xxx [gwiJ iiej voCN] **Esercizio 0** [0].0

Meccanica Razionale

Esercizi di esame e di controllo
Versione con risoluzioni

Daniele Andreucci
Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Università di Roma La Sapienza
via A.Scarpa 16, 00161 Roma
daniele.andreucci@sbai.uniroma1.it

launch_daexam 20250829 13.26

NOTE:

- Gli esami del corso di Modelli Matematici per la Meccanica, Laurea in Ingegneria Aerospaziale, sono stati elaborati in collaborazione con il prof. Emilio N.M. Cirillo, codocente del corso.
- *Salvo diverso avviso:*
  - coni e cilindri sono circolari retti;
  - i corpi rigidi sono omogenei;
  - si assume l'ipotesi dei lavori virtuali.

Domande con risposta S/N assegnate al corso di Modelli Matematici per la Meccanica Ingegneria Aerospaziale.

.1 Un elemento materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = a(x^2 + y^2) + b\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Il vincolo è scabro, con reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ tale che, indicando con $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}$ e $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}$ le sue componenti rispettivamente tangente e normale alla superficie, si abbia l'unica restrizione

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| \le \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante, almeno se l'elemento materiale ha velocità nulla.
Su P agisce il peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
1) L'insieme delle coordinate (x, y) in cui è possibile l'equilibrio dipende da b.
2) Per a e b fissati, esiste $R > 0$ tale che se $x^2 + y^2 > R^2$ non si ha equilibrio.
3) L'insieme delle posizioni in cui si ha equilibrio cambia se il peso diviene $+mg\boldsymbol{e}_3$, ossia inverte il verso.
SOLUZIONE
1. N
Si ha equilibrio se la componente tangente della forza peso è equilibrata da quella della reazione vincolare, ossia se

$$|(mg)^2(1 - (\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{\nu})^2)| = |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}|^2 \le \mu^2 |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|^2 = \mu^2 |mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{\nu}|^2\,.$$

Poiché la normale $\boldsymbol{\nu}$ è data da

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{(2ax, 2ay, -1)}{\sqrt{1 + 4a^2x^2 + 4a^2y^2}}\,,$$

si ha equilibrio se e solo se

$$x^2 + y^2 \le \frac{\mu^2}{a^2}\,.$$

2. S
Vedi il punto precedente.
3. N
Non cambia, perché nel calcolo sopra il verso della forza peso è irrilevante, ossia il segno in essa scompare.

.2 Un punto materiale P di massa m si muove soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = -k(e^{yz}\boldsymbol{e}_1 + xze^{yz}\boldsymbol{e}_2 + xye^{yz}\boldsymbol{e}_3)\,, \qquad (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3\,,$$

ove $k > 0$ è costante.

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
4) Il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ su un moto che compie una traiettoria chiusa è nullo.
5) Esistono moti che rimangono nell'ottante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, su cui $x(t)$ diviene illimitata.
6) Con le opportune condizioni iniziali, il moto di P è la quiete.
SOLUZIONE
1. S
La forza è conservativa con potenziale

$$U(x, y, z) = -kxe^{yz}\,, \qquad (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3\,,$$

e quella enunciata è una tipica proprietà delle forze conservative.
2. N
La conservazione dell'energia dà

$$kxe^{yz} \leq T - U = E\,,$$

su ciascun moto, per E costante opportuna. Nel primo ottante quindi si ottiene

$$kx \leq kxe^{yz} \leq E\,.$$

3. N
Questo equivale a dire che esistono punti di equilibrio, ovvero punti ove la forza si annulla, il che è impossibile, perché la prima componente di $\boldsymbol{F}$ è sempre diversa da 0.

.3 Due punti materiali P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 sono così vincolati:
P_1 appartiene alla circonferenza di centro l'origine O e raggio R nel piano $z = 0$.
P_2 appartiene alla circonferenza di centro P_1 e raggio R nel piano $z = 0$.
Su P_2 agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP_2}\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano le coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ come segue:

$$\overrightarrow{OP_1} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{P_1P_2} = R\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{e}_2\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
7) L'energia cinetica del sistema si annulla quando $\dot\varphi = \dot\theta$.
8) In tutte le posizioni di equilibrio vale $\varphi = \theta$.
9) La reazione vincolare esercitata dai vincoli su P_2 è parallela a $\overrightarrow{P_2P_1}$.
SOLUZIONE
1. N
L'energia cinetica lagrangiana, nei sistemi a vincoli fissi come il presente, è una forma quadratica definita positiva nelle $\dot\varphi$, $\dot\theta$ e quindi non si annulla se non quando $(\dot\varphi, \dot\theta) = (0,0)$.

2. N
Il potenziale lagrangiano vale

$$U^{\text{L}}(\varphi,\theta) = -\frac{k}{2}|\overrightarrow{OP_2}|^2 = -kR^2[1+\cos(\varphi-\theta)]\,.$$

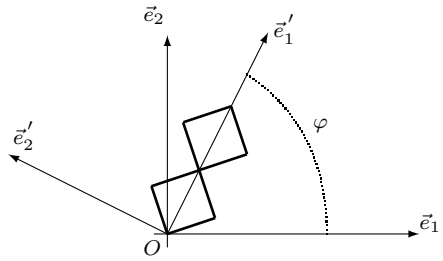
Si ha quindi

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} = kR^2\sin(\varphi-\theta) = -\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \theta}\,,$$

quindi si ha equilibrio anche se per esempio $\theta = \varphi + \pi$.
3. S
Per l'ipotesi dei lavori virtuali si ha

$$0 = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{f}_{\text{vin}\,P_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\text{L}}}{\partial\theta} = \mathbf{f}_{\text{vin}\,P_2}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}_2^{\text{L}}}{\partial\theta} = R\mathbf{f}_{\text{vin}\,P_2}\cdot(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2)\,.$$

.4 Una lamina rigida è stata ottenuta saldando, come illustrato in figura, due lamine quadrate omogenee entrambe di massa $M/2$ e lato L. Il corpo è vincolato mediante una cerniera ideale con asse orizzontale fisso rispetto all'osservatore terrestre. Oltre al peso, sul corpo agisce la forza costante $\lambda\vec{e}_1$, con $\lambda > 0$, applicata al centro di massa della lamina.



Il riferimento terrestre $\{O,\vec{e}_i\}$ ha asse 3 coincidente con quello della cerniera e asse 2 verticale ascendente. Il riferimento solidale $\{O,\vec{e}_i'\}$ ha asse 3 coincidente con quello della cerniera e piano 1–2 coincidente con quello della lamina. Il moto del corpo rispetto al riferimento terrestre viene descritto usando la coordinata lagrangiana φ indicata in figura.
10) La matrice d'inerzia relativa al riferimento solidale considerato è

$$\begin{pmatrix} ML^2/12 & 0 & 0 \\ 0 & 31ML^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 8ML^2/3 \end{pmatrix}\,.$$

11) L'equazione pura del moto è

$$\frac{8}{3}ML^2\ddot{\varphi} = -\sqrt{2}MgL\cos\varphi - \sqrt{2}\lambda L\sin\varphi\,.$$

12) Se il corpo viene posto all'istante iniziale nella configurazione $\varphi = 0$ con atto di moto nullo, la somma della sollecitazione vincolare all'istante iniziale vale $-\lambda\vec{e}_1 + Mg\vec{e}_2$.

Soluzione
1. S
Usando il teorema di Huygens e le proprietà dei momenti d'inerzia dei corpi piani, si ha

$$\begin{aligned} I'_{O,11} &= \tfrac{1}{12}\tfrac{M}{2}L^2 + \tfrac{1}{12}\tfrac{M}{2}L^2 \\ I'_{O,22} &= \tfrac{1}{12}\tfrac{M}{2}L^2 + \tfrac{M}{2}\Big(\tfrac{\sqrt{2}}{2}L\Big)^2 + \tfrac{1}{12}\tfrac{M}{2}L^2 + \tfrac{M}{2}\Big(3\tfrac{\sqrt{2}}{2}L\Big)^2 \\ I'_{O,33} &= I'_{O,11} + I'_{O,22}. \end{aligned}$$

2. S
Si dimostra preliminarmente che, essendo la cerniera liscia, la componente lungo l'asse tre del momento totale della sollecitazione vincolare è nulla. Si calcola

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \tfrac{8}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3, \\ \overrightarrow{OG} &= \sqrt{2}L\cos\varphi\vec{e}_1 + \sqrt{2}L\sin\varphi\vec{e}_1, \\ \overrightarrow{OG}\times(-Mg\vec{e}_2) &= -\sqrt{2}MgL\cos\varphi\vec{e}_3, \\ \overrightarrow{OG}\times(\lambda\vec{e}_1) &= -\sqrt{2}\lambda L\sin\varphi\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Infine, si proietta la seconda equazione cardinale sull'asse tre.
3. N
Dalla prima equazione cardinale si ha che

$$\vec{f}^{\,\mathrm{v}} = Mg\vec{e}_2 - \lambda\vec{e}_1 + M\vec{a}_G.$$

Dall'equazione pura del moto si ottiene che $\ddot{\varphi}(0)$ è diverso da zero, quindi $\vec{a}_G(0) \neq 0$.

.5 Si consideri la seguente energia cinetica in forma lagrangiana, relativa a un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi regolari, con 2 gradi di libertà e $(\varphi, \theta) \in \boldsymbol{R}^2$ coordinate lagrangiane:

$$T^{\mathrm{L}} = a(\varphi,\theta)\dot{\varphi}^2 + b(\varphi,\theta)\dot{\varphi}\dot{\theta} + c(\varphi,\theta)\dot{\theta}^2 + f(\varphi,\theta)\dot{\theta} + g(\varphi,\theta)\,,$$

con a, b, c, f, g funzioni non identicamente nulle.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
13) I vincoli possono essere fissi, ossia indipendenti dal tempo.
14) Le funzioni a, b, c devono soddisfare

$$4ac - b^2 > 0\,.$$

15) Le funzioni a, b, c devono essere costanti.
Soluzione
1. N
Se i vincoli sono fissi l'energia cinetica in forma lagrangiana è una forma quadratica nelle $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ e quindi si dovrebbe avere f e g identicamente nulle contro le ipotesi.
2. S
Quella indicata è condizione necessaria perché la forma quadratica dell'energia cinetica sia definita positiva, il che è richiesto dalla teoria.
3. N
Non è detto; per esempio se il sistema è costituito da un punto vincolato a una superficie, a, b, c sono prodotti scalari dei vettori tangenti alla superficie e possono pertanto essere dipendenti dalle coordinate sulla superficie.

.6 Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ si muove rispetto al sistema fisso di rotazione uniforme (che non si riduce alla quiete).
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
16) Esistono moti non solidali a $\mathcal{S}$ sui quali la forza di Coriolis si annulla identicamente.
17) La forza di trascinamento è posizionale sia in $\mathcal{S}$ che nel sistema di riferimento fisso.
18) Un moto solidale a $\mathcal{S}$ può avere accelerazione non nulla nel sistema di riferimento fisso.
SOLUZIONE
1. S
Si ha $\boldsymbol{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$*; basta quindi prendere moti in cui* $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \lambda\boldsymbol{\omega}$ *con* λ *costante.*
2. S
Nel caso in oggetto la forza di trascinamento è data da

$$\boldsymbol{F}_T = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O)) \,,$$

con $\boldsymbol{\omega}$ *e* $\boldsymbol{X}_O$ *vettori costanti in entrambi i sistemi di riferimento. Quindi è posizionale in entrambi i sistemi di riferimento.*
3. S
Si ha per il teorema di Coriolis nel caso di interesse

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O)) \,,$$

che non si annulla se non sull'asse di rotazione.

.7 Un punto materiale P di massa m si muove in $\boldsymbol{R}^3$ soggetto a una forza $\boldsymbol{F}$ con potenziale $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$; cioè $\boldsymbol{F} = \nabla U$.
Si sa che tutti i moti sono limitati (ossia ciascun moto rimane all'interno di un'opportuna sfera di centro l'origine).
Dire quali delle seguenti forme di U sono ammissibili.
19) $U(x, y, z) = -e^{xyz}$.
20)

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\operatorname{arctg}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{\pi}{2}} \,.$$

21) $U(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2$.
SOLUZIONE
1. N
Si ha $\boldsymbol{F} = \nabla U = -e^{xyz}(yz, xz, xy) = (0,0,0)$ *per esempio sull'asse* x*. Quindi sull'asse* x *sono possibili moti rettilinei uniformi che non sono limitati.*
2. S
Si ha su un moto fissato

$$-U \leq T - U = E \,,$$

per una costante $E > 0$ *opportuna. Quindi*

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x^2 + y^2 + z^2) \geq E^{-1} \,,$$

che equivale alla limitazione

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - E^{-1}\right).$$

3. N
Poiché $\boldsymbol{F} = \nabla U = (4x^3, 2y, 2z)$*, i moti che partono dall'asse z con velocità parallela all'asse z sono della forma* $(0,0,z)$ *con* z *soluzione di* $m\ddot{z} = 2z$*, che può essere illimitata.*

.8 Un sistema rigido è sottoposto al vincolo di giunto ideale che ne induce un moto sferico di polo O rispetto all'osservatore terrestre.
22) Il momento totale della sollecitazione vincolare calcolato rispetto al polo O può essere un vettore non nullo ortogonale all'asse verticale passante per O.
23) Se il momento totale della sollecitazione attiva relativo a O è nullo e l'atto di moto iniziale è non nullo, allora il moto è necessariamente rotatorio.
24) Se l'unica sollecitazione attiva è il peso e il centro di massa del corpo coincide con O, allora il momento totale della quantità di moto relativo a O è una costante del moto.
Soluzione
1. N
Il vincolo è liscio.
2. N
Si tratta di un moto alla Poinsot, che in assenza di altre ipotesi sulla geometria del corpo non è necessariamente una rotazione.
3. S
Si tratta di un teorema noto sui moti alla Poinsot, caso in cui ci troviamo per l'ipotesi fatta.

.9 Una lamina quadrata di vertici (nell'ordine) $ABCD$ e di lato L è vincolata ad avere il vertice A sulla curva intersezione della sfera

$$S: \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

con il piano $x_2 = 0$, e il lato AD ortogonale alla sfera S (la lamina rimane esterna alla sfera). Denotiamo con O l'origine del sistema di riferimento fisso. Dire se le seguenti parametrizzazioni lagrangiane con coordinate (φ, θ) sono ammissibili o no.
25) $(\varphi, \theta) \in (0, \pi/2) \times (0, \pi/2)$ tali che

$$\overrightarrow{OA} = R[\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_3],$$
$$\overrightarrow{AB} = L[\cos\varphi \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi(-\sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \boldsymbol{e}_3)].$$

26) $(\varphi, \theta) \in (0, \pi/2) \times (0, \pi/2)$ tali che

$$\overrightarrow{OA} = R[\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_3],$$
$$\overrightarrow{AC} = \sqrt{2}L[\cos\varphi \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi(-\sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \boldsymbol{e}_3)].$$

27) $(\varphi, \theta) \in (0, \pi/2) \times (0, \pi/2)$ tali che

$$\overrightarrow{OA} = R[\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_3]\,,$$
$$\overrightarrow{AD} = L[\cos\varphi\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\sin\theta \boldsymbol{e}_3]\,.$$

SOLUZIONE
1. S
$\overrightarrow{OA}$ è dato dall'usuale parametrizzazione della circonferenza nel piano $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\rangle$. $\overrightarrow{AB}$ è costruito in modo simile, ma usando come base ortonormale quella data da $\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{T} = -\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_3$. Questa è una base del piano tangente alla sfera S sulla circonferenza cui appartiene A: infatti AD è ortogonale a S, se e solo se AB è tangente a S.
2. N
Questa parametrizzazione è ottenuta in modo simile alla precedente, ma assume che la diagonale AC della lamina sia tangente alla sfera, contro il vincolo richiesto.
3. N
In questo caso $\overrightarrow{AD}$ non rispetta il vincolo di essere ortogonale alla sfera, ossia parallelo a $\overrightarrow{OA}$.

.10 Il punto materiale P_1 di massa m_1 è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

e il punto materiale P_2 di massa m_2 è vincolato all'ellisse

$$\frac{x_1^2}{R^2} + \frac{x_2^2}{4R^2} = 1\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Su P_i agisce la forza $\boldsymbol{F}_i$ data da

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 = -k|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2)\,,$$

con $k > 0$ costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = R\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + 2R\sin\theta\boldsymbol{e}_2\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
28) Il potenziale lagrangiano è dato da

$$U^{\text{L}}(\varphi, \theta) = -\frac{k}{2}R^2[(\cos\varphi - \cos\theta)^2 + (\sin\varphi - 2\sin\theta)^2]\,.$$

29) Lungo ciascun moto le funzioni $\dot\varphi(t)$, $\dot\theta(t)$ restano limitate.
30) Non tutte le condizioni iniziali $\dot\varphi(0)$, $\dot\theta(0)$ compatibili nella posizione iniziale $\varphi(0) = \pi/2$, $\theta(0) = \pi/2$, lo sono anche in quella $\varphi(0) = -\pi/2$, $\theta(0) = -\pi/2$.

Soluzione
1. N
Evidentemente questo non può essere il potenziale, perché è quadratico in $|\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} - \boldsymbol{X}_2^{\text{L}}|$*; dovrebbe essere cubico, dato che la forza è quadratica.*
2. S
Un semplice calcolo dà il potenziale

$$U^{\text{L}}(\varphi, \theta) = -\frac{k}{3}|\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} - \boldsymbol{X}_2^{\text{L}}|^3 .$$

In ogni caso, ci interessa solo che $U^{\text{L}} \le 0$*; infatti allora si ha per la conservazione dell'energia e per una costante* E *opportuna (dipendente dal moto)*

$$T^{\text{L}} \le T^{\text{L}} - U^{\text{L}} = E ,$$

che implica subito la limitazione richiesta. Si noti che in realtà a questo fine è sufficiente $U^{\text{L}} \le$ *costante.*
3. N
La scelta delle velocità lagrangiane iniziali $\dot\varphi(0)$*,* $\dot\theta(0)$ *è del tutto arbitraria in qualunque configurazione iniziale.*

.11 Si considerino 3 moti (in componenti nella base standard $\boldsymbol{e}_h$ di $\boldsymbol{R}^3$)

$$\boldsymbol{X}_1 = (z_1, z_2, z_3) , \quad \boldsymbol{X}_2 = (z_4, z_5, z_6) , \quad \boldsymbol{X}_3 = (z_7, z_8, z_9) ,$$

vincolati da (poniamo qui $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_9)$)

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}) &= z_1 + z_4^2 + z_5 = 0 , \\ f_2(\boldsymbol{z}) &= z_7 - z_8 + z_3 = 0 , \\ f_3(\boldsymbol{z}) &= z_5 + z_9 = 0 . \end{aligned}$$

Si assuma per noto che questo è un sistema di vincoli olonomi regolari in ogni configurazione compatibile.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
31) L'ipotesi dei lavori virtuali applicata a questo sistema consiste in 6 equazioni scalari.
32) La seguente parametrizzazione lagrangiana è ammissibile in un intorno della configurazione $\boldsymbol{z} = 0$: le coordinate sono $(z_1, z_2, z_3, z_5, z_6, z_7) \in Q$, $Q \subset \boldsymbol{R}^6$ aperto opportuno, e

$$z_4 = \sqrt{-z_5 - z_1} , \quad z_8 = z_7 + z_3 , \quad z_9 = -z_5 .$$

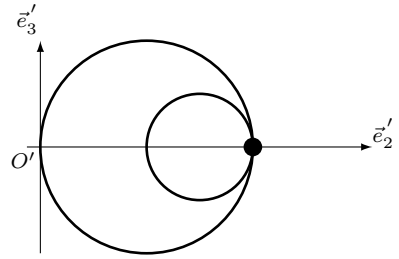
33) Lo spazio vettoriale degli spostamenti virtuali, come sottospazio di $\boldsymbol{R}^9$, è lo stesso in ogni configurazione compatibile con i vincoli.
Soluzione
1. S
L'ipotesi dei lavori virtuali consiste in $\ell = 9 - 3 = 6$ *relazioni scalari, corrispondenti in pratica alle relazioni di ortogonalità della reazione vincolare allo spazio degli spostamenti virtuali (che ha dimensione* 6*).*

2. N
Una parametrizzazione lagrangiana può non essere globale, ma in questo caso dovrebbe almeno comprendere tutte le configurazioni in un intorno di $\boldsymbol{z} = 0$; poiché z_4 compare solo al quadrato nei vincoli, se una configurazione con un valore $z_4 = a$ è ammissibile, anche quella diversa solo per avere $z_4 = -a$ lo è. Quindi qualunque parametrizzazione in un intorno di $\boldsymbol{z} = 0$ deve comprendere valori sia positivi che negativi per z_4; in quella data invece $z_4 \geq 0$.
3. N
Lo spazio degli spostamenti virtuali è l'ortogonale $\langle \nabla f_1, \nabla f_2, \nabla f_3 \rangle^\perp$. Si ha subito

$$\nabla f_1 = \boldsymbol{e}'_1 + 2z_4\boldsymbol{e}'_4 + \boldsymbol{e}'_5\,,\ \nabla f_2 = \boldsymbol{e}'_3 + \boldsymbol{e}'_7 - \boldsymbol{e}'_8\,,\quad \nabla f_3 = \boldsymbol{e}'_5 + \boldsymbol{e}'_9\,,$$

quindi tale spazio dipende da z_4 (qui $\boldsymbol{e}'_h$ è la base standard in $\boldsymbol{R}^9$).

.12 A un disco omogeneo di raggio R si pratica un foro di raggio $R/2$ tangente internamente il bordo del disco. La lamina così ottenuta ha massa M. Alla lamina viene poi saldato un elemento di massa m nel punto di tangenza. In figura è rappresentato il corpo assieme al riferimento $\{O', \vec{e}'_i\}$ a esso solidale.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 1 solidale parallelo all'omologo asse 1 fisso e punto O' sull'asse 2 fisso. Indicata con φ l'anomalia individuata dagli assi 2 fisso e solidale, il moto è descritto dalle relazioni $\overrightarrow{OO'}(t) = A\sin(\lambda t)\vec{e}_2$ e $\varphi(t) = \alpha t$, con $A, \lambda, \alpha > 0$ assegnati.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
34) Il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse 1 del riferimento solidale rappresentato in figura vale $(43/48)MR^2 + 4mR^2$.
35) Se $m = M/6$ il centro di massa del corpo rigido coincide con il centro geometrico del disco.
36) Le equazioni parametriche della rulletta (centroide mobile) sono $c'_1(t) = 0$, $c'_2(t) = 0$, $c'_3(t) = (A\lambda/\alpha)\cos(\lambda t)$.
SOLUZIONE
1. N
No, il valore esatto è $(29/24)MR^2 + 4mR^2$. Per determinare il momento d'inerzia del disco forato si procede a determinare la densità $\sigma = 4M/(3\pi R^2)$ e si considerano due corpi fittizi, il pieno di massa $\sigma\pi R^2$ e il foro di massa $-\sigma\pi R^2/4$. L'espressione del momento d'inerzia può essere quindi determinata facendo ricorso anche al teorema di Huygens.
2. S
Procedendo come al punto precedente, si osserva prima che il corpo pieno ha centro di massa nel centro del disco e il corpo fittizio di massa negativa ha centro nel

centro del foro. Allora il centro di massa G^D del disco forato si può determinare come

$$\overrightarrow{OG^D} = \frac{1}{\sigma\pi R^2 + (-\sigma\pi R^2/4)}\Big[\sigma\pi R^2 R + (-\sigma\pi R^2/4)\frac{3}{2}R\Big]\vec{e}_2'.$$

Si passa poi a determinare il centro di massa del corpo considerando il contributo dell'elemento.

3. S

Per determinare le equazioni della rulletta si cercano le coordinate del centro di istantanea rotazione C scrivendo $0 = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'C}$, con $\overrightarrow{O'C} = c_2'\vec{e}_2' + c_3'\vec{e}_3'$.

.13 Un punto materiale P di massa m si muove vincolato a una superficie regolare parametrizzata da

$$\boldsymbol{r} \in C^\infty(Q)\,, \quad Q \subset \boldsymbol{R}^2\,; \quad \text{scriviamo} \quad \boldsymbol{r}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\,, \boldsymbol{r}_\theta = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\,.$$

Prendiamo $(\varphi, \theta) \in Q$ come coordinate lagrangiane.
Il punto è soggetto a un campo di forze posizionali $\boldsymbol{F} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
37) Se il vincolo è liscio, il sistema 2×2 delle equazioni di moto contiene $\boldsymbol{F}$ solo attraverso $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}_\varphi$, $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}_\theta$.
38) Se il vincolo è scabro, il sistema differenziale delle equazioni di moto è a 3 equazioni in 3 incognite.
39) Indipendentemente dal fatto che il vincolo sia liscio o scabro, se $\boldsymbol{F}$ è conservativa vale l'integrale primo della conservazione dell'energia.
Soluzione
1. S
Se il vincolo è liscio, le equazioni di moto sono date dalla proiezione sul piano tangente alla superficie di $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\text{vin}}$, che contiene solo le componenti dette, perché $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ è in questo caso ortogonale al piano.
2. N
Il sistema resta 2×2 anche se il vincolo è scabro, solo che le componenti tangenti di $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ dipendono dalla componente ortogonale di $\mathbf{f}_{\text{vin}}$, che a sua volta dipende dalla componente ortogonale di $\boldsymbol{F}$. Per questo va usata anche la terza componente (ortogonale) di $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\text{vin}}$.
3. N
Per la conservazione dell'energia occorre anche che la reazione $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ faccia lavoro nullo, ossia che il vincolo sia liscio.

.14 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = -ax^3 - bx - c\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

con a, b, $c > 0$ costanti.
Con riferimento al diagramma delle orbite nel piano delle fasi, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
40) Esistono orbite illimitate.

41) Esiste un unico punto di equilibrio.
42) Esistono orbite su cui il moto è periodico.
SOLUZIONE
1. N
Ogni orbita giace su una curva (qui E è una costante)

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))}\,, \quad U(x) = -\frac{a}{4}x^4 - \frac{b}{2}x^2 - cx\,.$$

Poiché $-U(x) \to +\infty$ se $x \to \pm\infty$, ciascuna di queste curve è limitata (sia in x che in p).
2. S
I punti di equilibrio sono quelli ove

$$U'(x) = -ax^3 - bx - c = 0\,.$$

Poiché U' è una funzione strettamente decrescente (per esempio perché $U''(x) < 0$) e $U'(x) \to \mp\infty$ se $x \to \pm\infty$, segue l'asserto.
3. S
Tutte le orbite diversa da quella degenere relativa al punto di equilibrio sono chiuse e quindi su di esse il moto è periodico.

.15 Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ ha base mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

con $\varphi \in C^1(\boldsymbol{R})$, φ non costante, e

$$\boldsymbol{X}_O(t) = ct\boldsymbol{e}_1\,,$$

con $c > 0$ costante. Ricordiamo la definizione di campo di velocità di trascinamento di $\mathcal{S}$:

$$\boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_O(t))\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
43) Fissato ad arbitrio $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$,

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{x}, t)| = +\infty\,.$$

44) La matrice di cambiamento di base tra $\mathcal{M}$ e la base fissa può essere costante nel tempo.
45) Se la forza di Coriolis $\boldsymbol{F}_{\text{C}}$ che agisce in $\mathcal{S}$ sul moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $\boldsymbol{F}_{\text{C}}(t) = 0$ per ogni t, deve essere $\boldsymbol{v}(t) = s(t)\boldsymbol{e}_3$ per qualche scalare $s(t)$ ($\boldsymbol{v}$ è la velocità nel sistema fisso).

Soluzione
1. N
Non è vero per esempio se $|\dot\varphi(t)| \le e^{-t}$ *per* $t > t_0 > 0$.
2. N
La matrice è data in sostanza dalle componenti $\boldsymbol{u}_h \cdot \boldsymbol{e}_k$ *che non sono tutte costanti per l'ipotesi che non lo sia* φ.
3. N
Questo è vero per la velocità relativa $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ *perché* $\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi \boldsymbol{e}_3$, *ma* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{v}_T$.

.16 Un sistema di particelle si muove rispetto a un osservatore inerziale.
46) La quantità di moto totale relativa al riferimento del centro di massa è sempre uguale alla massa totale del sistema moltiplicata per la velocità del centro di massa.
47) Se il sistema fosse rigido, allora il riferimento del centro di massa sarebbe necessariamente solidale al corpo.
48) L'energia cinetica rispetto al riferimento inerziale è minore di quella relativa al riferimento del centro di massa.
Soluzione
1. N
No, perché quella relativa al riferimento del centro di massa è nulla.
2. N
No, perché il riferimento del centro di massa ha per definizione assi paralleli al riferimento fisso.
3. N
No, segue dal teorema di König.

.17 Un disco D di raggio R e centro G è vincolato ad avere l'estremo A di un diametro solidale AB appartenente all'asse x_3 e l'altro estremo B all'elica cilindrica

$$\begin{aligned} x_1 &= 2R\cos(\alpha s)\,, \\ x_2 &= 2R\sin(\alpha s)\,, \\ x_3 &= h\alpha s\,, \end{aligned}$$

con α, $h > 0$, $s \in \boldsymbol{R}$. Denotiamo con O l'origine del sistema di riferimento fisso, e con HK il diametro solidale ortogonale a AB.
Dire se le seguenti parametrizzazioni lagrangiane con le coordinate indicate sono ammissibili o no.
49) $s \in \boldsymbol{R}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= h\alpha s \boldsymbol{e}_3\,, \\ \overrightarrow{HK} &= 2R\cos\varphi[-\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2] + 2R\sin\varphi \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

50) $z \in \boldsymbol{R}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= z\boldsymbol{e}_3\,, \\ \overrightarrow{GK} &= R\sin\varphi\Big[-\sin\frac{z}{h}\boldsymbol{e}_1 + \cos\frac{z}{h}\boldsymbol{e}_2\Big] + R\cos\varphi\boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

51) $z \in \boldsymbol{R}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\overrightarrow{OA} = z\boldsymbol{e}_3 \,.$$
$$\overrightarrow{GH} = R\cos\varphi\Big[\cos\frac{z}{h}\boldsymbol{e}_1 + \sin\frac{z}{h}\boldsymbol{e}_2\Big] + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Soluzione
1. S
A e B devono essere alla stessa quota αhs; il diametro ortogonale HK è dato come combinazione di due versori, entrambi ortogonali al versore di AB, che è $\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2$.
2. S
Questa parametrizzazione è ottenuta in modo simile alla precedente, ma usa la quota di A come parametro. Inoltre definisce l'angolo φ come il complementare del caso precedente.
3. N
In questo caso GH non è ortogonale a AB.

.18 Il punto materiale P_1 di massa m_1 è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

e il punto materiale P_2 di massa m_2 è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = 4R^2 \,, \qquad x_3 = L \,,$$

con R, $L > 0$.
Su P_i agisce la forza $\boldsymbol{F}_i$ data da

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 = k|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^2(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) \,,$$

con $k > 0$ costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 \,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = 2R\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + 2R\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + L\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
52) Esistono infinite posizioni di equilibrio.
53) Si può definire il potenziale lagrangiano, e questo vale

$$U^{\text{L}}(\varphi, \theta) = \frac{k}{4}[5R^2 - 4R^2\cos(\varphi - \theta) + L^2]^2 \,.$$

54) Esistono condizioni iniziali $\dot\varphi(0)$, $\dot\theta(0)$ per cui

$$\dot\varphi(t)^2 + \dot\theta(t)^2 \to +\infty \,, \qquad t \to +\infty \,.$$

Soluzione

1. S
Questo segue dalla simmetria del problema, oppure scrivendo il potenziale (vedi punto seguente), e osservando che

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} = 0\,, \qquad \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \theta} = 0\,,$$

si riduce a $\sin(\varphi - \theta) = 0$.
2. S
Un semplice calcolo dà il potenziale

$$U^{\text{L}}(\varphi, \theta) = \frac{k}{4}|\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} - \boldsymbol{X}_2^{\text{L}}|^4\,,$$

che sostituendo la parametrizzazione lagrangiana dà l'espressione nella domanda.
3. N
Si ha per la conservazione dell'energia e per una costante E opportuna (dipendente dal moto)

$$T^{\text{L}} = U^{\text{L}} + E \le \frac{k}{4}\max|\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} - \boldsymbol{X}_2^{\text{L}}|^4 + E\,,$$

che implica subito la limitazione richiesta.

.19 Si considerino 3 moti (in componenti nella base standard $\boldsymbol{e}_h$ di $\boldsymbol{R}^3$)

$$\boldsymbol{X}_1 = (z_1, z_2, z_3)\,, \quad \boldsymbol{X}_2 = (z_4, z_5, z_6)\,, \quad \boldsymbol{X}_3 = (z_7, z_8, z_9)\,,$$

vincolati da (poniamo qui $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_9)$)

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}) &= z_1 + z_7 - z_8^2 = 0\,,\\ f_2(\boldsymbol{z}) &= z_1 + z_5 z_6 = 0\,,\\ f_3(\boldsymbol{z}) &= z_5 - z_8 = 0\,. \end{aligned}$$

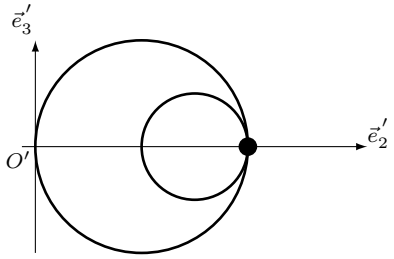
Si assuma per noto che questo è un sistema di vincoli olonomi regolari in ogni configurazione compatibile.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
55) La seguente parametrizzazione lagrangiana è ammissibile in un intorno della configurazione $\boldsymbol{z} = 0$: le coordinate sono $(z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_9) \in Q$, $Q \subset \boldsymbol{R}^6$ aperto opportuno, e

$$z_1 = -z_5 z_6\,, \quad z_7 = z_5^2 + z_5 z_6\,, \quad z_8 = z_5\,.$$

56) L'energia cinetica in forma lagrangiana, per qualunque scelta delle coordinate lagrangiane q_h, è un polinomio positivo di grado 6 nelle $\dot{q}_h$.
57) L'ipotesi dei lavori virtuali applicata a questo sistema consiste in un sistema lineare 9×9 nelle componenti delle reazioni vincolari applicate ai 3 punti.
Soluzione
1. S
Sono soddisfatte tutte le ipotesi delle parametrizzazioni lagrangiane (perché è una

parametrizzazione di tipo cartesiano in cui le coordinate lagrangiane sono le coordinate indipendenti del teorema del Dini).
2. N
L'energia cinetica in forma lagrangiana è (se i vincoli sono fissi) una forma quadratica definita positiva nelle $\dot{q}_h$, quindi di grado 2.
3. N
L'ipotesi dei lavori virtuali consiste in $\ell = 9-3 = 6$ relazioni scalari, corrispondenti in pratica alle relazioni di ortogonalità della reazione vincolare allo spazio degli spostamenti virtuali (che ha dimensione 6*).*

.20 A un disco omogeneo di raggio R si pratica un foro di raggio $R/2$ tangente internamente il bordo del disco. La lamina così ottenuta ha massa M. Alla lamina viene poi saldato un elemento di massa m nel punto di tangenza. In figura è rappresentato il corpo assieme al riferimento $\{O', \vec{e}_i'\}$ a esso solidale.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 1 solidale parallelo all'omologo asse 1 fisso e punto O' sull'asse 2 fisso. Indicata con φ l'anomalia individuata dagli assi 2 fisso e solidale, il moto è descritto dalle relazioni $\overrightarrow{OO'}(t) = A\sin(\lambda t)\vec{e}_2$ e $\varphi(t) = \alpha t$, con $A, \lambda, \alpha > 0$ assegnati.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
58) Il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale rappresentato in figura vale $(43/48)MR^2 + 4mR^2$.
59) Se $m = 4M/3$ il centro di massa del corpo rigido coincide con il centro geometrico del foro.
60) Le equazioni parametriche della base (centroide fissa) sono $c_1(t) = 0$, $c_2(t) = A\sin(\lambda t) - (2A\lambda/\alpha)\cos(\lambda t)\sin(\alpha t)$, $c_3(t) = (2A\lambda/\alpha)\cos(\lambda t)\cos(\alpha t)$.
Soluzione
1. S
Per determinare il momento d'inerzia del disco forato si procede a determinare la densità $\sigma = 4M/(3\pi R^2)$ e si considerano due corpi fittizi, il pieno di massa $\sigma\pi R^2$ e il foro di massa $-\sigma\pi R^2/4$. L'espressione del momento d'inerzia può essere quindi determinata facendo ricorso anche al teorema di Huygens.
2. S
Procedendo come al punto precedente, si osserva prima che il corpo pieno ha centro di massa nel centro del disco e il corpo fittizio di massa negativa ha centro nel centro del foro. Allora il centro di massa G^D del disco forato si può determinare come

$$\overrightarrow{OG^D} = \frac{1}{\sigma\pi R^2 + (-\sigma\pi R^2/4)}\Big[\sigma\pi R^2 R + (-\sigma\pi R^2/4)\frac{3}{2}R\Big]\vec{e}_2'.$$

Si passa poi a determinare il centro di massa del corpo considerando il contributo dell'elemento.
3. N
No, per determinare le equazioni della rulletta si cercano le coordinate del centro di istantanea rotazione C scrivendo $0 = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'C}$, con $\overrightarrow{O'C} = c'_2\vec{e}'_2 + c'_3\vec{e}'_3$.

.21 Un punto materiale P di massa m si muove vincolato a una superficie regolare parametrizzata da

$$\boldsymbol{r} \in C^\infty(Q)\,, \quad Q \subset \boldsymbol{R}^2\,.$$

Prendiamo $(\varphi, \theta) \in Q$ come coordinate lagrangiane.
Il punto è soggetto a un campo di forze conservativo $\boldsymbol{F} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$, $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{e}_1 + F_2\boldsymbol{e}_2 + F_3\boldsymbol{e}_3$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
61) Si ha

$$\frac{\partial F_1(\boldsymbol{r})}{\partial \varphi} = \frac{\partial F_2(\boldsymbol{r})}{\partial \theta}\,.$$

62) Anche se la superficie è illimitata, ciascun moto è limitato.
63) Se il vincolo è liscio, in ogni istante il vettore $m\boldsymbol{a} - \boldsymbol{F}$ è ortogonale a S.
Soluzione
1. N
Questa relazione non vale in coordinate lagrangiane, in genere; basta pensare al caso della sfera, l'usuale rappresentazione in longitudine φ e colatitudine θ, e $\boldsymbol{F} = x_1\boldsymbol{e}_1$.
2. N
Un controesempio è quello di S un piano, e $\boldsymbol{F} = 0$.
3. S
Se il vincolo è liscio, $m\boldsymbol{a} - \boldsymbol{F} = \mathbf{f}_{\text{vin}}$, che è normale a S.

.22 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = a(x-1)^4\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $a > 0$ costante.
Con riferimento al diagramma delle orbite nel piano delle fasi, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
64) Esistono orbite ove $\dot{x}(t) > 0$ per ogni t.
65) Tutte le orbite sono illimitate, a parte eventualmente quelle corrispondenti ai punti di equilibrio.
66) Tutti i moti soddisfano $|\dot{x}(t)| \to +\infty$ per $t \to \Sigma$, se (σ, Σ) denota l'intervallo massimale di esistenza.
Soluzione
1. S
L'orbita corrispondente al livello di energia $E = 0$, lo stesso dell'equilibrio, nel semipiano $\dot{x} > 0$.

2. S
Ogni orbita (a parte quella dell'equilibrio) contiene una curva (qui E è una costante)

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{5m}(5E + a(x-1)^5)}\,, \qquad x > x_0\,,$$

con x_0 opportuno.
3. N
Questo non è vero per l'orbita corrispondente al livello di energia $E = 0$, lo stesso dell'equilibrio, nel semipiano $\dot{x} < 0$. Lungo il moto corrispondente, $\dot{x}(t) \to 0-$ per $t \to +\infty$.

.23 Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ ha base mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e

$$\boldsymbol{X}_O(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,,$$

con R, $\alpha > 0$ costanti.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
67) La matrice di cambiamento di base tra $\mathcal{M}$ e la base fissa è una matrice 3×3 definita positiva.
68) La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di $\mathcal{M}$ rispetto alla base fissa non può essere nulla.
69) Se $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\boldsymbol{e}_3$, con $\omega_0 \in \boldsymbol{R}$ costante, allora la forza di trascinamento in $\mathcal{S}$ è una forza posizionale nelle coordinate del sistema fisso.
Soluzione
1. N
Non è vero in genere, per esempio se corrisponde a una rotazione di angolo $\varphi \in (\pi/2, \pi)$.
2. N
La velocità angolare di $\mathcal{M}$ non ha nessuna relazione con $\boldsymbol{X}_O$; se $\boldsymbol{u}_h(t) = \boldsymbol{e}_h$ per ogni t, come possibile, si ha $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$ per ogni t.
3. N
La forza di trascinamento è

$$\boldsymbol{F}_{\text{T}} = -m[\ddot{\boldsymbol{X}}_O(t) + \omega_0^2\boldsymbol{e}_3 \times (\boldsymbol{e}_3 \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_O(t)))]\,,$$

che non risulta posizionale né nelle coordinate di $\mathcal{S}$, né nel sistema fisso.

.24 Si considera un parallelepipedo a base quadrata omogeneo e un riferimento cartesiano con origine nel suo centro di massa.
70) Il riferimento è necessariamente centrale d'inerzia.
71) Se il corpo venisse posto in moto sferico con polo nel centro di massa il momento angolare totale risulterebbe necessariamente parallelo alla velocità angolare.
72) Se il corpo si muovesse libero e sottoposto al solo peso, il moto rispetto al centro di massa sarebbe rotatorio oppure di precessione.
Soluzione
1. N
No, perché il corpo non è a simmetria sferica.

2. N
No, solo in caso di moto rotatorio attorno a un asse centrale.
3. S
Perché si tratterebbe del moto alla Poinsot di un solido a struttura giroscopica.

.25 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato al paraboloide

$$x_3 = -\alpha(x_1^2 + x_2^2)\,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Su di esso agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica attrattiva

$$\boldsymbol{F} = -k(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
73) Se $k > 2\alpha mg$ tutti i moti sono limitati.
74) Se si usano le coordinate polari nel piano (x_1, x_2) per il moto del punto, l'energia cinetica è

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)\,.$$

75) Se $k < 2\alpha mg$ esiste un unico punto di equilibrio.
Soluzione
1. S
Il potenziale è

$$U(\boldsymbol{x}) = -\frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) - mgx_3 = -\frac{1}{2}(k - 2mg\alpha)(x_1^2 + x_2^2)\,.$$

Quindi poiché la conservazione dell'energia dà $-U \le E$, segue che (x_1, x_2) e di conseguenza x_3 si mantengono limitati.
2. N
L'energia cinetica deve dipendere da α ovviamente; il calcolo esatto dà

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2(1 + 4\alpha^2 r^2) + r^2\dot{\varphi}^2)\,.$$

3. S
Dall'espressione del potenziale già trovata, segue che l'unico punto critico (usando x_1, x_2 come coordinate lagrangiane) si ha in (0,0).

.26 Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ un sistema di riferimento mobile, con

$$\boldsymbol{X}_O(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2\,,$$

e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Qui α e β sono costanti positive.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
76) Si possono scegliere i parametri α, $\beta > 0$ in modo che tutti i moti solidali a $\mathcal{S}$ siano circolari uniformi nel sistema fisso.
77) L'accelerazione di trascinamento $\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}}$ in $\mathcal{S}$ dipende da α.
78) L'accelerazione di Coriolis $\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$ in $\mathcal{S}$ dipende da β.
SOLUZIONE
1. S
Poiché $\boldsymbol{\omega} = \beta \boldsymbol{e}_3$ *dal teorema del moto relativo si ha se* $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = 0$

$$\boldsymbol{v} = R(\alpha - \beta)(-\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2) + \beta(-x_2\boldsymbol{e}_1 + x_1\boldsymbol{e}_2)\,.$$

Se $\beta = \alpha$ *si ottiene il tipico campo di velocità del moto circolare uniforme (ortogonale al moto e di modulo, quindi, costante).*
2. S
Infatti $\boldsymbol{a}_T$ *contiene* $\ddot{\boldsymbol{X}}_O$ *che dipende da* α.
3. S
Infatti $\boldsymbol{a}_C$ *contiene* $\boldsymbol{\omega} = \beta \boldsymbol{e}_3$.

