I(t) |\boldsymbol{\omega}(t)|^2 ,$$

con $I(t) > 0$ momento d'inerzia rispetto a un asse opportuno.
a È sempre vero.
b È vero solo se il corpo ha speciali simmetrie, non in generale.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Supponiamo che l'ellissoide d'inerzia di C nel centro di massa sia una sfera.
a Esistono infiniti altri punti ove l'ellissoide d'inerzia è di rotazione.
b Possono non esistere altri punti ove l'ellissoide d'inerzia sia di rotazione.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un sistema di n punti materiali è soggetto a vincoli olonomi regolari. Indichiamo con $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ lo spazio degli spostamenti virtuali e con $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ lo spazio normale.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali, assegnata una configurazione $(\boldsymbol{z}, t)$ la direzione della reazione vincolare totale $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ in $\boldsymbol{R}^{3n}$ risulta fissata.
a Sì, sempre.
b No, mai.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Lo spazio $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ dipende dalla scelta delle coordinate lagrangiane.
a Solo se i vincoli sono mobili.
b No, mai.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Se si conosce lo spazio $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ come sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$, si può determinare
a Se valga l'ipotesi dei lavori virtuali.
b Lo spazio $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ un sistema di riferimento mobile. Si consideri anche un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi regolari.

$\boxed{\mathbf{07}}$ Le equazioni di Lagrange relative al sistema $\mathcal{S}$ si possono scrivere solo se vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
a Sì.
b Non è necessaria se i vincoli sono fissi e $\mathcal{S}$ si muove di moto rotatorio uniforme.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ In $\mathcal{S}$ la forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle.
a Se e solo se il moto è di quiete relativa a $\mathcal{S}$.
b In alcuni casi anche per moti che non sono di quiete relativa a $\mathcal{S}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Può essere che il numero delle equazioni di Lagrange scritte in $\mathcal{S}$ sia inferiore a quello delle equazioni di Lagrange scritte nel sistema di riferimento fisso.
a Sì.
b No, mai.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 Un punto materiale è vincolato a una superficie regolare $S \subset \boldsymbol{R}^3$, di normale $\boldsymbol{\nu}$. Il punto è fermo all'istante iniziale, e su di esso agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Il vincolo sia scabro, secondo la legge di attrito statico di Coulomb-Morin con coefficiente di attrito $\mu_s > 0$.
a Esistono forze $\boldsymbol{F} \neq 0$ tali che il punto resta in quiete qualunque sia $\mu_s > 0$.
b Esistono $\mu_s > 0$ tali che il punto resta in quiete qualunque sia $\boldsymbol{F}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Il vincolo sia liscio. Allora all'istante iniziale $\boldsymbol{F}$ e l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ sono parallele.
a In generale no.
b È vero se S è una sfera.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Il vincolo sia scabro, secondo la legge di attrito statico di Coulomb-Morin con coefficiente di attrito $\mu_s > 0$. Si assuma che S abbia una simmetria di rotazione.
a Se $\boldsymbol{F}$ è parallela all'asse di rotazione, il moto è di quiete.
b Se $\boldsymbol{F}$ è ortogonale all'asse di rotazione, il moto è di quiete.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Si consideri un sistema di punti materiali soggetto a vincoli olonomi regolari. Si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia ℓ il numero dei gradi di libertà. I vincoli siano fissi e le forze direttamente applicate conservative. Denotiamo con $\boldsymbol{q}$ le coordinate lagrangiane.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Se $\boldsymbol{q}_0$ è una posizione di equilibrio stabile, in essa si possono definire le piccole oscillazioni.
a Sì.

b Non sempre.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Se in $\boldsymbol{q}_0$ si possono definire le piccole oscillazioni, allora i moti delle piccole oscillazioni sono
a Periodici.
b Limitati.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Se $\ell = 1$ e in q_0 si possono definire le piccole oscillazioni, i moti delle piccole oscillazioni
a Sono armonici.
b Convergono a q_0 per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 07/07/2023

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 07/07/2023

I.1 Sia C un corpo rigido non degenere formato da 3 elementi materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, 2, 3$.
$\boxed{\mathbf{01}}$ L'ellissoide d'inerzia nel centro di massa di C è una sfera.
a È sempre vero.
b Non è mai vero.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Esistono piani di simmetria materiale ortogonale per C?
a Possono non essercene, al massimo ne esiste uno solo.
b Certamente almeno uno.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Se si aggiunge un quarto punto materiale al corpo rigido (che rimane un corpo rigido), di posizione non coincidente con i precedenti, allora
a Il numero dei gradi di libertà resta invariato.
b Il numero dei gradi di libertà aumenta di 2.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m\,,$$

con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell = 3n - m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar{t}$ fissato formano
a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{\ell}$.
b Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{05}}$ L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$
a Soddisfa $T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) > 0$ per ogni $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.
b È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è
a Indipendente dal tempo.
b Indipendente dalla scelta delle coordinate lagrangiane.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica circolare

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,,$$

con R, $h > 0$ e $\alpha = (R^2 + h^2)^{-1/2}$. Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata costante $\boldsymbol{F}$.
Indichiamo il moto con $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$; s è l'ascissa curvilinea.
Ricordiamo

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{T}(s) = -R\alpha\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\alpha\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{N}(s) = -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{B}(s) = \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3 \,.
\end{gathered}$$

$\boxed{\mathbf{07}}$ Supponiamo che $\boldsymbol{F} = 0$, $s(0) = 0$, $\dot{s}(t) \neq 0$ per ogni t. Il vincolo sia scabro secondo la legge di attrito dinamico di Coulomb-Morin. Allora
a $\ddot{s}(0) = 0$.
b $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(0) = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Il vettore accelerazione $\boldsymbol{a}(\bar{t})$ per un $\bar{t} \in \boldsymbol{R}$
a Se $\dot{s}(\bar{t}) \neq 0$ allora soddisfa $\boldsymbol{a}(\bar{t}) \cdot \boldsymbol{e}_3 \neq 0$.
b Se $\ddot{s}(\bar{t}) \neq 0$ allora soddisfa $\boldsymbol{a}(\bar{t}) \cdot \boldsymbol{e}_3 \neq 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Il vincolo sia liscio con $\boldsymbol{F} = \lambda\boldsymbol{e}_1$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$. Allora dato un moto s (per una c costante opportuna)
a Vale per ogni t

$$\frac{m}{2}\dot{s}(t)^2 - \lambda s(t) = c \,.$$

b Vale per ogni t

$$\frac{m}{2}\dot{s}(t)^2 + \lambda R\cos(\alpha s(t)) = c \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

I.4 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ si muove di moto centrale soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = k\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\}\,,$$

con $k \in \boldsymbol{R}$ costante.
Si sa che il moto avviene sul piano $x_3 = 0$ in cui usiamo le coordinate polari r, φ.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Assegnato un moto, esiste una costante $c \in \boldsymbol{R}$ tale che per ogni t
a

$$\ddot{r} = \frac{k}{m} + \frac{c^2}{r^3}\,.$$

b

$$r\dot{\varphi}^2 = c\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che lungo un moto $\boldsymbol{X}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, si abbia $r(t) = r_0 > 0$, $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$.
a Allora deve essere $k < 0$.
b Allora deve essere $\dot{\varphi}(t) > 0$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che

$$r(0) = r_0 > 0\,, \quad \dot{r}(0) = 0\,, \quad \varphi(0) = 0\,, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 > 0\,.$$

Assumendo che il moto sia definito per ogni $t > 0$
a È possibile che

$$\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^3\,, \quad \lim_{t\to+\infty} \dot{\boldsymbol{X}}(t) = 0\,.$$

b È possibile che $r(t) = r_0$ per ogni $t > 0$.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un cono circolare retto omogeneo C ha vertice V, altezza $H > 0$ e raggio di base $R > 0$. Indichiamo con A il centro della base, con B un punto solidale a C della circonferenza di base e con G il centro di massa.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Se C è soggetto al vincolo

$$\overrightarrow{AV} = H\boldsymbol{e}_3\,,$$

allora i gradi di libertà di C sono
a 4.
b 3.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{14}$ Quale dei seguenti insiemi di coordinate locali per C è ammissibile (almeno in certe posizioni)? Qui (x_i) indicano le coordinate nel sistema di riferimento fisso.
a

$$x_{1V}\,,\quad x_{2V}\,,\quad x_{3V}\,,\quad x_{1A}\,,\quad x_{2A}\,,\quad x_{1B}\,.$$

b

$$x_{1V}\,,\quad x_{2V}\,,\quad x_{3V}\,,\quad x_{1A}\,,\quad x_{2A}\,,\quad x_{3A}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{15}$ Se conosciamo all'istante $\bar{t}$ le posizioni $\boldsymbol{X}_V(\bar{t})$, $\boldsymbol{X}_B(\bar{t})$, allora conosciamo anche la posizione
a $\boldsymbol{X}_A(\bar{t})$.
b $\boldsymbol{X}_G(\bar{t})$.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 08/09/2023

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 08/09/2023

I.1 Si considerino le due lagrangiane

$$\mathcal{L}_1(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \alpha(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \beta \cos q_1 + \gamma \dot{q}_2 \sin q_2\,,$$
$$\mathcal{L}_2(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \alpha(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \beta \cos q_1\,.$$

Entrambe sono definite per $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \in \boldsymbol{R}^4$. Qui α, β, γ sono costanti positive assegnate.
$\boxed{01}$ Le due lagrangiane $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ conducono a equazioni di Lagrange che hanno le stesse soluzioni (a parità di dati iniziali)?
a Sì.
b No, salvo che per alcuni valori di α, β, γ.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{02}$ Si consideri qui

$$\mathcal{L}_2(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = T_2^{\mathrm{L}} + U_2^{\mathrm{L}}\,,\quad T_2^{\mathrm{L}} = \alpha(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\,,\quad U_2^{\mathrm{L}} = \beta \cos q_1\,.$$

Esistono punti dove siano definite le piccole oscillazioni?
a No, per nessun valore di α, $\beta > 0$.
b Certamente almeno uno.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{03}}$ Si consideri la lagrangiana $\mathcal{L}_1$; si dica se valga per i moti corrispondenti la conservazione dell'energia

$$W(q_1, q_2) = \alpha(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \beta \cos q_1 .$$

a Solo per $\beta < 1$.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Un corpo rigido C si muove di moto polare intorno al polo O. I vincoli sono lisci. Sul corpo agisce la distribuzione di forze $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$.
Indichiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale, con $(\boldsymbol{u}_h)$ principale d'inerzia in O.

$\boxed{\textbf{04}}$ Fissiamo un asse r solidale a C, passante per O. Supponiamo che il corpo parta da fermo.
Qualunque sia la geometria delle masse di C esiste sempre una distribuzione $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ tale che il moto sia una rotazione (non la quiete) intorno a r.
a No.
b Sì, ma solo se O è il centro di massa.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{05}}$ Supponiamo che $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ si riduca alla sola forza

$$\boldsymbol{F}_A = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2 ,$$

applicata in A tale che $\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_3$. Qui α, β, R sono costanti positive assegnate. Supponiamo anche

$$\boldsymbol{\omega}(0) = -\beta \boldsymbol{u}_1(0) + \alpha \boldsymbol{u}_2(0) .$$

È possibile che il moto sia di rotazione?
a No, mai.
b Dipende solo dalla geometria delle masse di C.
c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\textbf{06}}$ Supponiamo che il moto sia polare per inerzia. Sia

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \boldsymbol{u}_1(0) + \beta \boldsymbol{u}_2(0) .$$

Qui α, β sono costanti positive assegnate.
Il moto è di rotazione?
a Sì se $I_{11}^O = I_{33}^O$.
b Sì se $I_{11}^O > I_{22}^O$.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$ con curvatura $k > 0$. Il punto è soggetto alla forza $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$, nelle solite ipotesi di regolarità. Indichiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva.

$\boxed{\mathbf{07}}$ Supponiamo che $\dot{s}(0) \neq 0$ e che $\boldsymbol{F} = \lambda(s, \dot{s}, t)\boldsymbol{T}(s)$ con $\lambda \in C^1(\boldsymbol{R}^3)$. Allora
a Di fatto il moto è lo stesso sia nel caso di vincolo liscio che scabro alla Coulomb-Morin.
b Di fatto il moto non è lo stesso nel caso di vincolo liscio e nel caso di vincolo scabro alla Coulomb-Morin.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Siano $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0 \neq 0$ assegnate condizioni iniziali. Denotiamo con s_1 il moto corrispondente al caso di vincolo liscio e forza

$$\boldsymbol{F}_1 = \lambda_1(t)\boldsymbol{N}(s)\,,$$

con $\lambda_1 \in C(\boldsymbol{R})$ assegnata.
a Esiste una forza $\boldsymbol{F}_2 = \lambda_2(t)\boldsymbol{N}(s)$, con $\lambda_2 \in C(\boldsymbol{R})$ opportuna, tale che il moto s_2 corrispondente alla forza $\boldsymbol{F}_2$ e a vincolo scabro alla Coulomb-Morin, coincida con s_1.
b Se il vincolo è scabro, il moto è sempre diverso da s_1, qualunque sia la forza $\boldsymbol{F}_2$ direttamente applicata.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Il punto parta da fermo e il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico. Assumiamo anche che $\boldsymbol{F}$ coincida con un vettore assegnato di $\boldsymbol{R}^3$ (ossia sia costante).
a Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono forze $\boldsymbol{F}$ con $|\boldsymbol{F}| < \varepsilon$ tali che il punto si muove.
b Esiste $c > 0$ tale che se $|\boldsymbol{F}| > c$ allora il punto si muove.
c Nessuna delle precedenti.