.27 Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Sull'asta agiscono le forze

$$\boldsymbol{F}_A = -k\boldsymbol{X}_A\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = \mu\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{e}_3\,,$$

con $k > 0$, $\mu \geq 0$. Si scelgano come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1A} \in \boldsymbol{R}\,, \quad y = x_{2A} \in \boldsymbol{R}\,, \quad \varphi \in (-\pi, \pi)$$

tale che

$$\overrightarrow{AB} = 2L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + 2L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

Le equazioni di Lagrange sono allora (I è un opportuno momento d'inerzia dell'asta)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[(mL^2 + I)\dot\varphi - mL(\dot x\sin\varphi - \dot y\cos\varphi)\big] + 2L\dot\varphi(\dot x\cos\varphi - \dot y\sin\varphi) = -4L^2\mu\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m(\dot x - L\dot\varphi\sin\varphi)\big] = -kx + 2\mu L\sin\varphi\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m(\dot y + L\dot\varphi\sin\varphi)\big] = -ky - 2\mu L\cos\varphi\,.$$

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
79) Sia $\mu > 0$. Si può scrivere il potenziale lagrangiano del sistema.
80) Sia $\mu > 0$. Esistono posizioni di equilibrio.
81) Sia $\mu = 0$. Tutti i moti con $\dot\varphi(0) = 0$ si svolgono mantenendo $\varphi(t) = \varphi(0)$ per ogni $t > 0$.
SOLUZIONE

1. N
Le componenti lagrangiane delle forze non soddisfano le condizioni di chiusura.
2. N
La prima equazione di Lagrange è impossibile nelle condizioni indicate.
3. N
Un confronto delle 3 equazioni in questo caso mostra che sono compatibili solo se

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = 0\,,$$

ossia solo se l'asta (all'istante iniziale e quindi per $t > 0$) ha direzione radiale.

.28 Un disco omogeneo pesante di raggio R e massa M è vincolato a muoversi su un piano fisso orizzontale. I vincoli sono ideali. Si considera il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ con piano coordinato 1–2 coincidente con il piano su cui giace il disco e asse 3 verticale ascendente. Indicato con C il centro di massa del disco, si considera il riferimento solidale $\{C, \vec{e}_i'\}$ tale che $\vec{e}_3' = \vec{e}_3$. Oltre al peso, sul centro di massa del disco agisce la forza elastica di costante $k > 0$ e centro O.
Il moto del disco rispetto al riferimento terrestre è descritto usando come coordinate lagrangiane le coordinate c_1 e c_2 del centro di massa rispetto al riferimento $\{O, \vec{e}_i\}$ e l'anomalia φ individuata dagli assi 1 fisso e solidale e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.
Si considera il moto con dato iniziale $\overrightarrow{OC}(0) = a\vec{e}_1$, $\vec{v}_C(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot\varphi(0) = \lambda$, con $a, \lambda > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
82) Il moto del centro di massa è circolare.
83) La sollecitazione vincolare è equivalente a una forza applicata al centro di massa.
84) Se $\lambda = \sqrt{k/M}$ la base (centroide fissa) è una circonferenza.
Soluzione
1. N
Usando la prima e la seconda equazione cardinale e il fatto che i vincoli sono ideali si determinano le equazioni pure: $M\ddot c_1 + kc_1 = 0$, $M\ddot c_2 + kc_2 = 0$, $\ddot\varphi = 0$. Integrandole con il dato iniziale assegnato si trova $c_1(t) = a\cos(\sqrt{k/M}t)$, $c_2(t) = 0$, $\varphi(t) = \lambda t$. Quindi il moto del centro di massa si svolge sull'asse coordinato 1.
2. S
Perché usando la prima e la seconda equazione cardinale e il fatto che i vincoli sono ideali si trova che la somma della sollecitazione è $Mg\vec{e}_3$ e il momento totale calcolato usando come polo il centro di massa è nullo.
3. S
Per determinare le equazioni della base si cercano le coordinate del centro di istantanea rotazione B scrivendo $0 = \vec{v}_C + \vec\omega \times \overrightarrow{CB}$. Posto $\overrightarrow{OB} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$, l'equazione precedente permette di determinare $b_1(t) = a\cos(\sqrt{k/M}t)$ e $b_2(t) = -(a/\lambda)\sqrt{k/M}\sin(\sqrt{k/M}t)$.

.29 Dire se ciascuna delle matrici seguenti può essere la matrice della forma quadratica nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$ dell'energia cinetica lagrangiana di un sistema di punti

materiali vincolato da vincoli olonomi regolari.
Qui $(\varphi, \theta) \in \boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate lagrangiane e $t > 0$.
85)

$$\begin{pmatrix} 2e^{\frac{\varphi+\theta}{2}} & e^{\varphi} \\ e^{\theta} & e^{\frac{\varphi+\theta}{2}} \end{pmatrix}.$$

86)

$$\begin{pmatrix} \varphi^2+1 & \varphi \\ \varphi & \varphi^2+1 \end{pmatrix}.$$

87)

$$\begin{pmatrix} t(\dot{\varphi}^2+1)e^{\varphi} & 0 \\ 0 & 2+\theta^2 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE
1. N
Non è simmetrica.
2. S
È simmetrica e definita positiva.
3. N
Dipende da $\dot{\varphi}$.

.30 Un moto $\boldsymbol{X}(t)$ è dato da

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t)),$$

ove $\boldsymbol{\psi} \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è una curva regolare con curvatura positiva; s è l'ascissa curvilinea e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
88) In un istante $t = t_0$ si può avere

$$\ddot{\boldsymbol{X}}(t_0) = -b\boldsymbol{T}(s(t_0)) - a\boldsymbol{N}(s(t_0)),$$

con a, $b > 0$.
89) Sull'intervallo $(a, b) \subset \boldsymbol{R}$, $\ddot{\boldsymbol{X}}$ può avere componente nulla lungo $\boldsymbol{T}(s(t))$.
90) Supponiamo che $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{R}) \subset S$, con S superficie regolare. Allora $\ddot{\boldsymbol{X}}(t)$ può essere normale a S.
SOLUZIONE
1. N
La componente di $\boldsymbol{a}$ lungo $\boldsymbol{N}$ deve essere non negativa.
2. S
Sì, se il moto è uniforme.
3. S
Per esempio nel moto uniforme sull'equatore della sfera.

.31 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \ldots, n$, è soggetto a vincoli olonomi regolari.
Vale l'ipotesi dei lavori virtuali.

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
91) Se i vincoli sono fissi, il lavoro fatto da ciascuna reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^{i}$ sul moto $\boldsymbol{X}_i$ è nullo.
92) Lo spazio normale $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} \subset \boldsymbol{R}^{3n}$, cui appartiene $\mathbf{f}_{\text{vin}}$, è invariante nel tempo.
93) Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ dipende di fatto dalla scelta delle coordinate lagrangiane.
Soluzione
1. N
È noto che nel caso dei vincoli fissi si annulla la somma dei lavori suddetti; basta pensare al caso di 2 punti vincolati da vincolo rigido, con forza direttamente applicata solo al primo.
2. N
In generale no, se i gradienti $\nabla_{\boldsymbol{z}} f_k$ dipendono dal tempo.
3. N
Essendo l'ortogonale di $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} \subset \boldsymbol{R}^{3n}$, che è generato dai gradienti $\nabla_{\boldsymbol{z}} f_k$ e quindi non ne dipende, non ne dipende neanche esso.

.32 Data la sollecitazione costituita dai punti di applicazione $X_1, \dots, X_n$ e forze $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, si indicano con $\vec{f}$ e $\vec{M}_O$ la somma e il momento totale di polo O.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
94) Il trinomio invariante (o invariante scalare) è uguale a $\vec{f} \times \vec{M}_O$.
95) Se il trinomio invariante è nullo e $\vec{f} \neq 0$ allora esiste almeno un punto X tale che $\vec{M}_X$ è parallelo a $\vec{f}$.
96) Se $\vec{f} = 0$ allora il campo momento è uniforme.
Soluzione
1. N
È il prodotto scalare.
2. N
Il campo momento è circolare.
3. S
Segue immediatamente dalla formula fondamentale.

.33 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato al cono

$$x_3 = -\alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 0\,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Su di esso agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica attrattiva

$$\boldsymbol{F} = -k(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
97) Esistono infinite posizioni di equilibrio.

98) Se si usano le coordinate polari nel piano (x_1, x_2) per il moto del punto, l'energia cinetica è

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2(1+\alpha^2)+r^2\dot{\varphi}^2)\,.$$

99) Se $k > \alpha mg$ esistono posizioni di equilibrio stabile $(x_1, x_2) \neq (0,0)$.
SOLUZIONE
1. S
Il potenziale è

$$U(\boldsymbol{x}) = -\frac{k}{2}(x_1^2+x_2^2) - mgx_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}(k\sqrt{x_1^2+x_2^2} - 2mg\alpha)\,.$$

Si noti che $U(\boldsymbol{x}) \to 0+$ se $(x_1, x_2) \to (0,0)$ e $U(\boldsymbol{x}) \to -\infty$ se $|(x_1, x_2)| \to +\infty$. Quindi il potenziale ha (per la simmetria di rotazione) infiniti punti di massimo per qualche $x_1^2 + x_2^2 = r_0^2 > 0$.
2. S
Infatti

$$\boldsymbol{v}^{\text{L}} = \dot{r}(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2 - \alpha\boldsymbol{e}_3) + r\dot{\varphi}(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2)\,.$$

3. N
Come già osservato le posizioni di equilibrio corrispondono a punti di massimo del potenziale, ma non isolati.

.34 Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ un sistema di riferimento mobile, con

$$\boldsymbol{X}_O(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 + ct\boldsymbol{e}_3\,,$$

e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Qui α, β e c sono costanti positive.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
100) I moti solidali con $\mathcal{S}$ hanno velocità nel sistema fisso sempre diversa da 0.
101) L'accelerazione di trascinamento $\boldsymbol{a}_{\text{T}}$ in $\mathcal{S}$ è ortogonale a $\boldsymbol{\omega}$.
102) Esistono moti solidali con $\mathcal{S}$ che rimangono limitati nel sistema fisso.
SOLUZIONE
1. S
Poiché $\boldsymbol{\omega} = \beta\boldsymbol{e}_3$ dal teorema del moto relativo si ha se $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = 0$

$$\boldsymbol{v} = R(\alpha-\beta)(-\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2) + c\boldsymbol{e}_3 + \beta(-x_2\boldsymbol{e}_1 + x_1\boldsymbol{e}_2)\,.$$

Ma $c > 0$.
2. S
Infatti in questo caso $\boldsymbol{\omega} = \beta\boldsymbol{e}_3$ e

$$\boldsymbol{a}_{T} = -R\alpha^2(\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2) + \boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_O)]\,.$$

3. N
Per un moto solidale vale

$$\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{X}_O(t) = \sum_{h=1}^{3} c_h \boldsymbol{u}_h(t)\,,$$

con c_h costanti. Poiché $\boldsymbol{X}_O$ è illimitato deve esserlo anche $\boldsymbol{X}$.

.35 Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Sull'asta agiscono le forze

$$\boldsymbol{F}_G = -k\boldsymbol{X}_G\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = \mu(t)\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{e}_3\,,$$

con $\mu(t) = \nu\sin(\alpha t)$, ν, α, $k > 0$ costanti. Qui G è il centro di massa dell'asta. Si scelgano come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1G} \in \boldsymbol{R}\,, \quad y = x_{2G} \in \boldsymbol{R}\,, \quad \varphi \in (-\pi, \pi)$$

tale che

$$\overrightarrow{AB} = 2L\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + 2L\sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,.$$

Le equazioni di Lagrange sono allora (I è un opportuno momento d'inerzia dell'asta)

$$\begin{aligned} I\ddot{\varphi} &= -2L^2\mu\,,\\ m\ddot{x} &= -kx + 2\mu L\sin\varphi\,,\\ m\ddot{y} &= -ky - 2\mu L\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
103) In ciascun moto $\dot{\varphi}$ si mantiene limitato.
104) Esistono moti in cui $x(t) = y(t)$ per ogni t.
105) Si consideri un moto in cui $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. Allora $\varphi(t) < 0$ in qualche intervallo opportuno $(0, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$.
Soluzione
1. S
Infatti

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(0) - 2L^2\nu\int_0^t \sin(\alpha\tau)\,\mathrm{d}\tau = \dot{\varphi}(0) + 2L^2\nu\alpha^{-1}[\cos(\alpha\tau) - 1]\,.$$

2. N
Se questo fosse vero, dalla seconda e terza equazione si avrebbe

$$\sin\varphi(t) = -\cos\varphi(t)\,,$$

cioè φ costante, il che è impossibile per la prima equazione.

3. S
Si calcola usando la prima equazione

$$\ddot{\varphi}(0) = 0\,, \quad I\,\dddot{\varphi}(t) = -2L^2\alpha\nu\cos(\alpha t)\,,$$

da cui $\dddot{\varphi}(0) < 0$.

.36 Una lamina quadrata omogenea pesante di lato L e massa M è vincolata a muoversi su un piano fisso orizzontale. I vincoli sono ideali. Si considera il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ con piano coordinato 1–2 coincidente con il piano su cui giace la lamina e asse 3 verticale ascendente. Indicato con C il centro di massa della lamina, si considera il riferimento solidale $\{C, \vec{e}_i'\}$ tale che $\vec{e}_3' = \vec{e}_3$. Oltre al peso, sul centro di massa della lamina agisce la forza elastica di costante $k > 0$ e centro O.
Il moto della lamina rispetto al riferimento terrestre è descritto usando come coordinate lagrangiane le coordinate c_1 e c_2 del centro di massa rispetto al riferimento $\{O, \vec{e}_i\}$ e l'anomalia φ individuata dagli assi 1 fisso e solidale e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.
Si considera il moto con dato iniziale $\overrightarrow{OC}(0) = 0$, $\vec{v}_C(0) = v_0\vec{e}_1$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \lambda$, con $v_0, \lambda > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
106) La traiettoria del centro di massa è un'ellisse.
107) Il momento totale della sollecitazione vincolare calcolato usando come polo l'origine del riferimento fisso è nullo.
108) Se $\lambda = \sqrt{k/M}$ la base (centroide fissa) è una circonferenza.
Soluzione
1. N
Usando la prima e la seconda equazione cardinale e il fatto che i vincoli sono ideali si determinano le equazioni pure: $M\ddot{c}_1 + kc_1 = 0$, $M\ddot{c}_2 + kc_2 = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$. *Integrandole con il dato iniziale assegnato si trova* $c_1(t) = v_0\sqrt{M/k}\sin(\sqrt{k/M}t)$, $c_2(t) = 0$, $\varphi(t) = \lambda t$. *Quindi il moto del centro di massa si svolge sull'asse coordinato* 1.
2. N
Perché usando la prima e la seconda equazione cardinale e il fatto che i vincoli sono ideali si trova che la somma della sollecitazione è $\vec{f}^{\,\mathrm{v}} = Mg\vec{e}_3$ *e il momento totale calcolato usando come polo il centro di massa è nullo. Quindi* $\vec{M}_O^{\,\mathrm{v}} = \vec{f}^{\,\mathrm{v}} \times \overrightarrow{CO}$ *che, in generale, non è uguale a zero.*
3. S
Per determinare le equazioni della base si cercano le coordinate del centro di istantanea rotazione B *scrivendo* $0 = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CB}$. *Posto* $\overrightarrow{OB} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$, *l'equazione precedente permette di determinare* $b_1(t) = v_0\sqrt{M/k}\sin(\sqrt{k/M}t)$ *e* $b_2(t) = (v_0/\lambda)\cos(\sqrt{k/M}t)$.

.37 Dire se ciascuna delle matrici seguenti può essere la matrice iacobiana (trasposta) $\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}/\partial \boldsymbol{q}$ della parametrizzazione lagrangiana di un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi regolari, con $n_c = 3$, $m = 1$, per ogni valore delle coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in \boldsymbol{R}^2$.

109)
$$\begin{pmatrix} 2\varphi & 2\theta & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

110)
$$\begin{pmatrix} 2\varphi & 0 & 2 \\ \dot{\varphi} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

111)
$$\begin{pmatrix} \varphi^2+1 & 0 & \theta \\ 1 & 0 & \varphi^2+\theta^2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione
1. S
Le due righe sono linearmente indipendenti.
2. N
Dipende da $\dot{\varphi}$.
3. N
Se $\varphi = 0$, $\theta = 1$ le due righe non sono linearmente indipendenti.

.38 Un moto $\boldsymbol{X}(t)$ è dato da

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t)),$$

ove $\boldsymbol{\psi} \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è una curva regolare con curvatura positiva; s è l'ascissa curvilinea e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
112) Se in un istante $t = t_0$ si conoscono $\ddot{s}(t_0)$, $\dot{s}(t_0)$ allora ne risulta determinato il modulo dell'accelerazione $|\boldsymbol{a}(t_0)|$, a prescindere da ogni conoscenza della traiettoria $\boldsymbol{\psi}$.
113) Sull'intervallo $(a, b) \subset \boldsymbol{R}$, si può avere $\ddot{\boldsymbol{X}}(t) \neq 0$ ma con componente identicamente nulla lungo $\boldsymbol{N}(s(t))$.
114) Supponiamo che $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{R}) \subset S$, con S superficie regolare, e che in un istante t_0 si abbia $\dot{s}(t_0) = 0$. Allora $\ddot{\boldsymbol{X}}(t_0)$ è tangente a S.
Soluzione
1. N
Vale
$$|\boldsymbol{a}|^2 = \ddot{s}^2 + \dot{s}^4 k(s)^2.$$
2. N
Se la componente lungo $\boldsymbol{N}$ si annulla, allora si annulla $\dot{s}$, e quindi anche $\ddot{s}$.
3. S
Se $\dot{s}(t_0) = 0$, allora $\ddot{\boldsymbol{X}}(t_0)$ è parallelo a $\boldsymbol{T}(s(t_0))$ che è tangente alla superficie.

.39 Un sistema di 2 punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, 2$, è soggetto a vincoli $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) \in \boldsymbol{R}^m$ olonomi regolari, mobili.
Vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.

115) Se il lavoro fatto dalla reazione vincolare ${\mathbf{f}_{\text{vin}}}^1$ sul moto $\boldsymbol{X}_1$ è nullo, allora lo è anche quello fatto da ${\mathbf{f}_{\text{vin}}}^2$ su $\boldsymbol{X}_2$.
116) Lo spazio degli atti di moto del sistema è un traslato di

$$N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} = \langle \nabla_{\boldsymbol{z}} f_1, \dots, \nabla_{\boldsymbol{z}} f_m \rangle \subset \boldsymbol{R}^6 \,.$$

117) Se per ogni $\boldsymbol{q} \in Q$, $t \in \boldsymbol{R}$,

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}_1^{\text{L}}}{\partial q_1}(\boldsymbol{q}, t) = 0 \,,$$

allora

$${\mathbf{f}_{\text{vin}}}^2 \quad \text{è parallela a} \quad \frac{\partial \boldsymbol{X}_2^{\text{L}}}{\partial q_1}(\boldsymbol{q}, t) \,.$$

Soluzione
1. N
Per esempio si consideri il caso in cui uno dei punti è vincolato a una superficie liscia e l'altro a una superficie mobile.
2. N
No, è un traslato di $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$.
3. N
È invece ortogonale al vettore indicato, per l'ipotesi dei lavori virtuali.

.40 Si consideri l'atto di moto rigido $\vec{v}_X$. Si indichi con $\vec{\omega}$ la velocità angolare e con $\vec{v}_O$ la velocità associata al punto O.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
118) Il trinomio invariante (o invariante scalare) è uguale a $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_O$.
119) Se il trinomio invariante è nullo e $\vec{\omega} \neq 0$ allora esiste almeno un punto X tale che $\vec{v}_X$ è parallelo a $\vec{\omega}$.
120) Se $\vec{\omega} = 0$ allora l'atto di moto è uniforme.
Soluzione
1. S
Dalla definizione.
2. N
L'atto è circolare.
3. S
Segue immediatamente dalla formula fondamentale.

.41 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato al paraboloide iperbolico

$$x_3 = -\alpha x_1 x_2 \,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Su di esso agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica attrattiva

$$\boldsymbol{F} = -k(x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2) \,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.

121) Per ogni valore dei parametri, la conservazione dell'energia implica che ciascun moto è limitato.
122) Per ogni valore dei parametri, esistono moti limitati.
123) Esiste una scelta dei parametri per cui tutte le configurazioni compatibili con il vincolo sono di equilibrio.
SOLUZIONE
1. N
Il potenziale è

$$U(\boldsymbol{x}) = -\frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) - mgx_3 = -\frac{1}{2}(kx_1^2 + kx_2^2 - 2\alpha mgx_1x_2)\,.$$

La conservazione dell'energia dà $-U \leq E$, ma da qui segue che (x_1, x_2) e di conseguenza x_3 si mantengono limitati solo se la forma in parentesi è definita positiva.
2. S
I moti sugli assi x_1 e x_2 si riducono a moti armonici unidimensionali.
3. N
Dall'espressione del potenziale già trovata, segue che questo non può mai essere costante, per nessuna scelta di $\alpha > 0$, $k > 0$.

.42 Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ un sistema di riferimento mobile, con

$$\boldsymbol{X}_O(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2\,,$$

e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Qui α e β sono costanti positive.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
124) La matrice di cambiamento di base tra la terna fissa e $\mathcal{M}$ dipende da α.
125) Sia $\mathcal{S}'$ un altro sistema di riferimento mobile, con terna $\mathcal{N}$. Allora se conosco la velocità angolare di $\mathcal{N}$ rispetto a $\mathcal{M}$, ne posso dedurre quella di $\mathcal{N}$ rispetto alla terna fissa.
126) La somma delle forze apparenti (dette anche fittizie) in $\mathcal{S}$, agenti su un moto solidale, dipende sia da α che da β.
SOLUZIONE
1. N
La matrice di cambiamento di base dipende solo dal moto di $\mathcal{M}$, che non contiene α.
2. S
Questo segue dalla formula di composizione delle velocità angolari.
3. S
Infatti $\boldsymbol{a}_C = 0$, ma $\boldsymbol{a}_T$ contiene $\boldsymbol{\omega} = \beta\boldsymbol{e}_3$ e anche $\boldsymbol{a}_O$ che dipende da α.

.43 Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Sull'asta agiscono una forza elastica applicata nell'estremo A e una distribuzione di forze (applicata su tutti i punti di AB), date da

$$\boldsymbol{F}_A = -k\boldsymbol{X}_A\,, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mu x_2 \boldsymbol{e}_1\,\mathrm{d}s\,,$$

con $k > 0$, $\mu > 0$. Si scelgano come coordinate lagrangiane

$$x = x_{1A} \in \boldsymbol{R}\,, \quad y = x_{2A} \in \boldsymbol{R}\,, \quad \varphi \in (-\pi, \pi)$$

tale che

$$\overrightarrow{AB} = 2L\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + 2L\sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,.$$

Le componenti lagrangiane delle forze sono allora:

$$\begin{aligned} Q_x &= -kx + 2L\mu(y + L\sin\varphi)\,,\\ Q_y &= -ky\,,\\ Q_\varphi &= -2L^2\mu\Big(y + \frac{4}{3}L\sin\varphi\Big)\,. \end{aligned}$$

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
127) Esistono configurazioni di equilibrio.
128) Le forze direttamente applicate sono conservative.
129) La matrice dell'energia cinetica del sistema (come forma quadratica nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$) è diagonale.
Soluzione
1. S
Le componenti lagrangiane delle forze si annullano se $x = 0$, $y = 0$, $\varphi = 0$; poiché T^{L} è una forma quadratica in $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{\varphi}$, non occorre neppure scrivere esplicitamente le equazioni di Lagrange per sapere che i loro membri di sinistra si annullano all'equilibrio.
2. N
Lo è $\boldsymbol{F}_A$, ma non lo è la distribuzione $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$, perché non soddisfa le condizioni di chiusura.
3. N
Secondo il teorema di König,

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{I}{2}|\boldsymbol{\omega}|^2 = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2\,.$$

Ma

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{v}_G|^2 &= \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(x + L\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (y + L\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2]\right|^2\\ &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + L^2\dot{\varphi}^2 - 2L\dot{\varphi}(\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi)\,. \end{aligned}$$

.44 Una lamina rettangolare omogenea pesante di lati L_1, L_2 e massa M è vincolata a muoversi su un piano fisso orizzontale. I vincoli sono ideali.

Si considera il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ con piano coordinato 1–2 coincidente con il piano su cui giace la lamina e asse 3 verticale ascendente. Indicato con C il centro di massa della lamina, si considera il riferimento solidale $\{C, \vec{e}_i'\}$ tale che $\vec{e}_3' = \vec{e}_3$. Oltre al peso, sul centro di massa della lamina agisce la forza elastica di costante $k > 0$ e centro O.
Il moto della lamina rispetto al riferimento terrestre è descritto usando come coordinate lagrangiane le coordinate c_1 e c_2 del centro di massa rispetto al riferimento $\{O, \vec{e}_i\}$ e l'anomalia φ individuata dagli assi 1 fisso e solidale e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.
Si considera il moto con dato iniziale $\overrightarrow{OC}(0) = a\vec{e}_1$, $\vec{v}_C(0) = v_0\vec{e}_2$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \lambda$, con $a, v_0, \lambda > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
130) Scegliendo opportunamente a e v_0 la traiettoria del centro di massa è una circonferenza.
131) La sollecitazione vicolare ha trinomio invariante diverso da zero.
132) Se $\lambda = 0$ la base (centroide fissa) giace sull'asse coordinato 2 del riferimento fisso.
Soluzione
1. S
Usando la prima e la seconda equazione cardinale e il fatto che i vincoli sono ideali si determinano le equazioni pure: $M\ddot{c}_1 + kc_1 = 0$, $M\ddot{c}_2 + kc_2 = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$. Integrandole con il dato iniziale assegnato si trova $c_1(t) = a\cos(\sqrt{k/M}t)$, $c_2(t) = v_0\sqrt{M/k}\sin(\sqrt{k/M}t)$, $\varphi(t) = \lambda t$. La traiettoria è circolare se $a = v_0\sqrt{M/k}$.
2. N
Perché usando la prima e la seconda equazione cardinale e il fatto che i vincoli sono ideali si trova che la somma della sollecitazione è $\vec{f}^{\,\mathrm{v}} = Mg\vec{e}_3$ e il momento totale calcolato usando come polo il centro di massa è nullo.
3. N
Se $\lambda = 0$ il moto è traslatorio e, di conseguenza, il centro di istantanea rotazione non è definito.

.45 Dire se ciascuna delle seguenti può essere la lagrangiana ridotta delle piccole oscillazioni, in un punto di equilibrio $(\varphi, \theta) = (0,0)$, per un sistema di corpi rigidi soggetto a forze conservative e vincoli olonomi fissi, con $\ell = 2$. Qui $(\varphi, \theta) \in \boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate lagrangiane e a, b, c, d sono costanti positive.
133)
$$\mathcal{L}^* = a^2\dot{\varphi}^2 + 2ab\dot{\varphi}\dot{\theta} + 2b^2\dot{\theta}^2 - c\varphi^2 - d\theta^2\,.$$
134)
$$\mathcal{L}^* = 3a^2\dot{\varphi}^2 + b^2\dot{\theta}^2 - c^2\varphi^2\,.$$
135)
$$\mathcal{L}^* = a^2\dot{\theta}^2 + 2ab\dot{\varphi}\dot{\theta} + b^2\dot{\theta}^2 - c^2\varphi^2 - c^2\theta^2\,.$$
Soluzione

1. S
La matrice dell'energia cinetica è definita positiva. La matrice hessiana del potenziale è definita negativa.
2. N
La matrice hessiana del potenziale non è definita negativa.
3. N
La matrice dell'energia cinetica non è definita positiva.

.46 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva $\boldsymbol{\psi} \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Il vincolo è scabro, secondo la legge

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

ove $\mu > 0$. Si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ sia una curva regolare con curvatura positiva; s è l'ascissa curvilinea e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$. Si assuma che il punto abbia velocità non nulla.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
136) Il segno della componente $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}$ dipende da quello di $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}$.
137) Se $\boldsymbol{F} = 0$, allora l'energia cinetica si conserva.
138) Assegnato $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B}$, si può rendere $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}} = 0$ variando opportunamente $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}$.
Soluzione
1. N
La componente $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}$ ha sempre segno opposto a quello di $\dot{s}$.
2. N
L'attrito agisce comunque per la componente $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} = m\dot{s}^2 k$.
3. N
La componente $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B}$ non può essere variata cambiando le altre componenti. Questo è vero per tutti i vettori in tutte le basi ortonormali.

.47 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \ldots, n$, è soggetto al vincolo olonomo regolare $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t)$, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m$.
Vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
139) Il lavoro complessivo fatto dalle reazioni vincolari sui moti $\boldsymbol{X}_i$ è nullo.
140) Se le forze direttamente applicate sono posizionali, anche le reazioni vincolari dipendono solo dalla posizione dei punti.
141) Lo spazio degli spostamenti virtuali, come spazio vettoriale, ha dimensione pari a $3n - m$.
Soluzione
1. N
È noto che questo è sempre vero solo nel caso dei vincoli fissi.
2. N
Si pensi a un punto vincolato a una circonferenza e soggetto alla forza tangente posizionale $\alpha \boldsymbol{T}$ con $\alpha > 0$ costante. Poiché la velocità del punto cambia, cambia anche la reazione vincolare.

3. S
La dimensione è infatti pari al numero dei gradi di libertà $\ell = n_c - m = 3n - m$.

.48 Rispetto al punto solidale O un corpo rigido ha riferimento principale $\{O, \vec{e}_i\}$ e matrice principale

$$I_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

con $B > A > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
142) Il corpo ha infiniti riferimenti principali relativi al punto O.
143) Se il corpo viene posto in rotazione attorno alla retta passante per O e individuata dal versore $(\sqrt{2}/2)\vec{e}_1 + (\sqrt{2}/2)\vec{e}_2$ il momento angolare risulta parallelo alla velocità angolare $\vec{\omega}$.
144) Per il moto considerato al punto precedente l'energia cinetica vale $A\|\omega\|^2/2$.
Soluzione
1. S
È a simmetria cilindrica rispetto all'asse 3.
2. S
Si, perché l'asse considerato è principale.
3. S
Perché A è il momento d'inerzia relativo all'asse di rotazione.

.49 Un moto $\boldsymbol{X} \in C^2(\boldsymbol{R})$ soddisfa

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \alpha_1(t)\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2(t)\boldsymbol{e}_2\,,$$

con α_1, $\alpha_2 \in C^1(\boldsymbol{R})$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
145) In ogni istante l'accelerazione del moto appartiene al piano $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$.
146) In ogni istante il moto appartiene al piano $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$.
147) Se $\boldsymbol{X}(1) = \boldsymbol{X}(0)$ allora

$$\int_0^1 \alpha_1(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Soluzione
1. S
Infatti

$$\ddot{\boldsymbol{X}}(t) = \dot{\alpha}_1(t)\boldsymbol{e}_1 + \dot{\alpha}_2(t)\boldsymbol{e}_2\,.$$

2. N
Vale infatti

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}(0) + \int_0^t \alpha_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\boldsymbol{e}_1 + \int_0^t \alpha_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\boldsymbol{e}_2\,,$$

ma $\boldsymbol{X}(0)$ può avere componente non nulla $\boldsymbol{X}(0) \cdot \boldsymbol{e}_3$.
3. S
Basta prendere $t = 1$ nell'eguaglianza precedente.

.50 Si consideri il sistema differenziale

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = \nabla U(\boldsymbol{X}) \,,$$

con $m > 0$, $\boldsymbol{X} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ e $U \in C^2(\boldsymbol{R}^2)$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
148) Se $\nabla U(0) = 0$ e $D^2U(0)$ ha autovalori -1, -2, $\boldsymbol{x} = 0$ è di equilibrio stabile.
149) Se $\nabla U(0) = 0$ e $D^2U(0)$ è nulla, $\boldsymbol{x} = 0$ è di equilibrio instabile.
150) Se $U(\boldsymbol{x}) \to +\infty$ per $|\boldsymbol{x}| \to +\infty$ allora esiste almeno un punto di equilibrio per il sistema.
Soluzione
1. S
Infatti in questo caso $\boldsymbol{x} = 0$ è di massimo locale isolato per U.
2. N
Non si hanno informazioni sufficienti sulla natura del punto critico $\boldsymbol{x} = 0$.
3. S
Infatti allora U deve avere un minimo assoluto, che quindi risulta un punto critico e pertanto di equilibrio per il sistema.

.51 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ dati da

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3 \,,$$

sono vincolati dal vincolo olonomo non singolare

$$f_1(\boldsymbol{z}, t) = z_1 - z_4 + ct = 0 \,,$$
$$f_2(\boldsymbol{z}) = z_2^2 + z_5 = 0 \,,$$

$(\boldsymbol{z}, t) \in \boldsymbol{R}^7$, con $c > 0$ costante.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
151) Lo spazio degli spostamenti virtuali è indipendente da t.
152) Lo spazio degli spostamenti effettivi coincide con quello degli spostamenti virtuali.
153) Assumendo l'ipotesi dei lavori virtuali, il lavoro fatto dalle reazioni vincolari sui punti è nullo.
Soluzione
1. S
Infatti

$$V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} = N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}^\perp = \langle \nabla_{\boldsymbol{z}} f_1, \nabla_{\boldsymbol{z}} f_2 \rangle^\perp \,,$$

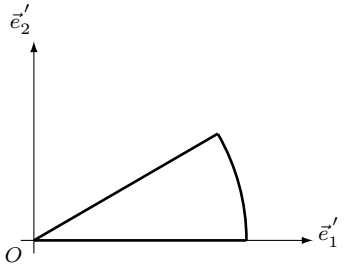
e i gradienti $\nabla_{\boldsymbol{z}} f_i$ non dipendono da t.

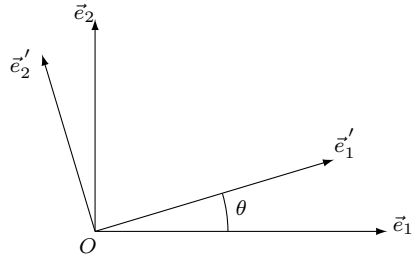
2. N
Infatti lo spazio degli spostamenti effettivi è

$$V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} + \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\text{L}}}{\partial t}\,,$$

e la forma di f_1 mostra che $\partial \boldsymbol{z}^{\text{L}}/\partial t \neq 0$.
3. N
Questo non è in genere vero per i vincoli mobili.

.52 Una lamina rigida omogenea di massa M ha la forma di un settore circolare di raggio R e angolo al centro $\pi/6$. In figura (a sinistra) è rappresentato il corpo assieme al riferimento $\{O, \vec{e}_i'\}$ a esso solidale.





Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 3 verticale e ascendente. Il vincolo di cerniera è ideale. La sola sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso. Si indica con θ l'anomalia individuata dagli assi 1 fisso e solidale (figura a destra).
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
154) Il prodotto d'inerzia relativo agli assi 1 e 2 del riferimento solidale vale $-3MR^2/(8\pi)$.
155) L'energia cinetica del corpo è $3MR^2\dot{\theta}^2/4$.
156) Per il moto con dato iniziale $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = p$, con $p > 0$, la componente 3 del momento totale della sollecitazione vincolare è MgR.
Soluzione
1. S
Dalla definizione di prodotto d'inerzia

$$I'_{O,12} = -\int_0^R \mathrm{d}\rho\,\rho \int_0^{\pi/6} \mathrm{d}\phi\,\frac{12M}{\pi R^2}\rho^2 \sin\phi\cos\phi = -\frac{3MR^2}{8\pi}\,.$$

2. N
Usando che la velocità angolare vale $\dot{\theta}\vec{e}_1$ e

$$I'_{O,33} = \int_0^R \mathrm{d}\rho\,\rho \int_0^{\pi/6} \mathrm{d}\phi\,\frac{12M}{\pi R^2}\rho^2 = \frac{1}{2}MR^2\,,$$

si trova $MR^2\dot{\theta}^2/4$.

3. N
Dal momento che il vincolo è di cerniera ideale, è noto che la componente del momento relativo all'asse della cerniera è nulla.

.53 Sia

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}, t)$$

un'equazione di moto con $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^7)$, e indichiamo con $\boldsymbol{X} \in C^2(I)$ una sua soluzione massimale.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
157) Se per ogni soluzione il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ su un qualunque intervallo di tempo è nullo, allora $\boldsymbol{F}$ è nulla.
158) Se $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ su $\boldsymbol{X}$ in $[t_0, t_1]$ dipende solo da $\boldsymbol{X}(t_0)$ e $\boldsymbol{X}(t_1)$.
159) Se $\boldsymbol{F}$ è una costante non nulla e $\dot{\boldsymbol{X}}(t_0) = 0$, il lavoro su $[t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$ non può annullarsi.
Soluzione
1. N
Per esempio potrebbe essere $\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{g} \times \dot{\boldsymbol{X}}$ *con* $k \in \boldsymbol{R}$ *e* $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{R}^3$ *costanti non nulle.*
2. N
Questo è vero solo se la forza è conservativa, oltre che posizionale.
3. S
Sia $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 \in \boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\}$ *costante. Allora*

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \dot{\boldsymbol{X}}(t_0) + m^{-1}\boldsymbol{F}_0(t - t_0) = m^{-1}\boldsymbol{F}_0(t - t_0)\,, \qquad t > t_0\,,$$

e il lavoro è

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{X}}(t)\,\mathrm{d}t = m^{-1}|\boldsymbol{F}_0|^2 \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} \neq 0\,.$$

.54 Una forza $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\} \to \boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\})$ è chiusa in $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
160) Esiste un potenziale $U \in C^2(\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\})$.
161) Esiste un potenziale $U \in C^2(Q)$, con $Q = \boldsymbol{R} \times (0, +\infty)$.
162) La circuitazione di $\boldsymbol{F}$ (cioè l'integrale curvilineo di $\boldsymbol{F}$) si annulla su tutte le curve chiuse semplici γ che non contengono né circondano (0,0).
Soluzione
1. N
Poiché $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *non è semplicemente connesso la chiusura non implica l'esattezza.*
2. S
Poiché Q *è semplicemente connesso la chiusura implica l'esattezza.*
3. S
Infatti in questo caso $\boldsymbol{F}$ *è chiusa in un semplicemente connesso che contiene* γ.

.55 Sia $(\boldsymbol{X}, m)$ un punto materiale vincolato alla curva $\boldsymbol{\psi} \in C^2(\boldsymbol{R})$ con terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$, soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$. Il vincolo è liscio.

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
163) Se $\boldsymbol{F} = 0$, allora $\mathbf{f}_{\text{vin}} = 0$.
164) Se $\boldsymbol{F} \neq 0$, allora $\mathbf{f}_{\text{vin}} \neq 0$.
165) Se all'istante t si ha $\boldsymbol{F}(t) \in \langle \boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)) \rangle$, allora

$$\mathbf{f}_{\text{vin}}(t) \in \langle \boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)) \rangle \, .$$

Soluzione
1. N
Infatti in questo caso

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} = mk\dot{s}^2 \, .$$

2. N
Non se la forza e le condizioni iniziali rendono superfluo il vincolo. Per esempio se il punto è vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio R, $|\dot{\boldsymbol{X}}(0)| = \alpha > 0$ e $\boldsymbol{F} = -m\alpha^2(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0)/R^2$, con $\boldsymbol{X}_0$ centro della circonferenza.
3. S
Infatti $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B}$.

.56 Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
166) Considerato un sistema rigido sottoposto al vincolo di giunto ideale di polo O rispetto all'osservatore terrestre e a una sollecitazione attiva di momento non nullo rispetto al polo O, il momento totale della sollecitazione vincolare calcolato rispetto al polo O è nullo.
167) Considerato un sistema di particelle in moto rispetto a un osservatore inerziale, la quantità di moto totale relativa al riferimento del centro di massa è sempre uguale alla massa totale del sistema moltiplicata per la velocità del centro di massa.
168) Considerato un parallelepipedo a base quadrata omogeneo, tutti i riferimenti cartesiani con origine nel suo centro di massa sono centrali d'inerzia.
Soluzione
1. S
È nullo perché il giunto è liscio.
2. N
Perché quella relativa al riferimento del centro di massa è nulla.
3. N
Perché il corpo non è necessariamente a simmetria sferica. Sarebbe vero nel caso del cubo.

.57 Un moto $\boldsymbol{X} \in C^2(\boldsymbol{R})$ soddisfa

$$m\ddot{\boldsymbol{X}}(t) = F_1(t)\boldsymbol{e}_1 \, ,$$

con $F_1 \in C(\boldsymbol{R})$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
169) Il moto $\boldsymbol{X}(t)$ è rettilineo.
170) Se $F_1(t) = 0$ per ogni t, il punto resta fermo..
171) La velocità $\dot{\boldsymbol{X}}$ ha 2 componenti costanti.

Soluzione
1. N
Lo è solo se $\dot{\boldsymbol{X}}(t_0)$ *è parallelo a* $\boldsymbol{e}_1$.
2. N
Solo se $\dot{\boldsymbol{X}}(t_0) = 0$.
3. S
Infatti $\ddot{\boldsymbol{X}}$ *ha componenti nulle lungo* $\boldsymbol{e}_2$ *e* $\boldsymbol{e}_3$.

.58 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio al paraboloide

$$x_3 = \alpha(x_1^2 + x_2^2)\,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2\,,$$

con $\alpha > 0$ costante. Indichiamo con $\boldsymbol{\nu}$ il versore normale alla superficie.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
172) Se la reazione vincolare non è nulla, non è ortogonale a $\boldsymbol{e}_3$.
173) Se la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ è nulla, il moto non può svolgersi a quota x_3 costante, salvo il caso della quiete.
174) Se $\boldsymbol{F} = \lambda\boldsymbol{\nu}$, $\lambda \neq 0$ costante, e la velocità iniziale è $\dot{\boldsymbol{X}}(0) = 0$, allora il moto è la quiete.
Soluzione
1. S
Infatti

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = \pm|\mathbf{f}_{\text{vin}}|\boldsymbol{\nu} = \pm|\mathbf{f}_{\text{vin}}|\frac{(-2\alpha x_1, -2\alpha x_2, 1)}{\sqrt{1 + 4\alpha^2(x_1^2 + x_2^2)}}\,.$$

2. N
In questo caso il moto è circolare e la reazione vincolare non può essere nulla; ma allora, come visto sopra ha una componente lungo $\boldsymbol{e}_3$ *e il moto non può restare a quota* x_3 *costante.*
3. S
Infatti la proiezione di $\boldsymbol{F}$ *sul piano tangente si annulla.*

.59 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ dati da

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3\,,$$

sono vincolati dal vincolo olonomo non singolare, per $t > 0$,

$$f_1(\boldsymbol{z}, t) = ctz_1 + z_4^2 = 0\,,$$
$$f_2(\boldsymbol{z}) = z_5 z_6 - b = 0\,,$$

$(\boldsymbol{z}, t) \in \boldsymbol{R}^7$, con c, b costanti positive.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
175) Lo spazio degli spostamenti virtuali è indipendente da t.
176) Lo spazio degli spostamenti effettivi coincide con quello degli spostamenti virtuali.
177) Assumendo l'ipotesi dei lavori virtuali, la reazione vincolare appartiene allo spazio degli spostamenti virtuali.

Soluzione
1. N
Infatti

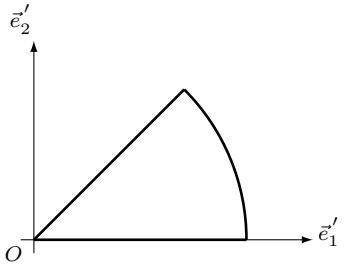
$$V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} = N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}^{\perp} = \langle \nabla_{\boldsymbol{z}} f_1, \nabla_{\boldsymbol{z}} f_2 \rangle^{\perp} ,$$

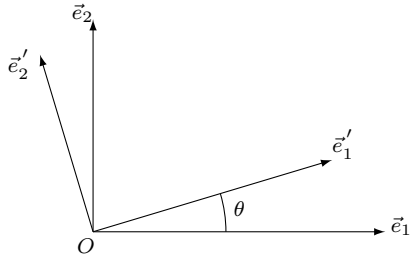
e il gradiente $\nabla_{\boldsymbol{z}} f_1$ dipende da t (anche in direzione).
2. N
Infatti lo spazio degli spostamenti effettivi è

$$V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} + \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\text{L}}}{\partial t} ,$$

e la forma di f_1 mostra che $\partial \boldsymbol{z}^{\text{L}}/\partial t \neq 0$.
3. N
L'ipotesi dei lavori virtuali, al contrario, dice che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}^{\perp}$.