I.4 In ciascuno dei seguenti casi un sistema di corpi rigidi vincolato da vincoli olonomi soddisfa le altre ipotesi delle piccole oscillazioni in $\boldsymbol{q} = 0$, salvo che il potenziale lagrangiano è come indicato.
Dire se in $\boldsymbol{q} = 0$ sono effettivamente definite le piccole oscillazioni del sistema. Le costanti α, β, γ sono positive, $\ell = 2$ e $Q = \boldsymbol{R}^2$ in ogni caso.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Si ha

$$U^{\mathrm{L}}(q_1, q_2) = -\alpha q_1^2 - \beta q_2^4 + \gamma \cos q_2\,.$$

a Sì, per ogni valore dei parametri.
b No, per ogni valore dei parametri
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Si ha

$$U^{\mathrm{L}}(q_1, q_2) = -\alpha q_1^2 - \beta q_2^2 - \gamma q_1 q_2 + \gamma q_1^8 + \beta q_2^8\,.$$

a Sì, per ogni valore dei parametri.
b No, per ogni valore dei parametri
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Si ha

$$U^{\mathrm{L}}(q_1, q_2) = \alpha(\cos q_1)^2 + \beta(1 - q_2^4)\,.$$

a Sì, per ogni valore dei parametri.
b No, per ogni valore dei parametri
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Due punti $\boldsymbol{X}_A$, $\boldsymbol{X}_B$ sono vincolati come descritto di seguito. Dire in quali casi il vincolo è olonomo regolare.
Si usano come coordinate locali

$$\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_6) = (x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, x_{1B}, x_{2B}, x_{3B}) \in \boldsymbol{R}^6 ,$$

con x_i coordinate cartesiane nel sistema di riferimento fisso.
$\boxed{\mathbf{13}}$ I vincoli sono

$$\begin{aligned} z_3 &= 0 , \\ (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 - L^2 &= 0 , \\ z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 - L^2 &= 0 . \end{aligned}$$

Qui la costante L è positiva.
a Il vincolo è regolare in ogni posizione compatibile.
b Esistono posizioni compatibili in cui il vincolo è regolare, e altre in cui non lo è.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ I vincoli sono

$$\begin{aligned} z_3 - z_1^2 - z_2^2 &= 0 , \\ z_6 - z_4^2 - z_5^2 &= 0 . \end{aligned}$$

a Il vincolo è regolare in ogni posizione compatibile.
b Esistono posizioni compatibili in cui il vincolo è regolare, e altre in cui non lo è.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ I vincoli sono

$$\begin{aligned} z_3 - z_1^2 - z_2^2 &= 0 , \\ z_3 - z_4^2 - z_5^2 &= 0 . \end{aligned}$$

a Il vincolo è regolare in ogni posizione compatibile.
b Esistono posizioni compatibili in cui il vincolo è regolare, e altre in cui non lo è.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 25/01/2024

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 25/01/2024

I.1 Una lamina rigida è costituita da 4 elementi materiali, ciascuno di massa M, vincolati ai 4 vertici di un rettangolo $ABCD$ di lati a, b con $a > b > 0$, e centro G. Si assuma

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = a\,, \qquad |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| = b\,.$$

Si usi come sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_G, \mathcal{M})$, con $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ data da

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{a}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{BC}}{b}\,.$$

Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$ con coordinate (y_h), ove $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ è data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(\gamma t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\gamma t)\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= -\sin(\gamma t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\gamma t)\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

con $\gamma > 0$ costante.
La lamina è vincolata a giacere sul piano mobile $y_2 = 0$, ossia sul piano di equazione, in coordinate del sistema fisso,

$$\mathit{\Pi}(t): \quad -x_1 \sin(\gamma t) + x_2 \sin(\gamma t) = 0\,.$$

Il centro G della lamina è vincolato alla retta mobile

$$y_2 = 0\,, \qquad y_1 = y_3\,.$$

Sulla lamina agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.
Si usino come coordinate lagrangiane $(x, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi/4, 7\pi/4)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}}(x, t) = x\boldsymbol{w}_1(t) + x\boldsymbol{w}_3(t)\,,$$

e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{w}_1 - \sin\varphi \boldsymbol{w}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{w}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \sin\varphi \boldsymbol{w}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{w}_3\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{01}$ La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ della lamina (rispetto al sistema di riferimento fisso) è
a
$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2 + \gamma\boldsymbol{u}_1 .$$
b
$$\boldsymbol{\omega} = -\gamma \sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \gamma \cos\varphi \boldsymbol{u}_3 + \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2 .$$
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{02}$ Quanto vale il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse coordinato 2 del riferimento solidale?
a $M(a+b)^2$.
b $M(a^2+b^2)$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{03}$ La base positiva ortonormale solidale $(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3)$ con
$$\boldsymbol{z}_1 = \frac{\overrightarrow{AC}}{\sqrt{a^2+b^2}} , \qquad \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{u}_2 , \qquad \boldsymbol{z}_3 = \boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{z}_2 ,$$
è principale in G?
a Lo è per certi valori di $a > b$, non lo è per altri.
b No, per nessun valore di $a > b$.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{04}$ Quanto vale il momento angolare $\boldsymbol{L}_G$ della lamina (rispetto al sistema di riferimento fisso) usando come polo G, in funzione di x, φ, $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$, espresso nella base $\mathcal{M}$?
a
$$\boldsymbol{L}_G = -\gamma M b^2 \sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \dot{\varphi} M(a^2+b^2)\boldsymbol{u}_2 + \gamma M a^2 \cos\varphi \boldsymbol{u}_3 .$$
b
$$\boldsymbol{L}_G = -\gamma M b^2 \sin\varphi \boldsymbol{u}_1 + \dot{\varphi} M(a+b)^2\boldsymbol{u}_2 + \gamma M a^2 \cos\varphi \boldsymbol{u}_3 .$$
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{05}$ Quanto vale l'energia cinetica in forma lagrangiana della lamina (rispetto al sistema di riferimento fisso)?
a
$$T^{\mathrm{L}} = 2M(2\dot{x}^2 + \gamma^2 x^2) + \frac{M}{2}[b^2\gamma^2(\sin\varphi)^2 + a^2\gamma^2(\cos\varphi)^2 + (a^2+b^2)\dot{\varphi}^2] .$$
b
$$T^{\mathrm{L}} = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}[b^2\gamma^2(\cos\varphi)^2 + a^2\gamma^2(\sin\varphi)^2 + (a^2+b^2)\dot{\varphi}^2] .$$
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{06}$ La risultante delle forze di trascinamento che agiscono sulla lamina nel sistema $\mathcal{S}_1$ è
a
$$4M\gamma^2(x + a\cos\varphi)\boldsymbol{w}_1 .$$

b

$$4M\gamma^2 x\boldsymbol{w}_1 .$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{07}}$ Il potenziale lagrangiano del sistema, quando si scrivano le equazioni di Lagrange rispetto al sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}_1$, vale

a

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}_1} = \frac{M}{2}\gamma^2[4x^2 + a^2(\cos\varphi)^2 + b^2(\sin\varphi)^2] - 4Mgx .$$

b Il potenziale lagrangiano non può essere definito in questo caso.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}_1$ (appartenenti al dominio di definizione della parametrizzazione lagrangiana)

a Sono infinite.

b Ne esiste una sola.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{09}}$ Quale delle seguenti posizioni è di equilibrio relativo a $\mathcal{S}_1$ stabile?

a

$$(x, \varphi) = \Big(\frac{g}{\gamma^2}, 0\Big) .$$

b

$$(x, \varphi) = \Big(\frac{g}{\gamma^2}, \pi\Big) .$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Quale delle seguenti posizioni è di equilibrio relativo a $\mathcal{S}_1$ instabile?

a

$$(x, \varphi) = \Big(\frac{g}{\gamma^2}, 0\Big) .$$

b

$$(x, \varphi) = \Big(\frac{g}{2\gamma^2}, \pi\Big) .$$

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Le equazioni di Lagrange per il moto relativo al riferimento $\mathcal{S}_1$ sono

$$\begin{gathered} 2\ddot{x} - \gamma^2 x + g = 0 , \\ 2(a^2 + b^2)\ddot{\varphi} + \gamma^2(a^2 - b^2)\sin(2\varphi) = 0 . \end{gathered}$$

(Questa informazione può essere usata anche nelle domande successive.) Esistono moti in cui una sola delle due coordinate x e φ si mantiene costante?

a Sì, per ogni valore dei parametri M, γ, a, b.

b No, per nessun valore dei parametri M, γ, a, b.

c Nessuna delle precedenti.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Esistono moti in cui la derivata $\dot{x}(t)$ cambia di segno (da positiva a negativa) infinite volte?

a Sì, tutti a parte quelli di quiete relativa a $\mathcal{S}_1$.

b No, nessuno.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Quale è la risultante delle forze vincolari applicate alla lamina?
a

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = 4Mg\boldsymbol{w}_3 \,.$$

b

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = 2M(\gamma^2 x + g)(\boldsymbol{w}_3 - \boldsymbol{w}_1) + 8M\gamma\dot{x}\boldsymbol{w}_2 \,.$$

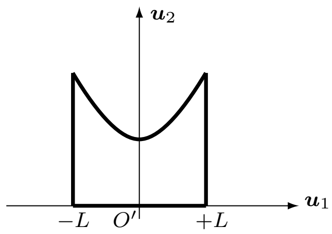
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Il vettore $\boldsymbol{L}_G$ è solidale alla lamina?
a Sì per alcuni moti, anche non di quiete relativa a $\mathcal{S}_1$.
b No, per nessun moto.
c Nessuna delle precedenti.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Esistono moti per cui la risultante della reazione vincolare si annulla in ogni istante?
a Ne esistono, ma solo per opportuni valori di M.
b Esistono in ogni caso.
c Nessuna delle precedenti.

Prova scritta del 19/02/2024

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 19/02/2024

I.1 Un sistema olonomo a vincoli perfetti è costituito da una lamina rigida pesante omogenea di massa $M > 0$. In figura è rappresentata la lamina assieme al riferimento solidale $(O', (\boldsymbol{u}_h))$, di coordinate $\boldsymbol{\lambda}$. I tre lati rettilinei hanno lunghezza $2L > 0$. Il bordo superiore ha il profilo parabolico $\lambda_2 = (\lambda_1)^2/L + L$.



Il riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 2 verticale ascendente. Le coordinate nel sistema di riferimento fisso sono denotate da (x_h).

La lamina si muove rispetto al riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$ mantenendo il piano solidale 1–2 costantemente coincidente con l'omologo piano fisso, in modo che O' sia vincolato ad appartenere alla parabola di equazione $x_2 = \alpha(x_1)^2$, con $\alpha > 0$ costante assegnata.
La sollecitazione attiva agente sulla lamina è costituita dal solo peso, diretto come $-\boldsymbol{e}_2$.
Come coordinate lagrangiane si usino la coordinata cartesiana 1 di O' relativa al riferimento fisso, indicata con $q \in \boldsymbol{R}$, e l'anomalia $\varphi \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ tale che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

01 Le coordinate del centro di massa G della lamina rispetto al riferimento solidale $(O', (\boldsymbol{u}_h))$ sono

a
$$\left(0, \frac{7}{10}L, 0\right).$$

b
$$\left(0, \frac{11}{10}L, 0\right).$$

c Nessuna delle altre.

02 Quale delle seguenti è la terza riga della matrice d'inerzia relativa al riferimento solidale $(O', (\boldsymbol{u}_h))$?

a
$$(I_{13}, I_{23}, I_{33}) = \left(0, ML^2, \frac{19}{35}ML^2\right).$$

b
$$(I_{13}, I_{23}, I_{33}) = \left(0, 0, \frac{38}{35}ML^2\right).$$

c Nessuna delle altre.

03 Quanto vale il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse parallelo all'asse 3 solidale e passante per il centro di massa?

a
$$\frac{313}{700}ML^2 .$$

b
$$\frac{417}{700}ML^2 .$$

c Nessuna delle altre.

04 Quanto vale il momento angolare della lamina rispetto al centro di massa $\boldsymbol{L}_G$?

a

$$-ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_2 + \frac{417}{700}ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

b

$$\frac{417}{700}ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$ Quanto vale l'energia cinetica della lamina?

a

$$\frac{M}{2}\Big(\dot{q} - \frac{7}{10}L\dot{\varphi}\cos\varphi\Big)^2 + \frac{M}{2}\Big(2\alpha q\dot{q} - \frac{7}{10}L\dot{\varphi}\sin\varphi\Big)^2 + \frac{417}{1400}ML^2\dot{\varphi}^2 \,.$$

b

$$\frac{M}{2}\Big(\frac{7}{10}L\dot{\varphi}\cos\varphi\Big)^2 + \frac{M}{2}\Big(\frac{7}{10}L\dot{\varphi}\cos\varphi\Big)^2 + \frac{417}{1400}ML^2\dot{\varphi}^2 \,.$$

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{06}}$ Quanto vale il potenziale lagrangiano delle forze direttamente applicate?

a

$$U^{\mathrm{L}}(q,\varphi) = -Mg\Big(\alpha q^2 + \frac{7}{10}L\cos\varphi - \frac{7}{10}L\sin\varphi\Big) \,.$$

b

$$U^{\mathrm{L}}(q,\varphi) = -Mg\Big(\alpha q^2 + \frac{7}{10}L\cos\varphi\Big) \,.$$

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{07}}$ Le configurazioni di equilibrio nel campo indicato di definizione della parametrizzazione lagrangiana sono

a Almeno 3.

b Dipende dal valore di M, L.

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{08}}$ Si indichi quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio stabile.

a

$$(q,\varphi) = (0,\pi) \,.$$

b

$$(q,\varphi) = (0{,}0) \,.$$

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{09}}$ Si scriva la lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$ per i moti delle piccole oscillazioni, intorno all'unica posizione di equilibrio in cui essi possono essere definiti.

a

$$\mathcal{L}^* = \frac{M}{2}\Big(\dot{q} + \frac{7}{10}L\dot{\varphi}\Big)^2 + \frac{417}{1400}ML^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}Mg\Big(\alpha q^2 + \frac{7}{10}L\varphi^2\Big) \,.$$

b

$$\mathcal{L}^* = \frac{M}{2}\Big(\dot{q} + \frac{7}{10}L\dot{\varphi}\Big)^2 + \frac{417}{1400}ML^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}Mg\Big(\alpha q^2 + \frac{7}{10}L(\varphi-\pi)^2\Big) \,.$$

c Nessuna delle altre.

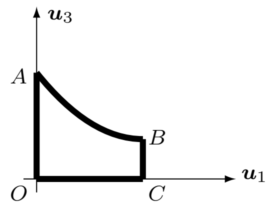
$\boxed{\mathbf{10}}$ Quale delle seguenti affermazioni è vera per i moti delle piccole oscillazioni?
a Ne esiste solo uno che sia di quiete (ossia esiste per essi un unico punto di equilibrio).
b Ne esistono di illimitati.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Si determini la componenente 2 rispetto al riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$ della sollecitazione vincolare totale $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ agente sulla lamina in corrispondenza di un generico moto del sistema.
a
$$Mg + 2\alpha\dot{q}^2 + 2\alpha q\ddot{q} - \frac{7}{10}L\ddot{\varphi}\sin\varphi - \frac{7}{10}L\dot{\varphi}^2\cos\varphi\,.$$
b
$$Mg + \ddot{q} - \frac{7}{10}L\ddot{\varphi}\cos\varphi + \frac{7}{10}L\dot{\varphi}^2\sin\varphi\,.$$
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.
a La coordinata q resta limitata lungo ciascun moto (in modo dipendente dalle condizioni iniziali).
b La coordinata q diviene illimitata lungo ciascun moto (a parte quelli di quiete).
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.
a La derivata $\dot{\varphi}$ resta limitata lungo ciascun moto (in modo dipendente dalle condizioni iniziali).
b La derivata $\dot{\varphi}$ diviene illimitata lungo ciascun moto (a parte quelli di quiete).
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Si sa che all'istante $t = 0$ valgono $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$. Allora
a Esistono direzioni nel piano $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ lungo le quali $\boldsymbol{v}_G(0)$ non può essere diretta, qualunque sia la scelta di $\varphi(0)$ e $\dot{\varphi}(0)$.
b Esiste un valore massimo per $|\boldsymbol{v}_G|$, indipendente dalla scelta di $\varphi(0)$ e $\dot{\varphi}(0)$.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Il lavoro totale fatto dalle reazioni vincolari che agiscono sulla lamina è
a Diverso da 0 lungo ogni moto.
b Nullo lungo ogni moto.
c Nessuna delle altre.

Prova scritta del 20/06/2024

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 20/06/2024

I.1 Un sistema olonomo a vincoli perfetti è costituito da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$, e da una lamina rigida omogenea D di uguale massa M. La lamina ha la forma illustrata in figura, dove il bordo superiore ha equazione $\lambda_3 = Re^{-\lambda_1/R}$ e i punti A, B e C sono tali che $\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_3$, $\overrightarrow{OB} = R\boldsymbol{u}_1 + (R/e)\boldsymbol{u}_3$ e $\overrightarrow{OC} = R\boldsymbol{u}_1$. Qui $(O, (\boldsymbol{u}_h))$ indica il sistema di riferimento solidale con la lamina e $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate in tale sistema.