.60 Una lamina rigida omogenea di massa M ha la forma di un settore circolare di raggio R e angolo al centro $\pi/4$. In figura (a sinistra) è rappresentato il corpo assieme al riferimento $\{O, \vec{e}_i'\}$ a esso solidale.





Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 3 verticale e ascendente. Il vincolo di cerniera è ideale. La sola sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso. Si indica con θ l'anomalia individuata dagli assi 1 fisso e solidale (figura a destra).
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
178) Il prodotto d'inerzia relativo agli assi 1 e 2 del riferimento solidale vale $-3MR^2/(2\pi)$.
179) Il momento angolare del corpo relativo al polo O è $(MR^2/2)\vec{e}_3$.
180) Per il moto con dato iniziale $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = p$, con $p > 0$, la componente 3 della somma della sollecitazione vincolare è Mg.
Soluzione
1. N
Dalla definizione di prodotto d'inerzia

$$I'_{O,12} = -\int_0^R \mathrm{d}\rho\, \rho \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\phi\, \frac{8M}{\pi R^2}\rho^2 \sin\phi\cos\phi = -\frac{MR^2}{2\pi} .$$

2. S
Si usa che la velocità angolare vale $\dot\theta\vec e_1'$, $I'_{O,13} = I'_{O,23} = 0$ *e*

$$I'_{O,33} = \int_0^R \mathrm{d}\rho\,\rho \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\phi\,\frac{8M}{\pi R^2}\rho^2 = \frac{1}{2}MR^2\,.$$

3. S
Si ottiene dalla prima equazione cardinale, osservando che l'accelerazione del centro di massa ha componente nulla lungo l'asse 3 *e l'unica sollecitazione attiva è il peso, la cui somma è* $-Mg\vec e_3$.

.61 Consideriamo i moti

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})\,,$$

con $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^6)$, e indichiamo con $\boldsymbol{x}_{\rm eq} \in \boldsymbol{R}^3$ un punto di equilibrio.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
181) Se $\boldsymbol{x}_{\rm eq}$ è stabile, non esistono moti illimitati.
182) Se $\boldsymbol{x}_{\rm eq}$ non è stabile, esiste almeno un moto $\boldsymbol{X}$ tale che

$$\lim_{t\to-\infty} \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}_{\rm eq}\,, \qquad \lim_{t\to-\infty} \dot{\boldsymbol{X}}(t) = 0\,.$$

183) Se $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\dot{\boldsymbol{X}})$, con $\boldsymbol{F}(0) = 0$, o tutte le posizioni $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ sono di equilibrio stabile o sono tutte di equilibrio instabile.
Soluzione
1. N
La stabilità implica solo che i moti vicini a $\boldsymbol{x}_{\rm eq}$ *(in un senso opportuno) restino limitati, ma non dice niente su quelli lontani.*
2. N
Per esempio potrebbe essere $\boldsymbol{F} = 0$, *cosicché tutti i moti sarebbero rettilinei uniformi.*
3. S
Infatti chiaramente in questo caso il sistema del moto è invariante per traslazioni di $\boldsymbol{X}$.

.62 Sia $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^3)$ una forza conservativa in $\boldsymbol{R}^3$ con potenziale $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
184) Il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ lungo il moto $\boldsymbol{X} \in C^2([t_0, t_1])$ con $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}(t_1)$ è nullo.
185) Il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ lungo il moto $\boldsymbol{X} \in C^2([t_0, t_1])$ con $\boldsymbol{X}(t_0) \neq \boldsymbol{X}(t_1)$ non è nullo.
186) Lungo ciascun moto limitato, anche l'energia cinetica rimane limitata.
Soluzione
1. S
Infatti il lavoro uguaglia $U(\boldsymbol{X}(t_1)) - U(\boldsymbol{X}(t_0)) = 0$.

2. N
Può essere $U(\boldsymbol{X}(t_1)) - U(\boldsymbol{X}(t_0)) = 0$ anche se $\boldsymbol{X}(t_0) \neq \boldsymbol{X}(t_1)$.
3. S
L'energia meccanica totale E rimane costante lungo ciascun moto; se il moto è limitato, per continuità anche $U(\boldsymbol{X}(t))$ rimane limitato per ogni t, e $T = E + U$.

.63 Sia $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$ un moto, con $\boldsymbol{\psi} \in C^2(\boldsymbol{R})$ di curvatura $k(s)$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
187) Può essere che $k(s) = 0$ per $s \in [a, b]$, $a < b$, ma $k(s) > 0$ per $s \notin [a, b]$.
188) All'istante fissato t, la curvatura $k(s(t))$ può essere calcolata come funzione di $\boldsymbol{X}(t)$, $\dot{\boldsymbol{X}}(t)$.
189) La curvatura $k(s)$ è una funzione di classe C^2.
Soluzione
1. S
Basta considerare una curva che contiene un segmento di retta.
2. N
La curvatura dipende anche dall'accelerazione $\ddot{\boldsymbol{X}}(t)$.
3. N
Infatti $k(s) = |\boldsymbol{\psi}''(s)|$ e quindi in genere è solo continua.

.64 Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
190) Considerato un corpo rigido sottoposto al vincolo di giunto ideale di polo O e sollecitazione attiva con momento totale relativo a O nullo, se l'atto di moto iniziale è non nullo, allora il moto è necessariamente di precessione.
191) Considerato un sistema rigido in moto rispetto a un osservatore inerziale, il riferimento del centro di massa è necessariamente solidale al corpo.
192) Considerato un parallelepipedo a base quadrata omogeneo in moto sferico con polo nel centro di massa, il momento angolare totale è necessariamente parallelo alla velocità angolare.
Soluzione
1. N
Il moto è alla Poinsot, ma non avendo fatto alcuna ipotesi sulla struttura geometrica del corpo, allora il moto non è necessariamente di precessione.
2. N
Perché il riferimento del centro di massa ha per definizione assi paralleli al riferimento fisso.
3. N
Solo in caso di moto rotatorio attorno a un asse centrale.

.65 Dire se in ciascuno dei seguenti casi il moto può essere un moto centrale.
193)

$$\boldsymbol{X}(t) = at\boldsymbol{e}_1 + bt^2\boldsymbol{e}_2 + ct^3\boldsymbol{e}_3\,,$$

a, b, $c > 0$, $t \in \boldsymbol{R}$.
194)

$$\boldsymbol{X}(t) = R\cos(\alpha t^2)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t^2)\boldsymbol{e}_2\,,$$

R, $\alpha > 0$, $t \in \boldsymbol{R}$.

195)

$$\boldsymbol{X}(t) = R\boldsymbol{e}_1\,,$$

$R > 0$, $t \in \boldsymbol{R}$.
Soluzione
1. N
Il moto non è piano.
2. N
Il moto è piano ma la velocità areolare non è costante.
3. S
I campi di forze centrali possono avere punti di equilibrio.

.66 Dire se in ciascuno dei seguenti casi la superficie S può essere parametrizzata con una $\boldsymbol{r}$ di classe C^3, e allo stesso tempo la forza $\boldsymbol{F}$ composta con la parametrizzazione soddisfa le condizioni di regolarità del teorema di esistenza e unicità del moto di un punto vincolato alla superficie.
Qui α, $\lambda > 0$ sono costanti.
196)

$$S: \quad x_3 = \alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2\,;$$
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{e}_1\,.$$

197)

$$S: \quad x_3 = \alpha(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\,;$$
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \lambda|\boldsymbol{x}|^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{e}_1\,.$$

198)

$$S: \quad x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = \alpha\,;$$
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \lambda|\boldsymbol{x}|^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{e}_1\,.$$

Soluzione
1. N
La superficie S, un cono, è singolare nell'origine.
2. N
La forza $\boldsymbol{F}$ non è lipschitziana nell'origine, e la superficie S (una sfera) passa per l'origine.
3. S
La forza $\boldsymbol{F}$ non è lipschitziana nell'origine, ma la superficie S (regolare e chiusa) non passa per l'origine.

.67 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ dati da

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3\,,$$

sono vincolati dal vincolo olonomo non singolare, per $t > 0$,

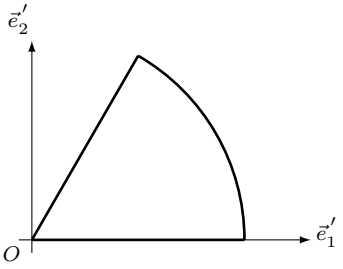
$$f_1(\boldsymbol{z}, t) = z_2^2 + z_3^2 - cz_1 = 0\,,$$
$$f_2(\boldsymbol{z}, t) = z_4 - \alpha t^2 = 0\,,$$

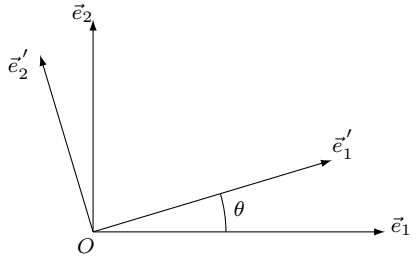
$(\boldsymbol{z}, t) \in \boldsymbol{R}^7$, c, $\alpha > 0$ costanti.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
199) Esistono $t_1 \neq t_2$ tali che l'insieme delle configurazioni compatibili soddisfa $Z_{\boldsymbol{f}}(t_1) = Z_{\boldsymbol{f}}(t_2)$.
200) Lo spazio degli spostamenti virtuali è indipendente dal tempo.
201) Assumendo l'ipotesi dei lavori virtuali, la reazione vincolare è ortogonale allo spazio degli spostamenti effettivi.
SOLUZIONE
1. S
Infatti si ha $Z_{\boldsymbol{f}}(t) = Z_{\boldsymbol{f}}(-t)$.
2. S
Infatti

$$V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} = N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}^{\perp} = \langle \nabla_{\boldsymbol{z}} f_1, \nabla_{\boldsymbol{z}} f_2 \rangle^{\perp}\,,$$

e i gradienti $\nabla_{\boldsymbol{z}} f_i$ *non dipendono da* t.
3. N
L'ipotesi dei lavori virtuali dice che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}^{\perp}$*; poiché la forma di* f_2 *mostra che* $\partial \boldsymbol{z}^{\iota}/\partial t \notin V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$*, lo spazio degli spostamenti effettivi non è parallelo a quello degli spostamenti virtuali.*

.68 Una lamina rigida omogenea di massa M ha la forma di un settore circolare di raggio R e angolo al centro $\pi/3$. In figura (a sinistra) è rappresentato il corpo assieme al riferimento $\{O, \vec{e}_i'\}$ a esso solidale.





Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 3 verticale e ascendente. Il vincolo di cerniera è ideale. La sola sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso. Si indica con θ l'anomalia individuata dagli assi 1 fisso e solidale (figura a destra).
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
202) La coordinata 1 del centro di massa rispetto al riferimento solidale è $\sqrt{3}R/(3\pi)$.
203) Il momento d'inerzia relativo all'asse 3 del riferimento solidale vale $MR^2/2$.

204) Per il moto con dato iniziale $\theta(0) = 0$ e $\dot\theta(0) = p$, con $p > 0$, la componente 2 del momento totale della sollecitazione vincolare è $-Mg(\sqrt{3}R/\pi)\cos(pt) + Mg(R/\pi)\sin(pt)$.
SOLUZIONE
1. N
Dalla definizione di centro di massa

$$G_1' = \frac{1}{M}\int_0^R \mathrm{d}\rho\,\rho \int_0^{\pi/3} \mathrm{d}\phi\,\frac{6M}{\pi R^2}\rho\cos\phi = \frac{\sqrt{3}R}{\pi}\,.$$

2. S
Infatti

$$I'_{O,33} = \int_0^R \mathrm{d}\rho\,\rho \int_0^{\pi/3} \mathrm{d}\phi\,\frac{6M}{\pi R^2}\rho^2 = \frac{1}{2}MR^2\,.$$

3. S
Proiettando la seconda equazione cardinale sull'asse 3 si ottiene l'equazione pura $\ddot\theta = 0$, per cui il moto è $\theta(t) = pt$. Calcolando il momento relativo a O del peso e proiettando la seconda equazione cardinale sull'asse 2, si ottiene $M^{\mathrm{v}}_{O,2} = -MgG_1'\cos\theta + MgG_2'\sin\theta$. Osservato che $G_2' = R/\pi$ si ottiene il risultato dato.

.69 Consideriamo il sistema differenziale

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}, t)\,,$$

con $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^7)$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
205) Se una soluzione massimale ha dominio $(-\infty,0)$, allora

$$\lim_{t\to 0-} |\boldsymbol{X}(t)| = +\infty\,.$$

206) Se una soluzione massimale con dominio (σ, Σ) soddisfa per ogni $t \in (\sigma, \Sigma)$

$$|\boldsymbol{X}(t)| + |\dot{\boldsymbol{X}}(t)| \le ae^{bt^4}\,,$$

con a, $b > 0$ costanti, allora $(\sigma, \Sigma) = \boldsymbol{R}$.
207) È possibile che per due soluzioni valga $\boldsymbol{X}_1(t_0) = \boldsymbol{X}_2(t_0)$, ma $\boldsymbol{X}_1(t) \neq \boldsymbol{X}_2(t)$ per $t \neq t_0$.
SOLUZIONE
1. N
Potrebbe essere invece

$$\lim_{t\to 0-} |\dot{\boldsymbol{X}}(t)| = +\infty\,.$$

2. S
Infatti il teorema di esistenza di soluzioni massimali dice che queste si possono prolungare fino a che $(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})$ non diventa illimitato, o si raggiunge la frontiera del dominio (che in questo caso è vuota).

3. S
Il sistema è del secondo ordine, quindi l'unicità richiede anche che $\dot{\boldsymbol{X}}_1(t_0) = \dot{\boldsymbol{X}}_2(t_0)$.

.70 Sia $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^3)$ una forza conservativa in $\boldsymbol{R}^3$ con potenziale $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$. Denotiamo con $(\boldsymbol{X}, m)$ un punto materiale soggetto alla forza $\boldsymbol{F}$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
208) Se

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3} |U(\boldsymbol{x})| < +\infty\,,$$

allora esistono condizioni iniziali tali che la conservazione dell'energia non dà nessuna limitazione per $\boldsymbol{X}(t)$.
209) Se

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3} |U(\boldsymbol{x})| = +\infty\,,$$

allora tutti i moti sono limitati.
210) Se

$$U(\boldsymbol{x}) = 0\,, \quad |\boldsymbol{x}| = R\,; \qquad U(\boldsymbol{x}) > 0\,, \quad |\boldsymbol{x}| \neq R\,,$$

un moto con condizioni iniziali

$$\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}_0\,, \quad |\boldsymbol{x}_0| \neq R\,, \qquad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = 0\,,$$

non può soddisfare $|\boldsymbol{X}(t)| = R$ per nessun t.
Soluzione
1. S
La conservazione dell'energia implica

$$0 \le T = E + U\,,$$

dunque se $E > \sup(-U)$*, questa disuguaglianza non dà informazioni.*
2. N
Basta considerare il caso di

$$U(\boldsymbol{x}) = x_1^2 x_2^2\,,$$

ove la forza si annulla sui piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ *e quindi su tali piani si hanno moti rettilinei uniformi.*
3. S
Per la conservazione dell'energia si ha

$$0 \le T(t) = T(0) - U(\boldsymbol{x}_0) + U(\boldsymbol{X}(t)) = -U(\boldsymbol{x}_0) + U(\boldsymbol{X}(t))\,,$$

che implica $U(\boldsymbol{X}(t)) \ge U(\boldsymbol{x}_0) > 0$.

.71 Consideriamo i moti

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $m > 0$ e $f \in C^1(\boldsymbol{R})$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
211) Si può tracciare il ritratto di fase.

212) Se $xf(x) < 0$ per $x \neq 0$, allora $x = 0$ è un punto di equilibrio stabile.
213) Se f è un polinomio, esiste sempre almeno un punto di equilibrio.
Soluzione
1. S
Nel caso unidimensionale in oggetto, tutte le forze posizionali hanno un potenziale.
2. S
Se f cambia di segno in $x = 0$, allora $f(0) = 0$ e $x = 0$ è di equilibrio. Inoltre $f(x) = U'(x)$ è positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$, quindi U ha un massimo isolato in $x = 0$.
3. N
Basta considerare il caso $f(x) = x^2 + 1 \neq 0$ per ogni $x \in \boldsymbol{R}$.

.72 Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
214) Considerato un sistema di particelle in moto rispetto a un osservatore inerziale, l'energia cinetica rispetto al riferimento inerziale è maggiore o uguale di quella relativa al riferimento del centro di massa.
215) Considerato un parallelepipedo a base quadrata omogeneo in moto libero e sottoposto al solo peso, il moto rispetto al riferimento del centro di massa è rotatorio oppure di precessione.
216) Data la sollecitazione costituita dai punti di applicazione $X_1, \dots, X_n$ e forze $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, indicati con $\vec{f}$ e $\vec{M}_O$ la somma e il momento totale di polo O, se il trinomio invariante fosse nullo e $\vec{f} \neq 0$ allora esisterebbe almeno un punto X tale che $\vec{M}_X$ è parallelo a $\vec{f}$.
Soluzione
1. S
Segue dal teorema di König.
2. S
Perché il moto è alla Poinsot e il solido ha struttura giroscopica.
3. N
Il campo momento è circolare.

.73 Un punto materiale è vincolato a muoversi su un piano che ruota con velocità angolare costante intorno a un asse fisso che giace sul piano stesso. Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
217) Esistono moti appartenenti al piano ruotante su cui la forza di Coriolis si annulla.
218) La forza di trascinamento, nel sistema di riferimento mobile solidale con il piano, è conservativa.
219) Sul punto non agisce la forza di Coriolis, purché esso sia ulteriormente vincolato a una retta del piano.
Soluzione
1. S
Per esempio quelli rettilinei sull'asse di rotazione.
2. S
Infatti, se nel sistema solidale il piano è rappresentato da $x_2 = 0$ e l'asse x_3 è quello di rotazione,

$$\boldsymbol{F}_{T} = m\omega^2 x_1 \boldsymbol{u}_1 = \nabla\left(\frac{m}{2}\omega^2 x_1^2\right).$$

3. N
La forza di Coriolis agisce anche se $\ell = 1$ come nel caso indicato; solo che le sue componenti lagrangiane sono nulle.

.74 Un sistema di corpi rigidi vincolati da vincoli olonomi lisci e fissi è soggetto a forze di potenziale lagrangiano $U^{\text{L}}(x, y)$ che soddisfa

$$\nabla U^{\text{L}}(0,0) = (0,0)\,.$$

Dire in ciascuno dei seguenti casi se in (0,0) si possono o no definire le piccole oscillazioni, in base alle informazioni fornite sulla matrice hessiana del potenziale.
220)

$$D^2U^{\text{L}}(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -11 \end{pmatrix}\,.$$

221)

$$D^2U^{\text{L}}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\,.$$

222)

$$D^2U^{\text{L}}(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\,.$$

Soluzione
1. S
L'hessiana è definita negativa, quindi il potenziale ha un massimo isolato.
2. N
L'hessiana è definita positiva, in particolare il potenziale ha un minimo isolato.
3. N
L'hessiana è solo semidefinita.

.75 Due punti materiali P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 si muovono vincolati alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Scegliamo come coordinate lagrangiane gli angoli φ_1, $\varphi_2 \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\overrightarrow{OP_1} = R\cos\varphi_1 \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi_1 \boldsymbol{e}_2\,,$$
$$\overrightarrow{OP_2} = R\cos\varphi_2 \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi_2 \boldsymbol{e}_2\,.$$

I due punti si attraggono con una forza elastica di costante $k > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
223) L'energia cinetica del sistema è

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2}m_1R^2\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\dot\varphi_2^2\,.$$

224) Si può definire il potenziale lagrangiano e questo vale

$$U^{\text{L}} = kR^2[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]\,.$$

225) Il sistema ha posizioni di equilibrio stabile.
SOLUZIONE
1. S
Vale per $k = 1, 2$,

$$\boldsymbol{v}_{P_k} = R\dot{\varphi}_k(-\sin\varphi_k \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi_k \boldsymbol{e}_2)\,.$$

Quindi

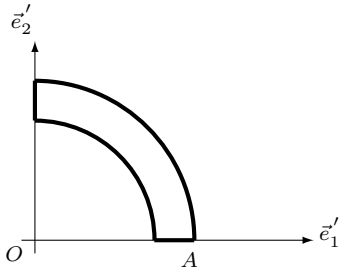
$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2}m_1R^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\dot{\varphi}_2^2\,.$$

2. N
La forza elastica è conservativa, quindi sicuramente il potenziale lagrangiano esiste; calcoliamo

$$\begin{aligned} U^{\text{L}}(\varphi_1, \varphi_2) = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} - \boldsymbol{X}_2^{\text{L}}|^2 &= -\frac{k}{2}R^2[(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)^2 + (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)^2] \\ &= -\frac{k}{2}R^2[2 - 2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)]\,. \end{aligned}$$

3. N
Il potenziale non puó avere massimi isolati, perché è invariante sulle curve $\varphi_1 - \varphi_2 =$ *costante (per la natura geometrica delle coordinate* φ_k*).*

.76 Una lamina rigida omogenea di massa M ha la forma di un settore di corona circolare di raggi $0 < r < R$ e angolo al centro $\pi/2$. In figura è rappresentato il corpo, il riferimento $\{O, \vec{e}_i'\}$ a esso solidale e il punto solidale A tale che $\overrightarrow{OA} = R\vec{e}_1'$.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 2 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 2 verticale e ascendente. Il vincolo di cerniera è ideale. La sollecitazione attiva agente sul corpo è costituita dal peso e dalla forza elastica $-k\overrightarrow{CA}$ agente sul punto A di costante $k > 0$ e centro C tale che $\overrightarrow{OC} = 2R\vec{e}_1$. Si indica con θ l'anomalia individuata dagli assi 1 fisso e solidale.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
226) La coordinata 1 del centro di massa relativa al riferimento solidale è $4(R^3 - r^3)/[3\pi(R^2 - r^2)]$.
227) In corrispondenza di un generico moto del sistema il momento angolare del corpo relativo al polo O è $(M(R^2 + r^2)/4)\dot{\varphi}\vec{e}_2$.

228) In corrispondenza di un generico moto del sistema la componente 1 relativa al riferimento fisso del momento totale della sollecitazione vincolare calcolata rispetto al polo O è $4Mg(R^3 - r^3)\sin\varphi/[3\pi(R^2 - r^2)]$.
SOLUZIONE
1. S
Dalla definizione di centro di massa

$$G_1' = \int_r^R \mathrm{d}\rho\,\rho \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi\,\frac{4M}{\pi(R^2 - r^2)}\rho\cos\phi\,.$$

2. N
In generale sono non nulle anche le componenti 1 e 3 *del momento angolare relative al riferimento fisso in quanto il prodotto d'inerzia* $I'_{O,12}$ *è diverso da zero:*

$$I'_{O,12} = -\int_r^R \mathrm{d}\rho\,\rho \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi\,\frac{4M}{\pi(R^2 - r^2)}\rho^2\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{1}{2\pi}M(R^2 + r^2)\,.$$

3. N
Usando la seconda equazione cardinale si ottiene che all'espressione proposta va aggiunto anche il termine $I'_{O,12}\ddot{\varphi}\cos\varphi - I'_{O,12}\dot{\varphi}^2\sin\varphi$.

.77 Un sistema di punti materiali soggetto a vincoli olonomi lisci e fissi ha equazione di moto

$$\ddot{x} = f(x)\,,$$

ove $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ e $x \in \boldsymbol{R}$ è la coordinata lagrangiana (infatti si assume $\ell = 1$). Si assume anche

$$f(x) \geq x^4\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
229) Se un moto soddisfa $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) \neq 0$, allora $\dot{x}(t)$ cambia segno intorno a $t = 0$.
230) Non esistono punti di equilibrio.
231) Esistono moti su cui $\dot{x}$ diviene illimitata.
SOLUZIONE
1. S
Altrimenti si avrebbe $\ddot{x}(0) = 0$, *e quindi* $f(x(0)) = 0$, *impossibile.*
2. N
I punti di equilibrio corrispondono alle soluzioni di $f(x) = 0$, *che nel nostro caso può valere in* $x = 0$.
3. S
Si ha per $x > 0$

$$U(x) = U(0) + \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s \geq U(0) + \frac{x^5}{5}\,.$$

Quindi poiché vale la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - U(x) = E\,,$$

con $E \in \boldsymbol{R}$ qualunque, si vede che $\dot{x}$ diviene illimitato se $x \to +\infty$.

.78 Un sistema di corpi rigidi è vincolato da vincoli olonomi fissi.
Le coordinate lagrangiane sono $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$. Qui a, b, c sono costanti positive.
Dire se ciascuna delle seguenti funzioni possa rappresentare l'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana.
232) $T^{\text{L}} = a\dot{\varphi}^2 + b\dot{\theta}^2$.
233) $T^{\text{L}} = a^2\dot{\varphi}^2 - ab\varphi^2\dot{\varphi}\dot{\theta} + b^2\dot{\theta}^2$.
234) $T^{\text{L}} = a^2\dot{\varphi}^4 + b^2\dot{\theta}^4$.
Soluzione
1. S
Se i vincoli sono fissi l'energia cinetica deve essere una forma quadratica nelle $(\dot{\varphi}, \dot{\theta})$.
2. N
La forma quadratica che rappresenta la T^{L} deve essere definita positiva, mentre quella data ha determinante negativo per qualche φ.
3. N
L'energia cinetica deve essere una forma quadratica nelle $(\dot{\varphi}, \dot{\theta})$.

.79 Dire se per se ciascuna delle seguenti scelte le componenti lagrangiane delle forze sono conservative in senso lagrangiano o no.
In ogni caso $\ell = 2$ e le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$.
235)

$$Q_x = x^2 y + t^2\,, \qquad Q_y = \frac{x^3}{3} + t\,.$$

236)

$$Q_x = xy + \dot{y}\,, \qquad Q_y = \frac{x^3}{3} + x\dot{y} + y\,.$$

237)

$$Q_x = xy\,, \qquad Q_y = y + x\,.$$

Soluzione
1. S
Infatti

$$U^{\text{L}}(x, y, t) = \frac{x^3 y}{3} + yt + xt^2\,.$$

2. N
Impossibile, perché le componenti dipendono dalle derivate nel tempo delle coordinate lagrangiane.
3. N
Non è soddisfatta la condizione di chiusura, necessaria per l'esistenza di un potenziale.

.80 Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
238) Considerato un sistema di particelle in moto rispetto a un osservatore convenzionalmente considerato fisso, il momento angolare di tale moto calcolato usando come polo il centro di massa è uguale al momento angolare

del moto relativo al riferimento del centro di massa calcolato usando come polo il centro di massa più la quantità $\overrightarrow{OG} \times m\vec{v}_G$, dove m è la massa totale del sistema, O l'origine del riferimento fisso, G il centro di massa del sistema e $\vec{v}_G$ la sua velocità.
239) Una lamina quadrata vincolata al centro di massa mediante un giunto liscio e sottoposta al solo peso compie esclusivamente moti rotatori.
240) Se un corpo rigido si muove di moto traslatorio rispetto a un riferimento detto fisso, in ogni istante l'asse di istantanea rotazione passa per l'origine del riferimento fisso.
Soluzione
1. N
I due momenti angolari considerati sono uguali.
2. N
Il solido non ha struttura sferica, ma giroscopica; quindi può anche esibire moti di precessione.
3. N
In ogni istante l'atto di moto è traslatorio, quindi l'asse di istantanea rotazione non è definito.

Domande con risposta S/N assegnate al corso di Meccanica Razionale Ingegneria Meccanica.

.81 Un punto materiale è vincolato a muoversi su un piano che ruota con velocità angolare costante intorno a un asse fisso che giace sul piano stesso. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.
241) Le forze di Coriolis danno contributo nullo nelle equazioni di Lagrange scritte nel sistema mobile solidale con il piano.
242) Sul punto non agisce la forza di Coriolis, purché esso sia ulteriormente vincolato a una curva del piano.
243) La forza di trascinamento, nel sistema di riferimento mobile solidale con il piano, è conservativa.
Soluzione
1. S
In questo caso un noto teorema stabilisce che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono nulle.
2. N
La forza di Coriolis agisce anche se $\ell = 1$ come nel caso indicato; solo che le sue componenti lagrangiane sono nulle.
3. S
Infatti, se nel sistema solidale il piano è rappresentato da $x_2 = 0$ e l'asse x_3 è quello di rotazione,

$$\boldsymbol{F}_{T} = m\omega^2 x_1 \boldsymbol{u}_1 = \nabla\left(\frac{m}{2}\omega^2 x_1^2\right).$$

.82 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia intorno al polo O.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali no.

244) Ogni possibile moto è periodico.
245) In ogni moto esiste un piano fisso Π, tale che in ogni istante l'intersezione di Π con l'ellissoide d'inerzia mobile sia un punto solidale P, con P che non cambia durante il moto.
246) L'energia cinetica di C soddisfa $T = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\omega}$, con $\boldsymbol{f}$ vettore costante nel sistema fisso.
Soluzione
1. N
Esistono i moti corrispondenti alle polodie limite, o separatrici, che non sono periodici.
2. N
Nel caso detto il moto sarebbe una rotazione (perché il centro dell'ellissoide e il suo punto ipotizzato P sarebbero entrambi fissi), ma non tutti i moti polari per inerzia sono rotazioni.
3. S
Infatti vale $T = \boldsymbol{\sigma\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}/2$ e $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma\omega}$ è costante nel sistema fisso (integrale primo del moto).

.83 Un sistema di corpi rigidi vincolati da vincoli olonomi lisci e fissi è soggetto a forze di potenziale lagrangiano $U^{\text{L}}(x, y)$ che soddisfa

$$\nabla U^{\text{L}}(0{,}0) = (0{,}0)\,.$$

Dire in ciascuno dei seguenti casi se in (0,0) si possono o no definire le piccole oscillazioni, in base alle informazioni fornite sulla matrice hessiana del potenziale.
247)

$$D^2U^{\text{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\,.$$

248)

$$D^2U^{\text{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\,.$$

249)

$$D^2U^{\text{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\,.$$

Soluzione
1. N
L'hessiana è definita positiva, quindi il potenziale ha un minimo.
2. S
L'hessiana è definita negativa, in particolare il potenziale ha un massimo isolato.
3. N
L'hessiana è solo semidefinita.

.84 Un corpo rigido non degenere C è contenuto in un piano solidale Π. Qui $\boldsymbol{\sigma}_O$ denota la matrice di inerzia in un punto O del piano Π, e la base solidale $(\boldsymbol{u}_h)$ a cui la matrice è relativa è tale che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale a Π.

Dire quale delle seguenti affermazioni può essere vera e quale no.
250)

$$\boldsymbol{\sigma}_O = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad a\,, b > 0\,.$$

251)

$$\boldsymbol{\sigma}_O = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}, \qquad a\,, b > 0\,.$$

252)

$$\boldsymbol{\sigma}_O = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a+d \end{pmatrix}, \qquad a\,, b\,, c\,, d\,, e > 0\,.$$

Soluzione
1. N
Deve essere sempre $I_{33} = I_{11} + I_{22}$.
2. S
Possibile, se x_1 *e* x_2 *non sono principali.*
3. N
Impossibile perché x_3 *è sempre principale, quindi dovrebbe essere* $c = e = 0$.

.85 Un disco di raggio $R > 0$ e massa $m > 0$ è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$, mantenendo nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O, (x_h))$ un punto solidale A del suo bordo.
Sul punto B diametralmente opposto a A è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_B = kx_2\boldsymbol{e}_1\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Scegliamo come coordinata lagrangiana l'angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\overrightarrow{OB} = 2R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + 2R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
253) L'energia cinetica T^{L} del disco è data da

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2\,,$$

ove I è un opportuno momento d'inerzia.
254) Si può definire il potenziale lagrangiano.
255) Si può definire l'energia meccanica e questa si conserva durante il moto.
Soluzione
1. S
Il moto è di rotazione intorno all'asse x_3. *Dunque l'energia cinetica si può scrivere*

come nel testo, con I momento d'inerzia in A relativo all'asse ortogonale al disco, e φ angolo di rotazione, quindi per esempio quello dato.
2. S
Scriviamo la componente lagrangiana delle forze:

$$Q_\varphi = \boldsymbol{F}_B \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_B^{\text{L}}}{\partial \varphi} = -4kR^2(\sin\varphi)^2 \,.$$

Perciò

$$U^{\text{L}}(\varphi) = -4kR^2 \int_0^\varphi (\sin\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta \,.$$

3. N
L'energia si può definire e si conserva se le forze sono conservative, ma $\boldsymbol{F}_B$ non lo è (è posizionale ma non è chiusa).

.86 Due punti materiali P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 si muovono vincolati alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Scegliamo come coordinate lagrangiane gli angoli φ_1, $\varphi_2 \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_1} &= R\cos\varphi_1 \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi_1 \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \overrightarrow{OP_2} &= R\cos\varphi_2 \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi_2 \boldsymbol{e}_2 \,. \end{aligned}$$

I due punti si attraggono con una forza elastica di costante $k > 0$.
Dire quali delle seguenti affermazioni è vera e quale no.
256) L'energia cinetica del sistema è

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 \dot\varphi_2^2 + (m_1 + m_2) R^2 \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \,.$$

257) Si può definire il potenziale lagrangiano e questo vale

$$U^{\text{L}} = -kR^2[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \,.$$

258) Il sistema ha posizioni di equilibrio stabile in cui si possono definire le piccole oscillazioni.
Soluzione
1. N
Vale per $k = 1, 2$,

$$\boldsymbol{v}_{P_k} = R\dot\varphi_k(-\sin\varphi_k \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi_k \boldsymbol{e}_2) \,.$$

Quindi

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 \dot\varphi_2^2 \,.$$

2. S
La forza elastica è conservativa, quindi sicuramente il potenziale lagrangiano esiste; calcoliamo

$$U^{\text{L}}(\varphi_1,\varphi_2) = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} - \boldsymbol{X}_2^{\text{L}}|^2 = -\frac{k}{2}R^2[(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)^2 + (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)^2]$$
$$= -\frac{k}{2}R^2[2 - 2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)]\,.$$

3. N
Il potenziale non puó avere massimi isolati, perché è invariante sulle curve $\varphi_1 - \varphi_2 =$ costante (per la natura geometrica delle coordinate φ_k). Oppure, calcoliamo direttamente

$$D^2U^{\text{L}}(\varphi_1,\varphi_2) = kR^2\begin{pmatrix} -\cos(\varphi_1-\varphi_2) & \cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ \cos(\varphi_1-\varphi_2) & -\cos(\varphi_1-\varphi_2)\end{pmatrix},$$

che ha determinante sempre nullo e quindi non può mai essere definita negativa.

.87 Una sfera solida di raggio R e massa m si muove di moto polare, ove il polo O è il centro della sfera.
Il sistema di riferimento $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale alla sfera.
Sul punto A tale che $\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_1$ è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = \alpha\boldsymbol{u}_2\,,$$

con $\alpha > 0$ costante.
La sfera parte da ferma.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali no.
259) Il momento delle forze esterne rispetto a O è

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = R\alpha\boldsymbol{u}_3\,.$$

260) Il moto della sfera è una rotazione.
261) L'energia cinetica $T(t)$ rimane limitata per $t \to +\infty$.
Soluzione
1. S
Calcoliamo

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F}_A = (R\boldsymbol{u}_1) \times (\alpha\boldsymbol{u}_2) = R\alpha\boldsymbol{u}_3\,.$$

2. S
Scriviamo le equazioni di Eulero, tenendo presente la simmetria della sfera e indicando con I il momento diametrale della sfera:

$$I\dot\omega_1 = 0\,, \qquad I\dot\omega_2 = 0\,, \qquad I\dot\omega_3 = R\alpha\,.$$

Quindi per integrazione $\boldsymbol{\omega} = R\alpha t\boldsymbol{u}_3$ e perciò la velocità angolare si mantiene costante in direzione nel sistema solidale e in quello fisso.
3. N
Con il calcolo del punto precedente

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}IR^2\alpha^2t^2\,.$$

.88 Una lamina rettangolare di lati $a > b > 0$ e massa m è vincolata a mantenere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso.
Sulla lamina non agiscono forze direttamente applicate.
All'istante iniziale la lamina ha velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0 \boldsymbol{u}(0)\,,$$

ove $\omega_0 > 0$ e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale alla lamina parallelo a una diagonale del rettangolo.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali no.
262) Il moto è una rotazione intorno a una diagonale del rettangolo.
263) L'energia cinetica vale

$$T(t) = \frac{I}{2}\omega_0^2\,, \qquad \text{per ogni } t,$$

ove I è il momento d'inerzia relativo alla diagonale del rettangolo.
264) Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_O(t)$ si mantiene parallelo a $\boldsymbol{u}(t)$ durante il moto.
Soluzione
1. N
Il moto è polare per inerzia. Si sa dalla teoria che le sole rotazioni per inerzia sono quelle intorno agli assi principali; in un rettangolo (non quadrato) la diagonale non è principale, come è facile verificare con argomenti di simmetria (l'integrale che dà il momento deviatore non si annulla).
2. S
Nei moti polari per inerzia, l'energia cinetica si mantiene costante; quindi per ogni t

$$T(t) = T(0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}(0)\boldsymbol{\omega}(0)\cdot\boldsymbol{\omega}(0) = \frac{1}{2}I\omega_0^2\,.$$

3. N
Il momento delle quantità di moto nei moti polari per inerzia si mantiene costante nel sistema fisso (è un integrale primo del moto). Ma $\boldsymbol{u}(t)$ *non si mantiene a direzione costante, perché il moto non è una rotazione, in quanto* $\boldsymbol{\omega}(0)$ *non è diretto lungo un asse principale.*

.89 Un cilindro di massa m, raggio R e altezza H, è vincolato a muoversi mantenendo il centro A di una delle due basi nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$.
Nel centro B dell'altra base è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_B = k(x_1 + R)\boldsymbol{e}_1\,,$$

con $k > 0$ costante.
Il cilindro parte da fermo, con $\overrightarrow{AB}(0) = H\boldsymbol{e}_3$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
265) Il moto è una rotazione intorno all'asse x_2.
266) L'energia meccanica si conserva durante il moto.

267) Il momento delle quantità di moto (rispetto a A) si conserva durante il moto.
SOLUZIONE
1. S
Scegliamo un sistema solidale $\mathcal{S} = (A, (\boldsymbol{u}_h))$ *in modo che* $\boldsymbol{u}_3 = \overrightarrow{AB}/H$ *e che* $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$. *Nell'ipotesi che il moto sia una rotazione come indicato, il versore* $\boldsymbol{e}_1$ *resta sempre nel piano* $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3 \rangle$, *quindi il momento della forza è diretto lungo* $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_2$. *Le equazioni di Eulero sono*

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3\,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_2\omega_3 + Hk(x_{1B}(\varphi) + R)\sin\varphi\,, \\ I_{33}\omega_{33} &= 0\,. \end{aligned}$$

Qui φ *è l'angolo (di rotazione) tra* $\boldsymbol{u}_3$ *e* $\boldsymbol{e}_1$. *Quindi le equazioni hanno in effetti una soluzione* $\boldsymbol{\omega} = (0, \dot{\varphi}, 0)$ *con* φ *soluzione della seconda equazione. Perciò per l'unicità di soluzioni, il moto è davvero una rotazione.*
2. S
La forza applicata è conservativa.
3. N
Nei moti polari

$$\boldsymbol{L}_A = \boldsymbol{\sigma}_A\boldsymbol{\omega} = I_{11}\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2\,.$$

La seconda uguaglianza vale in effetti perché il moto è una rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_2$. *Si vede infine (per esempio dalle equazioni di Eulero di cui sopra) che* $\dot{\varphi}$ *non è costante.*

.90 Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sulla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
268) Gli unici punti di equilibrio sono i poli $(0,0,R)$ e $(0,0,-R)$.
269) Nella parametrizzazione lagrangiana

$$\begin{gathered} (x_1, x_2) \in Q = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < R^2\}\,, \\ x_3 = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}\,, \end{gathered}$$

l'energia cinetica è

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \frac{R^2\dot{x}_1\dot{x}_2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2}\Big)\,.$$

270) Si può scrivere la lagrangiana del moto.
SOLUZIONE
1. N
Si ha equilibrio ove le componenti lagrangiane delle forze si annullano, ossia dove il

prodotto scalare tra forza e vettori tangenti alla sfera si annulla, ossia dove la forza è ortogonale alla sfera, e quindi anche sull'equatore $x_3 = 0$.
2. N
Si vede subito che per (x_1, x_2) *vicino alla circonferenza* $x_1^2 + x_2 = R^2$ *la forma quadratica data (in* $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$*) non è definita positiva (si prenda* $\dot{x}_1 = -\dot{x}_2 < 0$ *e si mandi* $x_1^2 + x_2^2 \to R^2-$.
3. S
La forza è conservativa con potenziale

$$U = -\frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2)\,,$$

e quindi come è noto dalla teoria si può definire il potenziale lagrangiano.

.91 Un punto P di massa m si muove sulla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Il vincolo è scabro, tale che, se la velocità non è nulla,

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

ove $\mu > 0$ è costante.
Su punto agisce la forza elastica repulsiva

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{OP}\,,$$

ove O è il centro della circonferenza e $k > 0$ è costante.
Le condizioni iniziali sono

$$\boldsymbol{X}(0) = R\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_2\,,$$

con $v_0 > 0$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
271) Il punto si arresta a un istante $\bar{t} < mv_0/(\mu kR)$.
272) La reazione vincolare non fa lavoro.
273) Se $s(t)$ indica l'ascissa curvilinea di P al tempo t, allora $\ddot{s}(t)$ è costante.
Soluzione
1. S
La risposta richiede la scrittura delle equazioni di moto:

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}\,, \\ mR^{-1}\dot{s}^2 &= -kR + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N}\,, \\ 0 &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Dunque, se s *cresce nel verso antiorario, cosicché* $\dot{s}(0) = v_0 > 0$ *si ha finché il moto non si arresta*

$$m\ddot{s} = -\mu(mR^{-1}\dot{s}^2 + kR) < -\mu kR\,.$$

Per integrazione

$$m\dot{s}(t) < mv_0 - \mu kRt$$

da cui l'asserto.
2. N
La reazione vincolare ha secondo la legge assegnata una componente non nulla parallela alla velocità (ossia alla tangente alla curva). Per cui il suo lavoro non è nullo.
3. N
Occorre scrivere le equazioni di moto (vedi sopra). L'equazione scalare in s mostra subito che $\ddot{s}$ è strettamente negativo, quindi $\dot{s}$ varia e quindo lo fa anche $\ddot{s}$.

.92 Dire quale delle seguenti componenti lagrangiane delle forze sono conservative in senso lagrangiano e quali no.
In ogni caso $\ell = 2$ e le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$.
274)

$$Q_x = xy\,, \qquad Q_y = \frac{x^2}{2} + t\,.$$

275)

$$Q_x = x + \dot{y}\,, \qquad Q_y = \frac{x^2}{2} + x\dot{y} + y\,.$$

276)

$$Q_x = y\,, \qquad Q_y = -x\,.$$

Soluzione
1. S
Infatti

$$U^{\text{L}}(x, y, t) = \frac{x^2 y}{2} + yt\,.$$

2. N
Impossibile, perché le componenti dipendono dalle derivate nel tempo delle coordinate lagrangiane.
3. N
Non è soddisfatta la condizione di chiusura, necessaria per l'esistenza di un potenziale.

.93 Un sistema di corpi rigidi è vincolato da vincoli olonomi fissi.
Le coordinate lagrangiane sono $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$. Qui a, b, c sono costanti positive.
Dire quali delle seguenti funzioni possono rappresentare l'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana.
277) $T^{\text{L}} = a\dot{\varphi}^2 + b\dot{\theta}^2 + c\theta^2$.
278) $T^{\text{L}} = a^2\dot{\varphi}^2 + ab\varphi\dot{\varphi}\dot{\theta} + b^2\dot{\theta}^2$.
279) $T^{\text{L}} = a^2\dot{\varphi}^2 + 2ab\dot{\varphi}\dot{\theta} + b^2\dot{\theta}^2$.
Soluzione
1. N
Se i vincoli sono fissi l'energia cinetica deve essere una forma quadratica nelle $(\dot{\varphi}, \dot{\theta})$.