Il sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_i))$ ha asse 1 verticale ascendente. La lamina rigida è vincolata a muoversi mantenendo l'asse solidale 1 coincidente con l'omologo asse fisso 1. Il punto $\boldsymbol{X}$ è vincolato all'asse fisso 3.
La sollecitazione attiva agente sul sistema è costituita: i) dal peso; ii) dalla sollecitazione elastica di costante $k > 0$, che si scambiano i punti $\boldsymbol{X}$ e A; iii) dalla forza costante $\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{e}_3$, con $\beta > 0$, agente sull'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino la coordinata cartesiana $q \in \boldsymbol{R}$ tale che $\boldsymbol{X} = q\boldsymbol{e}_3$ e l'anomalia $\varphi \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ tale che

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 \,.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{01}}$ Quali sono le coordinate del centro di massa della lamina rispetto al riferimento solidale?

a

$$\Big(\frac{1 - \frac{2}{e}}{1 - \frac{1}{e}} R, 0, \frac{1 - \frac{1}{e^2}}{4 - \frac{4}{e}} R \Big) .$$

b

$$\Big(\frac{1 - \frac{3}{e}}{1 + \frac{1}{e}} R, 0, \frac{1 + \frac{1}{e^2}}{4 + \frac{4}{e}} R \Big) .$$

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{02}}$ Quanto valgono i momenti d'inerzia della lamina relativi ai due assi solidali 1 e 3?

a

$$I_{11} = MR^2 \frac{1 - e^{-3}}{9 - 9e^{-1}} \,, \qquad I_{33} = MR^2 \frac{2 - 5e^{-1}}{1 - e^{-1}} \,.$$

b

$$I_{11} = MR^2 \frac{1 - e^{-3}}{9 - 9e^{-2}}\,, \qquad I_{33} = MR^2 \frac{2 - 3e^{-1}}{1 - 2e^{-1}}\,.$$

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{03}}$ Quanto vale il prodotto d'inerzia della lamina relativo agli assi solidali 1 e 3?

a

$$I_{13} = 0\,.$$

b

$$I_{13} = MR^2 \frac{3e^2 - 1}{1 - e^{-1}}\,.$$

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{04}}$ Quanto vale il momento angolare $\boldsymbol{L}_O$ della lamina?

a

$$MR^2 \frac{1 - e^{-3}}{9 - 9e^{-1}} \dot{\varphi} \boldsymbol{u}_1\,.$$

b

$$MR^2 \frac{2 - 5e^{-1}}{1 - e^{-1}} \dot{\varphi} \boldsymbol{u}_3\,.$$

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$ Quanto vale l'energia cinetica in forma lagrangiana del sistema?

a

$$\frac{M}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2} MR^2 \frac{1 - e^{-3}}{9 - 9e^{-1}} \dot{\varphi}^2 + MR^2 \frac{3e^2 - 1}{1 - e^{-1}} \dot{q}\dot{\varphi}\,.$$

b

$$\frac{M}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2} MR^2 \frac{2 - 5e^{-1}}{1 - e^{-1}} \dot{\varphi}^2\,.$$

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{06}}$ Quanto vale la componente lagrangiana della sollecitazione elastica relativa alla coordinata lagrangiana φ?

a

$$-kRq \sin\varphi\,.$$

b

$$-kRq \sin^2\varphi\,.$$

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{07}}$ Quanto vale il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema?

a

$$U^{\mathrm{L}} = \beta q - \frac{k}{2}[q^2 - 2Rq\cos\varphi]\,.$$

b

$$U^{\mathrm{L}} = \beta q - \frac{k}{2}[q^2 - 2Rq\cos\varphi] - Mg \frac{1 - \frac{2}{e}}{1 - \frac{1}{e}} R\cos\varphi\,.$$

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{08}}$ Quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio di definizione della parametrizzazione lagrangiana?

a Sempre due.

b Dipende dal valore dei parametri β, k, R.

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{09}}$ Si supponga $\beta > kR$ e si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta.

a $(q, \varphi) = (R + \beta/k, 0)$ è una configurazione di equilibrio stabile.

b $(q, \varphi) = (-R + \beta/k, 0)$ è una configurazione di equilibrio.

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Si supponga $\beta > kR$ e si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta.

a $(q, \varphi) = (-R + \beta/k, \pi)$ è una configurazione di equilibrio stabile.

b $(q, \varphi) = (R + \beta/k, \pi)$ è una configurazione di equilibrio.

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Quali sono le equazioni di Lagrange?

a

$$
\begin{aligned}
M\ddot{q} - kq + \beta - kR\sin\varphi &= 0\,, \\
\frac{1 - e^{-3}}{9 - 9e^{-1}}\, MR^2\ddot{\varphi} - kRq\sin\varphi &= 0\,.
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
M\ddot{q} + kq - \beta - kR\cos\varphi &= 0\,, \\
\frac{1 - e^{-3}}{9 - 9e^{-1}}\, MR^2\ddot{\varphi} + kRq\sin\varphi &= 0\,.
\end{aligned}
$$

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Si determini la forza vincolare agente sull'elemento $\boldsymbol{X}$ in corrispondenza di un generico moto del sistema.

a $Mg\boldsymbol{e}_1 + kR\sin\varphi\boldsymbol{e}_2$.

b 0.

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Sono possibili moti in cui l'elemento $\boldsymbol{X}$ è in movimento (non in quiete) e la lamina è in quiete?

a Sì, per ogni valore dei parametri k, M, R, β.

b No, per nessun valore dei parametri k, M, R, β.

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Sono possibili moti in cui l'elemento $\boldsymbol{X}$ è in quiete e la lamina è in movimento (non in quiete)?

a Sì, per ogni valore dei parametri k, M, R, β.

b No, per nessun valore dei parametri k, M, R, β.

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che $\beta = kR$. Allora il punto $(q, \varphi) = (R + \beta/k, 0)$ è di equilibrio e si possono definire in esso le piccole oscillazioni. Le frequenze normali sono date da $\omega_h/(2\pi)$ con:

a

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}\,, \qquad \omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}\,.$$

b

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{9-9e^{-1}}{1-e^{-3}}\,\frac{2k}{M}}\,, \qquad \omega_2 = 2\sqrt{\frac{9-9e^{-1}}{1-e^{-3}}\,\frac{2k}{M}}\,.$$

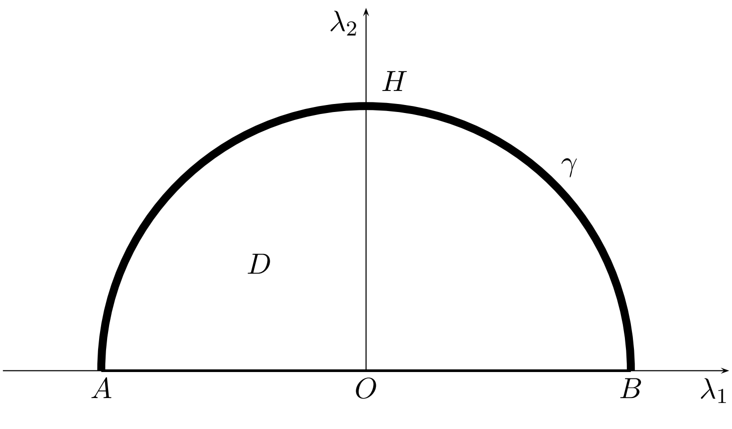
c Nessuna delle altre.

Prova scritta del 22/07/2024

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 22/07/2024

I.1 Una lamina C è formata da un semicerchio omogeneo D di massa M e raggio R, cui è fissata rigidamente una semicirconferenza materiale γ, sovrapposta alla semicirconferenza che fa parte del bordo di D. Anche γ ha massa M (e ovviamento raggio R).
Siano A, B gli estremi del diametro che delimita D, sia O il punto medio del diametro AB e sia infine H il secondo estremo del raggio $\overrightarrow{OH}$ di D ortogonale a $\overrightarrow{AB}$ (quindi H divide γ in due parti uguali).



C è vincolato a giacere sul piano fisso $x_3 = 0$ (qui le (x_h) denotano le coordinate nel sistema fisso). Inoltre O è vincolato a appartenere alla circonferenza fissa

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

con $L > 0$. I vincoli sono lisci.
Consideriamo il sistema di riferimento solidale a C dato da $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2R}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{OH}}{R}\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2\,.$$

Sul corpo agiscono solo le forze

$$\boldsymbol{F}_H = -k\boldsymbol{X}_H\,, \qquad \boldsymbol{F}_O = \mu \boldsymbol{e}_1\,,$$

applicate nei punti indicati. Qui k, $\mu > 0$ sono costanti.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-3\pi/4{,}5\pi/4) \times (-3\pi/4{,}5\pi/4)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_O^{\mathrm{L}}(\varphi) = L\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,,$$

e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\theta\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\theta\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Indichiamo con $(\lambda_{1G}, \lambda_{2G}, \lambda_{3G})$ le coordinate del centro di massa G di C nel sistema solidale $\mathcal{S}$ e con I_{hk} gli elementi della matrice di inerzia in O relativa alla base $(\boldsymbol{u}_h)$.

$\boxed{\mathbf{01}}$ Si determini la seconda coordinata λ_{2G} del centro di massa di C in $\mathcal{S}$.
a

$$\frac{2R}{3\pi} + \frac{R}{\pi}\,.$$

b

$$\frac{2R}{3\pi} + R\,.$$

c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Si determini I_{11}, cioè il momento d'inerzia di C rispetto all'asse 1 del sistema di riferimento solidale $\mathcal{S}$.
a

$$\frac{MR^2}{10}\,.$$

b

$$\frac{3MR^2}{4}\,.$$

c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Si determini il prodotto d'inerzia I_{12} di C rispetto agli assi 1 e 2 del riferimento solidale $\mathcal{S}$.
a 0.
b $-MR^2$.

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{04}}$ Indicato con I_{33}^G il momento d'inerzia del corpo C rispetto all'asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse 3 del riferimento solidale $\mathcal{S}$, scrivere l'energia cinetica di C in forma lagrangiana.

a

$$T^{\mathrm{L}} = M\big(L^2\dot\varphi^2 + \lambda_{2G}^2\dot\theta^2 + 2L\lambda_{2G}\dot\varphi\dot\theta\sin(\varphi-\theta)\big) + \frac{I_{33}^G}{2}\dot\theta^2 \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{M}{2}\big(L^2\dot\varphi^2 + \lambda_{2G}^2\dot\theta^2\big) + \frac{I_{33}^G}{2}\dot\theta^2 \,.$$

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$ Scrivere il potenziale lagrangiano della sollecitazione direttamente applicata a C.

a

$$U^{\mathrm{L}} = -kLR\,\mathrm{arctg}(\varphi-\theta) - \mu L\sin\varphi \,.$$

b

$$U^{\mathrm{L}} = -kLR\sin(\varphi-\theta) + \mu L\cos\varphi \,.$$

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{06}}$ Le posizioni di equilibrio nel dominio assegnato per (φ,θ)

a Possono essere sia 3 che 5, in dipendenza dei parametri L, R, M, k, μ.

b Sono in numero fisso pari a 8.

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{07}}$ La posizione $(\varphi,\theta) = (\pi,\pi/2)$

a È di equilibrio stabile.

b È di equilibrio instabile.

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{08}}$ La posizione $(\varphi,\theta) = (0{,}0)$

a È di equilibrio stabile.

b È di equilibrio instabile.

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{09}}$ La posizione $(\varphi,\theta) = (0,\pi/2)$

a È di equilibrio stabile.

b È di equilibrio instabile.

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{10}}$ Esiste almeno una posizione di equilibrio dove si possono definire le piccole oscillazioni?

a No, mai.

b Ne esiste sempre almeno una.

c Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{11}}$ Il momento angolare di C rispetto al suo centro di massa è (usando la notazione introdotta nel testo)

a

$$I_{33}\dot\varphi\boldsymbol{u}_3 + I_{22}\dot\theta\boldsymbol{u}_2 \,.$$

b

$$(I_{33} - 2M\lambda_{2G}^2)\dot{\theta}\boldsymbol{u}_3 \,.$$

c Nessuna delle altre.

12 Il momento relativo al polo O delle forze attive applicate al corpo è

a

$$kRL\cos(\varphi - \theta)\boldsymbol{e}_3 \,.$$

b

$$0 \,.$$

c Nessuna delle altre.

13 Vale la conservazione dell'energia $T^{\mathrm{L}} - U^{\mathrm{L}}$?

a Sì.

b Solo negli eventuali moti periodici.

c Nessuna delle altre.

14 L'ellissoide d'inerzia di C in O

a Può essere sferico per opportuni valori di M e R.

b Non è definito perché il moto non è polare.

c Nessuna delle altre.

15 Le forze vincolari fanno complessivamente lavoro

a Strettamente negativo (se il moto non è la quiete).

b Nullo.

c Nessuna delle altre.

Prova scritta del 18/01/2024

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 18/01/2024

I.1 Un sistema di punti materiali con coordinate locali $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^{n_c}$ è soggetto a vincoli olonomi regolari nella forma

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = 0 \,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{n_c} \to \boldsymbol{R}^m \,.$$

01 Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali allora

a Il lavoro compiuto dalla reazione vincolare sul primo moto $\boldsymbol{X}_1$ è nullo.

b Vale la conservazione dell'energia.

c Nessuna delle altre.

02 Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ e quello normale $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ soddisfano
a $\dim V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} > \dim N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$.
b $\dim V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ è indipendente da $(\boldsymbol{z}, t)$.
c Nessuna delle altre.
03 Consideriamo il caso del sistema con un solo punto materiale $(\boldsymbol{X}_1, m)$. Allora
a La funzione $\boldsymbol{f}$ determina se il vincolo è scabro o liscio.
b L'ipotesi di vincolo scabro e quella dei lavori virtuali sono incompatibili.
c Nessuna delle altre.

I.2 Si consideri una lamina rettangolare C di centro O e lati a, b con $a > b$, vincolata con vincolo liscio a muoversi di moto polare di polo O.
04 Supponiamo che non vi siano forze direttamente applicate. Allora
a Esistono assi solidali per O che non possono essere di rotazione con $\boldsymbol{\omega} \neq 0$.
b L'unico moto possibile è quello di quiete.
c Nessuna delle altre.
05 Supponiamo che il momento delle forze esterne soddisfi

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = M\boldsymbol{u} \,,$$

ove M è una funzione regolare degli angoli di Eulero e delle loro derivate prime, e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale normale al piano della lamina.
a Il moto può essere di rotazione con asse parallelo a un lato della lamina.
b Il moto può essere di rotazione con asse ortogonale al piano della lamina.
c Nessuna delle altre.
06 Supponiamo che il moto sia polare per inerzia.
a Il vettore $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ ha componenti costanti in qualunque base fissa.
b Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ ha componenti costanti nella base solidale.
c Nessuna delle altre.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a una superficie regolare $S \subset \boldsymbol{R}^3$, parametrizzata da $\boldsymbol{r}(\varphi, \theta)$ con $(\varphi, \theta) \in D \subset \boldsymbol{R}^2$.
07 La componente dell'accelerazione che contiene $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\theta}$ è
a Sempre normale a S.
b Sempre tangente a S.
c Nessuna delle altre.
08 Supponiamo che il vincolo sia scabro con legge di attrito statico secondo Coulomb-Morin, e coefficiente di attrito statico $\mu > 0$. Il punto materiale sia fermo all'istante iniziale nella posizione $\boldsymbol{x}_0 \in S$, ove la normale a S è $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{e}_1$. Il punto sia soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3$ con α, β, γ costanti assegnate.
Allora il moto permane di quiete oppure no, in dipendenza da
a I valori di μ e α, ma non quelli di β e γ.
b I valori di μ, β e γ, ma non quello di α.

c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Supponiamo che l'elemento materiale sia soggetto alla forza posizionale direttamente applicata $\boldsymbol{F}(\varphi, \theta)$. Il vincolo sia liscio.
a La velocità iniziale del moto può essere prescritta ad arbitrio, purché tangente a S nella posizione iniziale.
b Le equazioni di moto si possono scrivere nella forma

$$\ddot{\varphi} = h_1(\varphi, \theta) , \qquad \ddot{\theta} = h_2(\varphi, \theta) ,$$

per opportune funzioni h_1, $h_2 : D \to \boldsymbol{R}$.
c Nessuna delle altre.