2. N
La forma quadratica che rappresenta la T^{L} deve essere definita positiva, mentre quella data ha determinante negativo per qualche φ.
3. N
La forma quadratica uguaglia $(a\dot{\varphi} + b\dot{\theta})^2$ e quindi è solo semidefinita positiva.

.94 Sia $\boldsymbol{\varphi} : I \to \boldsymbol{R}^3$ una soluzione di

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}) \,,$$

con $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^3)$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali no.
280) Se $\boldsymbol{\varphi}(t_1) = \boldsymbol{\varphi}(t_2)$ per $t_1 \neq t_2$, allora la funzione $\boldsymbol{\varphi}$ è periodica.
281) Se $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0) = 0$, allora $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di equilibrio.
282) Sia $\boldsymbol{x}_0$ di equilibrio. Allora se $\boldsymbol{\varphi}(\bar{t}) \neq \boldsymbol{x}_0$ per un $\bar{t} \in \boldsymbol{R}$, vale $\boldsymbol{\varphi}(t) \neq \boldsymbol{x}_0$ per ogni $t \in \boldsymbol{R}$.
Soluzione
1. S
Perché $\boldsymbol{\varphi}(t)$ e $\boldsymbol{\varphi}(t - t_1 + t_2)$ risolvono lo stesso problema di Cauchy (con punto iniziale $(t_1, \boldsymbol{\varphi}(t_1))$) e quindi coincidono per il teorema di unicità.
2. S
È la definizione di punto di equilibrio.
3. S
Altrimenti si contraddirebbe il teorema di unicità: esiste una sola soluzione che passa per il punto di equilibrio all'istante $\bar{t}$ e questa è quindi quella costante.

.95 Si consideri il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_O$ di un corpo rigido C, di polo O solidale con C. Qui $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare di C.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali no.
283) Se $\boldsymbol{\omega}$ è sempre nullo durante il moto, anche $\boldsymbol{L}_O$ lo è.
284) Se $\boldsymbol{L}_O$ è costante nel sistema fisso, allora è costante anche nel sistema solidale.
285) Se il moto è polare, $\boldsymbol{L}_O$ è un multiplo scalare di $\boldsymbol{\omega}$.
Soluzione
1. N
No, nel caso in oggetto vale (in genere)

$$\boldsymbol{L}_O = m(\boldsymbol{X}_G - \boldsymbol{X}_O) \times \boldsymbol{V}_T(\boldsymbol{X}_O(t), t) \neq 0 \,.$$

2. N
Nei moti polari per inerzia, per esempio, $\boldsymbol{L}_O$ è sempre costante nel sistema fisso, ma è costante nel sistema solidale solo nelle rotazioni.
3. N
Nei moti polari per inerzia, per esempio, $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ che non è (salvo il caso delle rotazioni) un multiplo scalare di $\boldsymbol{\omega}$.

.96 Un sistema di punti materiali soggetto a vincoli olonomi lisci e fissi ha equazione di moto

$$\ddot{x} = f(x) \,,$$

ove $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ e $x \in \boldsymbol{R}$ è la coordinata lagrangiana (infatti si assume $\ell = 1$). Si assume anche

$$f(x) \geq x^2\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni è vera, con riferimento al diagramma delle orbite del moto nel piano delle fasi (x, p).
286) Le orbite $(x(t), p(t))$ del moto tali che $p(0) = 0$, $x(0) \neq 0$ hanno in $t = 0$ un punto di inversione del moto (ossia $p(t)$ cambia segno intorno a $t = 0$).
287) Esiste almeno un punto di equilibrio.
288) Esistono orbite su cui p diviene illimitata.
SOLUZIONE
1. S
Questo è vero per tutte le orbite nel piano delle fasi, a meno che non si tratti di orbite degeneri corrispondenti a punti di equilibrio, ma questo è impossibile per $x \neq 0$, perché per ipotesi $f(x) > 0$ per $x \neq 0$.
2. N
I punti di equilibrio corrispondono alle soluzioni di $f(x) = 0$, che nel nostro caso può valere al più in $x = 0$, ma non necessariamente; basta prendere $f(x) = x^2 + 1$.
3. S
Si ha per $x > 0$

$$U(x) = U(0) + \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s \geq U(0) + \frac{x^3}{3}\,.$$

Quindi per esempio le orbite date da

$$p = \sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))}\,,$$

con $E \in \boldsymbol{R}$ qualunque, sono definite almeno in una semiretta $(\bar{x}, +\infty)$ e soddisfano $p \to +\infty$ se $x \to +\infty$. **.97** Un cubo di massa m e spigolo L è vincolato a muoversi di moto polare con polo in un vertice A, che occupa l'origine O del sistema di riferimento fisso. Siano B il vertice opposto a A e G il centro del cubo.
Sul cubo sono applicate le forze, nei punti indicati,

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha\cos(\gamma t)\boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{F}_G = \beta\sin(\gamma t)\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \times \boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale ortogonale alla diagonale $\overrightarrow{AB}$, e α, β, γ costanti positive.
Il cubo parte da fermo.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
289) Esiste una costante $C > 0$ tale che

$$T(t) \leq C\,, \qquad \text{per ogni } t \geq 0.$$

290) Il moto è una rotazione.

291) Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_A$ rimane costante durante il moto.
SOLUZIONE
1. S
Scriviamo il sistema delle equazioni di Eulero; scegliamo il sistema di riferimento solidale con origine in A e terna

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\,.$$

Allora si vede subito che

$$\boldsymbol{M}_A^{\text{ext}} = \sqrt{3}L\boldsymbol{u}_3 \times \alpha\cos(\gamma t)\boldsymbol{u}_1 + \frac{\sqrt{3}L}{2}\boldsymbol{u}_3 \times \beta\sin(\gamma t)\boldsymbol{u}_2 = \sqrt{3}L\alpha\cos(\gamma t)\boldsymbol{u}_2 - \frac{\sqrt{3}L}{2}\beta\sin(\gamma t)\boldsymbol{u}_1\,.$$

Quindi tenendo conto del teorema di Huygens, le equazioni di Eulero in A sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - \frac{\sqrt{3}L}{2}\beta\sin(\gamma t)\,,\\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \sqrt{3}L\alpha\cos(\gamma t)\,,\\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Dunque $\omega_3(t) = 0$ per ogni t e

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{\sqrt{3}L}{2\gamma I_{11}}\beta(1 - \cos(\gamma t))\boldsymbol{u}_1 + \frac{\sqrt{3}L}{\gamma I_{11}}\alpha\sin(\gamma t)\boldsymbol{u}_2\,.$$

Perciò $\boldsymbol{\omega}$ si mantiene sempre limitato e $T = \boldsymbol{\sigma\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}/2$ anche.
2. N
Per il calcolo al punto precedente, $\boldsymbol{\omega}$ non ha direzione costante nel sistema solidale e quindi neanche in quello fisso.
3. N
Il momento delle quantità di moto ha derivata pari al momento delle forze esterne, che non è nullo.

.98 Un punto materiale P di massa m è vincolato con vincolo scabro al piano

$$x_1 + x_3 = 0\,,$$

e soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha x_1 \boldsymbol{e}_1\,,$$

con $\alpha > 0$ costante.
La reazione vincolare soddisfa le usuali ipotesi di Coulomb-Morin con

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

$\mu > 0$ costante. Si assuma che la velocità non sia nulla.
Si usino come coordinate lagrangiane $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.

292) Il sistema di moto è costituito da due equazioni nella forma

$$\ddot{x}_1 = f(x_1, x_2)\,, \qquad \ddot{x}_2 = g(x_1, x_2)\,.$$

293) Tra i moti possibili esiste un moto rettilineo uniforme.
294) Esistono condizioni iniziali

$$x_1(0)\,, \quad x_2(0)\,, \quad \dot{x}_1(0) \neq 0\,, \quad \dot{x}_2(0) \neq 0\,,$$

per cui non vale il teorema di esistenza e unicità del moto in un opportuno intervallo di tempo.
SOLUZIONE
1. N
Le equazioni devono contenere anche la velocità, che dà la direzione della componente tangente della reazione vincolare.
2. S
Il moto lungo l'asse x_2. La reazione vincolare è nulla.
3. N
Il vincolo di attrito scabro su una superficie regolare, se la forza è regolare, conduce a un sistema per cui vale esistenza e unicità di soluzioni.

.99 Si consideri un sistema formato da due moti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3\,,$$

vincolati da

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}) &= (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 - \alpha[1 + (\cos(\gamma t))^2] = 0\,, \\ f_2(\boldsymbol{z}) &= z_3 - z_5 = 0\,, \\ f_3(\boldsymbol{z}) &= z_1 z_6 - \beta = 0\,, \end{aligned}$$

con $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_6)$, $t > 0$ e α, β e γ costanti positive.
Si assuma come noto che il sistema di vincoli è olonomo regolare in ogni configurazione compatibile.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
295) Assumiamo che la stessa configurazione $\boldsymbol{z}$ sia compatibile in due istanti diversi, t_1 e t_2. Allora lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t_1}\boldsymbol{f}$ può essere diverso da quello $V_{\boldsymbol{z},t_2}\boldsymbol{f}$.
296) L'ipotesi dei lavori virtuali per il sistema, nella configurazione $\boldsymbol{z}$, può esprimersi come

$$(\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^1, \mathbf{f}_{\text{vin}}{}^2) \in \langle \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{v}_3(\boldsymbol{z}) \rangle\,,$$

ove i $\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{R}^6$ sono opportuni vettori indipendenti dal tempo.
297) Esiste una parametrizzazione lagrangiana in cui z_1 e z_6 sono entrambe coordinate lagrangiane.
SOLUZIONE

1. N
Lo spazio degli spostamenti virtuali è l'ortogonale in $\boldsymbol{R}^6$ *di*

$$N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} = \langle \nabla_{\boldsymbol{z}} f_1, \nabla_{\boldsymbol{z}} f_2, \nabla_{\boldsymbol{z}} f_3 \rangle .$$

Nonostante le f_i *dipendano dal tempo, i loro gradienti non lo fanno, quindi* $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ *e perciò il suo ortogonale sono indipendenti da* t.
2. S
L'ipotesi dei lavori virtuali afferma $(\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^1, \mathbf{f}_{\text{vin}}{}^2) \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$, *quindi vale quanto osservato al punto precedente.*
3. N
Le due coordinate locali non possono evidentemente essere indipendenti l'una dall'altra, per il terzo vincolo.

.100 Un punto materiale è soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conservative. La lagrangiana è $\mathcal{L} = T^{\text{L}} + U^{\text{L}}$, con

$$T^{\text{L}} = \alpha\dot{\varphi}^2 + 2(\alpha+\beta)\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2\dot{\theta}^2 , \quad U^{\text{L}} = -\alpha\varphi^2 - \beta^2\theta^4 .$$

Qui α, β sono costanti e $(\varphi, \theta) \in \boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate lagrangiane.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è compatibile con le definizioni date sopra e le proprietà che ne seguono.
298) Si può prendere $\beta = 0$, purché $\alpha > 0$.
299) Si possono prendere alcuni valori $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e in modo tale che in $(\varphi, \theta) = (0,0)$ si possono definire le piccole oscillazioni.
300) Si possono prendere alcuni valori $\alpha > 0$ e $\beta = -\alpha$, e in $(\varphi, \theta) = (0,0)$ si ha un equilibrio stabile.
Soluzione
1. N
L'unica cosa da controllare è che la forma quadratica di T^{L} *sia definita positiva; la matrice associata, a parte un fattore* 2, *è*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & \beta^2 \end{pmatrix} .$$

Se $\beta = 0$ *questa non è definita positiva.*
2. N
In (0,0) *il potenziale ha un massimo isolato, ma con matrice hessiana non definita negativa, quindi non si possono definire le piccole oscillazioni.*
3. S
Per i valori dati, la matrice dell'energia cinetica è definita positiva, e U^{L} *ha massimo isolato in* (0,0).

.101 Una lamina quadrata è vincolata a muoversi di moto polare intorno al suo centro G, con vincolo liscio.
Si sa che il momento delle forze esterne di polo G soddisfa in ogni istante

$$\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = \alpha\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega} ,$$

ove $\alpha > 0$ è una costante e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale alla lamina. Si assuma $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per ogni t.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
301) L'energia cinetica si conserva durante il moto.
302) Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_G$ si conserva durante il moto.
303) Se per $t = 0$ sia $\boldsymbol{\omega}$ che $\boldsymbol{u}$ sono ortogonali alla lamina, il moto è una rotazione.
SOLUZIONE
1. S
Si sa che

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0\,,$$

nel presente caso in cui $\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}}$ e $\boldsymbol{\omega}$ sono perpendicolari.
2. N
Per la seconda equazione globale, questo è vero solo se $\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}} = 0$ il che in genere non è vero.
3. S
Se prendiamo un sistema di riferimento solidale con origine in G e $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale alla lamina, allora all'istante iniziale $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{u}$ sono paralleli a $\boldsymbol{u}_3$. Poiché questo è un asse principale, l'ipotesi che $\boldsymbol{\omega}$ si mantenga parallelo a $\boldsymbol{u}_3$ conduce a $\boldsymbol{\omega}$ costante (dalle equazioni di Eulero), quindi l'ipotesi fatta è verificata (unicità di soluzioni) e il moto è una rotazione.

.102 Consideriamo un punto materiale P di massa m vincolato con vincolo liscio a una superficie S con parametrizzazione regolare $\boldsymbol{r} \in C^\infty(Q)$, $Q \subset \boldsymbol{R}^2$.
Si prendano $(u, v) \in Q$ come coordinate lagrangiane.
Sul punto agisce la forza posizionale $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
304) Se vale su S

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)) = \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r}(u,v)) + g(u,v)\boldsymbol{\nu}(u,v)\,,$$

con $\boldsymbol{\nu}$ normale a S, $g \in C^\infty(Q)$, e $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x})$ conservativa in $\boldsymbol{R}^3$, allora l'energia meccanica si conserva lungo i moti di P.
305) Se $\boldsymbol{F}$ è ovunque nulla, e all'istante iniziale

$$\dot{u}(0) \neq 0\,, \qquad \dot{v}(0) = 0\,,$$

allora lungo il moto si ha $v(t)$ costante.
306) Sia $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$ un moto di P con traiettoria $\boldsymbol{\psi}(s)$ parametrizzata dall'ascissa curvilinea s. Se $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$ è la terna intrinseca della traiettoria, in generale sia $\boldsymbol{N}$ che $\boldsymbol{B}$ possono avere una componente tangente a S non nulla.
SOLUZIONE
1. S
Infatti la forza è in questo caso data da una componente conservativa più una (che comprende la reazione vincolare) che fa lavoro nullo (essendo normale alla velocità).

2. N
Per esempio se S è il piano senza l'origine, e $u = \theta$, $v = \rho$ sono le usuali coordinate polari, il moto con le condizioni iniziali indicate è rettilineo uniforme sulla retta tangente alla circonferenza di raggio $\rho(0)$ e centro l'origine. Quindi su di esso ρ non si mantiene costante.
3. S
Per esempio si consideri il moto su una circonferenza contenuta in una sfera che non sia un cerchio massimo. Sia $\boldsymbol{N}$ che $\boldsymbol{B}$ non sono radiali, e quindi hanno una componente tangente.

.103 Un punto materiale P di massa m è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \alpha \cos(\beta x_1 x_2 x_3) \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,, \qquad \boldsymbol{x} \neq 0\,,$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ costanti.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
307) Il moto è piano.
308) Vale la conservazione dell'energia lungo tutti i moti di P.
309) Supponiamo che il moto non si riduca alla quiete, ma abbia velocità nulla in qualche istante. Allora la traiettoria del moto giace su una retta.
Soluzione
1. S
La forza ha direzione radiale e l'affermazione segue da un noto teorema.
2. N
Si sa che una forza a direzione radiale è conservativa se e solo se la sua componente scalare dipende solo da $|\boldsymbol{x}|$, e questo non vale nel nostro caso.
3. S
Per la conservazione della velocità areolare, questo è l'unico caso possibile.

.104 Si consideri un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ con $\mathcal{M}$ di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ rispetto alla terna fissa. Assumiamo che $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per ogni t.
Ricordiamo la definizione del campo della velocità di trascinamento di $\mathcal{S}$,

$$\boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_O(t))\,.$$

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
310) Il luogo dei punti $\boldsymbol{x}$ ove, all'istante t, $|\boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{x}, t)|$ è minimo, può essere una sfera di raggio positivo.
311) Per ogni istante t esiste una direzione $\boldsymbol{u}(t)$ tale che la componente di $\boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{x}, t)$ parallela a $\boldsymbol{u}(t)$ è indipendente da $\boldsymbol{x}$.
312) Si ha sempre $\boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{x}, t) \neq 0$ per ogni $(\boldsymbol{x}, t)$.
Soluzione
1. N
Il luogo dei punti suddetto è una retta, l'asse istantaneo di moto.
2. S
Basta prendere $\boldsymbol{u}(t)$ come il versore di $\boldsymbol{\omega}(t)$; questo segue subito dalla definizione di $\boldsymbol{V}_{\text{T}}$.

3. N
Se per esempio $\boldsymbol{v}_O(t)$ è sempre nulla, $\boldsymbol{V}_{\tau}(\boldsymbol{X}_O, t) = 0$.

.105 Un cubo di massa m e spigolo L è vincolato a muoversi di moto polare con polo nel suo centro G, che occupa l'origine O del sistema di riferimento fisso. Siano A e B due vertici opposti del cubo (ossia estremi di una diagonale del cubo).
Sul cubo sono applicate le forze, nei punti indicati,

$$\boldsymbol{F}_A = \alpha \boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = \beta \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \times \boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale ortogonale alla diagonale $\overrightarrow{AB}$, e α, β costanti positive.
Il cubo parte da fermo.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
313) Esiste una costante $C > 0$ tale che

$$T(t) \le C\,, \qquad \text{per ogni } t \ge 0.$$

314) Il moto è una rotazione.
315) L'ellissoide d'inerzia in G si mantiene tangente a un piano fisso durante il moto.
Soluzione
1. N
Scriviamo il sistema delle equazioni di Eulero; scegliamo il sistema di riferimento solidale con origine in G e terna

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\,.$$

Allora si vede subito che

$$\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = -\frac{\sqrt{3}L}{2}\boldsymbol{u}_3 \times \alpha \boldsymbol{u}_1 + \frac{\sqrt{3}L}{2}\boldsymbol{u}_3 \times \beta \boldsymbol{u}_2 = -\frac{\sqrt{3}L}{2}\alpha \boldsymbol{u}_2 - \frac{\sqrt{3}L}{2}\beta \boldsymbol{u}_1\,.$$

Quindi le equazioni di Eulero in G sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot\omega_1 &= -\frac{\sqrt{3}L}{2}\beta\,,\\ I_{11}\dot\omega_2 &= -\frac{\sqrt{3}L}{2}\alpha\,,\\ I_{33}\dot\omega_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Dunque $\omega_3(t) = 0$ per ogni t e

$$\boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{\sqrt{3}L}{2I_{11}}\beta t \boldsymbol{u}_1 - \frac{\sqrt{3}L}{2I_{11}}\alpha t \boldsymbol{u}_2\,.$$

Perciò $\boldsymbol{\omega}$ non si mantiene limitato e $T = \boldsymbol{\sigma\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}/2$ neanche.
2. S
Per il calcolo al punto precedente, $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione costante nel sistema solidale e quindi anche in quello fisso.
3. S
L'ellissoide d'inerzia in G è una sfera, quindi l'affermazione è ovviamente vera, basta prendere un piano fisso a distanza da G pari al raggio della sfera.

.106 Un punto materiale P di massa m è vincolato con vincolo scabro al piano

$$x_1 + x_3 = 0\,,$$

e soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -\alpha x_1 \boldsymbol{e}_1 - \beta x_2 \boldsymbol{e}_2\,,$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ costanti.
La reazione vincolare soddisfa le usuali ipotesi di Coulomb-Morin con

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

$\mu > 0$ costante. Si assuma che la velocità non sia nulla.
Si usino come coordinate lagrangiane $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
316) Tutti i moti sono limitati.
317) Esistono moti su cui di fatto $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}} = 0$.
318) Se il moto parte con condizioni iniziali

$$x_1(0) = 0\,, \quad x_2(0) = 1\,, \quad \dot{x}_1(0) \neq 0\,, \quad \dot{x}_2(0) = 0\,,$$

si ha $x_2(t) = 1$ per ogni t.
SOLUZIONE
1. S
La forza ha il potenziale

$$U(x_1, x_2) = -\frac{\alpha}{2} x_1^2 - \frac{\beta}{2} x_2^2\,.$$

Quindi lungo un moto

$$\frac{\alpha}{2} x_1^2 + \frac{\beta}{2} x_2^2 \leq T - U \leq T(0) - U(x_1(0), x_2(0))\,,$$

ove la disuguaglianza è giustificata da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[T - U] = m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}} \cdot \boldsymbol{v} \leq 0\,.$$

2. S
Per la legge di Coulomb-Morin, questo accade se e solo se $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}} = 0$, il che a sua volta è equivalente, visto che il moto si svolge su un piano e $\boldsymbol{a}$ quindi non ha componente ortogonale, a

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu} = (-\alpha x_1 \boldsymbol{e}_1 - \beta x_2 \boldsymbol{e}_2) \cdot \frac{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} x_1 = 0\,.$$

Quindi è vero per i moti che si svolgono sull'asse x_2, che sono in effetti possibili con le opportune condizioni iniziali.
3. N
Basta mostrare che $\ddot{x}_2(0) \neq 0$:

$$m\ddot{x}_2(0) = m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{F}(x_1(0), x_2(0)) \cdot \boldsymbol{e}_2 + \mathbf{f}_{\text{vin}}(0) \cdot \boldsymbol{e}_2 = -\beta \neq 0$$

perché $\boldsymbol{e}_2$ è tangente al piano, e all'istante iniziale $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}$ è (come al solito) diretta come la velocità, ossia perpendicolarmente a $\boldsymbol{e}_2$.

.107 Consideriamo un moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = U'(x)\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $U \in C^\infty(\boldsymbol{R})$.
Con riferimento al diagramma delle orbite nel piano delle fasi, dire se ciascuna delle seguenti affermazioni può essere vera.
319) Il punto $x = 0$ è di equilibrio stabile, e le curve

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))}\,,$$

per una certa costante E, coincidono in un intorno di (0,0) con le due rette $p = \pm x$.
320) Un'orbita corrisponde al moto $x(t)$ e corrisponde anche a tutti i suoi traslati temporali $x(t + c)$ con c costante.
321) Un'orbita non periodica può contenere punti ove $\dot{x}$ ha segni diversi.
Soluzione
1. N
Le orbite non possono veramente incrociarsi (per l'unicità), ma se le curve dette si incrociano, lo fanno in un punto di equilibrio instabile.
2. S
Infatti

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t + c) = \dot{x}(t + c)\,.$$

Quindi le orbite coincidono con quella $(x(t), \dot{x}(t))$ anche se l'intervallo dei tempi può cambiare.
3. S
Basta solo che abbia un punto di inversione.

.108 Un punto materiale è soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conservative. La lagrangiana è $\mathcal{L} = T^{\text{L}} + U^{\text{L}}$, con

$$T^{\text{L}} = \alpha\dot{\varphi}^2 + 2(\alpha + \beta)\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2\dot{\theta}^2\,, \quad U^{\text{L}} = -\alpha\varphi^2 - \beta^2\theta^2 + \beta\theta^4\,.$$

Qui α, β sono costanti e $(\varphi, \theta) \in \boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate lagrangiane.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è compatibile con le definizioni date sopra e le proprietà che ne seguono.

322) Si può prendere $\alpha + \beta = 0$, purché $\alpha > 0$.
323) Si possono prendere alcuni valori $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e in modo tale che in $(\varphi, \theta) = (0,0)$ si possono definire le piccole oscillazioni.
324) Per i valori $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ (se sono ammissibili), esiste una unica posizione di equilibrio.
Soluzione
1. S
L'unica cosa da controllare è che la forma quadratica di T^{L} sia definita positiva; la matrice associata, a parte un fattore 2, è

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Se $\alpha = -\beta > 0$ questa è definita positiva.
2. S
Il determinante della matrice dell'energia cinetica è $\alpha\beta^2 - (\alpha+\beta)^2$; quindi per esempio se $\alpha = \beta \gg 1$ il determinante è positivo e la matrice è definita positiva.
In (0,0) il potenziale ha un massimo isolato, con matrice hessiana definita negativa, quindi si possono definire le piccole oscillazioni.
3. N
Per i valori dati, il sistema dell'equilibrio è

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} = -2\alpha\varphi = 0\,, \quad \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \theta} = 2\beta\theta(-\beta + 2\theta^2)\,,$$

che ha soluzioni $(0,0)$, $(0, \pm\sqrt{\beta/2})$.

.109 Una lamina quadrata è vincolata a muoversi di moto polare intorno al suo centro G, con vincolo liscio.
Si sa che il momento delle forze esterne di polo G soddisfa in ogni istante

$$\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = \alpha(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}\,,$$

ove $\alpha > 0$ è una costante e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale alla lamina. Si assuma $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per ogni t.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
325) Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_G$ si conserva durante il moto.
326) Se $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega} = |\boldsymbol{\omega}|$ per ogni istante, il moto è una rotazione.
327) Se per $t = 0$, $\boldsymbol{\omega}(0)$ è ortogonale alla lamina, e $\boldsymbol{u}$ è parallelo alla lamina, il moto è una rotazione.
Soluzione
1. N
Si sa che

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_G}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = \alpha(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}\,,$$

che in genere non si annulla.
2. S
Poiché $\boldsymbol{u}$ è un versore, la condizione data implica che $\boldsymbol{\omega}$ sia ad esso parallelo per ogni tempo, ossia abbia direzione costante nel sistema solidale; è noto che questo

implica che $\boldsymbol{\omega}$ abbia direzione costante anche nel sistema fisso, e quindi il moto è una rotazione.
3. S
Se prendiamo un sistema di riferimento solidale con origine in G e $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale alla lamina, allora all'istante iniziale $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a $\boldsymbol{u}_3$, e $\boldsymbol{u}$ gli è ortogonale. Poiché $\boldsymbol{u}_3$ è un asse principale, l'ipotesi che $\boldsymbol{\omega}$ si mantenga parallelo a $\boldsymbol{u}_3$ conduce a $\boldsymbol{\omega}$ costante (dalle equazioni di Eulero), quindi l'ipotesi fatta è verificata (unicità di soluzioni) e il moto è una rotazione.

.110 Consideriamo un punto materiale P di massa m vincolato con vincolo liscio a una superficie S con parametrizzazione regolare $\boldsymbol{r} \in C^\infty(Q)$, $Q \subset \boldsymbol{R}^2$. Si prendano $(u, v) \in Q$ come coordinate lagrangiane.
Sul punto agisce la forza posizionale $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
328) Sia $\boldsymbol{F}$ ovunque nulla; sia $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$ un moto di P con traiettoria $\boldsymbol{\psi}(s)$ parametrizzata dall'ascissa curvilinea s. Se $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$ è la terna intrinseca della traiettoria, l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ è parallela a $\boldsymbol{N}$.
329) Sia S una sfera, e $\boldsymbol{F}$ abbia direzione costante; allora esistono dei punti di equilibrio.
330) È possibile definire il potenziale lagrangiano solo se $\boldsymbol{F}$ è conservativa (in senso tradizionale).
Soluzione
1. S
Si ha mettendo insieme tutta l'informazione:

$$m\boldsymbol{a} = m(\ddot{s}\boldsymbol{T} + \dot{s}^2 k\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\text{vin}} = \mathbf{f}_{\text{vin}}\,,$$

e poiché $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ è normale a S e quindi a $\boldsymbol{T}$, deve essere $\ddot{s} = 0$.
2. S
I punti di equilibrio coincidono con le soluzioni di $\boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\text{vin}} = 0$, ossia con i punti ove $\boldsymbol{F}$ ha direzione radiale; questi esistono senz'altro (e sono 2 se $\boldsymbol{F}$ non si annulla).
3. N
Prendiamo per esempio S il piano $x_3 = 0$ e $\boldsymbol{F} = \alpha x_2 x_3 \boldsymbol{e}_1$.

.111 Un punto materiale P di massa m è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \alpha \cos(\beta \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,, \qquad \boldsymbol{x} \neq 0\,,$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ costanti.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
331) Esistono moti rettilinei.
332) Vale la conservazione dell'energia lungo tutti i moti di P.
333) Supponiamo che $\boldsymbol{X}(0) = R\boldsymbol{e}_1$, $\dot{\boldsymbol{X}}(0) = c\boldsymbol{e}_2$, con $R > 0$, $c > 0$. Allora $\dot{\boldsymbol{X}}$ non si annulla mai.
Soluzione
1. S
La forza ha direzione radiale e l'affermazione segue da un noto teorema. In sostanza sono quelli per cui la velocità iniziale ha direzione radiale.

2. S
Si sa che una forza a direzione radiale è conservativa se e solo se la sua componente scalare dipende solo da $|\boldsymbol{x}|$, e questo vale nel nostro caso.
3. S
Per la conservazione della velocità areolare, questo è l'unico caso possibile.

.112 Si consideri un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ con $\mathcal{M}$ di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ rispetto alla terna fissa. Assumiamo che $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per ogni t.
Ricordiamo la definizione del campo della velocità di trascinamento di $\mathcal{S}$,

$$\boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_O(t)) \,.$$

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
334) Supponiamo t fissato; si può considerare $\boldsymbol{R}^3$ come unione di rette su ciascuna delle quali $\boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{x}, t)$ è costante.
335) Nelle rotazioni, $\boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{x}, t)$ è indipendente da t.
336) Per ogni t fissato, esiste sempre almeno un punto ove $\boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{x}, t) = 0$.
Soluzione
1. S
Infatti se $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 = \lambda\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{x}_1, t) = \boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{x}_2, t)$.
2. N
Certamente non se la rotazione non è uniforme.
3. N
Se per esempio $\boldsymbol{v}_O(t) \neq 0$ e $\boldsymbol{\omega}(t)$ sono paralleli, allora $\boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{x}, t) \neq 0$ per ogni $\boldsymbol{x}$.

.113 Un cubo di massa m e spigolo $2L$ è vincolato a muoversi di moto polare con polo nel centro A di una delle facce. Si consideri il sistema di riferimento solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_A, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ sono i versori paralleli ai lati della faccia cui appartiene A, cosicché

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{AG}}{L} \,,$$

se G è il centro del cubo.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
337) Se il moto è una rotazione uniforme di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ allora l'energia cinetica vale

$$\frac{1}{3} m L^2 |\boldsymbol{\omega}|^2 \,.$$

338) Se sul cubo è applicata, in G, la forza

$$\boldsymbol{F}_G = \lambda \cos(\alpha t) \boldsymbol{u}_1 \,,$$

con λ, α costanti positive, e condizioni iniziali $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{03}\boldsymbol{u}_3(0)$, il moto è una rotazione.
339) Se sul cubo non sono applicate forze, vale $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(0)$ per ogni t.

Soluzione
1. N
L'enercia cinetica vale $\boldsymbol{\sigma}_A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}/2$*, che dipende dalla direzione di* $\boldsymbol{\omega}$*, perché* $\boldsymbol{\sigma}$ *in* A *non ha tutti i momenti principali uguali.*
2. N
Le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11}-I_{33})\omega_2\omega_3\,,\\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33}-I_{11})\omega_1\omega_3 + L\lambda\cos(\alpha t)\,,\\ I_{33}\dot{\omega} &= 0\,. \end{aligned}$$

Se il moto fosse una rotazione, si avrebbe $\omega_1(t)=\omega_2(t)=0$ *per ogni* t*, che è incompatibile con la seconda equazione.*
3. N
In questo caso il moto è polare per inerzia, e può essere una rotazione solo se avviene intorno a un asse principale.

.114 Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1\sin(\alpha t)+x_2\cos(\alpha t)=0\,,$$

ove $\alpha>0$ è costante. Sull'asta agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=-k\overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}s\,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e P il generico punto dell'asta. La distribuzione è nulla fuori dell'asta AB e $k>0$ è costante.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
340) Se si scrivono le equazioni di Lagrange nel sistema di riferimento mobile solidale con il piano ruotante, si può scrivere la Lagrangiana dell'asta.
341) L'energia cinetica dell'asta nel sistema di riferimento fisso non dipende da α.
342) L'asta nel sistema di riferimento mobile ha numero di gradi di libertà diverso da quello nel sistema di riferimento fisso.
Soluzione
1. S
Infatti nel sistema di riferimento mobile, oltre alla $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$*, che ha potenziale in quanto conservativa, ha componente lagrangiana diversa da* 0 *solo la forza di trascinamento* $m\alpha^2 y_1\boldsymbol{u}_1/2L$*, ove* $\boldsymbol{u}_1$ *è il versore ruotante che giace sul piano ruotante, ortogonale all'asse di rotazione, e* y_1 *è l'ascissa relativa; questa forza è conservativa.*
2. N
La velocità dei punti dell'asta dipende da α*.*
3. N
Questo non è mai vero.

.115 Si consideri un punto materiale $(\boldsymbol{X},m)$ vincolato alla circonferenza ruotante

$$\boldsymbol{\psi}(s,t)=R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1(t)+R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3(t)\,,$$

ove $R > 0$ e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante.
Sul punto agisce il peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
343) La reazione vincolare, per ogni (s,t), appartiene al piano mobile $\langle \boldsymbol{N}(s,t), \boldsymbol{B}(s,t)\rangle$, ove $(\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca della circonferenza.
344) L'energia meccanica si conserva durante il moto.
345) Se si usa s come coordinata lagrangiana, allora l'energia cinetica in forma lagrangiana è

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}\Big(\dot s^2 + R^2\alpha^2\cos^2\frac{s}{R}\Big)\,.$$

Soluzione
1. S
Questo è implicato dall'ipotesi di vincolo liscio, o dei lavori virtuali.
2. N
La reazione vincolare fa lavoro, in genere, nel caso dei vincoli mobili.
3. S
Infatti

$$\boldsymbol{v}^{\text{L}} = \dot s\Big(-\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1 + \cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3\Big) + R\alpha\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_2\,.$$

.116 Un sistema di corpi rigidi vincolato da vincoli olonomi lisci e fissi è soggetto a forze conservative di potenziale U^{L}. Qui $\ell = 3$ e $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^3$ sono le coordinate lagrangiane. Si assuma

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial q_h}(0,0,0) = 0\,, \qquad h = 1\,,2\,,3\,.$$

Dire se in ciascuno dei seguenti casi si ha sicuramente equilibrio stabile.
346) Si ha l'hessiana

$$D^2U^{\text{L}}(0,0,0) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\,.$$

347) Si ha per un $\alpha > 0$ costante

$$-2\alpha|\boldsymbol{q}|^2 \le U^{\text{L}}(\boldsymbol{q}) \le -\alpha|\boldsymbol{q}|^2\,, \qquad \boldsymbol{q}\in\boldsymbol{R}^3\,.$$

348) L'hessiana $D^2U^{\text{L}}(0,0,0)$ ha tutti gli autovalori non positivi.
Soluzione

1. N
Infatti $\boldsymbol{q} = 0$ è un punto di sella.
2. S
Infatti $\boldsymbol{q} = 0$ è un punto di massimo isolato.
3. N
Potrebbe essere un punto sella (se avesse un autovalore nullo).

.117 Sia C un corpo rigido non degenere, di densità non uniforme $\rho(\boldsymbol{\lambda})$, ove $\boldsymbol{\lambda}$ sono le coordinate solidali. Sia $\boldsymbol{X}_Z$ un moto solidale al rigido.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
349) Se $\boldsymbol{X}_Z$ è fisso, l'energia cinetica si può scrivere come

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{L}_Z \cdot \boldsymbol{\omega}\,,$$

ove $\boldsymbol{L}_Z$ è il momento delle quantità di moto di polo $\boldsymbol{X}_Z$.
350) Il tensore d'inerzia $\boldsymbol{\sigma}_Z$ è definito positivo.
351) Esistono sempre un versore $\boldsymbol{u}$ costante nel sistema di riferimento fisso e un $\mu \in \boldsymbol{R}$ tali che $\boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{u} = \mu \boldsymbol{u}$ per ogni tempo t.
Soluzione
1. S
Infatti in questo caso $\boldsymbol{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega}$.
2. S
Questo è sempre vero per rigidi non degeneri.
3. N
Non è detto; gli autovettori di $\boldsymbol{\sigma}$ sono in genere solidali.

.118 Si consideri un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, con s ascissa curvilinea e curvatura $k(s) > 0$. Il vincolo è scabro e soggetto alla legge di Coulomb-Morin secondo cui

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\tan}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante, se $\dot{s} \neq 0$, il che assumiamo.
Sul punto è applicata la forza $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{N}$, $\alpha > 0$ costante. Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
352) L'equazione di moto è

$$m\ddot{s} = \mu \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} |m\dot{s}^2 k(s) - \alpha|\,.$$

353) Il moto dipende dal valore di $\mu > 0$.
354) Prescritte le condizioni iniziali $s(0)$, $\dot{s}(0)$, si può scegliere $\alpha > 0$ in modo che all'istante iniziale $\mathbf{f}_{\text{vin}}(0) = 0$.
Soluzione
1. N
La forza di attrito si oppone al moto e l'equazione è

$$m\ddot{s} = -\mu \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} |m\dot{s}^2 k(s) - \alpha|\,.$$

2. S
Evidente dall'equazione del moto.
3. S
La reazione vincolare è nulla se lo è quella normale; inoltre

$$|\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| = |m\dot{s}^2 k(s) - \alpha| = 0$$

se $\alpha = m\dot{s}^2 k(s)$.

.119 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = k|\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{u}||\boldsymbol{X}|^2 \boldsymbol{X}\,,$$

con $k > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ versore costante.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
355) La forza è conservativa in $\boldsymbol{R}^3$.
356) Tutti i moti sono rettilinei.
357) L'origine è un punto di equilibrio stabile.
Soluzione
1. N
Si sa dalla teoria che le forze a direzione radiale sono conservative se e solo se dipendono solo da $|\boldsymbol{X}|$.
2. N
Se per esempio $\boldsymbol{X}(0) = R\boldsymbol{e}_1$ *e* $\dot{\boldsymbol{X}}(0) = v_0\boldsymbol{e}_3$ *non sono nulli, il moto non può essere rettilineo.*
3. N
Sia per esempio $\boldsymbol{X}(0)$ *ortogonale a* $\boldsymbol{u}$, $\dot{\boldsymbol{X}}(0) = 0$. *Allora il moto è rettilineo e in pratica su di esso*

$$\boldsymbol{F} = k|\boldsymbol{X}|^3 \boldsymbol{X}\,,$$

ossia $\boldsymbol{X}(t)$ *si allontana infinitamente dall'origine.*

.120 Si consideri un disco

$$C = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leq R^2\,,\ \lambda_3 = 0\}\,,$$

ove $\boldsymbol{\lambda}$ sono le coordinate solidali relative al sistema con base $(\boldsymbol{u}_h)$. La densità $\rho(\boldsymbol{\lambda})$ non è uniforme.
Il disco si muove di moto polare con polo nel suo centro geometrico K.
Sul disco non agiscono forze direttamente applicate.
Dire se in ciascuno dei seguenti casi il moto è una rotazione.
358) Se $\rho(\boldsymbol{\lambda}) = \rho_0(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$ e $\boldsymbol{\omega}(0) \cdot \boldsymbol{u}_3(0) = 0$.
359) Se $\rho(\boldsymbol{\lambda}) = \rho_0(\lambda_1)$ e $\boldsymbol{\omega}(0) \cdot \boldsymbol{u}_3(0) = 0$.
360) Se $\boldsymbol{\omega}(0) \times \boldsymbol{u}_3(0) = 0$.
Soluzione
1. S
In questo caso per simmetria di rotazione tutti i diametri sono principali, per cui se $\boldsymbol{\omega}(0)$ *giace nel piano del disco, ha direzione principale.*

2. N
In questo caso non c'è garanzia che $\boldsymbol{\omega}(0)$ sia diretto come un asse principale.
3. S
L'asse ortogonale a una lamina è sempre principale, per un punto del piano della lamina.

.121 Un cilindro di massa m, raggio R e altezza H è vincolato ad avere il centro nell'origine O del sistema fisso.
Il sistema $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al cilindro, con $\boldsymbol{u}_3$ diretto come il suo asse. Sul cilindro è applicata, in A, la forza

$$\boldsymbol{F}_A = -\lambda \boldsymbol{u}_2\,, \qquad \boldsymbol{X}_A = \frac{H}{2}\boldsymbol{u}_3\,.$$

con $\lambda > 0$ costante. Le condizioni iniziali sono

$$\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h\,, \quad h = 1\,,2\,,3\,; \qquad \boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{03}\boldsymbol{u}_3(0)\,,$$

ove $\omega_{03} > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
361) Una delle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ in $(\boldsymbol{u}_h)$ soddisfa l'equazione dei moti armonici $\ddot{x} + \mu^2 x = 0$, con $\mu > 0$ opportuno.
362) Il moto è una rotazione.
363) Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_O$ si conserva durante il moto.
Soluzione
1. S
Poiché $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = (\lambda H/2)\boldsymbol{u}_1$, si hanno le equazioni di Eulero

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 + \frac{\lambda H}{2}\,,\\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3\,,\\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

da cui $\omega_3(t) = \omega_{03}$ e

$$\ddot{\omega}_1 = -\mu^2\omega_1\,, \qquad \mu = \frac{|I_{11} - I_{33}|\omega_{03}}{I_{11}}\,.$$

2. N
Se il moto fosse una rotazione, $\boldsymbol{\omega}$ dovrebbe essere solidale. Quindi $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_{03}\boldsymbol{u}_3(t)$ per ogni t, impossibile per la prima delle equazioni di Eulero.
3. N
È noto

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \frac{\lambda H}{2}\boldsymbol{u}_1 \neq 0\,.$$

.122 Si consideri il corpo rigido dato, in coordinate solidali $\boldsymbol{\lambda}$, da

$$C = \left\{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = R^2\,, \quad \lambda_3 \leq \frac{R}{2}\right\}.$$

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
364) Esistono punti in cui l'ellissoide d'inerzia è di rotazione.
365) La funzione $f(P) = I^P_{22}$, ristretta all'asse λ_3, raggiunge il minimo nel punto $\boldsymbol{\lambda} = 0$.
366) Se il corpo è posto in moto polare per inerzia intorno al proprio centro di massa, e $\boldsymbol{\omega}$ mantiene direzione costante, allora $|\boldsymbol{\omega}|$ è costante.
Soluzione
1. S
Dato che il corpo ha simmetria materiale di rotazione, questo è vero per tutti i punti dell'asse λ_3.
2. N
Per il Teorema di Huygens, il minimo è raggiunto nel centro di massa, che non è $\boldsymbol{\lambda} = 0$.
3. S
Questo è vero per tutte le rotazioni per inerzia.

.123 Si consideri un punto materiale P di massa m, vincolato alla sfera mobile

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R(t)^2 \,,$$

con $R \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, $R > 0$.
Vale l'ipotesi dei lavori virtuali. Sul punto agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -kx_1\boldsymbol{e}_1 \,,$$

con $k > 0$ costante.
Scegliamo come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}(\varphi, \theta, t) = R(t)\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R(t)\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R(t)\cos\theta\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Dire se ciascuna dalle seguenti affermazioni è corretta.
367) La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ nella configurazione $(\boldsymbol{x}, t)$ ha direzione dipendente dalla derivata $\dot{R}(t)$.
368) Esiste il potenziale lagrangiano ed è dato da

$$U^{\text{L}}(\varphi, \theta, t) = -\frac{k}{2}(R(t)\cos\varphi\sin\theta)^2 \,.$$

369) Su qualunque moto su cui φ, θ si mantengono costanti, anche l'energia cinetica T^{L} si mantiene costante.
Soluzione
1. N
La reazione vincolare appartiene allo spazio normale, che ha direzione radiale e quindi dipende solo dalle coordinate lagrangiane.
2. S
La forza è conservativa di potenziale $U = -kx_1^2/2$.
3. N
L'energia cinetica vale in genere

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}[\dot{R}(t)^2 + R(t)^2(\dot{\varphi}^2(\sin\theta)^2 + \dot{\theta}^2)] \,,$$

quindi varia con $\dot R$ perfino se $\dot\varphi$ e $\dot\theta$ si annullano.

.124 In un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \dots, n$, l'i-esimo punto è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}_i + \sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ij}\,,$$

ove

$$\boldsymbol{F}_i = -h\boldsymbol{X}_i\,, \qquad \boldsymbol{F}_{ij} = -k(\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_j)\,, \quad j \neq i\,.$$

Qui h, $k > 0$ sono costanti. Denotiamo il centro di massa del sistema con G. Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
370) La prima equazione globale (o cardinale) della dinamica determina da sola il moto del centro di massa del sistema.
371) Il momento delle quantità di moto di polo $\boldsymbol{X}_O = 0$ si conserva durante il moto.
372) Il momento delle quantità di moto di polo $\boldsymbol{X}_G$ si conserva durante il moto.
Soluzione
1. N
La prima equazione dà

$$m\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{F}^{\text{ext}} = -h\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i\,,$$

ma il membro di destra non è esprimibile in termini di $\boldsymbol{X}_G$.
2. S
Infatti

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = -h\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i \times \boldsymbol{X}_i = 0\,.$$

3. N
Infatti

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_G}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = -h\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_G) \times \boldsymbol{X}_i = h\boldsymbol{X}_G \times \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i \neq 0\,.$$

.125 Sia C un corpo rigido non degenere di densità non uniforme ρ, e sia $\boldsymbol{\sigma}$ il suo tensore d'inerzia con polo in un moto solidale $\boldsymbol{X}_Z$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
373) Se C ha in $\boldsymbol{X}_Z$ due terne solidali principali d'inerzia $(\boldsymbol{u}_h)$ e $(\boldsymbol{w}_k)$, con $\boldsymbol{u}_h \neq \boldsymbol{w}_k$ per ogni h, k, allora l'ellissoide d'inerzia in $\boldsymbol{X}_Z$ è una sfera.
374) Gli assi principali in $\boldsymbol{X}_Z$ si ottengono traslando quelli principali in $\boldsymbol{X}_G$ (G è il centro di massa di C).
375) Se la densità del corpo viene raddoppiata, ossia diviene 2ρ, gli assi principali d'inerzia in $\boldsymbol{X}_Z$ possono cambiare.
Soluzione
1. S
Poiché gli assi principali sono anche assi dell'ellissoide, questa è l'unica possibilità.

2. N
Questo è vero solo se $\boldsymbol{X}_Z$ appartiene a uno degli assi principali in G.
3. N
Raddoppiare ρ significa moltiplicare per uno scalare $\boldsymbol{\sigma}$, il che non cambia i suoi autovettori.

.126 Due moti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3\,,$$

sono vincolati da

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}) &= (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 - L^2 = 0\,,\\ f_2(\boldsymbol{z}) &= z_1 = 0\,,\\ f_3(\boldsymbol{z}) &= z_6 = 0\,, \end{aligned}$$

ove $L > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
376) Il vincolo è olonomo regolare in tutte le configurazioni compatibili.
377) Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali, la reazione vincolare su $\boldsymbol{X}_1$ è sempre parallela a $\boldsymbol{e}_1$.
378) Si possono scegliere come coordinate lagrangiane z_3, z_4, z_5, z_6.
Soluzione
1. S
Le f_j sono regolari, lo spazio delle configurazioni ammissibili non è vuoto, e la matrice iacobiana è (sostituendo i vincoli 2 e 3)

$$\begin{pmatrix} -2z_4 & 2(z_2 - z_5) & 2z_3 & 2z_4 & 2(z_5 - z_2) & -2z_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché per il primo vincolo almeno uno dei termini della prima riga nelle colonne 234 non si annulla, le 3 righe sono linearmente indipendenti.
2. N
La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}} = (\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^1, \mathbf{f}_{\text{vin}}{}^2)$ è nello spazio generato dai gradienti dei vincoli, e quindi $\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^1$ può avere componente diversa da 0 anche lungo $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.
3. N
La coordinata z_6 non può essere lagrangiana perché è costante per il terzo vincolo.

.127 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k|\boldsymbol{X}|^3\boldsymbol{X} - \alpha\dot{\boldsymbol{X}}\,,$$

con α, $k \geq 0$ costanti.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
379) Se $\alpha > 0$, $k > 0$ allora il punto $\boldsymbol{x}_0 = 0$ è di equilibrio stabile per il moto.
380) Se $\alpha > 0$, $k = 0$, allora tutti i punti sono di equilibrio stabile.

381) Se $\alpha = 0$, $k > 0$, allora in $\boldsymbol{x}_0 = 0$ si possono definire le piccole oscillazioni.
Soluzione
1. S
La componente posizionale della forza ha potenziale

$$U(\boldsymbol{x}) = -\frac{k}{5}|\boldsymbol{x}|^5\,,$$

che ha un minimo isolato in $\boldsymbol{x} = 0$. Poiché l'altra componente fa lavoro negativo, la teoria garantisce l'asserto.
2. S
Le soluzioni dell'equazione di moto sono in questo caso

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}(0) + \dot{\boldsymbol{X}}(0)\frac{m}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t})\,,$$

per cui risulta soddisfatto

$$|\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{x}|^2 + |\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 \le \varepsilon^2\,, \qquad t > 0\,,$$

se $|\boldsymbol{X}(0) - \boldsymbol{x}|^2 + |\dot{\boldsymbol{X}}(0)|^2 \le \delta^2$ opportuno, per ogni $\boldsymbol{x}$.
3. N
Il potenziale trovato sopra non ha hessiana definita negativa in $\boldsymbol{x} = 0$.

.128 Si consideri una lamina quadrata di lato $2L$

$$C = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid |\lambda_1| \le L\,,\ |\lambda_2| \le L\,,\ \lambda_3 = 0\}\,,$$

di densità non uniforme $\rho(\boldsymbol{\lambda})$. Qui le $\boldsymbol{\lambda}$ sono le coordinate del sistema solidale alla lamina.
La lamina è vincolata a ruotare intorno all'asse λ_1, che è fisso, con vincolo liscio. Sulla lamina non agiscono forze direttamente applicate.
382) Se $\rho(\lambda_1, \lambda_2, 0) = \rho(\lambda_1, -\lambda_2, 0)$ allora il momento delle reazioni vincolari rispetto al centro geometrico della lamina ha componente ortogonale all'asse di rotazione nulla.
383) Le reazioni vincolari hanno risultante nulla.
384) Il vettore $\boldsymbol{\sigma\omega}$ è costante (qui il polo di $\boldsymbol{\sigma}$ è il centro geometrico della lamina).
Soluzione
1. S
In questo caso, l'asse λ_1 è di simmetria materiale ortogonale, quindi l'asse λ_2 è principale; poiché anche l'asse λ_3 lo è, come sempre nelle lamine, segue che lo è anche l'asse λ_1. Allora l'asserto segue dalla teoria.
2. N
In genere per la prima equazione cardinale

$$0 \ne m\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{F}^{\text{ext}} = \mathbf{f}_{\text{vin}}\,.$$

3. N
Questo avviene se l'asse di rotazione è principale; altrimenti il momento delle forze di reazione non è nullo.

.129 Un parallepipedo omogeneo C è vincolato a muoversi di moto polare di polo l'origine del sistema fisso O, in cui è fissato un suo vertice, con vincolo liscio.
Sul corpo rigido agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_O)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} + \beta\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}\,,$$

ove $\boldsymbol{e}$ è un vettore costante (nel sistema fisso), α, β sono costanti positive, e $\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$ è la misura di volume su C. Qui $\boldsymbol{x}$ sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso, e $\boldsymbol{\lambda}$ quelle nel sistema di riferimento solidale.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
385) Il moto di C è indipendente da α.
386) Il moto di C è indipendente da β.
387) La componente di $\boldsymbol{L}_O$ data da $\boldsymbol{L}_O \cdot \boldsymbol{e}$ è indipendente dal tempo.
Soluzione
1. S
Il moto è dato dalle equazioni di Eulero, dove appare solo

$$\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = \int_C \boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{\lambda}) \times \beta\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}\,.$$

2. N
Vedi il punto precedente.
3. S
Infatti, ancora per il primo punto, e per la seconda equazione globale,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{L}_O \cdot \boldsymbol{e}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{e} = \int_C \boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} \times \beta\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e} = 0\,.$$

.130 Un punto materiale è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

con vincolo scabro tale che

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \le \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,.$$

Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{e}_3\,;$$

qui $\alpha > 0$, $\mu > 0$ sono costanti.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
388) Esistono infinite posizioni di equilibrio.
389) Esistono infinite posizioni non di equilibrio.
390) L'insieme delle posizioni di equilibrio è invariante per simmetrie $x_3 \mapsto -x_3$.

Soluzione
1. S
All'equilibrio $\mathbf{f}_{\text{vin}} + \boldsymbol{F} = 0$*, quindi si deve avere*

$$|\boldsymbol{F}|^2 - |\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu}|^2 \leq \mu^2 |\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu}|^2 .$$

Si calcola esplicitamente

$$\alpha^2 \leq (1+\mu^2)\alpha^2 \frac{x_3^2}{R^2} ,$$

vale a dire l'equilibrio si ha se e solo se

$$|x_3| \geq \frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}} =: k < R .$$

2. S
Segue dallo stesso calcolo del primo punto: non si ha equilibrio nella zona $|x_3| < k$*.*
3. S
Infatti l'insieme delle posizioni di equilibrio è dato da $|x_3| \leq k$*.*

.131 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = -\beta e^{\alpha(x_1+x_2)}(\alpha x_3^2 \boldsymbol{e}_1 + \alpha x_3^2 \boldsymbol{e}_2 + 2x_3 \boldsymbol{e}_3) , \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 .$$

Dire se ciascuna dalle seguenti affermazioni è corretta.
391) Esistono moti illimitati.
392) Se, dato un moto $\boldsymbol{X}$, esiste una costante $c > 0$ tale che lungo il moto

$$x_1(t)^2 + x_2(t)^2 \leq c , \qquad \text{per ogni } t,$$

allora anche $x_3(t)$ rimane limitata durante il moto.
393) Se un moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $\boldsymbol{X}(t_1) = \boldsymbol{X}(t_3)$ e $\boldsymbol{X}(t_2) = \boldsymbol{X}(t_4)$, per $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, allora il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ sul moto in $[t_1, t_2]$ è uguale a quello fatto in $[t_3, t_4]$.
Soluzione
1. S
La forza è identicamente nulla sul piano $x_3 = 0$*, quindi esistono moti rettilinei uniformi su tale piano.*
2. S
La forza è conservativa di potenziale

$$U(\boldsymbol{x}) = -\beta x_3^2 e^{\alpha(x_1+x_2)} .$$

Dunque per ciascun moto esiste E *tale che*

$$\beta x_3^2 e^{\alpha(x_1+x_2)} \leq E - T \leq E .$$

Dunque

$$x_3^2 \leq E\beta^{-1} e^{-\alpha(x_1+x_2)} \leq E\beta^{-1} e^{\alpha\sqrt{2c}},$$

perché

$$(x_1+x_2)^2 \leq 2(x_1^2+x_2^2) \leq 2c .$$

3. S
Dato che la forza è conservativa, il lavoro su $[t, \tau]$ *dipende solo dalle posizioni* $\boldsymbol{X}(t)$ *e* $\boldsymbol{X}(\tau)$.

.132 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ sono entrambi vincolati al cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,,$$

con vincolo liscio, e su $\boldsymbol{X}_i$ è applicata la forza $\boldsymbol{F}_i$

$$\boldsymbol{F}_1 = \gamma \frac{\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1}{|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^3} = -\boldsymbol{F}_2\,,$$

con $\gamma > 0$. Si assuma $\boldsymbol{X}_1 \neq \boldsymbol{X}_2$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
394) L'energia meccanica si conserva.
395) La parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + u\boldsymbol{e}_3\,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = x\boldsymbol{e}_1 + \sqrt{R^2 - x^2}\boldsymbol{e}_2 + v\boldsymbol{e}_3\,,$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $x \in (-R, R)$, $(u, v) \in \boldsymbol{R}^2$, è ammissibile.
396) Tutti i moti sono limitati, cioè per ciascun moto esiste una $c > 0$ tale che $|\boldsymbol{X}_1(t)| + |\boldsymbol{X}_2(t)| \leq c$ per ogni t.
SOLUZIONE
1. S
Le forze sono conservative di potenziale

$$U(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \frac{\gamma}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|}\,.$$

2. S
Non è globale, ma rispetta i vincoli e le altre condizioni di non singolarità.
3. N
Per esempio se le condizioni iniziali sono

$$\boldsymbol{X}_1(0) = R\boldsymbol{e}_1\,, \quad \boldsymbol{X}_2(0) = -R\boldsymbol{e}_1\,, \quad \dot{\boldsymbol{X}}_1(0) = \dot{\boldsymbol{X}}_2(0) = v_0\boldsymbol{e}_3\,,$$

il moto è

$$(\boldsymbol{X}_1(t), \boldsymbol{X}_2(t)) = (R\boldsymbol{e}_1 + v_0 t\boldsymbol{e}_3, -R\boldsymbol{e}_1 + v_0 t\boldsymbol{e}_3)\,.$$

.133 Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con attrito alla curva $\boldsymbol{\psi}(s)$; la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\tan}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante, e supponiamo $\dot{\boldsymbol{X}}(t) \neq 0$ per ogni t. Sul punto è applicata la forza $\boldsymbol{F}$. Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva, che ha curvatura mai nulla.

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
397) Se $\boldsymbol{F}(t) = 0$ allora $\mathbf{f}_{\text{vin}}(t) \neq 0$.
398) Se $\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}}(t) = 0$ allora $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
399) Se $\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}(t) \neq 0$ allora $m\ddot{s}(t) \neq \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{T}(s(t))$.
SOLUZIONE
1. S
Infatti in questo caso

$$\mathbf{f}_{\text{vin}}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) = mk(s(t))\dot{s}(t)^2 \,.$$

2. S
In questo caso anche $\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}(t) = 0$, *e si ha*

$$\boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{B}(s(t)) = -\mathbf{f}_{\text{vin}}(t) \cdot \boldsymbol{B}(s(t)) = 0 \,.$$

3. S
Infatti

$$m\ddot{s}(t) = \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{T}(s(t)) + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}(s(t)) \,, \quad \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}(s(t)) = \pm|\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}}| = \pm\mu|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}| \neq 0 \,.$$

.134 Sia $(\boldsymbol{X}, m)$ un moto vincolato alla curva mobile $\boldsymbol{\psi}(s,t)$ con vincolo liscio, soggetto a forze direttamente applicate nulle.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
400) L'energia meccanica $\mathcal{E}(t)$ è non decrescente in t.
401) L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ ha componente nulla lungo la binormale $\boldsymbol{B}(s(t),t)$ alla curva.
402) Si ha $m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
SOLUZIONE
1. N
L'andamento di $\mathcal{E}(t)$ *può essere qualunque: si pensi al caso del vincolo* $x_3 = \alpha(t)$, $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ *se* $x_1 = R$, $x_2 = 0$.
2. N
Nel caso del punto precedente $\boldsymbol{a}$ *è diretta come* $\boldsymbol{B}$.
3. S
L'ipotesi dei lavori virtuali asserisce infatti che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

.135 Un corpo rigido non degenere C è vincolato a muoversi di moto polare di polo O.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
403) Se $\boldsymbol{M}^{\text{ext}}_O = \lambda \boldsymbol{e}_1$ con $\lambda \in \boldsymbol{R}$, il moto può essere una rotazione.
404) Se $\boldsymbol{M}^{\text{ext}}_O$ è periodico in t, anche tutti i moti lo sono.
405) La prima equazione globale (o cardinale) della meccanica è sufficiente a determinare il moto di C.
SOLUZIONE
1. S
Se $\boldsymbol{e}_1$ *coincide con la direzione (solidale) di un asse principale d'inerzia in* O, *come segue subito dalle equazioni di Eulero.*

2. N
Per esempio se $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = 0$ (moti polari per inerzia) esistono moti non periodici (se l'ellissoide d'inerzia in O non ha simmetria di rotazione).
3. N
Nel caso in cui O sia il centro di massa, per esempio, la prima equazione globale dice solo $\boldsymbol{F}^{\text{ext}} = 0$. È invece la seconda equazione globale che permette di risolvere il moto.

.136 Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

ove $\alpha > 0$ è costante.
Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$ è vincolato al piano ruotante $\langle \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_3(t) \rangle$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
406) La forza di Coriolis non appare nelle equazioni di Lagrange scritte in $\mathcal{S}$.
407) Nel sistema di riferimento mobile la forza di trascinamento è conservativa.
408) Se il sistema di punti è in quiete rispetto a $\mathcal{S}$, allora non può esserlo rispetto al sistema di riferimento fisso.
Soluzione
1. S
Un noto teorema garantisce che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis si annullano in questo caso.
2. S
Infatti è data da

$$\sum_i m\alpha^2 \lambda_{1i} \boldsymbol{u}_1 \,.$$

3. N
Se i punti sono fermi sull'asse x_3 comune ai due sistemi sono in quiete in entrambi.

.137 Un parallepipedo omogeneo C è vincolato a muoversi di moto polare di polo l'origine del sistema fisso O, in cui è fissato un suo vertice, con vincolo liscio.
Sul corpo rigido agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_O)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} + \beta \boldsymbol{e}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} \,,$$

ove $\boldsymbol{e}$ è un vettore costante (nel sistema fisso), α, β sono costanti positive, e $\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$ è la misura di volume su C. Qui $\boldsymbol{x}$ sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso, e $\boldsymbol{\lambda}$ quelle nel sistema di riferimento solidale.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
409) Il moto di C è indipendente da α.

410) Il moto di C è indipendente da β.
411) La componente di $\boldsymbol{L}_O$ data da $\boldsymbol{L}_O \cdot \boldsymbol{e}$ è indipendente dal tempo.
Soluzione
1. S
Il moto è dato dalle equazioni di Eulero, dove appare solo

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \int_C \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda}) \times \beta \boldsymbol{e} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} \, .$$

2. N
Vedi il punto precedente.
3. S
Infatti, ancora per il primo punto, e per la seconda equazione globale,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{L}_O \cdot \boldsymbol{e}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{e} = \int_C \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} \times \beta \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e} = 0 \, .$$

.138 Un punto materiale è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \, ,$$

con vincolo scabro tale che

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| \leq \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \, .$$

Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{e}_3 \, ;$$

qui $\alpha > 0$, $\mu > 0$ sono costanti.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
412) Esistono infinite posizioni di equilibrio.
413) Esistono infinite posizioni non di equilibrio.
414) L'insieme delle posizioni di equilibrio è invariante per simmetrie $x_3 \mapsto -x_3$.
Soluzione
1. S
All'equilibrio $\mathbf{f}_{\text{vin}} + \boldsymbol{F} = 0$*, quindi si deve avere*

$$|\boldsymbol{F}|^2 - |\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu}|^2 \leq \mu^2 |\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu}|^2 \, .$$

Si calcola esplicitamente

$$\alpha^2 \leq (1 + \mu^2) \alpha^2 \frac{x_3^2}{R^2} \, ,$$

vale a dire l'equilibrio si ha se e solo se

$$|x_3| \geq \frac{R}{\sqrt{1 + \mu^2}} =: k < R \, .$$

2. S
Segue dallo stesso calcolo del primo punto: non si ha equilibrio nella zona $|x_3| < k$.
3. S
Infatti l'insieme delle posizioni di equilibrio è dato da $|x_3| \leq k$.

.139 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = -\beta e^{\alpha(x_1+x_2)}(\alpha x_3^2 \boldsymbol{e}_1 + \alpha x_3^2 \boldsymbol{e}_2 + 2x_3 \boldsymbol{e}_3)\,, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\,.$$

Dire se ciascuna dalle seguenti affermazioni è corretta.
415) Esistono moti illimitati.
416) Se, dato un moto $\boldsymbol{X}$, esiste una costante $c > 0$ tale che lungo il moto

$$x_1(t)^2 + x_2(t)^2 \leq c\,, \qquad \text{per ogni } t,$$

allora anche $x_3(t)$ rimane limitata durante il moto.
417) Se un moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $\boldsymbol{X}(t_1) = \boldsymbol{X}(t_3)$ e $\boldsymbol{X}(t_2) = \boldsymbol{X}(t_4)$, per $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, allora il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ sul moto in $[t_1, t_2]$ è uguale a quello fatto in $[t_3, t_4]$.
Soluzione
1. S
La forza è identicamente nulla sul piano $x_3 = 0$*, quindi esistono moti rettilinei uniformi su tale piano.*
2. S
La forza è conservativa di potenziale

$$U(\boldsymbol{x}) = -\beta x_3^2 e^{\alpha(x_1+x_2)}\,.$$

Dunque per ciascun moto esiste E *tale che*

$$\beta x_3^2 e^{\alpha(x_1+x_2)} \leq E - T \leq E\,.$$

Dunque

$$x_3^2 \leq E\beta^{-1} e^{-\alpha(x_1+x_2)} \leq E\beta^{-1} e^{\alpha\sqrt{2c}}\,,$$

perché

$$(x_1 + x_2)^2 \leq 2(x_1^2 + x_2^2) \leq 2c\,.$$

3. S
Dato che la forza è conservativa, il lavoro su $[t, \tau]$ *dipende solo dalle posizioni* $\boldsymbol{X}(t)$ *e* $\boldsymbol{X}(\tau)$.

.140 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ sono entrambi vincolati al cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,,$$

con vincolo liscio, e su $\boldsymbol{X}_i$ è applicata la forza $\boldsymbol{F}_i$

$$\boldsymbol{F}_1 = \gamma \frac{\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1}{|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^3} = -\boldsymbol{F}_2\,,$$

con $\gamma > 0$. Si assuma $\boldsymbol{X}_1 \neq \boldsymbol{X}_2$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
418) L'energia meccanica si conserva.
419) La parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + u\boldsymbol{e}_3\,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = x\boldsymbol{e}_1 + \sqrt{R^2 - x^2}\boldsymbol{e}_2 + v\boldsymbol{e}_3\,,$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $x \in (-R, R)$, $(u, v) \in \boldsymbol{R}^2$, è ammissibile.
420) Tutti i moti sono limitati, cioè per ciascun moto esiste una $c > 0$ tale che $|\boldsymbol{X}_1(t)| + |\boldsymbol{X}_2(t)| \leq c$ per ogni t.
SOLUZIONE
1. S
Le forze sono conservative di potenziale

$$U(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \frac{\gamma}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|}\,.$$

2. S
Non è globale, ma rispetta i vincoli e le altre condizioni di non singolarità.
3. N
Per esempio se le condizioni iniziali sono

$$\boldsymbol{X}_1(0) = R\boldsymbol{e}_1\,, \quad \boldsymbol{X}_2(0) = -R\boldsymbol{e}_1\,, \quad \dot{\boldsymbol{X}}_1(0) = \dot{\boldsymbol{X}}_2(0) = v_0\boldsymbol{e}_3\,,$$

il moto è

$$(\boldsymbol{X}_1(t), \boldsymbol{X}_2(t)) = (R\boldsymbol{e}_1 + v_0 t\boldsymbol{e}_3, -R\boldsymbol{e}_1 + v_0 t\boldsymbol{e}_3)\,.$$

.141 Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con attrito alla curva $\boldsymbol{\psi}(s)$; la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante, e supponiamo $\dot{\boldsymbol{X}}(t) \neq 0$ per ogni t. Sul punto è applicata la forza $\boldsymbol{F}$. Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva, che ha curvatura mai nulla.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
421) Se $\boldsymbol{F}(t) = 0$ allora $\mathbf{f}_{\text{vin}}(t) \neq 0$.
422) Se $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}(t) = 0$ allora $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
423) Se $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}(t) \neq 0$ allora $m\ddot{s}(t) \neq \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{T}(s(t))$.
SOLUZIONE
1. S
Infatti in questo caso

$$\mathbf{f}_{\text{vin}}(t) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) = mk(s(t))\dot{s}(t)^2\,.$$

2. S
In questo caso anche $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}(t) = 0$*, e si ha*

$$\boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{B}(s(t)) = -\mathbf{f}_{\text{vin}}(t) \cdot \boldsymbol{B}(s(t)) = 0\,.$$

3. S
Infatti

$$m\ddot{s}(t) = \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{T}(s(t)) + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}(s(t)) \,, \quad \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}(s(t)) = \pm |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \pm \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \neq 0 \,.$$

.142 Sia $(\boldsymbol{X}, m)$ un moto vincolato alla curva mobile $\boldsymbol{\psi}(s,t)$ con vincolo liscio, soggetto a forze direttamente applicate nulle.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
424) L'energia meccanica $\mathcal{E}(t)$ è non decrescente in t.
425) L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ ha componente nulla lungo la binormale $\boldsymbol{B}(s(t),t)$ alla curva.
426) Si ha $m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
Soluzione
1. N
L'andamento di $\mathcal{E}(t)$ può essere qualunque: si pensi al caso del vincolo $x_3 = \alpha(t)$, $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ se $x_1 = R$, $x_2 = 0$.
2. N
Nel caso del punto precedente $\boldsymbol{a}$ è diretta come $\boldsymbol{B}$.
3. S
L'ipotesi dei lavori virtuali asserisce infatti che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.

.143 Siano S_1, S_2 due superfici regolari con

$$\{\boldsymbol{x}_0\} = S_1 \cap S_2 \,,$$

tali che le normali coincidano nell'intersezione: $\boldsymbol{\nu}_1(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{\nu}_2(\boldsymbol{x}_0)$. Su ciascuna delle due superfici vale la legge di attrito statico di Coulomb-Morin

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| \leq \mu_i |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,, \qquad i = 1\,,2 \,,$$

con coefficienti rispettivamente μ_1, $\mu_2 > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
427) Sia $\mu_1 = \mu_2$; allora se una forza è ammissibile per l'equilibrio in $\boldsymbol{x}_0$ in S_1, lo è anche in S_2.
428) Se $\mu_1 > \mu_2$ il cono d'attrito relativo a S_1 è contenuto in quello relativo a S_2.
429) Se $\boldsymbol{F}$ è ammissibile per l'equilibrio sia per S_1 che per S_2 la reazione vincolare è la stessa per le due superfici.
Soluzione
1. S
Infatti in questo caso i coni d'attrito coincidono.
2. N
Vale il contrario; infatti l'apertura del cono è $\operatorname{arctg} \mu_i$.
3. S
Infatti in entrambi i casi $\mathbf{f}_{\text{vin}} = -\boldsymbol{F}$.

.144 Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

ove $\alpha > 0$ è costante.
Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$ è vincolato al piano ruotante $\langle \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_3(t) \rangle$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
430) La forza di Coriolis non appare nelle equazioni di Lagrange scritte in $\mathcal{S}$.
431) Nel sistema di riferimento mobile la forza di trascinamento è conservativa.
432) Se il sistema di punti è in quiete rispetto a $\mathcal{S}$, allora non può esserlo rispetto al sistema di riferimento fisso.
SOLUZIONE
1. S
Un noto teorema garantisce che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis si annullano in questo caso.
2. S
Infatti è data da

$$\sum_i m\alpha^2 \lambda_{1i} \boldsymbol{u}_1 \,.$$

3. N
Se i punti sono fermi sull'asse x_3 comune ai due sistemi sono in quiete in entrambi.

.145 Un elemento materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = c(x^2 + y^2) + d \,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,,$$

con c, $d > 0$ costanti. Il vincolo è scabro, con reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ tale che, indicando con $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}$ e $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}$ le sue componenti rispettivamente tangente e normale alla superficie, si abbia l'unica restrizione

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| \le \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante, almeno se l'elemento materiale ha velocità nulla.
Su P agisce la forza costante $b\boldsymbol{e}_3$, con $b > 0$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
433) L'insieme delle coordinate (x, y) in cui è possibile l'equilibrio dipende da d.
434) Per c e d fissati, esiste $R > 0$ tale che se $x^2 + y^2 < R^2$ non si ha equilibrio.
435) L'insieme delle posizioni in cui si ha equilibrio cambia se la forza diviene $b\boldsymbol{e}_1$, ossia cambia direzione.
SOLUZIONE

1. N
Si ha equilibrio se la componente tangente della forza costante è equilibrata da quella della reazione vincolare, ossia se

$$|b^2(1-(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{\nu})^2)| = |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\tan}|^2 \le \mu^2|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|^2 = \mu^2|b\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{\nu}|^2\,.$$

Poiché la normale $\boldsymbol{\nu}$ *è data da*

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{(2cx,2cy,-1)}{\sqrt{1+4c^2x^2+4c^2y^2}}\,,$$

si ha equilibrio se e solo se

$$x^2+y^2 \le \frac{\mu^2}{c^2}\,.$$

2. N
Vedi il punto precedente.
3. S
Cambia, perché per esempio il vertice del paraboloide non è mai di equilibrio.

.146 Un punto materiale P di massa m si muove soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = -k(e^{yz}\boldsymbol{e}_1 + xze^{yz}\boldsymbol{e}_2 + xye^{yz}\boldsymbol{e}_3)\,, \qquad (x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3\,,$$

ove $k>0$ è costante.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
436) Il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ su un moto che compie una traiettoria non chiusa non è nullo.
437) Esistono moti che rimangono sull'asse x.
438) Esistono soluzioni costanti del sistema del moto.
Soluzione
1. N
La forza è conservativa con potenziale

$$U(x,y,z) = -kxe^{yz}\,, \qquad (x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3\,,$$

e quindi se per esempio la curva ha estremi su $x=0$ *il lavoro è nullo.*
2. S
Infatti la forza, ristretta all'asse x*, è diretta lungo tale asse, e quindi con le opportune condizioni iniziali il moto rimane sull'asse* x*.*
3. N
Questo equivale a dire che esistono punti di equilibrio, ovvero punti ove la forza si annulla, il che è impossibile, perché la prima componente di $\boldsymbol{F}$ *è sempre diversa da* 0.

.147 Due punti materiali P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 sono così vincolati:
P_1 appartiene alla circonferenza di centro l'origine O e raggio R nel piano $z=0$.
P_2 appartiene alla circonferenza di centro P_1 e raggio R nel piano $z=0$.

Su P_2 agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP_2}\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano le coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ come segue:

$$\overrightarrow{OP_1} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{P_1P_2} = R\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{e}_2\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
439) L'energia cinetica del sistema si annulla solo se il moto è la quiete.
440) Non ci sono posizioni di equilibrio stabile.
441) La reazione vincolare esercitata dai vincoli su P_2 è parallela a $\overrightarrow{OP_2}$.
SOLUZIONE
1. S
L'energia cinetica lagrangiana, nei sistemi a vincoli fissi come il presente, è una forma quadratica definita positiva nelle $\dot\varphi$, $\dot\theta$ e quindi non si annulla se non quando $(\dot\varphi, \dot\theta) = (0,0)$.
2. S
Il potenziale lagrangiano vale

$$U^{\text{L}}(\varphi, \theta) = -\frac{k}{2}|\overrightarrow{OP_2}|^2 = -kR^2[1 + \cos(\varphi - \theta)]\,,$$

che non ha quindi posizioni di massimo isolato.
3. N
Per l'ipotesi dei lavori virtuali si ha

$$0 = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{f}_{\text{vin}\,P_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\text{L}}}{\partial\theta} = \mathbf{f}_{\text{vin}\,P_2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_2^{\text{L}}}{\partial\theta} = R\mathbf{f}_{\text{vin}\,P_2} \cdot (-\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_2)\,.$$

.148 Una sfera solida di massa m e raggio R è vincolato a muoversi di moto polare con polo in un punto solidale A della sua frontiera, che occupa l'origine O del sistema di riferimento fisso. Siano B il punto opposto a A del diametro per A, e G il centro della sfera.
Sulla sfera sono applicate le forze, nei punti indicati,

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha\cos(\gamma t)\boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{F}_G = \beta\sin(\gamma t)\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \times \boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale ortogonale al diametro $\overrightarrow{AB}$, e α, β, γ costanti positive.
La sfera parte da ferma.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
442) Esiste una costante $C > 0$ tale che

$$T(t) \le C\,, \qquad \text{per ogni } t \ge 0.$$

443) Il moto è polare per inerzia.
444) Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_A$ rimane costante durante il moto.
Soluzione
1. S
Scriviamo il sistema delle equazioni di Eulero; scegliamo il sistema di riferimento solidale con origine in A e terna

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\,.$$

Allora si vede subito che

$$\boldsymbol{M}_A^{\text{ext}} = 2R\boldsymbol{u}_3 \times \alpha\cos(\gamma t)\boldsymbol{u}_1 + R\boldsymbol{u}_3 \times \beta\sin(\gamma t)\boldsymbol{u}_2 = 2R\alpha\cos(\gamma t)\boldsymbol{u}_2 - R\beta\sin(\gamma t)\boldsymbol{u}_1\,.$$

Quindi tenendo conto del teorema di Huygens, le equazioni di Eulero in A sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot\omega_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - R\beta\sin(\gamma t)\,,\\ I_{11}\dot\omega_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + 2R\alpha\cos(\gamma t)\,,\\ I_{33}\dot\omega_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Dunque $\omega_3(t) = 0$ per ogni t e

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{R}{\gamma I_{11}}\beta(1 - \cos(\gamma t))\boldsymbol{u}_1 + \frac{2R}{\gamma I_{11}}\alpha\sin(\gamma t)\boldsymbol{u}_2\,.$$

Perciò $\boldsymbol{\omega}$ si mantiene sempre limitato e $T = \boldsymbol{\sigma\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}/2$ anche.
2. N
Per il calcolo al punto precedente, il momento delle forze esterne non è nullo.
3. N
Il momento delle quantità di moto ha derivata pari al momento delle forze esterne, che non è nullo.

.149 Si consideri la seguente energia cinetica in forma lagrangiana, relativa a un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi regolari, con 2 gradi di libertà e $(\varphi, \theta) \in \boldsymbol{R}^2$ coordinate lagrangiane:

$$T^{\text{L}} = a(\varphi,\theta)\dot\varphi^2 + b(\varphi,\theta)\dot\varphi\dot\theta + c(\varphi,\theta)\dot\theta^2 + f(\varphi,\theta)\dot\theta + g(\varphi,\theta)\,,$$

con a, b, c, f, g funzioni non identicamente nulle.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
445) I vincoli devono essere mobili.
446) Le funzioni a, b, c possono essere funzioni positive arbitrarie che devono soddisfare solo la condizione di essere positive.
447) Le funzioni a, b, c dipendono dalla densità di tutti i corpi rigidi.
Soluzione
1. S
Se i vincoli sono fissi l'energia cinetica in forma lagrangiana è una forma quadratica nelle $\dot\varphi$, $\dot\theta$ e quindi si dovrebbe avere f e g identicamente nulle contro le ipotesi.
2. N
Devono soddisfare

$$4ac - b^2 > 0\,,$$

Quella indicata è condizione necessaria perché la forma quadratica dell'energia cinetica sia definita positiva, il che è richiesto dalla teoria.
3. S
Per definizione sono date da integrali che contengono la densità.

.150 Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ si muove rispetto al sistema fisso di rotazione uniforme (che non si riduce alla quiete).
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
448) Esistono moti solidali a $\mathcal{S}$ sui quali la forza di Coriolis non si annulla identicamente.
449) Esistono moti solidali a $\mathcal{S}$ che hanno accelerazione nulla nel sistema di riferimento fisso.
450) La forza di trascinamento è posizionale sia in $\mathcal{S}$ che nel sistema di riferimento fisso.
Soluzione
1. N
Si ha $\boldsymbol{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = 0$ *se il moto è solidale e quindi* $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = 0$.
2. S
Si ha per il teorema di Coriolis nel caso di interesse

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O)) \,,$$

che si annulla se il moto solidale appartiene all'asse di rotazione.
3. S
Nel caso in oggetto la forza di trascinamento è data da

$$\boldsymbol{F}_T = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O)) \,,$$

con $\boldsymbol{\omega}$ *e* $\boldsymbol{X}_O$ *vettori costanti in entrambi i sistemi di riferimento. Quindi è posizionale in entrambi i sistemi di riferimento.*

.151 Un punto materiale P di massa m si muove in $\boldsymbol{R}^3$ soggetto a una forza $\boldsymbol{F}$ con potenziale $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$; cioè $\boldsymbol{F} = \nabla U$.
Si sa che tutti i moti sono limitati (ossia ciascun moto rimane all'interno di un'opportuna sfera di centro l'origine).
Dire se ciascuna delle seguenti forme di U è ammissibile.
451) $U(x, y, z) = e^{x^2yz}$.
452)

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x^2 + y^2 + z^2)} \,.$$

453) $U(x, y, z) = -(x^4 + y^2 + z^2)$.
Soluzione
1. N
Si ha $\boldsymbol{F} = \nabla U = e^{x^2yz}(2xyz, xz, xy) = (0,0,0)$ *per esempio sull'asse* x. *Quindi sull'asse* x *sono possibili moti rettilinei uniformi che non sono limitati.*
2. N
Si ha su un moto fissato

$$-U \leq T - U = E \,,$$

per una costante $E > 0$ opportuna. Ma $-U(\boldsymbol{x}) \to -\infty$ se $|\boldsymbol{x}| \to +\infty$, quindi questa disuguaglianza non prova niente.
3. S
Si ha su un moto fissato

$$-U \leq T - U = E\,,$$

per una costante $E > 0$ opportuna. Questo implica

$$x^4 + y^2 + z^2 \leq E\,,$$

che dà la limitazione cercata.

.152 Un sistema rigido si muove di moto polare di polo O.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta.
454) Se il momento totale delle forze direttamente applicate, rispetto a O, non è nullo, allora il momento delle quantità di moto non si conserva.
455) Se il momento totale delle forze direttamente applicate, rispetto a O, è nullo, allora il moto è necessariamente rotatorio.
456) Se l'unica forza direttamente applicata è il peso e il centro di massa del corpo coincide con O, allora l'energia cinetica si conserva.
SOLUZIONE
1. S
Infatti

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}\,.$$

2. N
Si tratta di un moto polare per inerzia, che in assenza di altre ipotesi sulla geometria del corpo non è necessariamente una rotazione.
3. S
Si tratta di un teorema noto sui moti polari per inerzia, caso in cui ci troviamo per l'ipotesi fatta.

Prova scritta del 11/01/2021 I

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 11/01/2021 I

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0\,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Inoltre il centro G di AB deve avere quota $x_{3G} = 0$. Sull'asta agisce la forza (applicata in B)

$$\boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{X}_B\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(r, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che se

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

allora

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L(\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{u}_3)\,,\quad \boldsymbol{X}_G = r\boldsymbol{u}_1\,.$$

Sotto $\boldsymbol{X}_O$ denota l'origine del sistema di riferimento fisso, che ha coordinate (x_h).
01 Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze apparenti sono conservative nel senso lagrangiano e quindi esiste il loro potenziale lagrangiano U^{L}_{app}.
a Sì, e il potenziale è dato da

$$U^{\text{L}}_{app}(r,\varphi) = \frac{m}{2}\alpha^2\Big(r^2 + \frac{L^2}{3}\cos^2\varphi\Big)\,.$$

b No, le forze apparenti non sono conservative in senso lagrangiano.
c Nessuna delle precedenti.
02 Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze direttamente applicate ammettono potenziale lagrangiano.
a Sì ed esso vale

$$U^{\text{L}}_{da} = -\frac{k}{2}(r^2 + L^2 + 2rL\cos\varphi)\,.$$

b Sì ed esso vale

$$U^{\text{L}}_{da} = -\frac{k}{2}(r^2 + L^2 + 2rL\sin\varphi)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
03 Esistono posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $r = 0$.
a Sì e sono sempre stabili.
b Sì e sono instabili per una opportuna scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
A: 1
È noto dalla teoria che la forza di Coriolis in questo caso ha componenti lagrangiane nulle. La forza di trascinamento ha distribuzione sull'asta

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{tr} = \frac{m\alpha^2}{2L}\lambda_1\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}s\,,\ \textit{con potenziale}\ \mathrm{d}U_{tr} = \frac{m\alpha^2}{4L}\lambda_1^2\,\mathrm{d}s\,,$$

che conduce al potenziale

$$U_{tr}^{\text{L}} = \int\limits_{AB} \mathrm{d}U_{tr} = \int\limits_{-L}^{L} \frac{m\alpha^2}{4L}(r + s\cos\varphi)^2 \,\mathrm{d}s$$

che ha il valore dato sopra.
B: 1
Si ha

$$U_{da}(\boldsymbol{\lambda}_B) = -\frac{k}{2}(\lambda_{1B}^2 + \lambda_{3B}^2)\,,$$

per cui

$$U_{da}^{\text{L}} = -\frac{k}{2}[(r + L\cos\varphi)^2 + (L\sin\varphi)^2] = -\frac{k}{2}[r^2 + 2rL\cos\varphi + L^2]\,.$$

C: 2
Il potenziale totale è

$$U^{\text{L}} = \frac{1}{2}(m\alpha^2 - k)r^2 - kLr\cos\varphi + \frac{m\alpha^2}{6}L^2\cos^2\varphi\,,$$

da cui il sistema dell'equilibrio

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial r} &= (m\alpha^2 - k)r - kL\cos\varphi = 0\,,\\ \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} &= -\frac{m\alpha^2}{6}L^2\sin 2\varphi + kLr\sin\varphi = 0\,,\end{aligned}$$

che dà per $r = 0$ che $\varphi = \pm\pi/2$, e l'hessiana

$$D^2U^{\text{L}}\Big(0, \pm\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} m\alpha^2 - k & \pm kL \\ \pm kL & \frac{m\alpha^2}{3}L^2 \end{pmatrix},$$

che è definita positiva per k piccolo.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove R, $h > 0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea.
Il vincolo è scabro.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \gamma x_1 \boldsymbol{T} + \delta \boldsymbol{B}\,,$$

con γ, $\delta > 0$ costanti. Qui (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca dell'elica, che viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3\,,\\ \boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{B}(s) &= \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

e la curvatura $k(s) = R\alpha^2$.
04 Si supponga $\dot{s} \neq 0$ e che la reazione vincolare soddisfi

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Allora l'equazione di moto è:
a

$$m\ddot{s} = \gamma R \cos(\alpha s) - \mu \,\text{sign}(\dot{s}) \sqrt{\dot{s}^4 m^2 k^2 + \delta^2} \,.$$

b

$$m\ddot{s} = \gamma R \cos(\alpha s) - \mu\delta \,\text{sign}(\dot{s}) \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
05 Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$, e che la reazione vincolare soddisfi all'equilibrio

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| \leq \mu_s |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Allora il punto materiale resta in equilibrio.
a Sì, ma solo se $0 < h \leq h_0$ con $h_0 > 0$ opportuno.
b Sì, ma solo se $\mu_s \geq \mu^0$ con $\mu^0 > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
06 Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0 > 0$, e che la reazione vincolare soddisfi, se $\dot{s} \neq 0$,

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Dire quale delle seguenti proprietà soddisfa $s(t)$.
a Se $\mu\delta > \gamma R$, vale $\dot{s}(t) \to 0$ per $t \to t_0-$, con $t_0 < +\infty$.
b Vale in ogni caso $\dot{s}(t) > 0$ per ogni $t \in (0, +\infty)$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
A: 1
Il sistema di moto dà

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \gamma R \cos(\alpha s) - \mu \,\text{sign}(\dot{s}) |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,, \\ m\dot{s}^2 k &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} \,, \\ 0 &= \delta + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} \,, \end{aligned}$$

da cui subito la 1.
B: 2
La componente tangente della forza direttamente applicata è $|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}| = \gamma R$. *Questa, perché si abbia equilibrio, non deve superare il massimo della componente tangente della reazione vincolare; la reazione all'equilibrio è data da*

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = -\boldsymbol{F} \,, \quad \textit{per cui} \quad \mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}} = -\delta \boldsymbol{B} \,.$$

Perciò la condizione è

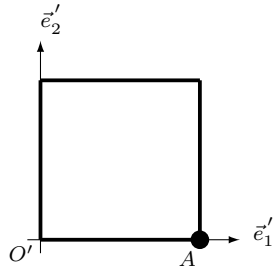
$$\mu_s |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| = \mu_s \delta \geq \gamma R \,.$$

C: 1
Infatti dalla prima equazione di moto

$$m\ddot{s} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T} - \mu|\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| \leq \gamma R - \mu\delta < 0\,,$$

nell'ipotesi fatta nella risposta.

I.3 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando l'elemento A di massa M a una lamina rigida omogenea di forma quadrata di massa M e lato $2L$. In figura è rappresentato il corpo assieme al riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i'\}$. Si nota che $\overrightarrow{O'A} = 2L\vec{e}_1'$.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo O' sull'asse fisso 1 e l'asse 3 solidale costantemente parallelo all'omologo asse fisso 3.
Come coordinate lagrangiane si possono usare la coordinata cartesiana 1 di O' e l'anomalia φ individuata dall'asse fisso 1 e dall'asse solidale 1 orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.