I.4 Sia C un corpo rigido non degenere. Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Consideriamo il minimo valore I_m assunto dai momenti d'inerzia di C rispetto a tutte le direzioni e tutti i poli possibili.
a In realtà il minimo potrebbe non esistere come tale, ossia essere un estremo inferiore e valere 0.
b Il minimo I_m è raggiunto nel polo dato dal centro di massa, ma non necessariamente solo in tale polo.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Fissato $\boldsymbol{X}_O$, esiste una sola terna ortonormale principale d'inerzia in $\boldsymbol{X}_O$.
a Esistono corpi per cui non è vero in nessun punto, ossia in ogni polo esistono più terne principali.
b È sempre così se $\boldsymbol{X}_O$ non è il centro di massa.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{12}}$ La matrice del tensore d'inerzia in $\boldsymbol{X}_O$ relativa alla base $(\boldsymbol{u}_h)$
a Può avere un autovalore nullo.
b Deve essere costante nel tempo.
c Nessuna delle altre.

I.5 Si consideri un moto unidimensionale soggetto a forza posizionale di potenziale

$$U(x) = -ae^{(x^2-1)^2} , \qquad x \in \boldsymbol{R} ,$$

ove $a > 0$ è una costante assegnata. Nel seguito ci si riferisce al diagramma di fase del moto.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Esistono orbite illimitate?
a Sì, indipendentemente dal valore di a.
b No, indipendentemente dal valore di a.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Esistono orbite relative a moti periodici?
a Sì, indipendentemente dal valore di a.
b No, indipendentemente dal valore di a.

c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Esistono sia punti di equilibrio stabile che di equilibrio instabile?
a Sì, indipendentemente dal valore di a.
b No, indipendentemente dal valore di a.
c Nessuna delle altre.

Prova scritta del 02/02/2024

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 02/02/2024

I.1 Sia C un corpo rigido non degenere, soggetto a forze esterne di momento $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$. Qui $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è un sistema di riferimento solidale al corpo rigido, con $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ principale d'inerzia in O. Inoltre $\boldsymbol{X}_O$ è fisso, ossia il moto è polare di polo O.
I momenti I_{hh} sono relativi al sistema $\mathcal{S}$ e denotiamo la velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \sum_{h=1}^{3} \omega_h(t)\boldsymbol{u}_h(t)\,.$$

$\boxed{\mathbf{01}}$ Se $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = 0$ per ogni t allora
a L'energia cinetica T è costante.
b Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_O$ è solidale.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Sia $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \alpha\boldsymbol{u}_3$, con $\alpha > 0$ costante, e sia $I_{11} = I_{22} \neq I_{33}$.
a Se $\omega_3(0) = 0$, allora $\omega_3(t) = 0$ per ogni $t > 0$.
b Se $(\omega_1(0), \omega_2(0)) = (0{,}0)$, allora $(\omega_1(t), \omega_2(t)) = (0{,}0)$ per ogni $t > 0$.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Quale delle seguenti condizioni garantisce da sola che tutti i moti siano rotazioni?
a $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = 0$ per ogni t.
b $I_{11} = I_{22} = I_{33}$.
c Nessuna delle altre.

I.2 Si consideri un sistema $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$ di n elementi materiali soggetto a vincoli olonomi regolari fissi, con $\ell < 3n$ gradi di libertà.
$\boxed{\mathbf{04}}$ La funzione

$$\frac{\partial T^{\text{L}}}{\partial \dot{q}_1}$$

a Dipende certamente da qualche $\dot{q}_h$.
b Dipende certamente da qualche q_h.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{05}}$ Supponiamo che $\ell = 3$ e $\boldsymbol{q} \in Q = \boldsymbol{R}^3$. Dire quale delle seguenti può essere l'energia cinetica (per ogni valore di $\boldsymbol{q}$):
a

$$T^{\mathrm{L}} = (q_1^2 + 1)\dot{q}_1^2 + (\operatorname{arctg} q_2)^2 \dot{q}_2^2 + e^{q_3}\dot{q}_3^2 \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \dot{q}_1^2 + \frac{\dot{q}_2^2}{1 + q_2^2} + e^{q_3}\dot{q}_3^2 + e^t \dot{q}_1 \,.$$

c Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{06}}$ Supponiamo che $\ell = 2$, $\boldsymbol{q} \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e le componenti lagrangiane delle forze siano

$$Q_1 = \alpha t q_1 q_2^2 \,, \qquad Q_2 = \alpha t q_1^2 q_2 + 1 \,,$$

ove $\alpha \in \boldsymbol{R}$ è una costante assegnata.
a Il potenziale lagrangiano non esiste, salvo il caso $\alpha = 0$.
b Il potenziale lagrangiano esiste, per ogni assegnato $\alpha \in \boldsymbol{R}$.
c Nessuna delle altre.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2^2 \,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,.$$

Qui le (x_i) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso, e α, β sono costanti positive assegnate. Il punto è soggetto alla forza peso $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3$.
$\boxed{\textbf{07}}$ Il vincolo sia scabro secondo la legge di attrito statico di Coulomb-Morin con coefficiente di attrito $\mu > 0$. Allora l'insieme delle posizioni ove è possibile l'equilibrio, in dipendenza dei valori dei parametri α, β, μ,
a Può essere vuoto.
b In ogni caso è limitato.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{08}}$ Il vincolo sia liscio. Allora l'insieme delle possibili posizioni di equilibrio
a Può essere vuoto.
b Può essere illimitato.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{09}}$ Il vincolo sia liscio. Allora
a La reazione vincolare su $\boldsymbol{X}$ fa lavoro nullo.
b L'energia meccanica in genere non si conserva.
c Nessuna delle altre.

I.4 Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi regolari fissi, con numero dei gradi di libertà $\ell = 2$. Il sistema è soggetto a forze direttamente applicate conservative. Vale l'ipotesi dei lavori virtuali.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia dato il potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}} = \alpha q_1^2 + 2\gamma q_1 q_2 + \beta q_2^2 \,,$$

con α, β, $\gamma \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ costanti assegnate. In dipendenza della scelta di α, β, γ
a Esiste sempre una posizione dove sono definite le piccole oscillazioni.
b Non esiste mai una posizione dove sono definite le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Sia dato il potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}} = \alpha q_1^4 + 2\gamma q_1^2 q_2^2 + \beta q_2^4 \,,$$

con α, β, γ costanti negative assegnate. In dipendenza della scelta di α, β, γ
a In $(q_1, q_2) = (0,0)$ sono sempre definite le piccole oscillazioni.
b In $(q_1, q_2) = (0,0)$ non sono mai definite le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che in $(q_1, q_2) = (0,0)$ siano definite le piccole oscillazioni. Allora l'energia cinetica ridotta T^* in tale posizione
a È una forma quadratica definita positiva nelle $(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$, a coefficienti indipendenti dalle (q_1, q_2), ma in generale dipendenti da t.
b Dipende sia da $\dot{q}_1$ che da $\dot{q}_2$, ma non dipende mai da (q_1, q_2).
c Nessuna delle altre.

I.5 Un moto unidimensionale $m\ddot{x} = U'(x)$ ha potenziale

$$U(x) = x(x-a)^2 \,, \qquad x \in \boldsymbol{R} \,,$$

con $a > 0$ costante assegnata.
Nel seguito ci riferiamo al diagramma di fase del moto.
$\boxed{\mathbf{13}}$ I punti di equilibrio sono
a Almeno uno stabile e uno instabile.
b Tutti instabili.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Le orbite nel piano delle fasi
a Sono tutte illimitate, a parte quelle corrispondenti agli eventuali punti di equilibrio.
b Ne esistono sia di limitate che di illimitate, a prescindere da quelle corrispondenti agli eventuali punti di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Assegnato ad arbitrio $(\bar{x}, \bar{p})$ nel piano delle fasi
a Esiste una unica orbita che passa per $(\bar{x},\bar{p})$.
b Se $\bar{p} = 0$ possono esistere più orbite diverse che passano per $(\bar{x},\bar{p})$.
c Nessuna delle altre.

Prova scritta del 12/06/2024

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 12/06/2024

I.1 Un corpo rigido non degenere C è vincolato a muoversi di moto polare con polo O.
Indichiamo con $\boldsymbol{\sigma}_O$ il tensore d'inerzia di C in O e con $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ il momento delle forze esterne in O (comprese quindi le reazioni vincolari).
$\boxed{\textbf{01}}$ Si ha $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(\bar{t}) = 0$ se nell'istante $\bar{t}$ vale
a $\boldsymbol{\omega}(\bar{t}) = 0$.
b Il vincolo è liscio.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{02}}$ Sia $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) = 0$ per ogni t. Allora tutti i moti sono periodici nel caso:
a È sempre vero.
b Se il corpo C ha geometria delle masse speciale.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{03}}$ Siano $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{R}^3$. Allora vale sempre
a $\boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 \geq 0$.
b $\boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1$.
c Nessuna delle altre.

I.2 Consideriamo il vincolo olonomo

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,,$$

con $\boldsymbol{f} : A \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^m$, $A \subset \boldsymbol{R}^6$ aperto,

$$\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_6)\,.$$

Nel seguito si dia per nota l'esistenza di configurazioni compatibili con il vincolo.
Inoltre denotiamo

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{i=1}^{3} z_i \boldsymbol{e}_i\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = \sum_{i=1}^{3} z_{i+3} \boldsymbol{e}_i\,.$$

$\boxed{\textbf{04}}$ Il vincolo sia

$$\begin{aligned} z_1 - z_4^2 &= 0\,, \\ z_2 - z_5 &= 0\,, \\ z_1^2 + z_2^2 - a(t^2+1) &= 0\,, \end{aligned}$$

ove $a > 0$ è una costante; qui $A = \boldsymbol{R}^6$.
a Il vincolo è olonomo regolare in ogni configurazione compatibile.
b Il vincolo è olonomo regolare solo in alcune delle configurazioni compatibili, ma non in tutte.
c Nessuna delle altre.
05 Si considerino due moti $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ come sopra, vincolati come segue:

- $\boldsymbol{X}_1$ e $\boldsymbol{X}_2$ sono allineati con l'origine (0,0,0).
- La proiezione ortogonale di $\boldsymbol{X}_1$ sul piano $x_3 = 0$ ha modulo $R > 0$ costante.

I vincoli sono espressi come segue, almeno in qualche aperto $A \subset \boldsymbol{R}^6$.
a

$$\begin{aligned} z_2 z_6 - z_3 z_5 &= 0\,, \\ z_1 z_5 - z_2 z_4 &= 0\,, \\ z_1^2 + z_2^2 - R^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} z_1 z_5 - z_2 z_4 &= 0\,, \\ z_3 &= 0\,, \\ z_1^2 + z_2^2 - R^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

c Nessuna delle altre.
06 Se $\boldsymbol{f}$ è olonomo regolare, allora lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ soddisfa in genere
a $\dim V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} > m$.
b $\dim V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} = m$.
c Nessuna delle altre.

I.3 Consideriamo un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \dots, n$. Su ciascun punto è applicata la forza $\boldsymbol{F}_i$. Non sono applicati vincoli.
07 Supponiamo che $n = 2$ e

$$\boldsymbol{F}_1 = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2)\,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = k(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1)\,,$$

con $k > 0$ costante. Allora
a Il sistema di forze è sempre conservativo.
b Il sistema di forze non è mai conservativo.
c Nessuna delle altre.
08 Sia $n = 2$. Le equazioni globali della dinamica determinano il moto del sistema, assegnate le condizioni iniziali?
a Sì se le forze $\boldsymbol{F}_i$ sono posizionali.

b Sì se il moto è piano.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Supponiamo che le forze direttamente applicate siano date da

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^1 + \boldsymbol{F}_i^2 \,,$$

con $(\boldsymbol{F}_i^1)$ sistema di forze conservativo con potenziale U, e

$$\boldsymbol{F}_i^2 = b_i \dot{\boldsymbol{X}}_i \times \boldsymbol{e}_3 \,,$$

ove i $b_i \in \boldsymbol{R}$ sono costanti. Allora:
a L'energia meccanica $T - U$ si conserva lungo ciascun moto.
b L'energia meccanica $T - U$ non si conserva lungo ciascun moto, salvo il caso $b_i = 0$ per ogni i.
c Nessuna delle altre.

I.4 Consideriamo un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ vincolato al piano $x_3 = 0$ con vincolo liscio (non ci sono altri vincoli). Denotiamo con $\boldsymbol{\psi}(s)$ la sua traiettoria e con $s(t)$ la sua legge oraria. Si supponga che $\boldsymbol{\psi}(s)$ sia una curva regolare con terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e curvatura $k > 0$.
Supponiamo sempre $\boldsymbol{X}(0) = 0$ e $s(0) = 0$.
Il punto è soggetto a una forza direttamente applicata posizionale $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Supponiamo che $\dot{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{v}_0 \neq 0$. Allora
a $\boldsymbol{T}(0) = \boldsymbol{v}_0$.
b $\boldsymbol{N}(0) \cdot \boldsymbol{v}_0 = 0$.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che $\dot{\boldsymbol{X}}(0) = c\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{F}(0) = \lambda \boldsymbol{e}_1$, con $c > 0$, $\lambda > 0$ costanti. Allora
a $\boldsymbol{N}(0) \cdot \boldsymbol{e}_1 > 0$.
b $\boldsymbol{N}(0) \cdot \boldsymbol{e}_1 < 0$.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che $\dot{\boldsymbol{X}}(0) = c\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{F}(0) = \lambda \boldsymbol{e}_1$, con $c > 0$, $\lambda > 0$ costanti. Allora l'accelerazione all'istante iniziale $\boldsymbol{a}(0)$ soddisfa
a $\boldsymbol{a}(0) = \ddot{s}(0)\boldsymbol{T}(0)$.
b $\boldsymbol{a}(0) = 0$.
c Nessuna delle altre.

I.5 Un sistema di elementi materiali è vincolato da vincoli olonomi regolari. Sia ℓ il numero dei gradi di libertà. Indichiamo con $\boldsymbol{q} = (q_1, \dots, q_\ell) \in Q$ le coordinate lagrangiane.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Supponiamo che le forze espresse in coordinate lagrangiane risultino funzioni solo di $\boldsymbol{q}$ (e non di $\dot{\boldsymbol{q}}$ e di t). Si può scrivere la lagrangiana del sistema?
a Sì, sempre.

b In genere no, ma sì se $\ell \leq 6$.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Le equazioni di Lagrange
a Contengono sempre il potenziale lagrangiano.
b Sono sempre equazioni differenziali del secondo ordine.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{15}}$ È possibile che nelle equazioni di Lagrange non compaiano le seguenti quantità (intese qui come variabili indipendenti)?
a Può non comparire $\ddot{\boldsymbol{q}}$.
b Può non comparire $\boldsymbol{q}$.
c Nessuna delle altre.