07 Quanto valgono le coordinate del centro di massa del corpo rispetto al riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i'\}$?
a $\left(\frac{3}{2}L, \frac{1}{2}L, 0\right)$.
b $\left(\frac{3}{2}L, \frac{3}{2}L, 0\right)$.
c Nessuna delle precedenti.

08 Quanto valgono i momenti principali d'inerzia del corpo rispetto a O'?
a $\frac{1}{3}(10-3\sqrt{5})ML^2$, $\frac{1}{3}(10+3\sqrt{5})ML^2$, $\frac{20}{3}ML^2$.
b $\frac{1}{3}(12-3\sqrt{5})ML^2$, $\frac{1}{3}(12+3\sqrt{5})ML^2$, $\frac{20}{3}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.

09 Quanto vale il momento angolare del corpo calcolato usando come polo di riduzione il centro di massa?
a $\frac{35}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
b $\frac{34}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.

Soluzione
A: 1
Si usa la proprietà additiva a partire dalle coordinate $(L, L, 0)$ *del centro di massa della lamina e dalla coordinate* $(2L, 0, 0)$ *di* A.
B: 1
Si calcola prima la matrice d'inerzia rispetto al riferimento in figura

$$I'_{O'} = \{\{4ML^2/3, -ML^2, 0\}, \{-ML^2, 16ML^2/3, 0\}, \{0, 0, 20ML^2/3\}, \}$$

e poi si risolve l'equazione secolare $\det(I'_{O'} - \lambda\mathbb{I}) = 0$.
C: 3
Il moto rispetto al riferimento del centro di massa è rotatorio e i prodotti di inerzia $I'_{G,13}$ *e* $I'_{G,23}$ *sono nulli, allora il momento angolare si può scrivere come* $I'_{G',33}\dot{\varphi}\vec{e}'_3$.
Per il calcolo del momento di inerzia si può usare il teorema di Huygens e scrivere $I'_{G',33} = I'_{O',33} - 2M\|\overrightarrow{O'G}\|^2 = 5ML^2/3$.

I.4 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, …, $(\boldsymbol{X}_n, m_n)$ è soggetto ai vincoli olonomi

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,,$$

con $\boldsymbol{f} \in C^3(\boldsymbol{R}^{3n+1})$, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m$, $1 \le m < 3n$; qui denotiamo

$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n) = (z_1, \dots, z_{3n}) \in \boldsymbol{R}^{3n}\,.$$

Si supponga che il vincolo sia olonomo regolare.
10 Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ dipende dalla scelta delle coordinate lagrangiane.
a Sì in genere, ma non se queste sono scelte come le coordinate indipendenti date dal teorema del Dini.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
11 Supponiamo che $n = 6$ e che, scelta la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t) = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_1(\boldsymbol{q}, t), \dots, \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_6(\boldsymbol{q}, t))\,,$$

si sappia che per ogni $h = 1, \dots, \ell$, vale

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_i}{\partial q_h} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^{i+1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{i+1}}{\partial q_h} = 0\,,$$

$i = 1, 3, 5$. Vale allora l'ipotesi dei lavori virtuali?
a Sicuramente no.
b Sicuramente sì.
c Nessuna delle precedenti.
12 Supponiamo che i vincoli siano fissi, ossia che $\boldsymbol{f}$ non dipenda esplicitamente da t.
Sia scelta una parametrizzazione lagrangiana $\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}} : Q \to \boldsymbol{R}^{n_c}$. Sia $\boldsymbol{q} : \boldsymbol{R} \to Q$ un moto lagrangiano.
a Lo spazio normale $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ ove $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}(t))$ è di fatto indipendente dal tempo t.
b Se $\boldsymbol{q}(t_1) \neq \boldsymbol{q}(t_2)$, e $\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}(t_i))$, $i = 1, 2$, allora certamente $N_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} \neq N_{\boldsymbol{z}_2,t_2}\boldsymbol{f}$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
A: 2
Infatti $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ *è l'ortogonale di* $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ *che è indipendente dalla scelta delle coordinate lagrangiane perché è generato dai gradienti dei vincoli (scalari).*

B: 2
Infatti la sommatoria che definisce la ILV, ossia

$$\sum_{i=1}^{6} \mathbf{f}_{\text{vin}}{}^{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\text{L}}}{\partial q_h} = 0\,, \qquad h = 1\,, \dots\,, \ell\,,$$

si spezza nella somma di 3 *addendi nulli.*
C: 3
Naturalmente lo spazio normale può dipendere da t *al variare della configurazione, ma può anche esserne indipendente (si pensi al vincolo costituito da un piano in* $\boldsymbol{R}^3$ *per un singolo punto).*

I.5 Si consideri un moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,.$$

Indichiamo con (x, p) le coordinate nel relativo piano delle fasi, ossia $p = \dot{x}$. Si noti che per il momento non facciamo ipotesi sulla regolarità di f.
Indichiamo l'energia meccanica con

$$W(x,p) = \frac{m}{2}p^2 - U(x)\,, \qquad \text{ove} \quad U'(x) = f(x)\,.$$

13 Sia $f \in C(R)$; allora il problema di Cauchy

$$m\ddot{x} = f(x)\,, \qquad x(0) = x_0\,, \quad \dot{x}(0) = v_0\,,$$

con x_0, $v_0 \in \boldsymbol{R}$ ha soluzione massimale e questa è unica.
a Esistono casi in cui le soluzioni non sono uniche, ma sono definite su tutto $\boldsymbol{R}$.
b È sicuramente unica solo se $x_0 \neq 0$.
c Nessuna delle precedenti.
14 Sia $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Consideriamo due moti x_1, $x_2 \in C^2(\boldsymbol{R})$ entrambi soluzioni dell'equazione di moto. Dire in quali ipotesi i due moti hanno la stessa orbita nel piano delle fasi.
a Se hanno lo stesso livello energetico, ossia se

$$W(x_1, \dot{x}_1) = W(x_2, \dot{x}_2)\,.$$

b Se esiste un istante $\bar{t}$ tale che

$$x_1(0) = x_2(\bar{t})\,, \qquad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(\bar{t})\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
15 Sia $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Assumiamo che

$$U(x) > U(-L) = U(L)\,, \qquad -L < x < L\,,$$

per un dato $L > 0$.

a Esiste almeno un punto di equilibrio stabile in $(-L, L)$.
b Esiste un unico punto di equilibrio in $(-L, L)$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
A: 1
L'unicità richiede la locale lipschitzianità di f che non è garantita dalla semplice continuità. Un caso come quello nella risposta si ha se $f(x) = x^{1/3}$.
B: 2
In questo caso infatti i moti sono semplicemente l'uno traslato temporale dell'altro, perché il sistema è autonomo.
C: 3
Infatti in $(-L, L)$ la U può avere infiniti punti critici, e tuttavia può darsi che nessuno di essi sia un massimo isolato.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando la base di un cono omogeneo circolare retto a una delle due basi di un cilindro omogeneo circolare retto in modo che l'asse di simmetria del cono e quello del cilindro siano coincidenti. Il cilindro e il cono hanno stessa massa, stesso raggio di base e stessa altezza. Il corpo si muove di moto sferico e il vincolo è stato realizzato mediante un giunto ideale. La sola sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso.
16 Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del corpo, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?
a La componente della velocità angolare relativa all'asse verticale passante per il centro di massa del corpo.
b La componente della velocità angolare relativa all'asse di simmetria del corpo.
c Nessuna delle precedenti.
17 Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del corpo, che moto esibisce il corpo se l'atto di moto iniziale è nullo e nella configurazione iniziale l'asse di simmetria del corpo forma un angolo di ampiezza $\pi/3$ con la retta verticale passante per il centro di massa del corpo?
a Un moto rotatorio attorno a un asse orizzontale passante per il centro di massa.
b Un moto rotatorio attorno all'asse verticale passante per il centro di massa.
c Nessuna delle precedenti.
18 Supponendo che il polo del moto sia il vertice del cono, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?
a L'energia cinetica.
b L'energia meccanica totale.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
A: 2
Segue dalle equazioni di Eulero, perché il moto è alla Poinsot e il corpo è un giroscopio.

B: 3
Il moto è la quiete, perché il momento totale della sollecitazione attiva e vincolare calcolato rispetto al centro di massa è nullo.
C: 2
Il moto è quello della trottola.

Prova scritta del 11/01/2021 II

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 11/01/2021 II

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza L e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1 \sin(\beta t) + x_2 \cos(\beta t) = 0\,,$$

ove $\beta > 0$ è costante. Inoltre il centro G di AB deve avere quota $x_{3G} = 0$. Sull'asta agisce la forza (applicata in G)

$$\boldsymbol{F}_G = -k|\boldsymbol{X}_G|^2 \boldsymbol{X}_G\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(r, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che se

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

allora

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = L(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_3)\,, \quad \boldsymbol{X}_G = r\boldsymbol{u}_1\,.$$

Sotto $\boldsymbol{X}_O$ denota l'origine del sistema di riferimento fisso, che ha coordinate (x_h).
01 Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze apparenti sono conservative nel senso lagrangiano e quindi esiste il loro potenziale lagrangiano U^{L}_{app}.
a Sì, e il potenziale è dato da

$$U^{\text{L}}_{app}(r, \varphi) = \frac{m}{2}\beta^2\Big(r^2 + \frac{L^2}{12}\cos^2\varphi\Big)\,.$$

b No, le forze apparenti non sono conservative in senso lagrangiano.
c Nessuna delle precedenti.

02 Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze direttamente applicate ammettono potenziale lagrangiano.
a Sì ed esso vale

$$U^{\text{L}}_{da} = -\frac{k}{4}(r^4 + L^2 r^2 \cos^4\varphi)\,.$$

b Sì ed esso vale

$$U^{\text{L}}_{da} = -\frac{k}{4} r^4\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
03 Esistono posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $r = 0$.
a Sì e sono sempre instabili.
b Sì e sono stabili per una opportuna scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
A: 1
È noto dalla teoria che la forza di Coriolis in questo caso ha componenti lagrangiane nulle. La forza di trascinamento ha distribuzione sull'asta

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{tr} = \frac{m\beta^2}{L}\lambda_1 \boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}s\,,\ \textit{con potenziale}\ \mathrm{d}U_{tr} = \frac{m\beta^2}{2L}\lambda_1^2\,\mathrm{d}s\,,$$

che conduce al potenziale

$$U^{\text{L}}_{tr} = \int_{AB} \mathrm{d}U_{tr} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{m\beta^2}{2L}(r + s\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}s$$

che ha il valore dato sopra.
B: 2
Si ha infatti

$$U_{da}(\boldsymbol{\lambda}_G) = -\frac{k}{4}(\lambda_{1G}^2 + \lambda_{3G}^2)^2\,.$$

C: 1
Il potenziale totale è

$$U^{\text{L}} = \frac{1}{2}m\beta^2 r^2 - \frac{k}{4}r^4 + \frac{m\beta^2}{24}L^2\cos^2\varphi\,,$$

da cui il sistema dell'equilibrio

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial r} = m\beta^2 r - kr^3 = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} = -\frac{m\beta^2}{24}L^2\sin 2\varphi = 0\,,$$

che dà per $r = 0$ che $\varphi \in \{-\pi/2{,}0, \pi/2\}$, e l'hessiana

$$D^2U^{\text{L}}(0,\varphi) = \begin{pmatrix} m\beta^2 & 0 \\ 0 & -\frac{m\beta^2}{12}L^2\cos 2\varphi \end{pmatrix}\,,$$

che è indefinita o definita positiva per i φ trovati.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove R, $h > 0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea. Il vincolo è scabro.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \gamma x_2 \boldsymbol{T} - \delta \boldsymbol{N}\,,$$

con γ, $\delta > 0$ costanti. Qui (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca dell'elica, che viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{B}(s) &= \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e la curvatura $k(s) = R\alpha^2$.
04 Si supponga $\dot{s} \neq 0$ e che la reazione vincolare soddisfi

$$|\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}}| = \mu|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Allora l'equazione di moto è:
a

$$m\ddot{s} = \gamma R\sin(\alpha s) - \mu\,\text{sign}(\dot{s})(\dot{s}^2 mk + \delta)\,.$$

b

$$m\ddot{s} = \gamma R\sin(\alpha s) - \mu\delta\,\text{sign}(\dot{s})\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
05 Si supponga che $s(0) = \pi/(2\alpha)$, $\dot{s}(0) = 0$, e che la reazione vincolare soddisfi all'equilibrio

$$|\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}}| \leq \mu_s|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|\,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Allora il punto materiale resta in equilibrio.
a Sì, ma solo se $R \geq R_0$ con $R_0 > 0$ opportuno.
b Sì, ma solo se $\mu_s \geq \mu^0$ con $\mu^0 > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
06 Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0 < 0$, e che la reazione vincolare soddisfi, se $\dot{s} \neq 0$,

$$|\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}}| = \mu|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Dire quale delle seguenti proprietà soddisfa $s(t)$.
a Se $\mu\delta > \gamma R$, vale $\dot{s}(t) \to 0$ per $t \to t_0-$, con $t_0 < +\infty$.
b Vale in ogni caso $\dot{s}(t) < 0$ per ogni $t \in (0, +\infty)$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione

A: 1
Il sistema di moto dà

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \gamma R \sin(\alpha s) - \mu \operatorname{sign}(\dot{s}) |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,, \\ m\dot{s}^2 k &= -\delta + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} \,, \\ 0 &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} \,, \end{aligned}$$

da cui subito la 1.
B: 2
La componente tangente della forza direttamente applicata è $|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}| = \gamma R$. *Questa, perché si abbia equilibrio, non deve superare il massimo della componente tangente della reazione vincolare; la reazione all'equilibrio è data da*

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = -\boldsymbol{F} \,, \quad \textit{per cui} \quad \mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}} = \delta \boldsymbol{N} \,.$$

Perciò la condizione è

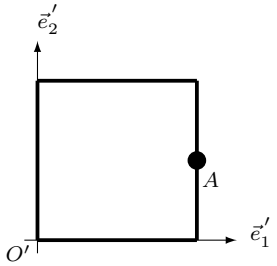
$$\mu_s |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| = \mu_s \delta \geq \gamma R \,.$$

C: 1
Infatti dalla prima equazione di moto (finché $\dot{s} < 0$*)*

$$m\ddot{s} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} + \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \geq -\gamma R + \mu \delta > 0 \,,$$

nell'ipotesi fatta nella risposta.

I.3 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando l'elemento A di massa M a una lamina rigida omogenea di forma quadrata di massa M e lato $2L$. In figura è rappresentato il corpo assieme al riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i'\}$. Si nota che $\overrightarrow{O'A} = 2L\vec{e}_1' + L\vec{e}_2'$.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo O' sull'asse fisso 1 e l'asse 3 solidale costantemente parallelo all'omologo asse fisso 3.
Come coordinate lagrangiane si possono usare la coordinata cartesiana 1 di O' e l'anomalia φ individuata dall'asse fisso 1 e dall'asse solidale 1 orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.
07 Quanto valgono le coordinate del centro di massa del corpo rispetto al riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i'\}$?
a $\left(\frac{3}{2}L, \frac{1}{2}L, 0\right)$.
b $\left(\frac{3}{2}L, L, 0\right)$.
c Nessuna delle precedenti.

08 Quanto valgono i momenti principali d'inerzia del corpo rispetto a O'?
a $\frac{1}{3}(10-3\sqrt{5})ML^2$, $\frac{1}{3}(10+3\sqrt{5})ML^2$, $\frac{23}{3}ML^2$.
b $\frac{1}{6}(23-9\sqrt{5})ML^2$, $\frac{1}{6}(23+9\sqrt{5})ML^2$, $\frac{23}{3}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Quanto vale il momento angolare del corpo calcolato usando come polo di riduzione il centro di massa?
a $\frac{7}{6}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
b $\frac{79}{6}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
A: 2
Si usa la proprietà additiva a partire dalle coordinate $(L, L, 0)$ *del centro di massa della lamina e dalla coordinate* $(2L, L, 0)$ *di A.*
B: 2
Si calcola prima la matrice d'inerzia rispetto al riferimento in figura

$$I'_{O'} = \{\{7ML^2/3, -3ML^2, 0\}, \{-3ML^2, 16ML^2/3, 0\}, \{0, 0, 23ML^2/3\}, \}$$

e poi si risolve l'equazione secolare $\det(I'_{O'} - \lambda\mathbb{I}) = 0$.
C: 1
Il moto rispetto al riferimento del centro di massa è rotatorio e i prodotti di inerzia $I'_{G,13}$ *e* $I'_{G,23}$ *sono nulli, allora il momento angolare si può scrivere come* $I'_{G',33}\dot{\varphi}\vec{e}'_3$. *Per il calcolo del momento di inerzia si può usare il teorema di Huygens e scrivere* $I'_{G',33} = I'_{O',33} - 2M\|\overrightarrow{O'G}\|^2 = 7ML^2/6$.

I.4 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, …, $(\boldsymbol{X}_n, m_n)$ è soggetto ai vincoli olonomi

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,,$$

con $\boldsymbol{f} \in C^3(\boldsymbol{R}^{3n+1})$, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m$, $1 \le m < 3n$; qui denotiamo

$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n) = (z_1, \ldots, z_{3n}) \in \boldsymbol{R}^{3n}\,.$$

Si supponga che il vincolo sia olonomo regolare.
10 Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ coincide con quello degli spostamenti effettivi.
a Sì se $\ell = 1$.
b Sì se $\boldsymbol{f}$ non dipende da t.
c Nessuna delle precedenti.
11 Supponiamo che $n = 6$ e che, scelta la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t) = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_1(\boldsymbol{q}, t), \ldots, \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_6(\boldsymbol{q}, t))\,,$$

si sappia che per ogni $h = 1, \ldots, \ell$, vale

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_i}{\partial q_h} = \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^{i+1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{i+1}}{\partial q_h}\,,$$

$i = 1, 3, 5$. Vale allora l'ipotesi dei lavori virtuali?
a Sicuramente no.
b Sicuramente sì.
c Nessuna delle precedenti.

12 Supponiamo che i vincoli siano fissi, ossia che $\boldsymbol{f}$ non dipenda esplicitamente da t.
Sia scelta una parametrizzazione lagrangiana $\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}} : Q \to \boldsymbol{R}^{n_c}$. Sia $\boldsymbol{q} : \boldsymbol{R} \to Q$ un moto lagrangiano.
a Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ ove $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}(t))$ è di fatto indipendente dal tempo t.
b Se $\boldsymbol{q}(t_1) \neq \boldsymbol{q}(t_2)$, e $\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}(t_i))$, $i = 1, 2$, allora certamente $V_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} \neq V_{\boldsymbol{z}_2,t_2}\boldsymbol{f}$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
A: 2
Infatti i due spazi coincidono se i vincoli sono fissi.
B: 3
Infatti per la sommatoria che definisce la ILV vale

$$\sum_{i=1}^{6} {\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} = 2\sum_{j=1}^{3} {\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^{2j-1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_{2j-1}^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}\,, \qquad h = 1\,, \dots\,, \ell\,,$$

ma non sappiamo quanto valga l'ultima sommatoria.
C: 3
Naturalmente lo spazio tangente (o degli spostamenti virtuali) può dipendere da t al variare della configurazione, ma può anche esserne indipendente (si pensi al vincolo costituito da un piano in $\boldsymbol{R}^3$ per un singolo punto).

I.5 Si consideri un moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Indichiamo con (x, p) le coordinate nel relativo piano delle fasi, ossia $p = \dot{x}$.
Indichiamo l'energia meccanica con

$$W(x,p) = \frac{m}{2}p^2 - U(x)\,, \qquad \text{ove} \quad U'(x) = f(x)\,.$$

13 Il problema di Cauchy

$$m\ddot{x} = f(x)\,, \qquad x(0) = x_0\,, \quad \dot{x}(0) = v_0\,,$$

con x_0, $v_0 \in \boldsymbol{R}$ ha soluzione massimale e questa è unica. Quale dei seguenti intervalli può esserne l'intervallo di definizione?
a $[-1, +\infty)$.
b $(-1,1)$.

c Nessuna delle precedenti.

14 Consideriamo due moti x_1, $x_2 \in C^2(\boldsymbol{R})$ entrambi soluzioni dell'equazione di moto. Dire in quali ipotesi i due moti hanno la stessa orbita nel piano delle fasi.

a Se hanno lo stesso livello energetico in un certo istante, ossia se per $\bar{t}$ opportuno

$$W(x_1(\bar{t}), \dot{x}_1(\bar{t})) = W(x_2(\bar{t}), \dot{x}_2(\bar{t}))\,.$$

b Se le due orbite hanno un punto in comune.

c Nessuna delle precedenti.

15 Assumiamo che

$$U(x) > U(-L) = U(L)\,, \qquad -L < x < L\,,$$

per un dato $L > 0$.

a Se esiste un solo punto di equilibrio in $(-L, L)$, allora esso è stabile.

b Esistono al più due punti di equilibrio in $(-L, L)$.

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

A: 2

L'intervallo di definizione di una soluzione massimale deve essere aperto.

B: 2

In questo caso infatti i moti sono semplicemente l'uno traslato temporale dell'altro, perché il sistema è autonomo.

C: 1

Infatti se in $(-L, L)$ la U ha un solo punto critico, questo è un massimo isolato.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando la base di un cono omogeneo circolare retto a una delle due basi di un cilindro omogeneo circolare retto in modo che l'asse di simmetria del cono e quello del cilindro siano coincidenti. Il cilindro e il cono hanno stessa massa, stesso raggio di base e stessa altezza. Il corpo si muove di moto sferico e il vincolo è stato realizzato mediante un giunto ideale. La sola sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso.

16 Supponendo che il polo del moto sia il vertice del cono, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?

a Il momento angolare calcolato usando il vertice del cono come polo di riduzione.

b La quantità di moto totale del corpo.

c Nessuna delle precedenti.

17 Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del corpo, che moto esibisce il corpo se la velocità angolare iniziale forma un angolo di ampiezza $\pi/4$ con l'asse di simmetria del corpo?

a Un moto di precessione.

b Un moto rotatorio.

c Nessuna delle precedenti.

18 Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del cilindro, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?
a L'energia cinetica.
b L'energia meccanica totale.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
A: 3
Si tratta del moto della trottola.
B: 1
Il moto è alla Poinsot, il solido è un giroscopio e la velocità angolare iniziale non è parallela a uno degli assi principali di inerzia.
C: 2
Il moto è quello della trottola.

Prova scritta del 11/01/2021 III

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 11/01/2021 III

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$x_1 \sin(\beta t) - x_2 \cos(\beta t) = 0\,,$$

ove $\beta > 0$ è costante. Inoltre il centro G di AB deve avere quota $x_{3G} = 0$. Sull'asta agisce la forza (applicata in B)

$$\boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{X}_B\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(r, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che se

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

allora

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_3)\,, \quad \boldsymbol{X}_G = r\boldsymbol{u}_1\,.$$

Sotto $\boldsymbol{X}_O$ denota l'origine del sistema di riferimento fisso, che ha coordinate (x_h).

01 Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze apparenti sono conservative nel senso lagrangiano e quindi esiste il loro potenziale lagrangiano U^{L}_{app}.
a Sì, e il potenziale è dato da

$$U^{\text{L}}_{app}(r, \varphi) = \frac{m}{2}\beta^2\Big(r^2 + \frac{L^2}{3}\Big)\,.$$

b No, le forze apparenti non sono conservative in senso lagrangiano.
c Nessuna delle precedenti.
02 Nel sistema fisso di riferimento le forze direttamente applicate ammettono potenziale lagrangiano.
a Sì ed esso può essere preso uguale a

$$U^{\text{L}}_{da} = -\frac{k}{2}(r^2 + 2rL\cos\varphi)\,.$$

b Sì ed esso può essere preso uguale a

$$U^{\text{L}}_{da} = -\frac{k}{2}(r^2 + 2rL\sin\varphi)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
03 Dire quali delle seguenti espressioni dà l'energia cinetica dell'asta nel sistema fisso di riferimento. Qui I è il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse ad essa ortogonale nel suo centro.
a

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\beta^2) + \frac{I}{2}(\dot\varphi^2 + \beta^2(\sin\varphi)^2)\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\beta^2) + \frac{I}{2}(\dot\varphi^2 + \beta^2(\cos\varphi)^2)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
A: 3
È noto dalla teoria che la forza di Coriolis in questo caso ha componenti lagrangiane nulle. La forza di trascinamento ha distribuzione sull'asta

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{tr} = \frac{m\beta^2}{2L}\lambda_1\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}s\,,\ \textit{con potenziale}\ \mathrm{d}U_{tr} = \frac{m\beta^2}{4L}\lambda_1^2\,\mathrm{d}s\,,$$

che conduce al potenziale

$$U^{\text{L}}_{tr} = \int\limits_{AB}\mathrm{d}U_{tr} = \int\limits_{-L}^{L}\frac{m\beta^2}{4L}(r + s\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}s = \frac{m\beta^2}{2}(r^2 + \frac{L^2}{3}(\cos\varphi)^2)$$

che non è il valore dato sopra.
B: 1
Si ha

$$U_{da}(\boldsymbol{x}_B) = -\frac{k}{2}(x_{1B}^2 + x_{2B}^2 + x_{3B}^2)\,,$$

per cui

$$U_{da}^{\text{L}} = -\frac{k}{2}[(r + L\cos\varphi)^2 + (L\sin\varphi)^2] = -\frac{k}{2}[r^2 + 2rL\cos\varphi + L^2]\,.$$

C: 2
Usiamo il teorema di König. La velocità di G è

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_G}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\boldsymbol{u}_1 + r\dot{\boldsymbol{u}}_1 = \dot{r}\boldsymbol{u}_1 + r\beta\boldsymbol{u}_2\,.$$

Il termine di energia cinetica relativa al centro di massa richiede di calcolare la velocità angolare della terna solidale all'asta $\mathcal{N}$ data da

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2L}\,, \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_2\,, \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2\,.$$

Se $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, si ha

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \beta\boldsymbol{u}_3 - \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2 = \beta(\sin\varphi\boldsymbol{w}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{w}_3) - \dot{\varphi}\boldsymbol{w}_2\,.$$

Poiché rispetto a $\mathcal{N}$ la matrice d'inerzia in G è $\mathrm{diag}(0, I, I)$, segue la 2.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove R, $h > 0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea.
Il vincolo è scabro.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \gamma x_3\boldsymbol{T} + \delta\boldsymbol{B}\,,$$

con γ, $\delta > 0$ costanti. Qui (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca dell'elica, che viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{B}(s) &= \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e la curvatura $k(s) = R\alpha^2$.
04 Si supponga $\dot{s} \neq 0$ e che la reazione vincolare soddisfi

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\tan}| = \mu|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Allora l'equazione di moto è:
a

$$m\ddot{s} = \gamma h\alpha s - \mu\,\mathrm{sign}(\dot{s})\sqrt{\dot{s}^4 m^2 k^2 + \delta^2}\,.$$

b
$$m\ddot{s} = \gamma R\cos(\alpha s) - \mu\,\mathrm{sign}(\dot{s})\sqrt{\dot{s}^4 m^2 k^2 + \delta^2}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

05 Si supponga che $s(0) = 1/\alpha$, $\dot{s}(0) = 0$, e che la reazione vincolare soddisfi all'equilibrio
$$|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| \le \mu_s |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}|\,,$$
con $\mu_s > 0$ costante. Allora il punto materiale resta in equilibrio.

a Sì, se $0 < h \le h_0$ con $h_0 > 0$ opportuno.

b Sì, se $R \ge R_0$ con $R_0 > 0$ opportuno.

c Nessuna delle precedenti.

06 Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0 > 0$, e che la reazione vincolare soddisfi, se $\dot{s} \neq 0$,
$$|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| = \mu |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}|\,,$$
con $\mu > 0$ costante. Dire quale delle seguenti proprietà soddisfa $s(t)$.

a Esistono scelte dei parametri μ, h, R, γ, δ tali che $\ddot{s}(t) > 0$ per $t \in (0, \bar{t})$, con $\bar{t} > 0$ opportuno.

b Il moto è indipendente dal valore di μ.

c Nessuna delle precedenti.

Soluzione

A: 1

Il sistema di moto dà
$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \gamma R\alpha s - \mu\,\mathrm{sign}(\dot{s})|\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}|\,,\\ m\dot{s}^2 k &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{N}\,,\\ 0 &= \delta + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{B}\,, \end{aligned}$$
da cui subito la 1.

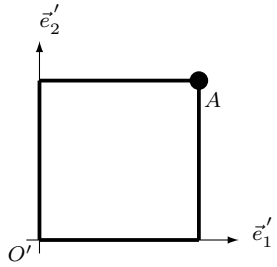
B: 1

La componente tangente della forza direttamente applicata è $|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}| = \gamma h$. Questa, perché si abbia equilibrio, non deve superare il massimo della componente tangente della reazione vincolare; la reazione all'equilibrio è data da
$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = -\boldsymbol{F}\,, \quad \textit{per cui} \quad \mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}} = -\delta\boldsymbol{B}\,.$$
Perciò la condizione è
$$\mu_s|\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| = \mu_s\delta \ge \gamma h\,.$$

C: 3

Infatti dalla prima equazione di moto
$$m\ddot{s} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T} - \mu|\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| \le \gamma h\alpha s - \mu\delta\,,$$
che implica
$$m\ddot{s}(0) \le -\mu\delta < 0\,.$$
Inoltre sottraendo le equazioni di moto corrispondenti a due μ diversi si vede che la 2 è impossibile.

I.3 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando l'elemento A di massa M a una lamina rigida omogenea di forma quadrata di massa M e lato $2L$. In figura è rappresentato il corpo assieme al riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i'\}$. Si nota che $\overrightarrow{O'A} = 2L\vec{e}_1' + 2L\vec{e}_2'$.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo O' sull'asse fisso 1 e l'asse 3 solidale costantemente parallelo all'omologo asse fisso 3.
Come coordinate lagrangiane si possono usare la coordinata cartesiana 1 di O' e l'anomalia φ individuata dall'asse fisso 1 e dall'asse solidale 1 orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.

07 Quanto valgono le coordinate del centro di massa del corpo rispetto al riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i'\}$?
a $\left(\frac{3}{2}L, \frac{3}{2}L, 0\right)$.
b $\left(\frac{3}{2}L, L, 0\right)$.
c Nessuna delle precedenti.

08 Quanto valgono i momenti principali d'inerzia del corpo relativi agli assi principali che giacciono nel piano del corpo e passano per O'?
a $\frac{1}{3}(10 - 3\sqrt{5})ML^2$, $\frac{1}{3}(10 + 3\sqrt{5})ML^2$.
b $\frac{1}{3}ML^2$, $\frac{31}{3}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.

09 Quanto vale il momento angolare del corpo calcolato usando come polo di riduzione il centro di massa?
a $\frac{47}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
b $\frac{7}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE
A: 1
Si usa la proprietà additiva a partire dalle coordinate $(L, L, 0)$ *del centro di massa della lamina e dalla coordinate* $(2L, L, 0)$ *di A.*
B: 2
Si calcola prima la matrice d'inerzia rispetto al riferimento in figura

$$I'_{O'} = \{\{16ML^2/3, -5ML^2, 0\}, \{-5ML^2, 16ML^2/3, 0\}, \{0, 0, 32ML^2/3\}, \}$$

e poi si risolve l'equazione secolare $\det(I'_{O'} - \lambda\mathbb{I}) = 0$.
C: 3
Il moto rispetto al riferimento del centro di massa è rotatorio e i prodotti di inerzia $I'_{G,13}$ *e* $I'_{G,23}$ *sono nulli, allora il momento angolare si può scrivere come* $I'_{G',33}\dot{\varphi}\vec{e}_3'$.

Per il calcolo del momento di inerzia si può usare il teorema di Huygens e scrivere $I'_{G',33} = I'_{O',33} - 2M\|\overrightarrow{O'G}\|^2 = 5ML^2/3$.

I.4 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, …, $(\boldsymbol{X}_n, m_n)$ è soggetto ai vincoli olonomi

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,,$$

con $\boldsymbol{f} \in C^3(\boldsymbol{R}^{3n+1})$, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m$, $1 \le m < 3n$; qui denotiamo

$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n) = (z_1, \ldots, z_{3n}) \in \boldsymbol{R}^{3n}\,.$$

Si supponga che il vincolo sia olonomo regolare.

10 Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ è indipendente dalla scelta delle coordinate lagrangiane.

a Sì.

b Non in generale, ma è vero se i vincoli sono fissi.

c Nessuna delle precedenti.

11 Supponiamo che $n = 6$ e che, scelta la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{z}^{\text{L}}(\boldsymbol{q}, t) = (\boldsymbol{X}^{\text{L}}_1(\boldsymbol{q}, t), \ldots, \boldsymbol{X}^{\text{L}}_6(\boldsymbol{q}, t))\,,$$

si sappia che per ogni $h = 1, \ldots, \ell$, vale

$$\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}_i}{\partial q_h} = -\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^{6-i+1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}_{6-i+1}}{\partial q_h}\,,$$

$i = 1, 2, 3$. Vale allora l'ipotesi dei lavori virtuali?

a Sicuramente sì.

b Sicuramente no.

c Nessuna delle precedenti.

12 Supponiamo che i vincoli siano fissi, ossia che $\boldsymbol{f}$ non dipenda esplicitamente da t.

a Lo spazio degli spostamenti effettivi coincide con lo spazio normale.

b Lo spazio degli spostamenti effettivi è uno spazio vettoriale.

c Nessuna delle precedenti.

Soluzione

A: 1

Infatti $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ *è l'ortogonale di* $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ *che è indipendente dalla scelta delle coordinate lagrangiane perché è generato dai gradienti dei vincoli (scalari).*

B: 1

Infatti la sommatoria che definisce la ILV, ossia

$$\sum_{i=1}^{6} \mathbf{f}_{\text{vin}}{}^{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}_i}{\partial q_h} = 0\,, \qquad h = 1\,, \ldots\,, \ell\,,$$

si spezza nella somma di 3 *addendi nulli.*

C: 2

Se i vincoli sono fissi lo spazio degli spostamenti effettivi coincide con $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$.

I.5 Si consideri un moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,.$$

Sia $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$.
13 Sia

$$\inf_{x\in\boldsymbol{R}} U(x) > -\infty\,,$$

e si consideri l'orbita del piano delle fasi corrispondente al livello energetico $E \in \boldsymbol{R}$.
a Esistono E per cui l'orbita è illimitata, ma in genere non sono tutti i valori $E \in \boldsymbol{R}$.
b Per tutti i valori di E l'orbita è illimitata.
c Nessuna delle precedenti.
14 Se due moti x_1 e x_2 hanno la stessa orbita nel piano delle fasi, allora esiste $T \in \boldsymbol{R}$ tale che $x_1(t+T) = x_2(t)$ per i t per cui è definito x_2.
a Non in generale, ma può verificarsi.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
15 Assumiamo che

$$U(x) > U(-L) = U(L)\,, \qquad -L < x < L\,,$$

per un dato $L > 0$.
a Se esiste al massimo un numero finito di punti di equilibrio in $(-L, L)$, allora almeno uno di essi è stabile.
b Esistono almeno due punti di equilibrio in $(-L, L)$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
A: 1
Poiché le orbite hanno dominio in $\{E \geq -U(x)\}$, nell'ipotesi fatta, per $E > -\inf U$ l'orbita è definita per ogni x.
B: 2
In questo caso infatti i moti sono semplicemente l'uno traslato temporale dell'altro, perché il sistema è autonomo.
C: 1
Infatti se in $(-L, L)$ la U ha un numero finito di punti critici, essi sono isolati; ma uno di essi deve essere il massimo. Tuttavia non c'è motivo che in genere ci sia più di un punto critico in $(-L, L)$.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando il vertice di un cono omogeneo circolare retto al centro di una delle due basi di un cilindro omogeneo circolare retto in modo che l'asse di simmetria del cono e quello del cilindro siano coincidenti. Il cilindro e il cono hanno stessa massa, stesso raggio di base e stessa altezza. Il corpo si muove di moto sferico e il vincolo è stato realizzato mediante un giunto ideale. La sola sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso.

16 Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del corpo, che moto esibisce il corpo se l'atto di moto iniziale è nullo e nella configurazione iniziale l'asse di simmetria del corpo forma un angolo di ampiezza $\pi/6$ con la retta verticale passante per il centro di massa del corpo?
a Un moto rotatorio attorno a un asse orizzontale passante per il centro di massa.
b Un moto rotatorio attorno all'asse verticale passante per il centro di massa.
c Nessuna delle precedenti.
17 Supponendo che il polo del moto sia il vertice del cono, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?
a L'energia cinetica.
b L'energia meccanica totale.
c Nessuna delle precedenti.
18 Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del corpo, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?
a La componente della velocità angolare relativa all'asse verticale passante per il centro di massa del corpo.
b La componente della velocità angolare relativa all'asse di simmetria del corpo.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
A: 3
Il moto è la quiete, perché il momento totale della sollecitazione attiva e vincolare calcolato rispetto al centro di massa è nullo.
B: 2
Il moto è quello della trottola.
C: 2
Segue dalle equazioni di Eulero, perché il moto è alla Poinsot e il corpo è un giroscopio.

Prova scritta del 08/02/2021 (1)

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 08/02/2021 (1)

I.1 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$ e $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ sono soggetti ai vincoli:

- $\boldsymbol{X}_1$ appartiene al paraboloide S dato da

$$x_3 = -a(x_1^2 + x_2^2)\,, \qquad (x_1, x_2) \neq (0,0)\,;$$

- i due punti $\boldsymbol{X}_i$ hanno la stessa quota x_3;
- $\boldsymbol{X}_2$ appartiene all'asse x_3.

Sui due punti agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e le forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_{\text{el1}} = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) = -\boldsymbol{F}_{\text{el2}}\,.$$

Qui a, $k > 0$ sono costanti, e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso.

01 Dire quale delle seguenti parametrizzazioni lagrangiane è valida.

a

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = \sqrt{\frac{|z|}{a}}\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sqrt{\frac{|z|}{a}}\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = z\boldsymbol{e}_3\,,$$

$(\varphi, z) \in (-\pi, \pi) \times (-\infty, 0)$.

b

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 - ar^2\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = ar^2\boldsymbol{e}_3\,,$$

$(\varphi, r) \in (-\pi, \pi) \times (0, +\infty)$.

c Nessuna delle precedenti.

02 Dire quale è il potenziale lagrangiano del sistema, nelle coordinate lagrangiane $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ di $\boldsymbol{X}_1$.

a

$$U^{\text{L}}(x_1, x_2) = \frac{k}{2}a(x_1^2 + x_2^2) + m_1 ga(x_1^2 + x_2^2) + m_2 ga(x_1^2 + x_2^2)\,.$$

b

$$U^{\text{L}}(x_1, x_2) = -\frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) + (m_1 + m_2)ga(x_1^2 + x_2^2)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

03 Le equazioni di moto nelle coordinate $(s, \theta) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = \frac{s}{\sqrt{a}}\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \frac{s}{\sqrt{a}}\sin\theta\boldsymbol{e}_2 - s^2\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = -s^2\boldsymbol{e}_3\,,$$

sono date da

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\dot{s}}{a}(m_1 + 4m_1as^2 + 4m_2as^2)\Big] - 4m_1\dot{s}^2s - \frac{m_1}{a}s\dot{\theta}^2 - 4m_2s\dot{s}^2 \\ + \Big(\frac{k}{a} - 2(m_1 + m_2)g\Big)s = 0\,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{m_1}{a}s^2\dot{\theta}\Big] = 0\,.\end{aligned}$$

Sono possibili moti (diversi dalla quiete) in cui i punti restino a quota x_3 costante?

a Sì, è sufficiente che $m_1 = m_2$.
b Sì, se $k > k_0$ opportuno, con k_0 dipendente dagli altri parametri.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
La b non soddisfa il vincolo $\boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{X}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2$.
II: b
Nella a il potenziale elastico è sbagliato, dovendo invece essere

$$-\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^2 = -\frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2)\,.$$

III: b
Se si prende s costante nelle equazioni, la seconda dice che anche $\dot\theta$ *è costante, e la prima è soddisfatta se e solo se*

$$\dot\theta^2 = \frac{k}{m_1} - 2ag\frac{m_1 + m_2}{m_1}\,.$$

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie sferica S parametrizzata da

$$\boldsymbol{r}(\varphi, \theta) = R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,,$$

ove $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi)\times(0, \pi)$ si prendono come coordinate lagrangiane e $R > 0$. Il vincolo è scabro.
04 Supponiamo che sul punto non agiscano forze direttamente applicate e che valga la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico, con coefficiente d'attrito $\mu > 0$. Le equazioni di moto sono allora

$$R^2(\sin\theta)^2\ddot\varphi = -2R^2\sin\theta\cos\theta\dot\varphi\dot\theta - \mu R^2\sqrt{(\sin\theta)^2\dot\varphi^2 + \dot\theta^2}(\sin\theta)^2\dot\varphi\,,$$
$$R^2\ddot\theta = R^2\sin\theta\cos\theta\dot\varphi^2 - \mu R^2\sqrt{(\sin\theta)^2\dot\varphi^2 + \dot\theta^2}\dot\theta\,.$$

È possibile un moto diverso dalla quiete a quota x_3 costante?
a Sì, ma solo se $\theta = \pi/2$.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
05 Nelle ipotesi della domanda precedente, è possibile un moto diverso dalla quiete con φ costante?
a Sì, ma solo se $\varphi = 0$.
b Sì, per ogni $\varphi \in (-\pi, \pi)$.
c Nessuna delle precedenti.
06 Supponiamo che il punto sia fermo e su di esso sia applicata la forza $\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{e}_2$, con $k > 0$. Vale la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico, ossia

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| \le \mu_s|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Dire quale dei seguenti è l'insieme delle posizioni di equilibrio.
a $S \cap \{x_2 \geq r_0\}$, con $r_0 \in (0, R)$ opportuno.
b $S \cap \{|x_2| \leq r_0\}$, con $r_0 \in (0, R)$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Sostituendo θ costante nelle equazioni, la seconda dà $0 = \sin\theta\cos\theta$ implicando $\theta = \pi/2$; la prima allora diviene

$$R^2\ddot{\varphi} = -\mu R^2|\dot{\varphi}|\dot{\varphi}\,,$$

che ha una unica soluzione.
II: b
La prima equazione è soddisfatta se φ è costante. La seconda diviene

$$R^2\ddot{\theta} = -\mu R^2|\dot{\theta}|\dot{\theta}\,,$$

che ha una unica soluzione.
III: c
Si deve imporre per avere equilibrio, e quindi $\mathbf{f}_{\text{vin}} = -\boldsymbol{F}$,

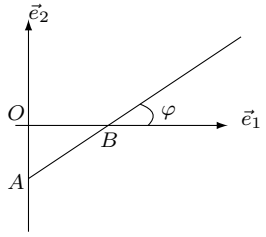
$$|\boldsymbol{F}|^2 - |\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\nu}|^2 \leq \mu_s^2|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\nu}|^2\,,$$

che, sostituendo $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{x}/R$ e $\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{e}_2$, dà

$$R^2 \leq (1+\mu_s^2)x_2^2\,,$$

ossia $|x_2| \geq R/\sqrt{1+\mu_s^2}$.

I.3 Un corpo rigido piano è stato ottenuto saldando una sbarretta omogenea di massa M e lunghezza $2R$ su un diametro di un disco omogeneo di medesima massa M e raggio R. Gli estremi della sbarretta, che ovviamente appartengono al bordo del disco, sono indicati con A e B.
Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ con A vincolato a scorrere sull'asse 2, verticale ascendente, e B sull'asse 1. Come coordinata lagrangiana si usa l'anomalia φ orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3 e indicata in figura.



Si risponda alle seguenti domande.
07 Quanto valgono i momenti principali di inerzia relativi al punto A?
a $\frac{1}{4}MR^2$, $\frac{31}{12}MR^2$, $\frac{17}{6}MR^2$.

b $\frac{1}{4}MR^2$, $\frac{5}{4}MR^2$, $\frac{3}{2}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.

08 Quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento fisso?
a $\frac{31}{24}MR^2\dot{\varphi}^2$.
b $\frac{5}{6}MR^2\dot{\varphi}^2$.
c Nessuna delle precedenti.

09 Quanto vale il momento della sollecitazione peso agente sul corpo rispetto al polo O?
a $-2MgR\cos\varphi\vec{e}_3$.
b $2MgR\cos\varphi\vec{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.

Soluzione
I: a
Per motivi di simmetria il riferimento principale ha un asse individuato dalla sbarretta, uno ad esso ortogonale nel piano del corpo e il terzo ortogonale ai primi due. Rispetto al primo asse il momento d'inerzia è uguale al momento d'inerzia del disco rispetto a un asse diametrale. Per il calcolo del secondo momento si scrive

$$\frac{1}{3}M(2R)^2 + \left[\frac{1}{4}MR^2 + MR^2\right],$$

dove il primo termine è il contributo della sbarretta e il termine tra parentesi quadre è stato ottenuto usando il teorema di Huygens per il disco. Il terzo momento d'inerzia, essendo il corpo piano, è uguale alla somma dei primi due.
II: c
Si può usare il Teorema di König oppure osservare che l'atto di moto è rotatorio e il centro di istantanea rotazione è il punto che si ottiene intersecando la retta per A ortogonale all'asse 2 con la retta per B ortogonale all'asse 1. Detto I il momento d'inerzia relativo all'asse di istantanea rotazione, applicando due volte il Teorema di Huygens si trova

$$I = \left[\frac{17}{6}MR^2 - 2MR^2\right] + 2MR^2 = \frac{17}{6}MR^2\,,$$

come è ovvio dal momento che la distanza del centro di istantanea rotazione dal centro di massa del corpo è uguale alla distanza del punto A dal centro di massa del corpo. L'energia cinetica risulta quindi uguale a $\frac{1}{2}\frac{17}{6}MR^2\dot{\varphi}^2$.
III: a
Per ovvi motivi geometrici il centro di massa del corpo coincide con il centro geometrico del disco. Allora $\overrightarrow{OG} = R\cos\varphi\vec{e}_1 - R\sin\varphi\vec{e}_2$. Ricordando che il peso è equivalente a una sola forza applicata nel centro di massa, il risultato si ottiene calcolando $\overrightarrow{OG}\times(-2Mg\vec{e}_2)$.

I.4 Si considerino due sistemi mobili di riferimento $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ e $\Sigma = (\boldsymbol{X}_\Omega, \mathcal{N})$. Qui $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ e $\boldsymbol{v}_\mathcal{S}$, $\boldsymbol{v}_\Sigma$ denotano le velocità di $\boldsymbol{X}$ relative rispettivamente a $\mathcal{S}$ e a Σ.

10 Dire quale delle seguenti formule è valida per un qualunque moto $\boldsymbol{X} \in C^2(I)$.

a

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{v}_{\Omega,\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_{\Omega}) + \boldsymbol{v}_{\Sigma}\,.$$

b

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{v}_{\Omega,\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_{O}) + \boldsymbol{v}_{\Sigma}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

11 Supponiamo che

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \alpha \boldsymbol{u}_1\,, \quad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = k\boldsymbol{u}_1\,, \quad \boldsymbol{v}_{\Omega,\mathcal{S}} = 0\,.$$

Qui α, $k > 0$ sono costanti.
È possibile che il moto $\boldsymbol{X}$ sia solidale a Σ?
a Sì, ma non per tutti i valori di α, $k > 0$.
b No, per nessuna scelta di α, $k > 0$.
c Nessuna delle precedenti.

12 Si sa che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = k\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t)\,,$$

con k, $\alpha > 0$ costanti. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.
a Il moto di $\mathcal{M}$ rispetto a $\mathcal{N}$ è una rotazione.
b Il vettore $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ è un vettore costante in $\mathcal{N}$.
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE
I: a
Segue dalla teoria (per esempio dal teorema del moto relativo se si sostituisce $\mathcal{S}$ al sistema fisso).
II: b
Segue dalla formula della prima domanda se $\boldsymbol{v}_{\Sigma} = 0$ (che equivale a essere solidale a Σ).
III: a
Dalle definizioni: il moto di $\mathcal{M}$ rispetto a $\mathcal{N}$ è una rotazione se e solo se $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ ha direzione costante in $\mathcal{N}$ o equivalentemente in $\mathcal{M}$. Naturalmente $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ non è costante in $\mathcal{N}$ perché non ha modulo costante.

I.5 Un punto si muove soggetto all'equazione di moto

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})\,.$$

13 Supponiamo che per un'opportuna $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$ valga

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \nabla U(\boldsymbol{X})\,,$$

con $\nabla U(0) = 0$.
Dire in quale caso si possono definire le piccole oscillazioni in $\boldsymbol{x} = 0$. Qui α_1, α_2, $\alpha_3 > 0$ sono costanti.

a

$$U(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2\,.$$

b

$$U(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 x_1^4 + \alpha_2 x_2^4 + \alpha_3 x_3^4 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

14 Se tutti i punti $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ sono di equilibrio, cioè se

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},0) = 0\,, \qquad \text{per ogni } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3,$$

allora esistono punti di equilibrio instabile.

a No, possono anche essere tutti di equilibrio stabile.

b Sì, esistono almeno 2 diversi punti di equilibrio instabile.

c Nessuna delle precedenti.

15 Supponiamo che

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) = \nabla U(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})\,,$$

con $U \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$, $\boldsymbol{h} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^6)$, e che $\nabla U(0) = 0$.
In quale dei seguenti casi $\boldsymbol{x} = 0$ è di equilibrio stabile?

a Se $\det D^2U(0) > 0$, $D^2U(0)$ ha un autovalore negativo e per $\beta > 0$ costante

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) = -\beta \dot{\boldsymbol{X}}\,.$$

b Se $D^2U(0) = \operatorname{diag}(-1,-2,-3)$ e per $\beta > 0$ costante

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) = -\beta |\boldsymbol{X}|^2 \dot{\boldsymbol{X}}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: c

Il punto $\boldsymbol{x} = 0$ non è neppure di equilibrio stabile, essendo in entrambi i casi a e b un minimo isolato per il potenziale.

II: a

Per esempio se $\boldsymbol{F} = -\alpha \dot{\boldsymbol{X}}$, con $\alpha > 0$ costante.

III: b

Segue dalla teoria, perché 0 è di massimo isolato per il potenziale e $\boldsymbol{h} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \leq 0$. Nel caso a, sicuramente il punto $\boldsymbol{x} = 0$ è di sella per il potenziale.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando un elemento di massa M al punto A del bordo di un disco omogeneo di massa M. Il corpo è vincolato a muoversi in un piano verticale fisso rispetto all'osservatore terrestre mantenendosi a contatto dall'esterno con una guida circolare giacente nel medesimo piano. L'atto di moto è in ogni istante con assenza di strisciamento.

16 Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera.

a L'atto di moto è in ogni istante rotatorio e il centro di istantanea rotazione è il punto di contatto tra corpo e guida.

b L'atto di moto è in ogni istante rotatorio e il centro di istantanea rotazione è il punto A.

c Nessuna delle precedenti.
17 Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera.
a La centroide fissa (base) coincide con il bordo del disco.
b La centroide fissa (base) è un curva degenere coincidente con il centro della guida.
c Nessuna delle precedenti.
18 Quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento fisso?
a $\frac{1}{2}I\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e I il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro di massa del corpo e ortogonale al corpo stesso.
b $\frac{1}{2}J\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e J il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il punto di contatto e ortogonale al corpo stesso.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Il punto solidale che occupa la posizione del punto di contatto ha velocità nulla.
II: c
La base coincide con la guida circolare.
III: b
L'asse di istantanea rotazione è ortogonale al corpo e passa per il punto di contatto.

Prova scritta del 08/02/2021 (2)

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 08/02/2021 (2)

I.1 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$ e $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ sono soggetti ai vincoli:

- $\boldsymbol{X}_2$ appartiene al cono S dato da

$$x_3 = -a\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, \qquad (x_1, x_2) \neq (0,0)\,;$$

- i due punti $\boldsymbol{X}_i$ hanno la stessa quota x_3;
- $\boldsymbol{X}_1$ appartiene all'asse x_3.

Sui due punti agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e le forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_{\text{el1}} = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) = -\boldsymbol{F}_{\text{el2}}\,.$$

Qui a, $k > 0$ sono costanti, e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso.

01 Dire quale delle seguenti parametrizzazioni lagrangiane è valida.

a

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = -a\sqrt{r}\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 - a\sqrt{r}\boldsymbol{e}_3\,,$$

$(\varphi, r) \in (-\pi, \pi) \times (0, +\infty)$.

b

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = z\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = \frac{|z|}{a}\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \frac{|z|}{a}\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\,,$$

$(\varphi, z) \in (-\pi, \pi) \times (-\infty,0)$.

c Nessuna delle precedenti.

02 Dire quale è il potenziale lagrangiano del sistema, ammettendo che una delle coordinate lagrangiane sia la $z = x_3 < 0$ di $\boldsymbol{X}_1$.

a

$$U^{\text{L}} = -\frac{k}{2}\Big(\frac{z}{a}\Big)^2 - m_1 g z - m_2 g z\,.$$

b

$$U^{\text{L}} = -\frac{k}{2}\Big(\frac{z}{a}\Big)^2 - m_1 g z - \frac{k}{2}\Big(\frac{z}{a}\Big)^2 - m_2 g z\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

03 Le equazioni di moto nelle coordinate $(s, \theta) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = -s\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = \frac{s}{a}\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \frac{s}{a}\sin\theta\boldsymbol{e}_2 - s\boldsymbol{e}_3\,,$$

sono date da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\dot{s}}{a^2}(m_1 a^2 + m_2(1 + a^2))\Big] - \frac{m_2}{a^2}s\dot{\theta}^2 + \frac{k}{a^2}s - (m_1 + m_2)g = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{m_2}{a^2}s^2\dot{\theta}\Big] = 0\,.$$

Sono possibili moti (diversi dalla quiete) in cui i punti restino a quota x_3 costante?

a Sì, se $x_3 > -s_0$ opportuno, con s_0 dipendente dai parametri.

b Sì, se $x_3 < -s_0$ opportuno, con s_0 dipendente dai parametri.

c Nessuna delle precedenti.

Soluzione

I: b

La a non soddisfa il vincolo $\boldsymbol{X}_2 \in S$.

II: a

Nella b il potenziale elastico è sbagliato, dovendo invece essere

$$-\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^2 = -\frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) = -\frac{k}{2}\Big(\frac{z}{a}\Big)^2\,.$$

III: b

Se si prende s costante nelle equazioni, la seconda dice che anche $\dot{\theta}$ è costante, e la

prima è soddisfatta se e solo se

$$\dot\theta^2 = \frac{k}{m_2} - a^2 g \frac{m_1 + m_2}{m_2 s}\,.$$

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie sferica S parametrizzata da

$$\boldsymbol{r}(\varphi,\theta) = R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,,$$

ove $(\varphi,\theta) \in (-\pi,\pi)\times(0,\pi)$ si prendono come coordinate lagrangiane e $R > 0$. Il vincolo è scabro.

04 Supponiamo che valga la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico, con coefficiente d'attrito $\mu > 0$. Sul punto agisce una forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ tale che le equazioni di moto siano, per una opportuna $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ determinata da $\boldsymbol{F}$,

$$R^2(\sin\theta)^2\ddot\varphi = -2R^2\sin\theta\cos\theta\dot\varphi\dot\theta - \mu R^2\sqrt{(\sin\theta)^2\dot\varphi^2 + \dot\theta^2}(\sin\theta)^2\dot\varphi\,,$$
$$R^2\ddot\theta = R^2\sin\theta\cos\theta\dot\varphi^2 + f(\theta) - \mu R^2\sqrt{(\sin\theta)^2\dot\varphi^2 + \dot\theta^2}\dot\theta\,.$$

È possibile un moto diverso dalla quiete a una quota $x_3 \neq 0$ costante?
a Sì, per ogni $R > |x_3| > 0$ esiste un'opportuna scelta di $f(\theta)$ che rende possibile quel moto.
b No.
c Nessuna delle precedenti.

05 Nelle ipotesi della domanda precedente (e quindi con le stesse equazioni di moto), è possibile un moto diverso dalla quiete con φ costante?
a Se $(\varphi_0, \theta(t))$ è un moto, allora $\varphi_0 = 0$.
b Se $(\varphi_0, \theta(t))$ è un moto, allora $f(\varphi_0) = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

06 Supponiamo che il punto sia fermo e su di esso sia applicata la forza $\boldsymbol{F} = kx_2\boldsymbol{e}_2$, con $k > 0$ costante. Vale la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico, ossia

$$|\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}}| \leq \mu_s|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|\,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta per l'insieme delle posizioni di equilibrio su S.
a L'insieme delle posizioni di equilibrio non coincide mai con tutta la sfera.
b L'insieme delle posizioni di equilibrio coincide con tutta la sfera se k è abbastanza grande.
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE
I: b
Sostituendo $\theta = \theta_0 \neq \pi/2$ costante nelle equazioni la prima diviene

$$R^2(\sin\theta_0)^2\ddot\varphi = -\mu R^2(\sin\theta_0)^3|\dot\varphi|\dot\varphi\,,$$

che implica che $\dot\varphi$ non può essere costante. Ma la seconda equazione dà

$$0 = R^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \dot\varphi^2 + f(\theta_0)\,,$$

che implica che $\dot\varphi$ sia costante.
II: c
La prima equazione è soddisfatta se φ è costante. La seconda diviene

$$R^2\ddot\theta = f(\theta) - \mu R^2 |\dot\theta|\dot\theta\,,$$

che ha una unica soluzione. Quindi il moto è possibile per ogni φ fissato.
III: a
Si deve imporre per avere equilibrio, e quindi $\mathbf{f}_{\rm vin} = -\boldsymbol{F}$,

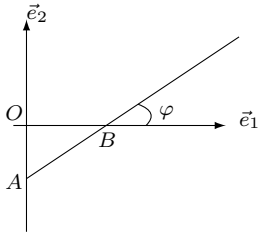
$$|\boldsymbol{F}|^2 - |\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\nu}|^2 \le \mu_s^2 |\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\nu}|^2\,,$$

che, sostituendo $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{x}/R$ e $\boldsymbol{F} = kx_2\boldsymbol{e}_2$, dà $x_2 = 0$ oppure

$$R^2 \le (1+\mu_s^2)x_2^2\,,$$

ossia $|x_2| \ge R/\sqrt{1+\mu_s^2} > 0$.

I.3 Un corpo rigido piano è stato ottenuto saldando una sbarretta omogenea di massa M e lunghezza $\sqrt{2}L$ sulla diagonale di una lamina omogenea quadrata di medesima massa M e lato di lunghezza L. Gli estremi della sbarretta, che ovviamente coincidono con due vertici del quadrato, sono indicati con A e B.
Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec e_i\}$ con A vincolato a scorrere sull'asse 2, verticale ascendente, e B sull'asse 1. Come coordinata lagrangiana si usa l'anomalia φ orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3 e indicata in figura.



Si risponda alle seguenti domande:
07 Quanto valgono i momenti principali di inerzia relativi al punto A?
a $\frac{1}{12}ML^2$, $\frac{7}{12}ML^2$, $\frac{8}{12}ML^2$.
b $\frac{1}{12}ML^2$, $\frac{5}{4}ML^2$, $\frac{4}{3}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento fisso?
a $\frac{1}{24}ML^2\dot\varphi^2$.
b $\frac{7}{24}ML^2\dot\varphi^2$.

c Nessuna delle precedenti.

09 Quanto vale il momento della sollecitazione peso agente sul corpo rispetto al polo O?

a $\sqrt{2}MgL\cos\varphi\vec{e}_3$.

b $-\sqrt{2}MgL\cos\varphi\vec{e}_3$.

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I. b

Per motivi di simmetria il riferimento principale ha un asse individuato dalla sbarretta, uno ad esso ortogonale nel piano del corpo e il terzo ortogonale ai primi due. Rispetto al primo asse il momento d'inerzia è uguale al momento d'inerzia della lamina quadrata rispetto a un asse diagonale. Per il calcolo del secondo momento si scrive

$$\frac{1}{3}M(\sqrt{2}L)^2+\Big[\frac{1}{12}ML^2+M\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}L\Big)^2\Big]\,,$$

dove il primo termine è il contributo della sbarretta e il termine tra parentesi quadre è stato ottenuto usando il teorema di Huygens per la lamina quadrata. Il terzo momento d'inerzia, essendo il corpo piano, è uguale alla somma dei primi due.

II: c

Si può usare il Teorema di König oppure osservare che l'atto di moto è rotatorio e il centro di istantanea rotazione è il punto che si ottiene intersecando la retta per A ortogonale all'asse 2 con la retta per B ortogonale all'asse 1. Detto I il momento d'inerzia relativo all'asse di istantanea rotazione, applicando due volte il Teorema di Huygens si trova

$$I=\Big[\frac{4}{3}ML^2-2M\Big(\frac{\sqrt{2}L}{2}\Big)^2\Big]+2M\Big(\frac{\sqrt{2}L}{2}\Big)=\frac{4}{3}ML^2\,,$$

come è ovvio dal momento che la distanza del centro di istantanea rotazione dal centro di massa del corpo è uguale alla distanza del punto A dal centro di massa del corpo. L'energia cinetica risulta quindi uguale a $\frac{1}{2}\frac{4}{3}ML^2\dot{\varphi}^2$.

III: b

Per ovvi motivi geometrici il centro di massa del corpo coincide con il punto medio della sbarretta. Allora $\overrightarrow{OG}=(\sqrt{2}/2)L\cos\varphi\vec{e}_1-(\sqrt{2}/2)L\sin\varphi\vec{e}_2$. Ricordando che il peso è equivalente a una sola forza applicata nel centro di massa, il risultato si ottiene calcolando $\overrightarrow{OG}\times(-2Mg\vec{e}_2)$.

I.4 Si considerino due sistemi mobili di riferimento $\mathcal{S}=(\boldsymbol{X}_O,\mathcal{M})$ e $\Sigma=(\boldsymbol{X}_\Omega,\mathcal{N})$. Qui $\mathcal{M}=(\boldsymbol{u}_h)$ e $\mathcal{N}=(\boldsymbol{w}_h)$ e $\boldsymbol{v}_\mathcal{S}$, $\boldsymbol{v}_\Sigma$ denotano le velocità di $\boldsymbol{X}$ relative rispettivamente a $\mathcal{S}$ e a Σ.

10 Dire quale delle seguenti formule è valida per un qualunque moto $\boldsymbol{X}\in C^2(I)$.

a

$$\boldsymbol{v}_\mathcal{S}=\boldsymbol{v}_{\Omega,\Sigma}+\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\times(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_\Omega)+\boldsymbol{v}_\Sigma\,.$$

b

$$\boldsymbol{v}_\mathcal{S}=\boldsymbol{v}_{O,\mathcal{S}}+\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\times(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_\Omega)+\boldsymbol{v}_\Sigma\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

11 Supponiamo che

$$\boldsymbol{v}_\Sigma = \alpha \boldsymbol{w}_3\,, \quad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} = k\boldsymbol{w}_3\,, \quad \boldsymbol{v}_{\Omega,\mathcal{S}} = 0\,.$$

Qui α, $k \in \boldsymbol{R}$.
È possibile che il moto $\boldsymbol{X}$ sia solidale a $\mathcal{S}$?
a Sì, ma solo se $\alpha = 0$.
b Sì, anche per certi valori tali che $\alpha \neq 0$ e $k \neq 0$.
c Nessuna delle precedenti.
12 Si sa che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} = 3\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}}\,.$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.
a Non esistono funzioni vettoriali non nulle che siano costanti sia in $\mathcal{M}$ che in $\mathcal{N}$.
b Il vettore $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}$ è un vettore costante in $\mathcal{N}$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: c
Segue dalla teoria (per esempio dal teorema del moto relativo se si sostituisce $\mathcal{S}$ al sistema fisso) che

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{v}_{\Omega,\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_\Omega) + \boldsymbol{v}_\Sigma\,.$$

II: a
Segue dalla formula nella soluzione della prima domanda se $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = 0$ (che equivale a essere solidale a $\mathcal{S}$) che

$$0 = \alpha \boldsymbol{w}_3 + k\boldsymbol{w}_3 \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_\Omega)\,,$$

che è impossibile se $\alpha \neq 0$.
III: b
Dalla teoria sappiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}$. Quindi nell'ipotesi fatta entrambe sono nulle, e il vettore nullo è costante in ogni terna. Inoltre essendo le due terne costanti l'una nell'altra, tutte le funzioni costanti in una lo sono anche nell'altra.

I.5 Un punto si muove soggetto all'equazione di moto

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})\,.$$

13 Supponiamo che per un'opportuna $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$ valga

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \nabla U(\boldsymbol{X})\,,$$

con $\nabla U(0) = 0$.
Dire in quale caso il punto $\boldsymbol{x} = 0$ è sicuramente di equilibrio stabile. Qui $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ sono costanti.
a

$$-\alpha_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leq U(\boldsymbol{x}) \leq -\alpha_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\,.$$

b

$$\lim_{(x_1,x_2,x_3)\to 0} \frac{U(\boldsymbol{x})}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

14 Se

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\dot{\boldsymbol{X}})\,,$$

ossia se $\boldsymbol{F}$ dipende solo dalla velocità, allora i punti di $\boldsymbol{R}^3$ sono tutti di equilibrio stabile o sono tutti di equilibrio instabile.

a Sì.

b No, esistono sempre punti di equilibrio instabile e altri di equilibrio stabile.

c Nessuna delle precedenti.

15 Supponiamo che

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\dot{\boldsymbol{X}}) = \nabla U(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X},\dot{\boldsymbol{X}})\,,$$

con $U \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$, $\boldsymbol{h} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^6)$, e che $\nabla U(0) = 0$.

In quale dei seguenti casi è possibile che $\boldsymbol{x} = 0$ sia di equilibrio stabile?

a Se $\det D^2U(0) < 0$, e per $\beta > 0$ costante

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X},\dot{\boldsymbol{X}}) = -\beta|\boldsymbol{X}|^4\dot{\boldsymbol{X}}\,.$$

b Se $\det D^2U(0) > 0$, e per $\beta > 0$ costante

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X},\dot{\boldsymbol{X}}) = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: a

Il punto $\boldsymbol{x} = 0$ risulta in questo caso un massimo isolato per U. Nel caso b non si può dedurre nulla.

II: a

Infatti se $\boldsymbol{X}(t)$ risolve l'equazione di moto, anche $\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{x}_0$ lo fa.

III: a

Segue dalla teoria, perché 0 può essere di massimo isolato per il potenziale (se tutti gli autovalori sono negativi) e $\boldsymbol{h}\cdot\dot{\boldsymbol{X}} \le 0$. Nel caso b, sicuramente il punto $\boldsymbol{x} = 0$ è di sella o di minimo isolato per il potenziale.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando un elemento di massa M al punto A del bordo di un disco omogeneo di massa M. Il corpo è vincolato a muoversi in un piano verticale fisso rispetto all'osservatore terrestre mantenendosi a contatto dall'interno con una guida circolare giacente nel medesimo piano. L'atto di moto è in ogni istante con assenza di strisciamento.

16 Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera.

a L'atto di moto è in ogni istante elicoidale e l'asse del moto è tangente alla guida nel punto di contatto tra corpo e guida.

b L'atto di moto è in ogni istante rotatorio e il centro di istantanea rotazione è il punto A.
c Nessuna delle precedenti.

17 Quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento del centro di massa?
a $\frac{1}{2}I\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e I il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro di massa del corpo e ortogonale al corpo stesso.
b $\frac{1}{2}J\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e J il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro geometrico del disco e ortogonale al corpo stesso.
c Nessuna delle precedenti.

18 Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera.
a La centroide mobile (rulletta) coincide con il bordo del disco.
b La centroide mobile (rulletta) è un curva degenere coincidente con il centro della guida.
c Nessuna delle precedenti.

Soluzione
I: c
Il punto solidale che occupa la posizione del punto di contatto ha velocità nulla, quindi l'atto è rotatorio, ma il centro di istantanea rotazione concide con il punto di contatto.
II: a
Il moto relativo al centro di massa è rotatorio con asse ortogonale al corpo e passante per il centro di massa.
III: a
È la curva descritta rispetto al riferimento solidale dal punto di contatto che, in ogni istante, si trova sul bordo del disco.

Prova scritta del 31/03/2021

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 31/03/2021

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi su una superficie regolare S, data dal piano $x_3 = 0$, ossia

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

Il vincolo è scabro, secondo la legge

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si supponga $\boldsymbol{v}(t) \neq 0$ per ogni t.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k(x\boldsymbol{e}_1 + \dot{y}\boldsymbol{e}_2 - R\boldsymbol{e}_3)$$

con $k > 0$, $R \geq 0$.
01 Dire quale dei seguenti è il sistema delle equazioni di moto.
a

$$m\ddot{x} = -kx - \mu kR\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\,,$$
$$m\ddot{y} = -k\dot{y} - \mu kR\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\,.$$

b

$$m\ddot{x} = -kx + \mu kR\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\,,$$
$$m\ddot{y} = -k\dot{y} + \mu kR\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
02 Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dall'energia meccanica del punto definita da

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 + \frac{k}{2}x(t)^2\,.$$

a Esistono moti (diversi dalla quiete) per cui $\dot{\mathcal{E}}(t) < -\mu kR|\boldsymbol{v}(t)|$.
b Esistono moti (diversi dalla quiete) per cui $\dot{\mathcal{E}}(t) = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
03 Dire quando è possibile che il moto sia circolare uniforme con traiettoria $x^2 + y^2 = L^2 > 0$.
a Se $R = 0$ per ogni valore di $L > 0$ esiste un tale moto.
b Se $R > 0$ esistono opportuni valori di $L > 0$ per cui esiste un tale moto.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Si ha $|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}| = |\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_3| = kR$. *Quindi*

$$\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}} = -\mu kR\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\,.$$

II: a
Si ha

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + kx\dot{x} = -k\dot{y}^2 + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{v} = -k\dot{y}^2 - \mu kR|\boldsymbol{v}| < -\mu kR|\boldsymbol{v}|\,,$$

se $\dot{y} \neq 0$.

III: c
Per la formula ottenuta nella soluzione di II, in un moto circolare uniforme l'energia è strettamente decrescente, perfino se $R = 0$. Ma questo contrasta con il fatto che in tale moto evidentemente $\mathcal{E}$ deve essere periodica.

I.2 Una lamina ellittica di massa m e semiassi $a > b$ è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G sulla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

ove $(O, (x_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Su di esso agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP}\,\mathrm{d}s\,,$$

ove $\mathrm{d}s$ è la misura di lunghezza sul bordo della lamina e P denota il suo generico punto. Si tratta quindi di una sollecitazione distribuita. Qui $\beta > 0$ è costante e con I_{33} si denota il momento della lamina rispetto all'asse a essa ortogonale in G.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G = L\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + L\sin\theta \boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{GA} = a\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + a\sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,,$$

ove A è un vertice fissato del bordo della lamina, sull'asse maggiore.
04 Dire quale è l'espressione corretta dell'energia cinetica in forma lagrangiana.
a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}(a^2 + b^2)\dot\theta^2 + \frac{I_{33}}{2}\dot\varphi^2\,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}L^2\dot\theta^2 - \frac{I_{33}}{2}\dot\varphi^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
05 Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dalle componenti lagrangiane della forza distribuita $\beta \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP}\,\mathrm{d}s$.
a $Q_\varphi > 0$ per ogni (φ, θ).
b $Q_\varphi < 0$ per ogni (φ, θ).
c Nessuna delle precedenti.
06 La componente lagrangiana Q_φ dipende da θ?
a No.
b Solo se a, b, β, L soddisfano una opportuna relazione.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: c
Infatti per il teorema di König

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{m}{2}L^2\dot\theta^2 + \frac{I_{33}}{2}\dot\varphi^2\,.$$

II: a
Usando la parametrizzazione della lamina

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}(\varphi,\theta,r,\psi) = \boldsymbol{X}_G(\theta) + \overrightarrow{GP}\,,$$
$$\overrightarrow{GP} = r(a\cos\psi\cos\varphi - b\sin\psi\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 + r(a\cos\psi\cos\varphi + b\cos\varphi\sin\psi)\boldsymbol{e}_2\,,$$

$r \in [0,1]$, $\psi \in [0,2\pi]$, *il generico moto del bordo è dato da* $\boldsymbol{X}^{\text{L}}(\varphi,\theta,1,\psi)$. *Quindi*

$$\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP} = \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial\varphi}\,,$$

quindi

$$\beta\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}s > 0\,.$$

III: a
Basta considerare che

$$\beta\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}s$$

è il prodotto di due fattori entrambi indipendenti da θ.

I.3 Un corpo rigido piano omogeneo di massa M giace nel piano 1–2 ed è delimitato dai medesimi assi e da un arco di parabola di equazione $x_2 = \alpha(x_1 - L)^2$ per $x_1 \in [0, L]$, con α e L due numeri positivi. In figura $\overrightarrow{OA} = L\vec{e}_1$ e $\overrightarrow{OB} = \alpha L^2\vec{e}_2$.

Nei punti A e B sono applicate, rispettivamente, le forze $\vec{f}_A = \lambda\vec{e}_2$ e $\vec{f}_B = 2\lambda\vec{e}_1$, con $\lambda > 0$.
Si risponda alle seguenti domande:
07 Quanto vale la coordinata 1 del centro di massa del corpo rispetto al riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i\}$?
a $\frac{3}{4}L$.
b $\frac{1}{4}L$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Quanto vale il prodotto d'inerzia del corpo rispetto agli assi coordinati 1 e 2 del riferimento solidale?
a $-\frac{19}{20}M\alpha L^3$.
b $-\frac{1}{20}M\alpha L^3$.
c Nessuna delle precedenti.
09 L'asse della sollecitazione $\{\vec{f}_A, \vec{f}_B\}$ di punti di applicazione A e B è la retta di equazione parametrica

a $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}L(1-2\alpha L)$, $x_3 = 0$ con $a \in \mathbb{R}$.
b $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}L(1-2\alpha L)$, $x_3 = a$ con $a \in \mathbb{R}$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Si calcola prima l'area della lamina

$$\text{area} = \int_0^L \mathrm{d}x_1 \int_0^{\alpha(x_1-L)^2} \mathrm{d}x_2 = \int_0^L \mathrm{d}x_1 \alpha(x_1-L)^2 = \frac{1}{3}\alpha L^2.$$

Allora

$$G_1 = \frac{1}{M}\int_0^L \mathrm{d}x_1 \int_0^{\alpha(x_1-L)^2} \mathrm{d}x_2 \frac{3M}{\alpha L^2}x_1 = \frac{3}{\alpha L^2}\int_0^L \mathrm{d}x_1 x_1 \alpha(x_1-L)^2 = \frac{1}{4}L.$$

II: b
Dalla definizione di prodotto d'inerzia si ha

$$I_{O,12} = -\int_0^L \mathrm{d}x_1 \int_0^{\alpha(x_1-L)^2} \mathrm{d}x_2 \frac{3M}{\alpha L^2}x_1 x_2 = -\frac{3M}{\alpha L^2}\int_0^L \mathrm{d}x_1 x_1 \frac{1}{2}\alpha^2(x_1-L)^4 = -\frac{1}{20}M\alpha L^3.$$

III: a
Il momento totale rispetto al polo O e la somma della sollecitazione valgono $\lambda L(1-2\alpha L)\vec{e}_3$ e $2\lambda\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$. Il trinomio invariante è 0 e, quindi, il campo momento è circolare. Per determinare l'asse si deve determinare il punto X rispetto al quale il momento è nullo. Pertanto si scrive

$$0 = \lambda L(1-2\alpha L)\vec{e}_3 + (2\lambda\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2) \times (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3).$$

Risolvendo il sistema si trova a.

I.4 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, e il piano delle fasi (x,p).
10 Se la curva (non chiusa, si noti)

$$\{(x,p) \mid x^2 + p^2 = L^2\,, p > 0\}\,,$$

con $L > 0$ è un'orbita, quale conclusione si può trarre?
a Almeno uno dei due punti $(\pm L,0)$ è di equilibrio, ma non necessariamente entrambi.
b Entrambi i punti $(\pm L,0)$ sono di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.
11 Si assuma che l'orbita $p = p(x)$, $x \in J$, ove J è l'intervallo aperto di definizione della funzione $p(x)$, soddisfi $p(x) > p_0 > 0$ per ogni $x \in J$, per qualche $p_0 > 0$.

a Allora $J = \boldsymbol{R}$.
b Non può esistere un'orbita nelle condizioni descritte.
c Nessuna delle precedenti.
12 Se il potenziale U soddisfa $U(x) \to 1$ per $x \to \pm\infty$, e $U(x) > 1$ per ogni x, allora esiste almeno un punto di equilibrio stabile.
a Sì, ne esiste esattamente uno.
b Sicuramente non ne esistono.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Se il punto $(\pm L,0)$ *non appartiene all'orbita, vuol dire che il moto tende a esso in un tempo infinito e il punto è di equilibrio, secondo un noto risultato teorico.*
II: a
Un'orbita non può cessare di essere definita fino a che $p > 0$.
III: c
Sicuramente esiste un punto di massimo assoluto, ma non è detto che sia isolato, quindi non è detto che sia di equilibrio stabile.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi sulla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.
13 Dire in quale caso, se il vincolo è liscio, l'energia cinetica si conserva; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$.
a Se la curva è una circonferenza.
b Se la forza soddisfa $\boldsymbol{F} = c_1(s, \dot{s})\boldsymbol{N}(s) + c_2(s, \dot{s})\boldsymbol{B}(s)$.
c Nessuna delle precedenti.
14 Sia il vincolo liscio, la forza sia il peso $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3$, e la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia illimitata nella direzione x_3 sia superiormente che inferiormente.
a Allora tutti i moti sono illimitati.
b La curva può avere geometria tale che tutti i moti sono limitati.
c Nessuna delle precedenti.
15 Il vincolo sia scabro, con

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si assuma sempre $\dot{s} > 0$, e anche che $\boldsymbol{F}$ sia identicamente nulla; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$.
a L'energia cinetica non si conserva per nessun moto.
b L'energia cinetica si conserva per ogni moto.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\text{vin}}) \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\text{vin}}) \cdot \dot{s}\boldsymbol{T} = 0 \,.$$

II: b
Si consideri per esempio la curva piana

$$x_3 = ax_1 \sin(bx_1)\,, \qquad x_2 = 0\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Per la conservazione dell'energia tutti i moti sono limitati.
III: a
Infatti l'equazione di moto è

$$m\ddot{s} = -\mu m\dot{s}^2 k\,.$$

Quindi moltiplicando per $\dot{s}$ si trova che $\dot{T} < 0$.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando un elemento di massa $M > 0$ al vertice C di una lamina rettangolare omogenea di stessa massa M i cui lati hanno lunghezza $a \geq b > 0$. I vertici A e B sono tali che $\|\overrightarrow{CA}\| = a$ e $\|\overrightarrow{CB}\| = b$. Considerato il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ con asse 2 verticale ascendente, il corpo è vincolato a muoversi nel piano 1–2 in modo che A e B scorrano, rispettivamente, sugli assi 1 e 2 di detto riferimento.

16 È possibile determinare moti tali che in ogni istante il trinomio invariante dell'atto di moto sia diverso da zero?
a Sì, scegliendo opportunamente a e b.
b No.
c Nessuna delle precedenti.

17 Supponendo che il corpo non sia a riposo, quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento del centro di massa?
a $\frac{1}{2}J\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e J il momento d'inerzia relativo all'asse passante per A e ortogonale alla lamina.
b $\frac{1}{2}I\|\vec{\omega}\|^2 + \frac{1}{2}(2M)\|\vec{v}_A\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo, I il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro di massa del corpo e ortogonale al corpo stesso e $\vec{v}_A$ la velocità del punto A.
c Nessuna delle precedenti.

18 Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
a È possibile scegliere a e b in modo che la centroide fissa (base) sia un'ellisse con assi l'uno il doppio dell'altro.
b La centroide (fissa) è una circonferenza.
c Nessuna delle precedenti.

Soluzione
I: b
Essendo il moto piano, l'atto di moto è necessariamente traslatorio oppure rotatorio, pertanto il trinomio invariante è sempre uguale a zero.
II: c
Il moto relativo al centro di massa è rotatorio con asse ortogonale al corpo e passante per il centro di massa, quindi l'energia cinetica vale $\frac{1}{2}I\|\vec{\omega}\|^2$.
III: b
Dal punto di vista cinematico il sistema si comporta come un ellissografo. Più precisamente, usando il teorema di Chasles si determina il centro di istantanea rotazione e, con semplici argomenti geometrici, si osserva che la sua distanza dall'origine è costantemente uguale alla lunghezza della diagonale del rettangolo.

Prova scritta del 31/05/2021

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 31/05/2021

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla retta mobile $r(t)$

$$x_1 \sin\Big(\frac{\pi}{4}\cos(\alpha t)\Big) - x_2 \cos\Big(\frac{\pi}{4}\cos(\alpha t)\Big) = 0\,, \quad x_3 = 0\,,$$

con $\alpha > 0$ costante. Si tratta quindi di una retta che oscilla tra le posizioni $x_1 = x_2$ e $x_1 = -x_2$ passando per l'asse x_1.
Sul punto agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{X}\,,$$

con $k > 0$ costante.
Si scelga come coordinata lagrangiana l'ascissa s del punto su $r(t)$, con origine in (0,0,0).
01 Quale delle seguenti è l'energia cinetica nel sistema fisso?
a

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}\Big\{\dot{s}^2 + \frac{\pi^2}{16}\alpha^2 s^2\Big\}\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}\Big\{\dot{s}^2 + \frac{\pi^2}{16}\alpha^2 s^2[\sin(\alpha t)]^2\Big\}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
02 Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
a Il potenziale lagrangiano U^{L} esiste ed è funzione solo di s: $U^{\text{L}} = U^{\text{L}}(s)$.
b Il potenziale lagrangiano U^{L} esiste ed è funzione sia di s che di t: $U^{\text{L}} = U^{\text{L}}(s,t)$.
c Nessuna delle precedenti.
03 Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ ove $\boldsymbol{X}_O = 0$, $\boldsymbol{u}_1(t)$ è il versore tangente alla retta $r(t)$, $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{u}_2(t) = \boldsymbol{u}_3(t) \times \boldsymbol{u}_1(t)$. Allora:
a La forza di trascinamento $\boldsymbol{F}_{\text{T}}$ in $\mathcal{S}$ è diretta lungo $\boldsymbol{u}_1(t)$.
b La forza di Coriolis $\boldsymbol{F}_{\text{C}}$ in $\mathcal{S}$ è nulla.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Si ha

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}(t) = s\cos\Big(\frac{\pi}{4}\cos(\alpha t)\Big)\boldsymbol{e}_1 + s\sin\Big(\frac{\pi}{4}\cos(\alpha t)\Big)\boldsymbol{e}_2\,,$$

da cui

$$|\boldsymbol{v}^{\text{L}}|^2 = \dot{s}^2 + \frac{\pi^2}{16}\alpha^2 s^2 [\sin(\alpha t)]^2 \,.$$

II: a
Infatti

$$U^{\text{L}} = -\frac{k}{2}s^2 \,.$$

III: c
Calcoliamo

$$\boldsymbol{a}_{T} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{X}^{\text{L}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{X}^{\text{L}}) = \dot{\omega}\boldsymbol{u}_3 \times s\boldsymbol{u}_1 + \omega^2 s\boldsymbol{u}_3 \times (\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1)$$
$$= s\dot{\omega}\boldsymbol{u}_2 - s\omega^2\boldsymbol{u}_1 \,.$$

Infatti $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t)\boldsymbol{u}_3(t)$ non è costante perché la rotazione non è uniforme. Inoltre

$$\boldsymbol{a}_{C} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = 2\omega\boldsymbol{u}_3 \times \dot{s}\boldsymbol{u}_1 = 2\omega\dot{s}\boldsymbol{u}_2 \,,$$

che in genere non è nulla.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze di potenziale

$$U(x_1, x_2, x_3) = -\alpha(x_1^2 + x_2^2) \,, \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante.
04 Il punto sia vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \,,$$

$R > 0$. Il vincolo è liscio.
a Esistono almeno due posizioni di equilibrio stabile.
b Esiste esattamente una posizione di equilibrio stabile.
c Nessuna delle precedenti.
05 Il punto sia vincolato alla curva

$$x_1 = 0 \,, \qquad x_2 = \beta x_3^2 \,,$$

ove $\beta > 0$ è costante. Il vincolo è liscio. Si scelga $z = x_3 \in \boldsymbol{R}$ come coordinata lagrangiana.
a In $z = 0$ si possono definire le piccole oscillazioni.
b Per alcuni valori di $\beta > 0$ in $z = 0$ si ha equilibrio instabile.
c Nessuna delle precedenti.
06 Il punto sia vincolato alla circonferenza

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2 \,,$$

con $s \in (-\pi R, \pi R)$, $R > 0$. Si prenda s come coordinata lagrangiana. Il vincolo sia scabro con legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico, e si assuma sempre $\dot{s} \neq 0$.

a Tutti i moti sono indipendenti da α.
b Esistono moti uniformi.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Infatti le posizioni $(0,0,\pm R)$ *sono di massimo isolato per il potenziale lagrangiano e i vincoli sono fissi.*
II: c
Il potenziale lagrangiano è

$$U^{\text{L}}(z) = -\alpha(\beta z^2)^2 = -\alpha\beta^2 z^4\,, \qquad z \in \boldsymbol{R}\,,$$

che ha un massimo isolato in 0*, ma ha ivi derivata seconda nulla:*

$$\frac{\mathrm{d}^2 U^{\text{L}}}{\mathrm{d}z^2}(0) = -12\alpha\beta^2 z^2_{|z=0} = 0\,.$$

III: b
L'equazione di moto dà

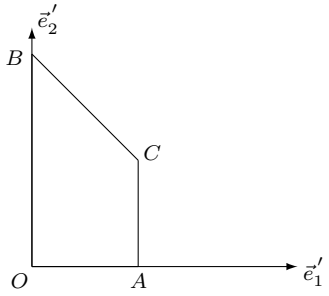
$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T} + \mathbf{f}_{\text{vin}}\cdot\boldsymbol{T}\,,\\ m\frac{\dot{s}^2}{R} &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N} + \mathbf{f}_{\text{vin}}\cdot\boldsymbol{N}\,,\\ 0 &= \mathbf{f}_{\text{vin}}\cdot\boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Sostituendo $\boldsymbol{F} = -2\alpha(x_1, x_2, 0) = 2\alpha R\boldsymbol{N}$ *e usando la legge di attrito si arriva a*

$$m\ddot{s} = -\mu\,\mathrm{sign}(\dot{s})\left|m\frac{\dot{s}^2}{R} - 2\alpha R\right|\,.$$

Se $\dot{s}^2 = 2\alpha R^2/m$ *il moto è uniforme.*

I.3 Un sistema olonomo a vincoli perfetti è costituito da una lamina rigida pesante omogenea di massa M ottenuta saldando una lamina quadrata a una a forma di triangolo rettangolo isoscele come illustrato in figura.
In figura è rappresentata la lamina assieme al riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i'\}$. Si nota che $\overrightarrow{OA} = L\vec{e}_1'$, $\overrightarrow{OB} = 2L\vec{e}_2'$ e $\overrightarrow{OC} = L\vec{e}_1' + L\vec{e}_2'$.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 2 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 2 mediante un vincolo di cerniera ideale.

Come coordinata lagrangiana si usi l'anomalia φ individuata dagli assi 3 fisso e solidale orientata in verso antiorario rispetto all'asse 2.
Si risponda alle seguenti domande:
07 Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse coordinato 2 del riferimento solidale?
a $\frac{5}{6}ML^2$
b $\frac{19}{9}ML^2$
c Nessuna delle precedenti.
08 Quanto vale il momento angolare del corpo calcolato usando come polo O?
a $\frac{5}{18}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_2'$
b $-\frac{11}{36}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_1' + \frac{5}{18}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_2'$
c Nessuna delle precedenti.
09 Quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento fisso?
a $\frac{41}{24}ML^2\dot{\varphi}^2$
b $\frac{5}{36}ML^2\dot{\varphi}^2$
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Il momento d'inerzia può essere calcolato sommando il contributo della lamina quadrata e di quella triangolare. Oppure, si procede ad integrazione diretta: osservato che la densità superficiale di massa vale $M/(L^2 + L^2/2) = 2M/(3L^2)$, si ha

$$I'_{O,22} = \int_0^L \mathrm{d}x'_1 \int_0^{2L-x'_1} \mathrm{d}x'_2 \frac{2M}{3L^2}(x'_1)^2 = \frac{5}{18}ML^2.$$

II: b
Il moto è rotatorio e la velocità angolare ha componenti $(0, \dot{\varphi}, 0)$ relative al riferimento solidale. Allora le componenti del momento angolare relative al riferimento solidale sono

$$L'_O = I'_O \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I'_{O,12}\dot{\varphi} \\ I'_{O,22}\dot{\varphi} \\ I'_{O,32}\dot{\varphi} \end{pmatrix}.$$

Essendo l'asse solidale 3 principale $I'_{O,32} = 0$, quindi $\vec{L}_O = I'_{O,12}\dot{\varphi}\vec{e}_1' + I'_{O,22}\dot{\varphi}\vec{e}_2'$. Resta dal cacolare il prodotto d'inerzia

$$I'_{O,12} = -\int_0^L \mathrm{d}x'_1 \int_0^{2L-x'_1} \mathrm{d}x'_2 \frac{2M}{3L^2}x'_1x'_2 = -\frac{11}{36}ML^2.$$

III: b
Essendo il moto rotatorio $T = I'_{O,22}\dot{\varphi}^2/2$.