Prova scritta del 05/07/2024

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 05/07/2024

I.1 Si consideri il moto unidimensionale di equazione

$$m\ddot{x} = f(x) = U'(x)\,,$$

con $U \in C^2(\boldsymbol{R})$.
$\boxed{\mathbf{01}}$ Se $U'(0) = 0$, allora in $x = 0$ si possono definire le piccole oscillazioni sotto la seguente ipotesi:
a $U''(0) > 0$.
b I vincoli sono fissi.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Se esiste un punto x_0 di massimo isolato per U, allora nel piano delle fasi
a Esistono orbite limitate, diverse da quelle degeneri relative a punti di equilibrio.
b Esistono orbite illimitate.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Sia

$$U(x) = \frac{x^2}{1+x^2}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Allora il numero di orbite nel piano delle fasi corrispondenti al livello energetico $E = 0$ è

a 3.
b 5.
c Nessuna delle altre.

I.2 Un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie S di equazione

$$x_3 = x_1^4 + x_2^2\,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2\,,$$

con vincolo scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico, con coefficiente di attrito $\mu_s > 0$.
$\boxed{\mathbf{04}}$ La forza applicata a $\boldsymbol{X}$ è $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{e}_3$, $\alpha > 0$ costante. Allora l'insieme delle posizioni di equilibrio
a È vuoto.
b È limitato, ma non vuoto.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{05}}$ La forza applicata a $\boldsymbol{X}$ è $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{e}_1$, $\alpha > 0$ costante. Allora l'insieme delle posizioni di equilibrio
a È limitato ma non vuoto.
b È illimitato.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{06}}$ La forza applicata a $\boldsymbol{X}$ è $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{e}_2$, $\alpha > 0$ costante. Allora il punto (1,1,2) è di equilibrio
a Se $\mu_s > 0$ è abbastanza grande.
b Se $\alpha > 0$ è abbastanza piccolo.
c Nessuna delle altre.

I.3 Si consideri un sistema di punti materiali soggetti a vincoli olonomi regolari. Le coordinate lagrangiane sono $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \boldsymbol{R}^3$.
$\boxed{\mathbf{07}}$ L'energia cinetica T^{L} può essere data da

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha \dot{q}_1^2 + \beta q_2^2 \dot{q}_2^2 + \gamma \dot{q}_3^2\,,$$

con α, β, $\gamma > 0$ costanti?
a No.
b Solo se i vincoli sono fissi.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{08}}$ L'energia cinetica T^{L} può essere data da

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha \dot{q}_1^2 + \beta \dot{q}_2^2 + \gamma e^{\delta q_2} \dot{q}_3^2\,,$$

con α, β, $\gamma > 0$ e $\delta \in \boldsymbol{R}$ costanti?
a Solo se $\delta > 0$.
b Solo se vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Se il potenziale lagrangiano esiste e la lagrangiana è, per assegnate costanti α, β, γ, $\delta > 0$:

$$\mathcal{L} = \alpha \dot{q}_1^2 + \beta \dot{q}_2^2 + \gamma \dot{q}_3^2 + e^{\delta t} q_1\,,$$

allora, assumendo l'ipotesi dei lavori virtuali:
a La funzione
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)$$
si mantiene costante lungo i moti.
b $Q_1(\boldsymbol{q}, t) = 0$.
c Nessuna delle altre.

I.4 Un corpo rigido non degenere C si muove liberamente soggetto a forze che soddisfano le usuali condizioni di regolarità.
Si denota il moto del centro di massa G con $\boldsymbol{X}_G = (x_{1G}, x_{2G}, x_{3G})$.
$\boxed{\textbf{10}}$ Le equazioni globali della dinamica determinano il moto del corpo:
a Per arbitrarie condizioni iniziali.
b Solo per particolari condizioni iniziali.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{11}}$ Supponiamo che la risultante delle forze esterne $\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}$ sia tale che
$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0\,, \qquad \text{sempre.}$$
Allora
a La componente $x_{1G}(t)$ del moto del centro di massa è un polinomio di primo grado in t.
b La componente $x_{2G}(t)$ del moto del centro di massa è un polinomio di primo grado in t.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{12}}$ Supponiamo che il momento delle forze esterne rispetto al centro di massa soddisfi
$$\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}} = 0\,, \qquad \text{sempre.}$$
Allora:
a L'energia cinetica del corpo rimane costante.
b La velocità angolare del corpo rimane costante.
c Nessuna delle altre.

I.5 C è un corpo rigido non degenere.
Si denota il moto del centro di massa G con $\boldsymbol{X}_G = (x_{1G}, x_{2G}, x_{3G})$.
$\boxed{\textbf{13}}$ Sia C un cubo solido omogeneo. Allora:
a Esistono punti $P \neq G$ dello spazio ove i momenti principali di inerzia sono tutti diversi tra di loro, ma questi punti sono solo in numero finito.
b In ogni punto $P \neq G$ dello spazio due momenti principali di inerzia sono uguali tra di loro.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{14}}$ Sia C un disco (lamina a forma di cerchio). Allora:
a In qualunque punto di C la normale al piano di C è principale.
b Per opportuni valori del raggio di C, tutti i momenti principali in G sono uguali tra di loro.

c Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{15}}$ C è l'unione di due sfere solide e omogenee C_1 e C_2, di raggio e massa diversi, tangenti ed esterne l'una all'altra (come due bilie che si toccano).
a Il centro di massa di C non appartiene a C.
b La matrice di inerzia di C in qualunque punto P solidale è la somma (componente per componente) delle due matrici di inerzia in P di C_1 e C_2.
c Nessuna delle altre.

Prova scritta del 06/09/2024

MECCANICA RAZIONALE ING. MECCANICA

Prova scritta del 06/09/2024

I.1 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia di polo O.
$\boxed{\textbf{01}}$ L'ellissoide d'inerzia mobile di C in O
a Rotola senza strisciare su un piano ortogonale a $\boldsymbol{\omega}$.
b È di fatto immobile nel sistema di riferimento fisso, per gli integrali primi del moto.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{02}}$ Sapendo $|\boldsymbol{\omega}(0)|$ è possibile dare una stima

$$c_1|\boldsymbol{\omega}(0)| \leq |\boldsymbol{\omega}(t)| \leq c_2|\boldsymbol{\omega}(0)| \,, \quad \text{per ogni } t.$$

a Sì, con c_1 e $c_2 > 0$ dipendenti solo dalla geometria delle masse del rigido.
b No, $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ può divenire illimitato.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{03}}$ Se il moto è una rotazione allora
a La rotazione è uniforme.
b La rotazione può non essere uniforme, ma solo se il suo asse è principale d'inerzia corrispondente al momento d'inerzia di valore intermedio.
c Nessuna delle altre.

I.2 Sia C un corpo rigido non degenere, sottoposto a una distribuzione di forze soggetta alle usuali ipotesi di regolarità.
Si scelgano come coordinate le 3 coordinate cartesiane (x_{1G}, x_{2G}, x_{3G}) del centro di massa e i 3 angoli di Eulero (θ, ϕ, ψ).
$\boxed{\textbf{04}}$ Le equazioni globali della dinamica sono in genere

a Un sistema 6×6 di equazioni differenziali del secondo ordine completamente accoppiato.
b Due sistemi 3 × 3 di equazioni differenziali del secondo ordine disaccoppiati l'uno dall'altro.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Volendo conoscere solo il moto del centro di massa, date le condizioni iniziali,
a La prima equazione globale è sufficiente.
b Occorrono entrambe le equazioni
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Una scelta del sistema degli angoli di Eulero copre tutte le possibili posizioni del rigido?
a No, ne lascia fuori infinite.
b Sì.
c Nessuna delle altre.

I.3 Sia $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \dots, n$, un sistema di elementi materiali vincolati da vincoli olonomi regolari, con ℓ gradi di libertà. Denotiamo con $\boldsymbol{q} = (q_1, \dots, q_\ell) \in Q$ le coordinate lagrangiane.
$\boxed{\mathbf{07}}$ L'energia cinetica lagrangiana può dipendere esplicitamente dal tempo?
a No, se le forze direttamente applicate sono conservative.
b No, se i vincoli sono fissi.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Quale delle seguenti può essere la rappresentazione lagrangiana della velocità di $\boldsymbol{X}_1$?
a $\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{L}} = (\dot{q}_1 + at)\boldsymbol{e}_1$, $a > 0$ costante.
b $\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{L}} = q_1 \dot{q}_1^2 \boldsymbol{e}_1$.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Se si assume l'ipotesi dei lavori virtuali
a Sicuramente si può scrivere la funzione lagrangiana del sistema.
b Sicuramente si conserva l'energia meccanica.
c Nessuna delle altre.

I.4 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$ con $k(s) > 0$. Indichiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva, con $\boldsymbol{F}$ la forza direttamente applicata e con $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ la reazione vincolare.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Il vincolo sia scabro e sul punto agisca forza direttamente applicata nulla.
a In genere l'accelerazione all'istante iniziale dipende dal coefficiente d'attrito.
b Il moto deve essere di quiete.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Il vincolo sia scabro. Allora

a La componente tangente della reazione vincolare all'istante iniziale è indipendente dal coefficiente d'attrito.
b La componente binormale della reazione vincolare all'istante iniziale è indipendente dal coefficiente d'attrito.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Il vincolo sia liscio e la forza direttamente applicata sia nulla. Si assuma $\dot{s}(t_0) \neq 0$. Allora
a $\dot{s}(t) = \dot{s}(t_0)$ per ogni t.
b La reazione vincolare è nulla.
c Nessuna delle altre.

I.5 Si considerino le due terne mobili $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, & \boldsymbol{w}_1 &= \boldsymbol{u}_1\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, & \boldsymbol{w}_2 &= \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + \sin\theta \boldsymbol{u}_3\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{w}_3 &= -\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + \cos\theta \boldsymbol{u}_3\,, \end{aligned}$$

con φ, θ opportune funzioni C^∞ del tempo. Indichiamo con $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$ la terna fissa.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Vale
a $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \dot{\theta}\boldsymbol{w}_1$.
b $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \dot{\theta}\boldsymbol{w}_1 + \dot{\varphi}(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 - \sin\varphi \boldsymbol{u}_2)$.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Vale
a $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = \dot{\theta}\boldsymbol{w}_1 + \dot{\varphi}(\sin\theta \boldsymbol{w}_2 + \cos\theta \boldsymbol{w}_3)$.
b $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{w}_1$.
c Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che $\theta(t) = \alpha t + \theta_0$ con $\alpha > 0$ e $\theta_0 \in \boldsymbol{R}$ costanti. Allora
a Il moto di $\mathcal{N}$ rispetto a $\mathcal{M}$ è una rotazione uniforme.
b Il moto di $\mathcal{N}$ rispetto a $\mathcal{P}$ è una rotazione.
c Nessuna delle altre.

Prova scritta del 24/01/2025

Modelli Matematici per la Meccanica
Ing. Aerospaziale

Prova scritta del 24/01/2025

I.1 Si consideri il sistema dinamico non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\alpha + y^2) - 4y, \\ \dot{y} &= y(\alpha - x^2) - y^3 + 4x. \end{aligned}$$

e si risponda alle seguenti domande.
$\boxed{\mathbf{01}}$ Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Per $\alpha = 0$ l'origine è un centro (quindi l'equilibrio è stabile).
b Per $\alpha = 0$ l'origine è un fuoco repulsivo (quindi l'equilibrio è instabile).
c Per $\alpha = 0$ l'origine è un nodo repulsivo (quindi l'equilibrio è instabile).
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Se il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine ha condizioni iniziali $x(0) = -y(0) = R$ allora
a $x^2(t) + y^2(t) = 2R^2$ è un integrale primo del moto.
b $x(t) = Re^t + 2Re^{-2t}$, $y(t) = Re^{-t} - 2Re^{-2t}$ è soluzione.
c La soluzione soddisfa $x(t) = -y(t)$.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{03}}$ L'integrale generale del sistema linearizzato nell'intorno dell'origine è
a $x(t) = e^{\alpha t}\big(c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)\big)$, $y(t) = e^{\alpha t}\big(c_1 \sin(4t) - c_2 \cos(4t)\big)$.
b $x(t) = e^{\alpha t}\big(c_1 \sin(4t) + c_2 \cos(4t)\big)$, $y(t) = e^{\alpha t}\big(c_1 \sin(4t) + c_2 \cos(4t)\big)$.
c

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\big(\cos((\alpha-4)t) + \sin((\alpha-4)t)\big) + c_2\big(\sin((\alpha+4)t) + \cos((\alpha+4)t)\big) \\ -c_1\big(\cos((\alpha+4)t) + \sin((\alpha+4)t)\big) - c_2\big(\sin((\alpha-4)t) + \cos((\alpha-4)t)\big) \end{pmatrix}.$$

d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{04}}$ La matrice esponenziale per il sistema linearizzato nell'origine è
a

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos(4t) & -e^{\alpha t}\sin(4t) \\ e^{\alpha t}\sin(4t) & e^{\alpha t}\cos(4t) \end{pmatrix}.$$

b

$$\begin{pmatrix} e^{-\alpha t}\cos(4t) & -e^{-\alpha t}\sin(4t) \\ e^{-\alpha t}\sin(4t) & e^{-\alpha t}\cos(4t) \end{pmatrix}.$$

c

$$\begin{pmatrix} \cos((\alpha+4)t) & \sin((\alpha-4)t) \\ -\sin((\alpha-4)t) & \cos((\alpha+4)t) \end{pmatrix}.$$

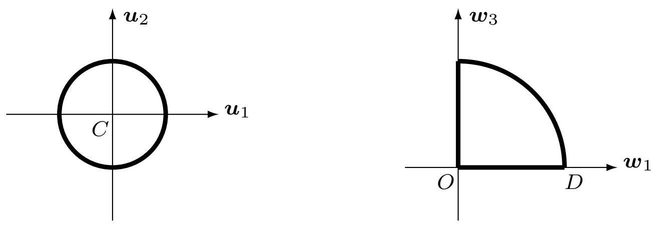
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Si consideri l'equazione differenziale

$$\dot{y} = -y^3 .$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera per questa equazione?
a Il tempo di percorrenza $\Delta\tau$ tra $y = 2$ ed $y = 1$ è $\Delta\tau = 3/8$.
b Tutte le soluzioni cambiano di segno almeno una volta.
c Il tempo di percorrenza $\Delta\tau$ tra $y = -2$ ed $y = 0$ soddisfa $\Delta\tau < 3/8$.
d Nessuna delle altre.

I.2

Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un disco omogeneo H di centro C, massa $M > 0$ e raggio $R > 0$ e da una lamina omogenea K a forma di settore circolare di centro O, massa M, raggio R e angolo al centro $\pi/2$. In figura il sistema di riferimento $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_C, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al disco mentre il sistema di riferimento $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_h))$ è solidale alla lamina K. Il punto D è tale che $\overrightarrow{OD} = R\boldsymbol{w}_1$.



Il riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 2 verticale ascendente. Il disco H è vincolato a muoversi nel piano fisso 1–2 rotolando senza strisciare sull'asse 1. La lamina K è vincolata a muoversi nel piano fisso 1–3 mantenendo l'asse solidale 2 costantemente sovrapposto all'omologo asse fisso 2 e il punto solidale O nell'origine del sistema di riferimento fisso.
La sollecitazione attiva agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ che si scambiano i punti D e C.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-3\pi/4, 5\pi/4)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_C^{\mathrm{L}}(q) = q\boldsymbol{e}_1 + R\boldsymbol{e}_2$$

e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{w}_3 &= \sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Ovvero q è la coordinata 1 relativa al riferimento fisso del punto di contatto tra disco e retta d'appoggio, mentre φ è l'anomalia associata all'angolo di primo lato l'asse 1 del riferimento fisso, secondo lato l'asse 1 del riferimento $\mathcal{S}_2$ e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 2 fisso. Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento fisso.

$\boxed{\textbf{06}}$
Quali sono le coordinate del centro di massa della lamina K rispetto al riferimento solidale $\mathcal{S}_2$?

a

$$\Big(\frac{4}{3\pi}R, 0, \frac{4}{3\pi}R\Big) \,.$$

b

$$\Big(\frac{1}{2}R, 0, \frac{1}{2}R\Big) \,.$$

c

$$\Big(\frac{2}{3\pi}R, 0, \frac{1}{2}R\Big) \,.$$

d nessuna delle altre

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11}^O e I_{22}^O della lamina K relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato $\mathcal{S}_2$?

a
$$I_{11}^O = \frac{1}{4} M R^2 \,, \qquad I_{22}^O = \frac{1}{2} M R^2 \,.$$
b
$$I_{11}^O = \frac{1}{16} M R^2 \,, \qquad I_{22}^O = \frac{1}{8} M R^2 \,.$$
c
$$I_{11}^O = \frac{1}{2} M R^2 \,, \qquad I_{22}^O = \frac{1}{2} M R^2 \,.$$
d nessuna delle altre

08

Quanto vale il prodotto d'inerzia della lamina K relativo agli assi 1 e 3 del riferimento solidale considerato?

a $I_{13}^O = -\frac{1}{2\pi} M R^2$

b $I_{13}^O = 0$

c $I_{13}^O = \frac{2}{3} M R^2$

d nessuna delle altre

09

Dove si trova il centro di istantanea rotazione del disco H?

a nessuna delle altre

b nel suo centro di massa.

c nell'origine del riferimento fisso.

d nel punto di coordinate $(0, R, 0)$ rispetto al riferimento fisso.

10

Quanto vale l'energia cinetica del disco H?

a $\frac{3}{4} M \dot{q}^2$

b $\frac{3}{2} M \dot{q}^2$

c $\frac{3}{2} M R^2 \dot{\varphi}^2$

d nessuna delle altre

11

Si scrivano le equazioni di Lagrange del sistema.

a
$$\frac{3}{2} M \ddot{q} + kq - kR\cos\varphi = 0 \,, \qquad \frac{1}{2} M R^2 \ddot{\varphi} + kRq \sin\varphi = 0 \,.$$
b
$$\frac{1}{2} M \ddot{q} + kq - kR\cos\varphi = 0 \,, \qquad \frac{4}{3} M R^2 \ddot{\varphi} + kRq \cos\varphi = 0 \,.$$
c
$$\frac{3}{4} M R^2 \ddot{\varphi} + kq - kR\cos\varphi = 0 \,, \qquad \frac{1}{8} M R^2 \ddot{q} + kRq \sin\varphi = 0 \,.$$
d nessuna delle altre

12

Quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?

a nessuna delle altre
b A seconda del valore dei parametri M, R e k possono essere due o quattro.
c Due, qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Tre, qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

13

Si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = 0$ e $\varphi = \pi/2$.

a È di equilibrio instabile.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile.
d nessuna della altre

14

Determinare le frequenze normali di oscillazione $\omega_h/(2\pi)$ relative alla configurazione $q = R$ e $\varphi = 0$.

a $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{M}}$
b $\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{2M}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2M}}$
c $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$
d nessuna delle altre

15

Determinare il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sulla lamina K all'istante $t = 0$, in cui il sistema viene posto con atto di moto nullo nella configurazione di equilibrio $q = R$ e $\varphi = 0$.

a $-\frac{4}{3\pi}MgR\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{4}{3\pi}MgR - kR^2\right)\boldsymbol{e}_3$
b 0
c $-\frac{1}{4}MgR\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{3}{4}MgR - kR^2\right)\boldsymbol{e}_3$
d nessuna delle altre

Prova scritta del 18/02/2025

Modelli Matematici per la Meccanica
Ing. Aerospaziale

Prova scritta del 18/02/2025

I.1 Si consideri il sistema dinamico non lineare

$$\dot{x} = \alpha x + y\,,$$
$$\dot{y} = -x + \frac{1}{6}x^4\,,$$

e si risponda alle seguenti domande:

$\boxed{\mathbf{01}}$

Sia $\alpha = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a L'origine è un punto di equilibrio stabile.
b L'origine è un punto di equilibrio instabile.
c L'origine non è un punto di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{02}}$

Sia $\alpha = 0$. Un integrale primo del sistema dinamico è
a $W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{30}x^5$.
b $W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4$.
c $W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}y^5$.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{03}}$

Sia $\alpha = 0$. Per qualunque dato di Cauchy $(x_0, y_0) \neq (0{,}0)$, con $x_0 \in (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ e $y_0 \in (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$, allora
a L'orbita è chiusa.
b Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty\,.$$

c Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} (x(t), y(t)) = (0{,}0)\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{04}}$

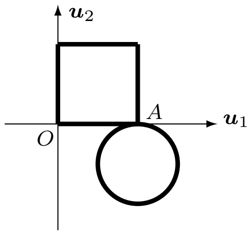
Sia $\alpha = 2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera per il sistema linearizzato nell'origine?
a L'origine è un nodo repulsivo (quindi l'equilibrio è instabile).
b L'origine è un fuoco repulsivo (quindi l'equilibrio è instabile).
c L'origine è un centro (quindi l'equilibrio è stabile).
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{05}}$

Sia $\alpha = 2$. La soluzione del sistema linearizzato nell'origine, con condizione di Cauchy $x_0 := x(t = 0) = 2$ e $y_0 := y(t = 0) = -1$, si legge
a $x(t) = e^t(2 + t)$, $y(t) = -e^t(1 + t)$.
b $x(t) = e^t + e^t(t^2 + t^3)$, $y(t) = e^t(t + 1)$.
c $x(t) = 2\sin(t) - \cos(t + 1)$, $y(t) = -\cos(t + 1) + 2\sin(t)$
d Nessuna delle altre.

I.2

Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido omogeneo K di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto saldando, come illustrato in figura, una lamina quadrata omogenea Q di lato di lunghezza $2L$ a un disco omogeneo D di raggio L. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo. Il punto di saldatura A e il centro C del disco sono tali che $\overrightarrow{OA} = 2L\boldsymbol{u}_1$ e $\overrightarrow{OC} = 2L\boldsymbol{u}_1 - L\boldsymbol{u}_2$.



Il riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_i))$ ha asse 2 verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo l'asse solidale 2 costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 2, e il punto solidale O coincidente con l'origine del sistema fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ si muove sull'asse 1 fisso.
La sollecitazione attiva agente sul sistema è costituita dal peso, dalla sollecitazione elastica di costante $k > 0$ che si scambiano i punti A e $\boldsymbol{X}$ ossia

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{el},\boldsymbol{X}} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_A) = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{el},A}\,,$$

e dalla forza costante $\boldsymbol{F}_{1,\boldsymbol{X}} = \lambda\boldsymbol{e}_1$, con $\lambda > 0$ costante, agente sull'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi/2{,}3\pi/2)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(q) = q\boldsymbol{e}_1$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_3 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_3 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1\,,\\
\boldsymbol{u}_1 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_3 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,.
\end{aligned}$$

Ovvero q è la coordinata 1 relativa al riferimento fisso del punto $\boldsymbol{X}$ e φ è l'anomalia associata all'angolo di primo lato l'asse 1 del riferimento fisso e secondo lato l'asse 1 del riferimento solidale.
Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento fisso.

$\boxed{\textbf{06}}$

Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo K rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_i))$?

a $\lambda_{1G} = \frac{4+2\pi}{4+\pi}L$, $\lambda_{2G} = \frac{4-\pi}{4+\pi}L$, $\lambda_{3G} = 0$
b $\lambda_{1G} = \frac{4\pi}{4+\pi}L$, $\lambda_{2G} = \frac{-4+\pi}{4+\pi}L$, $\lambda_{3G} = 0$
c $\lambda_{1G} = 2L$, $\lambda_{2G} = \frac{4-\pi}{4+\pi}L$, $\lambda_{3G} = 0$
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{07}}$

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo K relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?
a $I_{11} = \frac{1}{4+\pi}\left(\frac{16}{3} + \frac{5}{4}\pi\right)ML^2$, $I_{22} = \frac{1}{4+\pi}\left(\frac{16}{3} + \frac{17}{4}\pi\right)ML^2$.
b $I_{11} = \frac{1}{4-\pi}\left(\frac{7}{3} + \frac{3}{4}\pi\right)ML^2$, $I_{22} = \frac{1}{4-\pi}\left(\frac{7}{3} + \frac{9}{4}\pi\right)ML^2$.
c $I_{11} = \frac{1}{4+\pi}\left(\frac{7}{3} + \frac{3}{4}\pi\right)ML^2$, $I_{22} = \frac{1}{4+\pi}\left(\frac{7}{3} + \frac{9}{4}\pi\right)ML^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Quanto vale il momento angolare $\boldsymbol{L}_O$ del corpo K?
a Nessuna delle altre.
b $\frac{1}{4+\pi}(-4 + 2\pi)ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{4+\pi}\left(\frac{16}{3} + \frac{17}{4}\pi\right)ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3$.
c $\frac{1}{4+\pi}\left(\frac{7}{3} + \frac{9}{4}\pi\right)ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1$.
d $\frac{1}{4+\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\pi\right)ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2$.

09

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?
a $\frac{1}{2}\frac{1}{4+\pi}\left(\frac{16}{3} + \frac{17}{4}\pi\right)ML^2\dot{\varphi}^2$.
b $\frac{1}{2}\frac{1}{4-\pi}\left(\frac{7}{3} + \frac{9}{4}\pi\right)ML^2\dot{\varphi}^2$.
c $\frac{1}{2}\frac{1}{4-\pi}\left(\frac{16}{3} + \frac{3}{4}\pi\right)ML^2\dot{\varphi}^2$.
d Nessuna delle altre.

10

Si scrivano le equazioni di Lagrange.
a $M\ddot{q} + kq - \lambda - 2kL\cos\varphi = 0$ e $\frac{1}{4+\pi}\left(\frac{16}{3} + \frac{17}{4}\pi\right)ML^2\ddot{\varphi} + 2kLq\sin\varphi = 0$.
b $\frac{1}{2}M\ddot{q} + kq + \lambda - kL\cos\varphi = 0$ e $\frac{1}{4+\pi}\left(\frac{16}{3} + \frac{17}{4}\pi\right)ML^2\ddot{\varphi} + 2kLq\sin\varphi = 0$.
c $M\ddot{q} + kq - \lambda - kL\cos\varphi = 0$ e $\frac{1}{4+\pi}\left(\frac{7}{3} + \frac{9}{4}\pi\right)ML^2\ddot{\varphi} + 2kLq\sin\varphi = 0$.
d Nessuna delle altre.

11

Quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?
a A seconda del valore dei parametri M, L, λ e k possono essere due o quattro.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, L, λ e k.
c A seconda del valore dei parametri M, L, λ e k possono essere tre o quattro.
d Nessuna delle altre.

12

Si assuma $\lambda/(2kL) < 1$ e si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = 0$ e $\varphi = 2\pi - \arccos[-\lambda/(2kL)]$. (Si ricordi che $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.)
a È di equilibrio instabile.
b È di equilibrio stabile.

c Non è di equilibrio.
d Nessuna delle altre.
13
Determinare le frequenze normali di oscillazione $\omega_i/(2\pi)$ relative alla configurazione $q = 2L + \frac{\lambda}{k}$ e $\varphi = 0$.
a $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{24(4+\pi)(2kL+\lambda)}{(64+51\pi)ML}}$.
b $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{24(4-\pi)(2kL+\lambda)}{(64+51\pi)ML}}$.
c $\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{2M}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{24(4+\pi)(2kL+\lambda)}{(64+51\pi)ML}}$.
d Nessuna delle altre.
14
Determinare la reazione vincolare agente sull'elemento $\boldsymbol{X}$ in corrispondenza di un qualsiasi moto del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $-Mg\boldsymbol{e}_2 + 2kL\sin\varphi\boldsymbol{e}_3$.
c $Mg\boldsymbol{e}_2 - 2kL\cos\varphi\boldsymbol{e}_3$.
d 0.
15
Esistono moti in cui φ è costante, ma q non lo è?
a Sì, per ogni valore dei parametri M, L, λ e k.
b No, per nessun valore dei parametri M, L, λ e k.
c Se e solo se $\lambda < 2Lk + \pi$.
d Nessuna delle altre.

Prova scritta del 19/06/2025

Modelli Matematici per la Meccanica
Ing. Aerospaziale

Prova scritta del 19/06/2025

I.1

Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.
01

Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{02}}$
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{03}}$
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t = 0) = 1$ ed $x_2(t = 0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{05}}$
Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4 , \qquad x(0) = 2 , \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0 .$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.

d Nessuna delle altre.

I.2

Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.
Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.
La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.

$\boxed{\textbf{06}}$

Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.

a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

b $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.

a Nessuna delle altre.

b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.

$\boxed{\mathbf{08}}$

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.

a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.

b $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.

c $\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_3$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{09}}$

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.

a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)}MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.

c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{10}}$

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.

a Nessuna delle altre.

b $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.

c $U^{\mathrm{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.

d $U^{\mathrm{L}} =$una costante positiva.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.

a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{12}}$

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.

a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d Nessuna delle altre.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Nessuna delle altre.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a 0.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

Prova scritta del 23/07/2025

Modelli Matematici per la Meccanica
Ing. Aerospaziale

Prova scritta del 23/07/2025

I.1

Si consideri una massa unitaria e puntiforme in $\boldsymbol{R}$, confinata a muoversi sul semiasse positivo $x > 0$. La particella è soggetta a una forza $F_1(x)$ generata da un potenziale

$$U(x) = -(x-2)(x-5)^2\,,$$

e a una forza dissipativa $F_2(\dot{x}) = -\beta\dot{x}$. Salvo diverso avviso si assuma $\beta = 1$. Si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Considerato il punto di equilibrio

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a P_1 è asintoticamente stabile.

b P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

c P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in P_1 sono immaginari puri.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{02}}$ Si trascuri la forza d'attrito, i.e., assumiamo $\beta = 0$ solo per questa domanda. Quale è il minimo valore di energia E_{min} tale che se il sistema ha energia $E > E_{min}$, l'orbita del moto corrispondente certamente non è periodica?

a $E_{min} = 4$.

b $E_{min} = 0$.

c $E_{min} = 9$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{03}}$ L'integrale generale del sistema linearizzato in P_1 si legge

a

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) - C_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) + 5\,, \\ x_2(t) &= -\frac{1}{2}C_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) - C_1(\frac{\sqrt{23}}{2})e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) \\ &\quad + \frac{1}{2}C_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) - C_2(\frac{\sqrt{23}}{2})e^{-\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t)\,. \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) - C_2 \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) + 5\,, \\ x_2(t) &= -C_1(\frac{\sqrt{23}}{2}) \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) - C_2(\frac{\sqrt{23}}{2}) \cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t)\,. \end{aligned}$$

c

$$x_1(t) = C_1 e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) + \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) \right) ,$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{2} C_1 e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) + \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) \right)$$
$$+ C_1 e^{-\frac{t}{2}} \frac{\sqrt{23}}{2} \left(\cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) - \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) \right) .$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Considerato il punto di equilibrio

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} ,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a P_2 è una sella.

b P_2 è un fuoco instabile.

c P_2 è un nodo repulsivo.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{05}}$ Quale è l'espressione della matrice esponenziale per il sistema dinamico linearizzato in P_2?

a

$$\begin{pmatrix} (\frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}) & (\frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t}) \\ (\frac{6}{5}e^{2t} - \frac{6}{5}e^{-3t}) & (\frac{2}{5}e^{2t} + \frac{3}{5}e^{-3t}) \end{pmatrix} .$$

b

$$\begin{pmatrix} e^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) & e^{-t/2}\sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) \\ -e^{-t/2}\sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) & e^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) \end{pmatrix} .$$

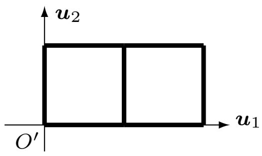
c

$$\begin{pmatrix} +\frac{3}{5}\cos(3t) & -\frac{2}{5}\sin(2t) \\ +\frac{2}{5}\sin(2t) & +\frac{3}{5}\cos(3t) \end{pmatrix} .$$

d Nessuna delle altre.

I.2

Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido piano C di massa $M + m$, con M, $m > 0$, e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo C è stato ottenuto saldando, come illustrato in figura, due lamine quadrate omogenee di lato di lunghezza $2L$ e masse rispettivamente uguali a M e m. Il riferimento $(O', (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo ed è scelto in modo tale che la lamina quadrata di massa m abbia centro nel punto di coordinate solidali $(3L, L, 0)$ (lamina a destra in figura).



Il riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi di moto traslatorio mantenendosi nel piano 1–2 fisso con la base solidale costantemente coincidente con quella fissa e con O' vincolato a scorrere sull'asse 1 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ si muove sull'asse 1 fisso.
La sollecitazione direttamente applicata è costituita dal peso e dalle forze

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}} = -k\boldsymbol{X} - k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_{O'}) \,, \quad \boldsymbol{F}_{O'} = -k(\boldsymbol{X}_{O'} - \boldsymbol{X}) + \alpha \boldsymbol{e}_1 \,,$$

applicate rispettivamente all'elemento e al corpo rigido nel punto indicato. Qui $k > 0$ e $\alpha > 0$ sono costanti.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, s) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ tali che

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(q) = q\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(s) = s\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Ovvero, q e s sono, rispettivamente, le coordinate 1 relative al riferimento fisso dei punti $\boldsymbol{X}$ e O'.
Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento fisso.

$\boxed{\mathbf{06}}$

Si determinino le coordinate $\boldsymbol{\lambda}_G$ del centro di massa G del corpo rigido C rispetto al riferimento solidale dato.

a

$$\lambda_{1G} = \frac{M + 3m}{M + m} L \,, \qquad \lambda_{2G} = L \,, \qquad \lambda_{3G} = 0 \,.$$

b

$$\lambda_{1G} = 2L \,, \qquad \lambda_{2G} = L \,, \qquad \lambda_{3G} = 0 \,.$$

c

$$\lambda_{1G} = \frac{M - 3m}{M + m} L \,, \qquad \lambda_{2G} = L \,, \qquad \lambda_{3G} = 0 \,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{07}}$

Si determini il momento d'inerzia I_{11} del corpo rigido C relativo all'asse 1 del riferimento solidale dato.

a

$$I_{11} = \frac{4}{3} ML^2 + \frac{4}{3} mL^2 \,.$$

b

$$I_{11} = \frac{1}{6} ML^2 + \frac{1}{6} mL^2 \,.$$

c

$$I_{11} = \frac{3}{4} ML^2 + \frac{1}{6} mL^2 \,.$$

d Nessuna delle altre.

08

La base solidale data $(\boldsymbol{u}_h)$ è principale d'inerzia nel centro di massa G del corpo rigido C?

a Sì, per ogni valore dei parametri M, m, L.

b Solo se $M = m$.

c No, mai.

d Nessuna delle altre.

09

Si determini il momento angolare $\boldsymbol{L}_O$ del corpo rigido C, rispetto all'origine O del sistema di riferimento fisso.

a

$$\boldsymbol{L}_O = -(M+m)L\dot{s}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

b

$$\boldsymbol{L}_O = 0 \,.$$

c

$$\boldsymbol{L}_O = (M+m)L\dot{s}\boldsymbol{e}_3 + 2LM\dot{q}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

d Nessuna delle altre.

10

Si determini l'energia cinetica lagrangiana del sistema.

a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}^2 \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}(M+m)(\dot{s}^2 + \dot{q}^2) \,.$$

c

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}(M+m)(\dot{s} + \dot{q})^2 \,.$$

d Nessuna delle altre.

11

Si determini il potenziale lagrangiano U^{L} delle forze direttamente applicate al sistema.

a

$$U^{\mathrm{L}} = -\frac{1}{2}k(q-s)^2 - \frac{1}{2}kq^2 + \alpha s \,.$$

b

$$U^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}k(q-s)^2 - \frac{1}{2}kq^2 - \alpha s \,.$$

c

$$U^{\mathrm{L}} = (2M+m)g(q+s) + \frac{1}{2}k(q-s)^2 + \frac{1}{2}kq^2 - \alpha s \,.$$

d Nessuna delle altre.

12

Si scrivano le equazioni di Lagrange.

a

$$M\ddot{q} + k(q - s) + kq = 0\,,$$
$$(M + m)\ddot{s} - k(q - s) - \alpha = 0\,.$$

b

$$(M + m)\ddot{q} + k(q - s) - kq + Mg = 0\,,$$
$$M\ddot{s} - k(q - s) - \alpha + (M + m)g = 0\,.$$

c

$$M\ddot{q} - k(q - s) - kq = 0\,,$$
$$(M + m)\ddot{s} - k(q - s) + \alpha = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{13}}$

Si assuma solo per questa domanda $M = m$, e si stabilisca quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $(q, s) = (\alpha/k, 2\alpha/k)$.

a È possibile considerare le piccole oscillazioni in tale punto e nelle frequenze normali si ha

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{17}}{4}\frac{k}{M}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{17}}{4}\frac{k}{M}}\,.$$

b Non è possibile considerare le piccole oscillazioni in tale punto.

c È possibile considerare le piccole oscillazioni in tale punto e nelle frequenze normali si ha

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2M}}\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Si determini la forza vincolare agente sull'elemento $\boldsymbol{X}$ in corrispondenza di un qualsiasi moto del sistema.

a Nessuna delle altre.

b

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = -Mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

c

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = (M + m)g\boldsymbol{e}_3\,.$$

d

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = (2M + m)g\boldsymbol{e}_3\,.$$

$\boxed{\mathbf{15}}$

Si dica quale delle seguenti parametrizzazioni lagrangiane alternative è ammissibile.

a

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}} = (q_1 + q_2)\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'} = q_1\boldsymbol{e}_1\,, \qquad (q_1, q_2) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

b

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}} = q_1^2\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'} = q_2\boldsymbol{e}_1\,, \qquad (q_1, q_2) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

c

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}} = (q_1 + q_2)\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'} = (q_1 + q_3)\boldsymbol{e}_1\,, \qquad (q_1, q_2, q_3) \in \boldsymbol{R}^3\,.$$

d Nessuna delle altre.

Prova scritta del 16/01/2025

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 16/01/2025

I.1

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{01}}$

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \operatorname{arctg} t\boldsymbol{w}_1(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

b È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.

c È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{02}}$

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ sono identiche.

b Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

c L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ può essere diversa da quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{03}}$

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0)\,.$$

a

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(t)\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

b Il versore $\boldsymbol{u}_1$ è costante rispetto alla terna fissa.

c

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

d Nessuna delle altre.

I.2

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

$\boxed{\textbf{04}}$

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo).

a $\ell = 8$.

b $\ell = 5$.

c ℓ non può essere determinato.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici coincidenti.

a $\ell = 9$.

b $\ell = 6$.

c $\ell = 7$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{06}}$

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{11} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a

$$I_{11} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b

$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big) .$$

c

$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big) .$$

d Nessuna delle altre.

I.3

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

$\boxed{\textbf{07}}$

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + e^t)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2 .$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2\dot{q}_1^2 + \alpha\beta\dot{q}_1\dot{q}_2 + \beta^2\dot{q}_2^2 + \gamma .$$

c

$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha\dot{q}_1 + \beta\dot{q}_2)^2 .$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{08}}$

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a Vale

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} .$$

b La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

c Le forze direttamente applicate sono conservative.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{09}}$

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.

a Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^4 ,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.

b Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana definita positiva, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

c Tutti i moti sono definiti per ogni $t \in \boldsymbol{R}$.

d Nessuna delle altre.

I.4

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 , \qquad s \in \boldsymbol{R} ,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h) , \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0) ,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R) .$$

$\boxed{\mathbf{10}}$
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.
a

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s) .$$

b

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s) .$$

c

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = 0 .$$

d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 \cos\Big(\frac{x_3}{h}\Big)(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) ,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.
a Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.
b Nessun moto può essere definito per ogni $t \in \boldsymbol{R}$.
c Tutti i moti sono limitati.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{12}}$
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1 \cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s) ,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare l'energia cinetica del punto nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\ddot{s}(t_1) = 0$.
a

$$T(t_1) = \frac{c_1}{\alpha} .$$

b

$$T(t_1) = \frac{m}{2} c_1 h \,.$$

c

$$T(t_1) = 0 \,.$$

d Nessuna delle altre.

I.5

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,.$$

$\boxed{\mathbf{13}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Esiste una condizione sugli I_{hh} che garantisce che tutti i moti siano periodici e che non tutti siano rotazioni.

b Esiste una condizione sugli I_{hh} che garantisce che nessun moto sia una rotazione.

c Se il momento angolare si mantiene costante nella base fissa, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{14}}$

Supponiamo che C sia un cubo omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?

a Solo quella di O come centro del cubo e nessun'altra.

b Infinite scelte.

c Nessuna scelta.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?

a

$$I_{11}^2 \omega_1^2 + I_{22}^2 \omega_2^2 + I_{33}^2 \omega_3^2 \,.$$

b

$$I_{11}^2 \omega_1 + I_{22}^2 \omega_2 + I_{33}^2 \omega_3 \,.$$

c

$$I_{11} \omega_1^2 \,.$$

d Nessuna delle altre.

Prova scritta del 04/02/2025

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 04/02/2025

I.1
Una circonferenza materiale γ di raggio R e centro C è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, ove (x_h) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso. Sia $A \in \gamma$ un punto solidale a γ e consideriamo il sistema di riferimento solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_C, (\boldsymbol{u}_h))$ con

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{CA}}{R}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3.$$

La circonferenza è formata da due semicirconferenza omogenee, di masse rispettivamente m_1 e m_2, individuate dal diametro parallelo a $\boldsymbol{u}_1$. Indichiamo con I_{hk} gli elementi della matrice d'inerzia in C relativa alla base $(\boldsymbol{u}_h)$.

01

Vale

a
$$I_{11} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2.$$
b
$$I_{11} = \frac{1}{4}(m_1 + m_2)R^2.$$
c
$$I_{11} = \frac{1}{2\pi}(m_1 + m_2)R^2.$$
d Nessuna delle altre.

02

Vale

a
$$I_{12} = 0.$$
b
$$I_{12} = -\frac{1}{2}(m_1 - m_2)R^2.$$
c
$$I_{12} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2.$$
d Nessuna delle altre.

03

Il momento angolare della circonferenza γ con polo C soddisfa:

a È parallelo a $\boldsymbol{e}_3$.
b È ortogonale a $\boldsymbol{e}_3$.
c Ha componenti parallela e ortogonale a $\boldsymbol{e}_3$ sempre diverse da 0, a parte il caso della quiete.
d Nessuna delle altre.

I.2
Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \dots, n$, si muove senza vincoli, soggetto al sistema di forze $\boldsymbol{F}_i$ ($\boldsymbol{F}_i$ è la forza applicata su $\boldsymbol{X}_i$). Denotiamo come al solito $\boldsymbol{X}_i = z_{3i-2}\boldsymbol{e}_1 + z_{3i-1}\boldsymbol{e}_2 + z_{3i}\boldsymbol{e}_3$, $i = 1, \dots, n$ e $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_{3n}) = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$, $\dot{\boldsymbol{z}} = (\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_{3n}) = (\dot{\boldsymbol{x}}_1, \dots, \dot{\boldsymbol{x}}_n)$.

$\boxed{\mathbf{04}}$
Supponiamo che $n = 2$ e

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{z}) = -k(z_1 - z_4)\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{z}),$$

con $k > 0$ costante assegnata. Allora
a Il potenziale del sistema di forze è

$$U(\boldsymbol{z}) = -\frac{k}{2}(z_1 - z_4)^2.$$

b Il potenziale del sistema di forze è

$$U(\boldsymbol{z}) = -\frac{k}{2}(z_1^2 - z_4^2).$$

c Il potenziale del sistema di forze non esiste.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{05}}$
Supponiamo che esista una funzione $U \in C^2(\boldsymbol{R}^{3n})$ tale che

$$\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}}) = \nabla_{\boldsymbol{x}_i} U(\boldsymbol{z}) + \alpha_i \boldsymbol{\omega}_i \times \dot{\boldsymbol{x}}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

con $\alpha_i \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{\omega}_i \in \boldsymbol{R}^3$ costanti assegnate tali che $\boldsymbol{\omega}_i \neq 0$ per ogni i. Indichiamo

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} |\dot{\boldsymbol{X}}_i(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}_1(t), \dots, \boldsymbol{X}_n(t)).$$

a $\mathcal{E}(t)$ si conserva costante lungo ciascun moto.
b $\mathcal{E}(t)$ si conserva costante lungo ciascun moto se e solo se $\alpha_i = 0$ per ogni i.
c Se $\alpha_i < 0$ per ogni i, allora $\mathcal{E}(t)$ decresce strettamente lungo ciascun moto.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{06}}$
Supponiamo che esista una funzione $U \in C^2(\boldsymbol{R}^{3n})$ tale che

$$\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{z}) = \nabla_{\boldsymbol{x}_i} U(\boldsymbol{z}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Dire in quale caso $\boldsymbol{z} = 0$ è un punto di equilibrio stabile.

a

$$U(\boldsymbol{z}) = -\sum_{i=1}^{n} k_i |\boldsymbol{x}_i|^{2i} ,$$

con $k_i > 0$ costanti assegnate.

b

$$U(\boldsymbol{z}) = -k|\boldsymbol{x}_1|^2 ,$$

con $k > 0$ costante assegnata.

c

$$U(\boldsymbol{z}) = k|\boldsymbol{z}|^2 ,$$

con $k > 0$ costante assegnata.

d Nessuna delle altre.

I.3

Si consideri un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, con $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e $\boldsymbol{\omega}$ velocità angolare di $\mathcal{M}$. Indichiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate in $\mathcal{S}$.

Si consideri anche un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \dots, n$, con coordinate locali $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^{3n}$, sottoposto a vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0 ,$$

e con parametrizzazione lagrangiana $\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t)$.

$\boxed{\textbf{07}}$

In quale dei seguenti casi le componenti lagrangiane delle forze di Coriolis relative a $\mathcal{S}$ sono nulle?

a Se tutti i moti appartengono al piano $\lambda_1 = 0$ e $\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha e^{\alpha t} \boldsymbol{u}_3(t)$, con $\alpha > 0$ costante.

b Se tutti i moti appartengono al piano $\lambda_3 = 0$ e $\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha e^{\alpha t} \boldsymbol{u}_3(t)$, con $\alpha > 0$ costante.

c Se i vincoli sono fissi nel sistema mobile.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{08}}$

Supponiamo che i vincoli siano fissi se scritti nelle coordinate del sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$, ossia si possano scrivere come

$$\boldsymbol{f}^{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\lambda}) = 0 .$$

a Se il sistema ha un solo grado di libertà, ossia $\ell = 1$, le componenti lagrangiane sia delle forze di trascinamento che delle forze di Coriolis sono nulle.

b Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali l'energia meccanica (nel sistema fisso) si conserva.

c L'energia cinetica nel sistema fisso si riduce a una forma quadratica nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

d Nessuna delle altre.

09

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha \boldsymbol{u}_3(t)$ con $\alpha > 0$ costante e $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1$, 2, 3. Supponiamo anche $\boldsymbol{X}_O(t) = ct\boldsymbol{u}_3(t)$, con $c > 0$ costante.

a L'accelerazione di trascinamento dei moti $\boldsymbol{X}_i$ è ortogonale a $\boldsymbol{e}_3$.
b L'accelerazione di trascinamento dei moti $\boldsymbol{X}_i$ è ortogonale a $\boldsymbol{u}_1$.
c L'accelerazione di trascinamento dei moti $\boldsymbol{X}_i$ è parallela a $\boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

I.4

Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = U'(x) \,, \qquad U \in C^2(\boldsymbol{R}) \,.$$

Nel seguito ci riferiamo al piano delle fasi relativo a questo moto.

10

Quale delle seguenti ipotesi implica che esistano moti periodici non di quiete?

a $U'(0) = 0$, $U''(0) < 0$.
b $U'(0) = 0$, $U''(0) > 0$.
c $U'(0) = 0$, $U''(0) = 0$.
d Nessuna delle altre.

11

In quale dei seguenti casi esistono orbite illimitate?

a

$$U(x) = -\alpha e^{\beta x} \,,$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ costanti.

b

$$U(x) = -\alpha e^{\beta x^2} \,,$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ costanti.

c

$$U(x) = -\alpha x^4 + \beta x^3 \,,$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ costanti.

d Nessuna delle altre.

12

Sia

$$U(x) = -\alpha x^4 + \beta x^3 \,,$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ costanti.

a Esistono due punti di equilibrio, di cui uno è stabile e l'altro è instabile.
b Esiste un solo punto di equilibrio che è stabile.
c I punti di equilibrio sono tutti instabili.
d Nessuna delle altre.

I.5

Consideriamo un sistema di punti materiali soggetto a vincoli olonomi regolari con coordinate lagrangiane $\boldsymbol{q} \in Q = \boldsymbol{R}^\ell$. Indichiamo con Q_h la componente lagrangiana delle forze relativa alla coordinata q_h. Qui α, β, γ denotano costanti reali positive. Si assume la ipotesi dei lavori virtuali.

13

In quale dei seguenti casi esiste il potenziale lagrangiano?

a Le forze direttamente applicate sono conservative.

b Si ha $\ell = 2$ e

$$Q_1 = q_1 + \alpha t \,, \qquad Q_2 = q_1 + \beta t \,.$$

c Le forze direttamente applicate sono posizionali e i vincoli sono fissi.

d Nessuna delle altre.

14

Dire quale dei seguenti casi può verificarsi.

a Una delle equazioni di Lagrange non contiene nessuna delle q_h.

b Una delle equazioni di Lagrange non contiene nessuna delle $\ddot{q}_h$.

c I vincoli sono fissi, ma l'energia cinetica T^{L} dipende esplicitamente dal tempo t.

d Nessuna delle altre.

15

Dire quale dei seguenti è il potenziale lagrangiano nel caso in cui $\ell = 2$ e

$$Q_1 = \alpha q_2 + \beta t + \gamma \sin q_1 \,, \qquad Q_2 = \alpha q_1 + \beta t \,.$$

a

$$U^{\mathrm{L}} = \alpha q_1 q_2 + \beta t (q_1 + q_2) - \gamma \cos q_1 \,.$$

b

$$U^{\mathrm{L}} = \alpha q_1 q_2 + \beta t (q_1 + q_2) + \gamma q_2 \sin q_1 \,.$$

c

$$U^{\mathrm{L}} = \frac{\alpha}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \beta t (q_1 + q_2) - \gamma \cos q_1 \,.$$

d Nessuna delle altre.

Prova scritta del 11/06/2025

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 11/06/2025

I.1 Consideriamo il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = U'(x)\,, \qquad U(x) = x(1-x)^2\,, \quad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

$\boxed{\mathbf{01}}$ I punti di equilibrio sono
a Due, uno stabile e uno instabile.
b Due, entrambi stabili.
c Uno solo.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{02}}$ Le orbite nel piano delle fasi sono
a Tutte limitate.
b Alcune limitate, altre illimitate.
c Una sola è periodica.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{03}}$ Supponiamo che le condizioni iniziali siano $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Il moto risultante è
a Definito solo per t in un intervallo limitato.
b Limitato ma non periodico.
c Periodico.
d Nessuna delle altre.

I.2 Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m\,.$$

Indichiamo con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane e con $\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}$ la relativa parametrizzazione lagrangiana.
$\boxed{\mathbf{04}}$ Lo spazio

$$\langle \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial q_\ell} \rangle \subset \boldsymbol{R}^{3n}$$

soddisfa
a Contiene le reazioni vincolari se vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
b Contiene le componenti lagrangiane delle forze.
c È sempre indipendente dal tempo.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali, la reazione vincolare complessiva

$$\mathbf{f}_{\mathsf{vin}} = (\mathbf{f}_{\mathsf{vin}}{}^1, \dots, \mathbf{f}_{\mathsf{vin}}{}^n) \in \boldsymbol{R}^{3n}$$

è in realtà costretta ad appartenere a un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ di dimensione
a ℓ.
b 3.
c m.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{06}}$ Sia $\ell = 2$, e supponiamo che i vincoli siano fissi. Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica in forma lagrangiana? Qui α, β, γ sono costanti positive.
a
$$T^{\mathrm{L}} = \alpha \dot{q}_1^2 + (\beta + \gamma t)^2 \dot{q}_2^2 \,.$$
b
$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha^2 + 1)\dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \beta^2 \dot{q}_2^2 \,.$$
c
$$T^{\mathrm{L}} = \alpha \dot{q}_1^2 + \beta \dot{q}_2^2 + \gamma \sqrt{1 + \dot{q}_2^2} \,.$$
d Nessuna delle altre.

I.3 Consideriamo un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ soggetto al campo di forze posizionale $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$.
$\boxed{\textbf{07}}$ In quale dei seguenti casi è applicabile il teorema di Dirichlet sull'equilibrio stabile, nel punto $\boldsymbol{x} = 0$? Qui $\alpha > 0$ è una costante.
a
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\alpha |\boldsymbol{x}|^3 \boldsymbol{x} \,, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \,.$$
b
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \alpha x_2 \boldsymbol{e}_1 \,, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \,.$$
c
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\alpha (x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2) \,, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \,.$$
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{08}}$ Sia
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \alpha x_1 \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \,, \qquad \boldsymbol{x} \neq 0 \,.$$
Qui $\alpha > 0$ è costante. Allora
a L'energia meccanica si conserva.
b Tutti i moti sono limitati
c Tutti i moti sono piani.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{09}}$ Supponiamo che $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^3)$ e che soddisfi le condizioni di chiusura
$$\frac{\partial F_h}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_h} \,, \qquad h, k = 1{,}2{,}3 \,,$$
su $\boldsymbol{R}^3$. Allora
a Il potenziale di $\boldsymbol{F}$ esiste, ma solo localmente, cioè in genere non è definito su tutto $\boldsymbol{R}^3$.
b Tutti gli eventuali punti di equilibrio sono stabili.
c Tutti gli eventuali punti di equilibrio sono instabili.
d Nessuna delle altre.

I.4 Un corpo rigido C si muove di moto polare di polo O. Il sistema di riferimento $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ non è necessariamente principale, ma è solidale. Scriviamo come al solito

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,.$$

Supponiamo che all'istante $t = 0$ si abbia $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
$\boxed{\mathbf{10}}$ Supponiamo che il moto sia polare per inerzia. Allora
a Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è principale d'inerzia in O, e l'ellissoide d'inerzia in O è di rotazione, almeno una delle componenti ω_h è costante durante il moto.
b Necessariamente allora $(\boldsymbol{u}_h)$ è principale d'inerzia in O.
c Non si può avere che $\boldsymbol{\omega}$ si mantenga costante (nella terna fissa) durante il moto.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Supponiamo che il momento delle forze esterne sia $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}(t) = \mu \boldsymbol{e}_1$ con $\mu > 0$ costante, per ogni t, e che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O. Allora:
a Se il corpo parte da fermo, il moto è una rotazione.
b L'energia cinetica è costante.
c Il momento angolare $\boldsymbol{L}_O(t)$ è costante (nella terna fissa).
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Supponiamo che l'energia cinetica $T(t)$ soddisfi per ogni t la

$$T(t) \geq c > 0 \,,$$

per un'opportuna costante $c > 0$. Allora
a $T(t)$ non può mantenersi costante.
b $T(t)$ deve mantenersi limitata.
c Deve valere $|\boldsymbol{\omega}(t)| \geq c_0 > 0$ per ogni t, per un'opportuna costante $c_0 > 0$.
d Nessuna delle altre.

I.5 Consideriamo un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi regolari, con parametrizzazione lagrangiana $\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t)$, $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^{\ell}$.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Supponiamo che i vincoli siano fissi. Allora
a Le componenti lagrangiane delle forze sono indipendenti dal tempo.
b L'energia cinetica in forma lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo.
c L'energia cinetica in forma lagrangiana dipende esplicitamente da ciascuna delle q_h, $h = 1, \dots, \ell$.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Valga l'ipotesi dei lavori virtuali. Le equazioni di Lagrange sono
a Un sistema di equazioni differenziali del primo ordine.
b Un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine.
c Un sistema di equazioni differenziali del terzo ordine.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{15}}$ In quale dei seguenti casi la forma quadratica nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$ contenuta nell'energia cinetica in forma lagrangiana può essere solo semidefinita positiva?
a Se tra i corpi rigidi ci sono aste rigide.
b Se tra i corpi rigidi ci sono punti materiali.
c Se non vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
d Nessuna delle altre.

Prova scritta del 04/07/2025

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 04/07/2025

I.1 In ciascun caso si risponda alla domanda sui vincoli.
Le x_h denotano le coordinate nel sistema fisso, e le x_{hP} denotano le coordinate del punto P. La $(\boldsymbol{e}_h)$ è la base fissa.
$\boxed{\mathbf{01}}$ L'asta rigida di estremi A e B, di lunghezza $L > 0$, è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$. Quali dei seguenti vincoli (in un opportuno insieme di coordinate locali per il rigido) sono quelli corretti?
a $x_{3A} = 0$.
b $x_{3A} = 0$, $x_{3B} = 0$.
c $x_{3A} = x_{3B}$.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{02}}$ L'asta rigida di estremi A e B, di lunghezza $L > 0$, è vincolata da $(\boldsymbol{X}_A - \boldsymbol{X}_B) \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$. Quali dei seguenti vincoli (in un opportuno insieme di coordinate locali per il rigido) sono quelli corretti?
a $x_{3A} = 0$.
b $x_{3A} = 0$, $x_{3B} = 0$.
c $x_{3A} - x_{3B} = 0$.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{03}}$ L'asta rigida di estremi A e B, di lunghezza $L > 0$, è vincolata da $(\boldsymbol{X}_A - \boldsymbol{X}_B) \times \boldsymbol{e}_3 = 0$. Quali dei seguenti vincoli (in un opportuno insieme di coordinate locali per il rigido) sono quelli corretti?
a $x_{3A} = 0$.
b $x_{1A} - x_{1B} = 0$, $x_{2A} - x_{2B} = 0$.
c $x_{3A} = x_{3B}$.
d Nessuna delle altre.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, s ascissa curvilinea, con $k(s) > 0$. La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$.

$\boxed{\mathbf{04}}$ Si assuma che la curva sia piana. Allora
a L'accelerazione $\ddot{\boldsymbol{X}}$ risulta parallela al piano della curva.
b L'accelerazione $\ddot{\boldsymbol{X}}$ risulta ortogonale alla curva.
c La velocità può non essere tangente alla curva.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{05}}$ Sia $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ con $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}$.
a Se il vincolo è liscio l'energia cinetica si conserva.
b La forza prescritta è incompatibile con l'ipotesi di vincolo scabro.
c Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali l'energia meccanica si conserva.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{06}}$ Supponiamo che il vincolo sia liscio e che

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2\,, \qquad s \in (-\pi R, \pi R)\,.$$

Sia $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ con $\boldsymbol{F}(s) = -\alpha s\boldsymbol{T}$, $\alpha > 0$ costante, e si assumano le condizioni iniziali $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0$.
a Qualunque sia v_0, si ha $|s(t)| \to \pi R$ in un tempo finito.
b Esistono v_0 tali che $|s(t)| < \pi R$ per ogni $t \in (0, +\infty)$.
c È possibile che $s(t) \to \pi R/2$ per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.

I.3 Si consideri un sistema di punti materiali soggetti a vincoli olonomi regolari, con parametri lagrangiani $\boldsymbol{q} \in Q \subset \boldsymbol{R}^\ell$. Si assume l'ipotesi dei lavori virtuali.
$\boxed{\mathbf{07}}$ Quale delle seguenti condizioni garantisce che esista il potenziale lagrangiano?
a Le componenti lagrangiane delle forze Q_h non dipendono dalle $\dot{\boldsymbol{q}}$.
b I vincoli sono fissi.
c Si ha $\ell = 1$.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{08}}$ Quando le reazioni vincolari fanno lavoro complessivo nullo?
a Se i vincoli sono fissi.
b Se le forze direttamente applicate sono conservative.
c Se il sistema è costituito da un solo punto.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{09}}$ Quando l'atto di moto $\dot{\boldsymbol{z}}$ del sistema appartiene a $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$?
a Se i vincoli sono fissi.
b Se le forze direttamente applicate sono conservative.
c Se il sistema è costituito da un solo punto.
d Nessuna delle altre.

I.4 Sia C un corpo rigido non degenere vincolato a muoversi di moto polare di polo $\boldsymbol{X}_O$. Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale al corpo, non necessariamente principale.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Quando il moto può essere di rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_1$?
a Se $\boldsymbol{u}_1$ è principale e $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ ha componente ortogonale a $\boldsymbol{u}_1$ non nulla.
b Se $\boldsymbol{u}_1$ è principale e $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ ha componente ortogonale a $\boldsymbol{u}_1$ nulla.
c Solo se $\boldsymbol{u}_1$ non è principale.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{11}}$ Il moto sia polare per inerzia. Allora
a Tutti i moti sono rotazioni costanti.
b Nessun moto è una rotazione.
c Il momento delle quantità di moto è solidale al corpo.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{12}}$ Quale delle seguenti determina il moto del corpo? (Sotto le usuali ipotesi di regolarità.)
a La prima equazione globale della dinamica.
b La conservazione dell'energia.
c Le equazioni di Eulero.
d Nessuna delle altre.

I.5 Un rettangolo omogeneo di lati con lunghezze a e b, $a > b$, è vincolato a ruotare intorno a un asse fisso passante per due vertici opposti (ossia intorno a una diagonale del rettangolo). I vincoli sono lisci, e il centro G del rettangolo è fisso.
$\boxed{\mathbf{13}}$ Si assuma che il momento rispetto a G delle forze direttamente applicate sia parallelo all'asse di rotazione e che il moto non sia la quiete. Allora
a Il momento rispetto a G delle reazioni vincolari è sicuramente nullo.
b Il momento rispetto a G delle reazioni vincolari è sicuramente non nullo.
c L'energia cinetica è costante.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{14}}$ Quante terne solidali principali di inerzia esistono in G?
a Infinite.
b Nessuna.
c Una.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{15}}$ Supponiamo che le forze direttamente applicate abbiano momento $\alpha\boldsymbol{u}$, con $\alpha > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ versore dell'asse di rotazione. Il moto non sia di quiete. Allora l'energia cinetica del corpo
a Non si mantiene costante.
b Si mantiene costante.
c Il momento assegnato è impossibile sotto l'ipotesi di vincolo liscio.
d Nessuna delle altre.