I.4 Un sistema di n punti materiali si muove soggetto a vincoli olonomi non degeneri, con ℓ gradi di libertà.

10 L'ipotesi dei lavori virtuali permette di:
a Scrivere l'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana.
b Trovare almeno una parametrizzazione lagrangiana.
c Nessuna delle precedenti.
11 Quale delle seguenti affermazioni sull'energia cinetica in forma lagrangiana è corretta?
a Se $\ell = 1$ e i vincoli sono fissi, $T^{\text{L}} = a(q_1)\dot{q}_1^2$, con a funzione positiva.
b Se i vincoli sono mobili, può essere $T^{\text{L}} < 0$ in qualche caso.
c Nessuna delle precedenti.
12 Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali, la reazione vincolare totale (data qui come vettore colonna)

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = (\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^1, \dots, \mathbf{f}_{\text{vin}}{}^n)^{\text{t}}$$

soddisfa (i prodotti indicati sono righe per colonne):
a Se $(\frac{\partial f_k}{\partial z_j})$ è la iacobiana dei vincoli,

$$\Big(\frac{\partial f_k}{\partial z_j}\Big)\mathbf{f}_{\text{vin}} = 0\,.$$

b Se $(\frac{\partial z_j^{\text{L}}}{\partial q_h})$ è la iacobiana della parametrizzazione lagrangiana,

$$\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^{\text{t}}\Big(\frac{\partial z_j^{\text{L}}}{\partial q_h}\Big) = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
L'energia cinetica si calcola direttamente dalla rappresentazione lagrangiana, e l'esistenza di almeno una tale parametrizzazione segue dal teorema del Dini.
II: a
È la classica rappresentazione data dalla teoria. L'energia cinetica è somma di quantità non negative.
III: b
Infatti la b equivale a

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\text{L}}}{\partial q_h} = 0\,, \qquad h = 1\,, \dots\,, \ell\,,$$

che è l'ipotesi dei lavori virtuali.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ si muove in $\boldsymbol{R}^3$ soggetto all'azione della forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) = \nabla U(\boldsymbol{X}) + \alpha(\boldsymbol{X})\dot{\boldsymbol{X}}\,,$$

ove $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$ e $\alpha \in C^1(\boldsymbol{R}^3)$.
13 Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

a Se $\nabla U(\boldsymbol{x}_0) = 0$ allora $\boldsymbol{x}_0$ è di equilibrio stabile.
b Se $\alpha(\boldsymbol{x}_0) = 0$, allora $\boldsymbol{x}_0$ è di equilibrio stabile.
c Nessuna delle precedenti.

14 Quale delle seguenti condizioni assicura che esista almeno un punto di equilibrio stabile?
a Vale $\alpha(\boldsymbol{x}) \leq 0$ per ogni $\boldsymbol{x}$ e U è un polinomio di grado 2 tale che $U(\boldsymbol{x}) \to -\infty$ se $|\boldsymbol{x}| \to +\infty$.
b Vale $\alpha(\boldsymbol{x}) \leq 0$ per ogni $\boldsymbol{x}$ e $\nabla U(\boldsymbol{x}_0) = 0$ per un unico $\boldsymbol{x}_0$.
c Nessuna delle precedenti.

15 Definiamo l'energia

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))\,.$$

Supponiamo che $\mathcal{E}(t)$ si mantenga costante lungo ciascun fissato moto $\boldsymbol{X}(t)$. Allora sicuramente si ha:
a La forza $\alpha(\boldsymbol{X})\dot{\boldsymbol{X}}$ ammette un potenziale lagrangiano.
b Vale $\alpha(\boldsymbol{x}) = 0$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$.
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE
I: c
Nel caso a il punto è di equilibrio, ma nulla si può dire sulla stabilità; nel caso b non è neppure detto che $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,0) = 0$.
II: a
Se denotiamo

$$U(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} c_{ij}x_i x_j + \sum_{j=1}^{3} d_j x_j + b\,,$$

con c_{ij}, d_j, $b \in \boldsymbol{R}$, *allora la matrice* (c_{ij}) *deve essere definita negativa nelle ipotesi date; d'altronde* $(c_{ij}) = D^2U$, *quindi* U *ha un massimo isolato.*
III: b
La $\alpha(\boldsymbol{X})\dot{\boldsymbol{X}}$ *non può ammettere potenziale lagrangiano perché dipende dalla velocità. Invece, se fosse per esempio* $\alpha(\boldsymbol{x}_0) > 0$ *si potrebbe considerare il moto con* $\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}_0$, $\dot{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{v}_0$, *con* $\boldsymbol{v}_0 \neq 0$ *arbitrario. Allora lungo tale moto*

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = \int_0^t \alpha(\boldsymbol{X}(\tau))|\dot{\boldsymbol{X}}(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau > 0\,,$$

almeno per $t > 0$ *piccoli.*

I.6 Un corpo rigido di massa M è sottoposto al vincolo di giunto ideale di polo O. Pertanto il moto è sferico di polo O rispetto al riferimento terrestre $\{O, \vec{e}_i\}$ con asse 3 verticale ascendente.

16 Quanto vale la componente 1 relativa al riferimento terrestre del momento totale della sollecitazione vincolare calcolato rispetto al polo O?
a 0
b Mg

c Nessuna delle precedenti.
17 Si supponga che il punto O coincida con il centro di massa del corpo e l'unica sollecitazione attiva agente sul corpo sia il peso. Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
a La velocità angolare è una costante del moto.
b Il momento angolare calcolato rispetto al polo O è una costante del moto.
c Nessuna delle precedenti.
18 Si supponga che il corpo sia a simmetria cilindrica rispetto a O e che il centro di massa non coincida con O. Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
a L'energia cinetica è una costante del moto.
b La componente 3 relativa al riferimento terrestre del momento angolare calcolato rispetto al polo O è una costante del moto.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Il momento è nullo perché il giunto è liscio.
II: b
Il moto è alla Poinsot di polo O.
III: b
Il moto è quello della trottola e l'asse 3 *è verticale.*

Prova scritta del 02/07/2021

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 02/07/2021

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza L e massa m è soggetta ai vincoli

$$x_{1A} = 0\,, \quad x_{2A} = 0\,, \quad x_{3A} = 0\,, \quad x_{3B} = L\sin(\alpha t)\,,$$

con $\alpha > 0$ costante. Si usi come coordinata lagrangiana $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_B^{\text{L}} = L\cos\varphi\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 + L\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_3\,.$$

Sull'asta agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = (\beta x_1\boldsymbol{e}_1 + \gamma x_2\boldsymbol{e}_2)\,\mathrm{d}s\,,$$

con β, $\gamma \in \boldsymbol{R}$ costanti.

01 Dire quale delle seguenti è la componente lagrangiana delle forze per ogni valore di α, β, γ.

a

$$Q_\varphi = 0\,.$$

b

$$Q_\varphi = \cos\varphi \sin\varphi (\cos(\alpha t))^2 (\gamma - \beta)\frac{L^3}{3}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

02 Quale delle seguenti condizioni iniziali è compatibile con il vincolo?

a $\boldsymbol{X}_B(0) = L\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{v}_B(0) = L\alpha(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3)$.

b $\boldsymbol{X}_B(0) = L\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{v}_B(0) = L\alpha(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3)$.

c Nessuna delle precedenti.

03 Se è noto che all'istante iniziale

$$\boldsymbol{X}_B(0) = L\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{v}_B(0)\cdot\boldsymbol{e}_2 = v_0\,,$$

allora:

a

$$\dot\varphi(0) = \frac{v_0}{L}\,.$$

b

$$\dot\varphi(0) = \alpha + \frac{v_0}{L}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: b

Si calcola

$$Q_\varphi = \int_0^L \mathrm{d}\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = \cos\varphi\sin\varphi(\cos(\alpha t))^2(\gamma-\beta)\int_0^L s^2\,\mathrm{d}s$$
$$= \cos\varphi\sin\varphi(\cos(\alpha t))^2(\gamma-\beta)\frac{L^3}{3}\,.$$

II: a

In genere infatti

$$\boldsymbol{v}_B = L\dot\varphi\cos(\alpha t)[-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2] + L\alpha[-\cos\varphi\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 + \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_3]\,.$$

Quindi $\boldsymbol{X}_B(0) = L\boldsymbol{e}_2$ *implica* $\varphi(0) = \pi/2$ *e*

$$\boldsymbol{v}(0) = L(-\dot\varphi(0)\boldsymbol{e}_1 + \alpha\boldsymbol{e}_3)\,.$$

III: a

Usando il calcolo sopra e la condizione data, si ha $\varphi(0) = 0$ *e*

$$\boldsymbol{v}_B(0) = L\dot\varphi(0)\boldsymbol{e}_2 + L\alpha\boldsymbol{e}_3\,.$$

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (R\cos(\alpha s), R\sin(\alpha s), h\alpha s)\,,$$

con $\alpha = (R^2+h^2)^{-1/2}$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea. Si scelga s come coordinata lagrangiana.
Si ricordi:

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h)\,, \quad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0)\,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R)\,, \quad k(s) = R\alpha^2\,, \quad \tau(s) = -\alpha^2 h\,.$$

04 Il vincolo sia liscio. Il punto sia soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \beta|\boldsymbol{v}|^2\boldsymbol{e}_3\,,$$

con $\beta > 0$ costante. Le condizioni iniziali siano $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Allora il moto $s(t)$ soddisfa:
a Per $t \to +\infty$ si ha $s(t) \to +\infty$.
b Il moto non è definito su $[0, +\infty)$.
c Nessuna delle precedenti.
05 Il vincolo sia scabro e tale che per $\mu > 0$ costante

$$|\mathbf{f}^{\rm tan}_{\rm vin}| = \mu|\mathbf{f}^{\rm nor}_{\rm vin}|\,.$$

Sul punto sia applicata la forza (ove $c > 0$ è costante)

$$\boldsymbol{F} = c|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{e}_3\,.$$

Le condizioni iniziali siano $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$.
a Esiste un valore $\bar{\mu} > 0$, indipendente da v_0, tale che se $\mu > \bar{\mu}$ allora $\dot{s}(t)$ è decrescente per $t > 0$.
b Esiste un valore $\bar{v}_0 > 0$, indipendente da μ, tale che se $v_0 > \bar{v}_0$ allora $\dot{s}(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle precedenti.
06 Il vincolo sia scabro, e valga la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico con coefficiente $\mu_s > 0$. Sul punto in quiete nella posizione (R,0,0) viene applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3\boldsymbol{e}_3\,,$$

con λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \boldsymbol{R}$.
a Fissati μ_s, λ_2, λ_3 esiste sempre $\lambda_1 \neq 0$ tale che il punto resti in quiete.
b Se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ il punto resta in quiete per ogni scelta di λ_3, μ_s.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
L'equazione di moto è

$$m\ddot{s} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T} = \beta\dot{s}^2\alpha h\,,$$

da cui risolvendo per separazione delle variabili

$$\dot{s}(t) = \frac{v_0}{1 - \frac{v_0 \beta \alpha h}{m} t}\,,$$

definita solo per $t < m/(v_0 \beta \alpha h)$.
II: a
Infatti l'equazione di moto è

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= ch\alpha\dot{s} - \mu\sqrt{(m\dot{s}^2 k)^2 + (\alpha R c \dot{s})^2} \\ &= \big(ch\alpha - \mu\sqrt{m^2\dot{s}^2k^2 + (\alpha R c)^2}\big)\dot{s} \le \big(ch\alpha - \mu\alpha R c\big)\dot{s} < 0 \end{aligned}$$

se $\dot{s} > 0$ *e* $\mu > \bar{\mu} = h/R$.
III: a
Infatti si ha

$$\boldsymbol{T}(0) = \alpha(0, R, h)\,, \quad \boldsymbol{N}(0) = (-1,0,0)\,, \quad \boldsymbol{B}(0) = \alpha(0, -h, R)\,,$$

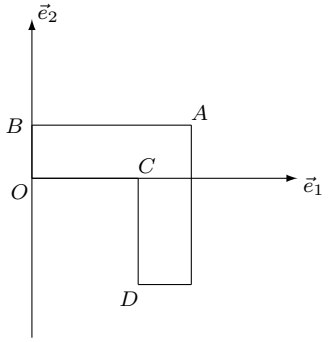
cosicché la condizione $|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}| \le \mu_s |\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|$ *diviene*

$$\alpha|\lambda_2 R + \lambda_3 h| \le \mu_s \sqrt{\lambda_1^2 + (-\alpha h \lambda_2 + \alpha R \lambda_3)^2}\,.$$

Segue che a è vera, mentre per b si avrebbe per $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ *la condizione*

$$h|\lambda_3| \le \mu_s R |\lambda_3|\,.$$

I.3 Un sistema olonomo a vincoli perfetti è costituito da una lamina rigida pesante omogenea di massa M.
In figura è rappresentata la lamina assieme al riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i\}$. Si nota che i punti A, B, C e D sono tali che $\overrightarrow{OA} = \frac{3}{2}L\vec{e}_1 + \frac{1}{2}L\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}L\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC} = L\vec{e}_1$ e $\overrightarrow{OD} = L\vec{e}_1 - L\vec{e}_2$, con L una costante positiva.



Nei punti A e B sono applicate, rispettivamente, le forze $\vec{f}_A = \lambda\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ e $\vec{f}_B = \lambda\vec{e}_3$, con $\lambda > 0$.
Si risponda alle seguenti domande.
07 Quanto vale la coordinata 1 del centro di massa del corpo rispetto al riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i\}$?

a $\frac{3}{4}L$.
b $\frac{1}{20}L$.
c Nessuna delle precedenti.

08 Quanto vale il prodotto d'inerzia del corpo rispetto agli assi coordinati 1 e 2 del riferimento solidale?
a $-\frac{19}{15}ML^2$.
b $\frac{11}{80}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.

09 L'asse della sollecitazione $\{\vec{f}_A, \vec{f}_B\}$ di punti di applicazione A e B è la retta di equazione parametrica
a $x_1 = a + \frac{1}{2}L$, $x_2 = a$, $x_3 = a$ con $a \in \mathbb{R}$.
b $x_1 = a - \frac{1}{2}L$, $x_2 = a$, $x_3 = a$ con $a \in \mathbb{R}$.
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: c

Suddividendo la lamina in due rettangoli di masse $2M/5$ e $3M/5$, si può scrivere

$$G_1 = \frac{1}{M}\Big[\frac{2}{5}M\frac{1}{2}L + \frac{3}{5}M\frac{5}{4}L\Big] = \frac{19}{20}L,$$

ove si è usata la proprietà additiva.

II: b

Dalla definizione di prodotto d'inerzia si ha

$$I_{O,12} = -\int_0^L \mathrm{d}x_1 \int_0^{L/2} \mathrm{d}x_2 \frac{4M}{5L^2}x_1x_2 - \int_L^{3L/2} \mathrm{d}x_1 \int_{-L}^{L/2} \mathrm{d}x_2 \frac{4M}{5L^2}x_1x_2 = \frac{11}{80}ML^2.$$

III: a

Il trinomio invariante è $3L\lambda^2/2$, quindi il campo momento non è né costante né circolare. La somma della sollecitazione è $\lambda\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_3$. Per determinare l'asse si deve determinare il punto X rispetto al quale il momento è parallelo alla somma della sollecitazione. Pertanto si calcola $\vec{M}_O = L\lambda/2\vec{e}_1 + L\lambda\vec{e}_2$ e si scrive

$$\mu(\lambda\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_3) = \frac{1}{2}L\lambda\vec{e}_1 + L\lambda\vec{e}_2 + (\lambda\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_3) \times (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3).$$

Il sistema nelle incognite μ, x_1, x_2 e x_3 è compatibile se $\mu = L/2$. In tal caso si trova la soluzione A.

I.4 Un sistema di n punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$ è soggetto a m vincoli olonomi regolari, in modo da avere $\ell = 3n - m > 0$ gradi di libertà. Denotiamo con $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^i$ la reazione vincolare che agisce su $\boldsymbol{X}_i$.

10 L'ipotesi dei lavori virtuali implica:
a Per ogni $t_1 < t_2$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{X}}_i(t) \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^i(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

b L'atto di moto del sistema appartiene allo spazio degli spostamenti virtuali.
c Nessuna delle precedenti.
11 Supponiamo che $\boldsymbol{q} \in Q \subset \boldsymbol{R}^\ell$ siano coordinate lagrangiane, e anche che le forze direttamente applicate siano conservative con potenziale

$$U(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)\,.$$

Valga l'ipotesi dei lavori virtuali.
a Esiste il potenziale lagrangiano come funzione delle sole $\boldsymbol{q}$.
b Può non esistere il potenziale lagrangiano.
c Nessuna delle precedenti.
12 Supponiamo $n = 2$ e che il vincolo sia

$$|\boldsymbol{X}_1(t) - \boldsymbol{X}_2(t)|^2 = R(t)^2\,,$$

con $R : \boldsymbol{R} \to (0, +\infty)$, $R \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. L'ipotesi dei lavori virtuali implica che:
a ${\mathbf{f}_{\text{vin}}}^1$ e ${\mathbf{f}_{\text{vin}}}^2$ sono ortogonali fra di loro.
b ${\mathbf{f}_{\text{vin}}}^1$ e ${\mathbf{f}_{\text{vin}}}^2$ sono parallele fra di loro.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: c
La singola reazione vincolare non necessariamente fa lavoro nullo. L'atto di moto appartiene allo spazio degli spostamenti effettivi.
II: c
Il potenziale lagrangiano esiste come funzione

$$U^{\text{L}}(\boldsymbol{q}, t) = U(\boldsymbol{X}_1^{\text{L}}(\boldsymbol{q}, t), \dots, \boldsymbol{X}_n^{\text{L}}(\boldsymbol{q}, t))\,.$$

III: b
Infatti se f indica il vincolo, per $\lambda \in \boldsymbol{R}$

$$({\mathbf{f}_{\text{vin}}}^1, {\mathbf{f}_{\text{vin}}}^2) = \lambda(\nabla_{\boldsymbol{X}_1} f, \nabla_{\boldsymbol{X}_2} f)\,,$$

e $\nabla_{\boldsymbol{X}_1} f = -\nabla_{\boldsymbol{X}_2} f$.

I.5 Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}))$ ove

$$\boldsymbol{X}_O(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,,$$

e la terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è calcolata in $s(t)$. Qui $\boldsymbol{\psi}$ è una curva regolare con curvatura $k > 0$, e l'ascissa curvilinea $s(t)$ di $\boldsymbol{X}_O(t)$ è data da $s \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Supponiamo sempre $\dot{s}(t) \neq 0$.
13 Si consideri il moto

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_O(t) + r(t)\boldsymbol{B}(s(t))\,,$$

con $r \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Allora se la curva $\boldsymbol{\psi}$ è piana
a La forza di trascinamento in $\mathcal{S}$ su $\boldsymbol{X}$ è nulla.

b La forza di Coriolis in $\mathcal{S}$ su $\boldsymbol{X}$ è nulla.
c Nessuna delle precedenti.
14 Consideriamo un moto $\boldsymbol{X}$ vincolato al piano per $\boldsymbol{X}_O$ perpendicolare a $\boldsymbol{B}$. Allora, supponendo $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(t) \neq 0$ per tale moto, si ha:
a La forza di Coriolis su $\boldsymbol{X}(t)$ non è mai nulla.
b La forza di Coriolis su $\boldsymbol{X}(t)$ può annullarsi, ma solo se la curva è piana.
c Nessuna delle precedenti.
15 Un punto materiale sia vincolato alla retta mobile per $\boldsymbol{X}_O$ parallela a $\boldsymbol{T}$. Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali allora
a La reazione vincolare risulta ortogonale a $\boldsymbol{T}$ in ogni istante.
b La reazione vincolare risulta parallela a $\boldsymbol{T}$ in ogni istante.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Si sa che in genere

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{s}[-\tau \boldsymbol{T} + k\boldsymbol{B}]\,;$$

inoltre

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \dot{r}\boldsymbol{B}$$

e quindi

$$\boldsymbol{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \tau \dot{s}\dot{r}\boldsymbol{N}\,.$$

Invece la forza di trascinamento non è nulla, contenendo per esempio $\boldsymbol{a}_O$.
II: a
Sia $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \alpha\boldsymbol{T} + \beta\boldsymbol{N}$. *Per l'espressione già ricordata di* $\boldsymbol{\omega}$ *si ottiene*

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \dot{s}(-\beta k\boldsymbol{T} + \alpha k\boldsymbol{N} - \beta\tau\boldsymbol{B})\,,$$

che non si annulla mai perché per ipotesi $\dot{s} \neq 0$, $k > 0$ *e* $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.
III: a
I vincoli possono essere espressi come

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_O(t)) \cdot \boldsymbol{N}(s(t)) = 0\,, \quad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_O(t)) \cdot \boldsymbol{B}(s(t)) = 0\,,$$

i cui gradienti sono esattamente $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$; *dunque* $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in \langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B} \rangle$.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando la base di un cono omogeneo circolare retto a una delle due basi di un cilindro omogeneo circolare retto in modo che l'asse di simmetria del cono e quello del cilindro siano coincidenti. Il cilindro e il cono hanno stessa massa, stesso raggio di base e stessa altezza. Il corpo si muove di moto sferico e il vincolo è stato realizzato mediante un giunto ideale. La sola sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso.
16 Supponendo che il polo del moto sia il vertice del cono, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?
a La quantità di moto totale del corpo.
b Il momento angolare calcolato usando il vertice del cono come polo di riduzione.

c Nessuna delle precedenti.

17 Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del corpo, che moto esibisce il corpo se la velocità angolare iniziale forma un angolo di ampiezza $\pi/16$ con l'asse di simmetria del corpo?

a Un moto rotatorio.

b Un moto di precessione.

c Nessuna delle precedenti.

18 Supponendo che il polo del moto sia il centro di massa del cilindro, quali delle seguenti quantità è costante in corrispondenza di un qualsiasi moto del corpo?

a L'energia meccanica totale.

b L'energia cinetica.

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: c

Si tratta del moto della trottola.

II: b

Il moto è alla Poinsot, il solido è un giroscopio e la velocità angolare iniziale non è parallela a uno degli assi principali di inerzia.

III: a

Il moto è quello della trottola.

Prova scritta del 02/09/2021

MODEL MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 02/09/2021

I.1 Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere il centro G sulla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

con $R > L$. Inoltre l'asta è vincolata a mantenersi ortogonale alla tangente $\boldsymbol{T}_G$ della circonferenza in G.

Sull'asta agisce la forza applicata in B

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha \boldsymbol{T}_G + \beta \boldsymbol{T}_G \times \overrightarrow{GB}\,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti assegnate.

Si scelgano come coordinate lagrangiane $s \in (-\pi R, \pi R)$ e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{GB} = L\cos\varphi\frac{\boldsymbol{X}_G}{R} + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_3\,.$$

01 Sia I il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse a essa ortogonale in G. L'energia cinetica dell'asta è:

a
$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{I}{2}\Big[\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{s}^2}{R^2}(\cos\varphi)^2\Big]\,.$$

b
$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

02 La componente lagrangiana Q_φ delle forze è:

a Indipendente da α.

b Indipendente da β.

c Nessuna delle precedenti.

03 La forza $\boldsymbol{F}_B$ è conservativa.

a Sì.

b Sì, ma solo se $\beta = 0$.

c Nessuna delle precedenti.

Soluzione

I: a

Usiamo il teorema di König; quindi

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Consideriamo le basi $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$ *e*

$$\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h) = \Big(\frac{\overrightarrow{GB}}{L}, \boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{u}_3\Big)\,, \qquad \mathcal{N} = \Big(\frac{\boldsymbol{X}_G}{R}, \boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{e}_3\Big)\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} = \frac{\dot{s}}{R}\boldsymbol{e}_3 - \dot{\varphi}\boldsymbol{T}(s) = \frac{\dot{s}}{R}\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 - \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2 + \frac{\dot{s}}{R}\cos\varphi\boldsymbol{u}_3\,.$$

Sostituendo l'espressione di $\boldsymbol{\sigma}_G$ *in* $\mathcal{M}$*, ossia*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\,,$$

si ottiene il risultato.

II: a

Si calcola

$$Q_\varphi = \boldsymbol{F}_B\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}_B}{\partial\varphi} = [\alpha\boldsymbol{T} + \beta\boldsymbol{T}\times\overrightarrow{GB}]\cdot\Big[-L\sin\varphi\frac{\boldsymbol{X}_G}{R} + L\cos\varphi\boldsymbol{e}_3\Big] = \beta L\cos\varphi\boldsymbol{T}\times\overrightarrow{GB}\cdot\boldsymbol{e}_3\,,$$

perché $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{X}_G = 0$, $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$.
III: c
Non lo è neppure se $\beta = 0$, *perché in questo caso la sua circuitazione intorno all'asse* x_3 *vale* $2\pi R\alpha \neq 0$ *in generale.*

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Il vincolo è scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico con coefficiente μ; si assuma sempre $\boldsymbol{v} \neq 0$.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{T} + \beta \boldsymbol{N}\,,$$

con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ terna intrinseca della curva e α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti assegnate.
04 L'equazione di moto è:
a

$$m\ddot{s} = \alpha - \operatorname{sign}(\dot{s})\mu\beta\,.$$

b

$$m\ddot{s} = \alpha - \operatorname{sign}(\dot{s})\mu \left| m\frac{\dot{s}^2}{R} - \beta \right|\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
05 Sono possibili moti uniformi.
a Solo se $\alpha = 0$.
b Per ogni valore di (α, β) con $\beta > 0$.
c Nessuna delle precedenti.
06 Sono possibili moti in cui $\ddot{s}$ è una costante diversa da 0?
a Sì, ma solo se $\alpha \neq 0$.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti l'equazione di moto proiettata sulla terna intrinseca dà

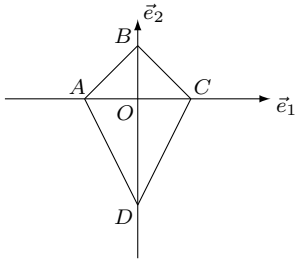
$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \alpha + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}\,, \\ m\dot{s}^2 R^{-1} &= \beta + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N}\,, \\ 0 &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

II: b
Mettendo $\ddot{s} = 0$ *nell'equazione di moto si ottiene*

$$\pm\mu\Big(m\frac{\dot{s}^2}{R} - \beta\Big) = |\alpha|\,, \quad \textit{ossia} \quad \dot{s}^2 = \frac{R}{m}\Big(\beta \pm \frac{|\alpha|}{\mu}\Big)\,,$$

che ha soluzioni diverse da $\dot{s} = 0$ *almeno se* $\beta > 0$..
III: b
Se $\ddot{s}$ *è una costante diversa da* 0, *allora* $\dot{s}$ *non può essere costante; ma questo contraddice l'equazione di moto.*

I.3 Una lamina rigida omogenea di massa M ha la forma in figura, ove $\overrightarrow{OA} = -L\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = L\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC} = L\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OD} = -2L\vec{e}_2$, con $L > 0$.



Il riferimento $\{O, \vec{e}_i\}$ in figura è solidale alla lamina. In B e in D agisce la forza $-\lambda\vec{e}_1$, con $\lambda > 0$. La lamina è vincolata in modo da mantenersi in quiete rispetto a un riferimento fisso.

07 Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse coordinato 1 del riferimento solidale?
a $\frac{1}{2}ML^2$.
b $\frac{1}{6}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.

08 Quanto vale la coordinata 2 del centro di massa rispetto al riferimento in figura?
a $-\frac{1}{2}L$.
b $-\frac{1}{6}L$.
c Nessuna delle precedenti.

09 Per quanto riguarda la sollecitazione considerata si può affermare che
a l'asse della sollecitazione è la retta parallela all'asse 1 passante per il punto medio del segmento $\overline{BD}$ e la sollecitazione è equivalente alla forza $-2\lambda\vec{e}_1$ applicata in tale punto medio.
b l'asse della sollecitazione è la retta parallela all'asse 2 passante per il punto medio del segmento $\overline{BD}$ e la sollecitazione è equivalente alla forza $2\lambda\vec{e}_2$ applicata in tale punto medio.
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: a

La densità superficiale di massa vale $M/(3L^2)$, si ha

$$I_{O,11} = 2\int_0^L \mathrm{d}x_1 \int_{-2L+2x_1}^{L-x_1} \mathrm{d}x_2 \frac{M}{3L^2}(x_2)^2 = \frac{1}{2}ML^2.$$

II: c

Per motivi di simmetria la coordinata cercata è uguale a quella del centro di massa della porzione di corpo a destra dell'asse verticale. Allora

$$G_2 = \frac{1}{M/2}\int_0^L \mathrm{d}x_1 \int_{-2L+2x_1}^{L-x_1} \mathrm{d}x_2 \frac{M/2}{3L^2/2}x_2 = -\frac{1}{3}L.$$

III: a
La somma della sollecitazione è $-2\lambda\vec{e}_1$ e il momento totale rispetto a O è $-L\lambda\vec{e}_3$. Il trinomio invariante è quindi nullo e l'asse della sollecitazione è la retta passante per un punto X rispetto al quale il momento totale è nullo e parallela al vettore somma della sollecitazione. Resta da determinare il punto X risolvendo l'equazione $0 = \vec{M}_O + (-2\lambda\vec{e}_1)\times\overrightarrow{OX}$. L'affermazione sull'equivalenza è immediata dal momento che la nuova sollecitazione ha stessa somma e stesso momento rispetto a X.

I.4 In ciascuno dei seguenti casi dire se il moto nel piano (x_1, x_2) soggetto al campo di forze indicato ha un punto di equilibrio stabile in (0,0).
Qui α, β, $\gamma > 0$ sono costanti positive assegnate.
10

$$\boldsymbol{F} = -\alpha x_1 \boldsymbol{e}_1 + \beta x_2 \boldsymbol{e}_2 \,.$$

a Sì.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
11

$$\boldsymbol{F} = -\alpha x_1 \boldsymbol{e}_1 - \beta x_2 \boldsymbol{e}_2 - \gamma \dot{x}_2 \boldsymbol{e}_2 \,.$$

a Sì.
b Sì, ma solo se $\alpha = \beta$.
c Nessuna delle precedenti.
12

$$\boldsymbol{F} = (-\alpha x_1 - \gamma \dot{x}_1)\boldsymbol{e}_1 \,.$$

a No.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Infatti il potenziale

$$U = \frac{1}{2}(-\alpha x_1^2 + \beta x_2^2)$$

ha un punto di sella in (0,0).
II: a
È un noto teorema sulla stabilità: il potenziale

$$U = \frac{1}{2}(-\alpha x_1^2 - \beta x_2^2)$$

ha un massimo isolato in (0,0) *e inoltre*

$$-\gamma \dot{x}_2 \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{v} = -\gamma \dot{x}_2^2 \leq 0 \,.$$

III: a
Per esempio il moto con condizioni iniziali

$$x_1(0) = 0 \,, \quad \dot{x}_1(0) = 0 \,, \quad x_2(0) = 0 \,, \quad \dot{x}_2(0) = \delta \neq 0 \,,$$

è dato da $\boldsymbol{X}(t) = \delta t \boldsymbol{e}_2$ *che tende a infinito per* $t \to +\infty$.

I.5 Si considerino i due moti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{X}_1 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3\,.$$

Dire quali dei seguenti vincoli sono olonomi non singolari in ogni posizione compatibile.
Qui α, $\beta > 0$ sono costanti positive assegnate.
13 I vincoli sono

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 - z_4^2 - z_5^2 &= \alpha\,, \\ z_3 &= \beta\,. \end{aligned}$$

a No, per ogni valore di α, β.
b Sì, per ogni valore di α, β.
c Nessuna delle precedenti.
14 I vincoli sono

$$\begin{aligned} z_1^4 - z_6^2 &= 0\,, \\ z_2 &= \alpha\,. \end{aligned}$$

a No, per ogni valore di α.
b Sì, per ogni valore di α.
c Nessuna delle precedenti.
15 I vincoli sono

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 - z_5^2 - z_6^2 &= \alpha\,, \\ z_3 &= \beta\,. \end{aligned}$$

a Sì, per ogni valore di α, β.
b No, per ogni valore di α, β.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Infatti la iacobiana dei vincoli è

$$\begin{pmatrix} 2z_1 & 2z_2 & 0 & -2z_4 & -2z_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e non tutti gli elementi della prima riga possono annullarsi nelle posizioni compatibili.
II: a
Infatti la iacobiana dei vincoli è

$$\begin{pmatrix} 4z_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2z_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha caratteristica 1 *se* $z_1 = z_6 = 0$.

III: c
Infatti la iacobiana dei vincoli è

$$\begin{pmatrix} 2z_1 & 2z_2 & 2z_3 & -2z_4 & -2z_5 & -2z_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha caratteristica 1 se $z_3 = \sqrt{\alpha} = \beta$ *e* $z_h = 0$ *per* $h \neq 3$.

I.6 Un corpo rigido è vincolato in modo che il suo moto è piano, il piano del moto è il piano 1–2 del riferimento fisso e due punti solidali distinti, detti A e B, sono vincolati a muoversi rispettivamente sull'asse 1 e sull'asse 2 del riferimento fisso.

16 Dove si trova il centro di istantanea rotazione?
a Qualunque sia la geometria del corpo, coincide in ogni istante con il suo centro di massa.
b Coincide in ogni istante con il punto medio del segmento $\overline{AB}$.
c Nessuna delle precedenti.

17 Che tipo di curva è la centroide fissa (base)?
a Una circonferenza.
b Una ellisse.
c Nessuna delle precedenti.

18 La centroide fissa (base) e quella mobile (rulletta) sono mutuamente tangenti in ogni istante?
a No, lo sono solo quando il centro di massa cade su uno degli assi coordinati.
b No, lo sono solo quando il segmento $\overline{AB}$ giace su uno degli assi coordinati.
c Nessuna delle precedenti.

Soluzione
I: c
Dal teorema di Chasles segue che il centro di istantanea rotazione è il punto che si ottiene intersecando le perpendicolari agli assi 1 *e* 2 *passanti per* A *e* B.
II: a
La distanza del centro di istantanea rotazione dall'origine è costantemente uguale alla lunghezza del segmento $\overline{AB}$.
III: c
Sono sempre mutuamente tangenti: proprietà generale dei moti piani non traslatori.

Prova scritta del 16/09/2021

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 16/09/2021

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a muoversi sul piano verticale $x_3 = 0$ mantenendo l'estremo A nell'origine O del sistema di riferimento fisso.
Sull'asta agiscono il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_2$ e la distribuzione di forza elastica

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{P'P}\,\mathrm{d}s\,,$$

ove P è il generico punto dell'asta e P' la sua proiezione ortogonale sull'asse $x_2 = 0$. Qui $k > 0$ è costante e $\mathrm{d}s$ è la misura di lunghezza dell'asta.
Si usi come coordinata lagrangiana $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_B = 2L(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2)\,.$$

01 Le forze applicate sono conservative in senso lagrangiano?
a Sì, e

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -mgL\sin\varphi - \frac{4kL^3}{3}(\cos\varphi)^2\,.$$

b Sì, e

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -mgL\sin\varphi - \frac{4kL^3}{3}(\sin\varphi)^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
02 Le posizioni di equilibrio dell'asta soddisfano:
a Sono esattamente 3.
b Sono tutte stabili.
c Nessuna delle precedenti.
03 L'energia cinetica dell'asta in forma lagrangiana:
a È di fatto dipendente sia da φ che da $\dot\varphi$, ossia in genere

$$\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} \neq 0\,, \qquad \frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial\dot\varphi} \neq 0\,.$$

b Dipende da $\dot\varphi$ ma non da φ, ossia per ogni φ, $\dot\varphi$ si ha

$$\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Si ha la distribuzione di potenziale elastico

$$\mathrm{d}U_{\mathrm{el}} = -k\frac{x_2^2}{2}\,\mathrm{d}s\,;$$

così

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{el}}(\varphi) = \int_0^{2L}\Big[-\frac{k}{2}(s\sin\varphi)^2\Big]\,\mathrm{d}s = -\frac{4kL^3}{3}(\sin\varphi)^2\,.$$

A questo va aggiunto il potenziale gravitazionale $-mgx_{2G}$.
II: c
Si ha

$$U^{\text{L}\prime}(\varphi) = -L\cos\varphi\Big(mg + \frac{8}{3}kL^2\sin\varphi\Big)\,.$$

Quindi i punti di equilibrio sono $\pm\pi/2$ e, qualora

$$\frac{3mg}{8kL^2} < 1\,,$$

anche

$$\varphi_0 := -\arcsin\frac{3mg}{8kL^2}\,, \qquad -\pi - \varphi_0\,.$$

Pertanto le posizioni di equilibrio sono 2 o 4. Calcoliamo poi

$$U^{\text{L}\prime\prime}(\varphi) = L\sin\varphi\Big(mg + \frac{8}{3}kL^2\sin\varphi\Big) - \frac{8kL^3}{3}(\cos\varphi)^2\,.$$

Quindi

$$U^{\text{L}\prime\prime}\Big(\pm\frac{\pi}{2}\Big) = \pm L\Big(mg \pm \frac{8kL^2}{3}\Big)\,;$$

dato che $U^{\text{L}\prime\prime}(\pi/2) > 0$ sicuramente l'equilibrio in $\varphi = \pi/2$ non è stabile.
III: b
Il moto è polare e

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{I}{2}\dot\varphi^2\,,$$

con I momento d'inerzia relativo all'asse ortogonale all'asta.

I.2 Dire in ciascuno dei seguenti casi quale è una parametrizzazione lagrangiana corretta per i due moti $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ vincolati come indicato.
Le q_h indicano le coordinate lagrangiane.
04 Il moto $\boldsymbol{X}_2$ è vincolato a appartenere al piano individuato dall'asse x_3 e dal moto $\boldsymbol{X}_1$ (che si assume non appartenente all'asse x_3).
a Si ha $(q_1,\dots,q_5) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty)\times\boldsymbol{R}^3$ e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h\boldsymbol{e}_h\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = q_4\boldsymbol{e}_1 + \frac{q_2q_4}{q_1}\boldsymbol{e}_2 + q_5\boldsymbol{e}_3\,.$$

b Si ha $(q_1,\dots,q_5) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty)\times\boldsymbol{R}^3$ e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h\boldsymbol{e}_h\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = q_4\boldsymbol{e}_1 + q_5\boldsymbol{e}_2 - \frac{q_2q_4}{q_1}\boldsymbol{e}_3\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
05 I due moti appartengono alla stessa sfera mobile

$$(x_1-\alpha(t))^2 + (x_2-\beta(t))^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

e al piano $x_3 = 0$. Qui α, $\beta \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ e $R > 0$ è costante.

a Si ha $(q_1, \dots, q_4) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$ e

$$\boldsymbol{X}_1 = [\alpha(t) + R\cos q_1 \sin q_2]\boldsymbol{e}_1 + [\beta(t) + R\sin q_1 \sin q_2]\boldsymbol{e}_2 + R\cos q_2 \boldsymbol{e}_3\,,$$
$$\boldsymbol{X}_2 = [\alpha(t) + R\cos q_3 \sin q_4]\boldsymbol{e}_1 + [\beta(t) + R\sin q_3 \sin q_4]\boldsymbol{e}_2 + R\cos q_4 \boldsymbol{e}_3\,.$$

b Si ha $(q_1, q_2, q_3) \in (-\pi, \pi) \times \boldsymbol{R}^2$ e

$$\boldsymbol{X}_1 = [\alpha(t) + R\cos q_1]\boldsymbol{e}_1 + [\beta(t) + R\sin q_1]\boldsymbol{e}_2\,,$$
$$\boldsymbol{X}_2 = [q_2 - \alpha(t) - R\cos q_1]\boldsymbol{e}_1 + [q_3 - \beta(t) - R\sin q_1]\boldsymbol{e}_2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

06 I due moti sono vincolati a restare a distanza costante $R > 0$.

a Si ha $(q_1, q_2, q_3) \in \boldsymbol{R}^3$ e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h \boldsymbol{e}_h\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = \sum_{h=1}^{3} \Big(q_h - \frac{R}{\sqrt{3}}\Big)\boldsymbol{e}_h\,.$$

b Si ha

$$(q_1, \dots, q_5) \in \{\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^5 \mid (q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 < R^2\}\,,$$

e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h \boldsymbol{e}_h\,, \quad \boldsymbol{X}_2 = q_4\boldsymbol{e}_1 + q_5\boldsymbol{e}_2 + [q_3 + \sqrt{R^2 - (q_1 - q_4)^2 - (q_2 - q_5)^2}]\boldsymbol{e}_3\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: a

La parametrizzazione a soddisfa i vincoli ed è regolare; la b non soddisfa i vincoli.

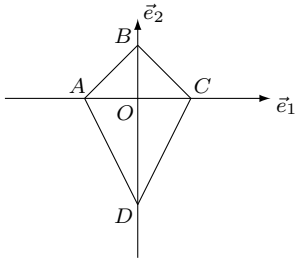
II: c

La a non rispetta il vincolo di appartenenza al piano, la b non rispetta il vincolo di appartenenza alla sfera per $\boldsymbol{X}_2$ (e ha 3 coordinate invece di 4).

III: b

Si controlla direttamente la condizione $|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2| = R$, che vale per entrambe le parametrizzazioni. La a però non rispetta il corretto numero di gradi di libertà $\ell = 5$, quindi non può essere valida.

I.3 Una lamina rigida omogenea di massa M ha la forma in figura, ove $\overrightarrow{OA} = -L\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = L\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC} = L\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OD} = -2L\vec{e}_2$, con $L > 0$.



Il riferimento $\{O, \vec{e}_i\}$ in figura è solidale alla lamina. In B e in D agisce la forza $-\lambda\vec{e}_1$, con $\lambda > 0$. La lamina è vincolata in modo da mantenersi in quiete rispetto a un riferimento fisso.

07 Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse coordinato 1 del riferimento solidale?

a $\frac{1}{6}ML^2$.

b $\frac{1}{2}ML^2$.

c Nessuna delle precedenti.

08 Quanto vale la coordinata 2 del centro di massa rispetto al riferimento in figura?

a $-\frac{5}{12}L$.

b $-\frac{1}{2}L$.

c Nessuna delle precedenti.

09 Per quanto riguarda la sollecitazione considerata si può affermare che

a l'asse della sollecitazione è la retta parallela all'asse 2 passante per il punto medio del segmento $\overline{BD}$ e la sollecitazione è equivalente alla forza $2\lambda\vec{e}_2$ applicata in tale punto medio.

b l'asse della sollecitazione è la retta parallela all'asse 1 passante per il punto medio del segmento $\overline{BD}$ e la sollecitazione è equivalente alla forza $-2\lambda\vec{e}_1$ applicata in tale punto medio.

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: b

La densità superficiale di massa vale $M/(3L^2)$, si ha

$$I_{O,11} = 2\int_0^L \mathrm{d}x_1 \int_{-2L+2x_1}^{L-x_1} \mathrm{d}x_2 \frac{M}{3L^2}(x_2)^2 = \frac{1}{2}ML^2.$$

II: c

Per motivi di simmetria la coordinata cercata è uguale a quella del centro di massa della porzione di corpo a destra dell'asse verticale. Allora

$$G_2 = \frac{1}{M/2}\int_0^L \mathrm{d}x_1 \int_{-2L+2x_1}^{L-x_1} \mathrm{d}x_2 \frac{M/2}{3L^2/2}x_2 = -\frac{1}{3}L.$$

III: b

La somma della sollecitazione è $-2\lambda\vec{e}_1$ e il momento totale rispetto a O è $-L\lambda\vec{e}_3$. Il trinomio invariante è quindi nullo e l'asse della sollecitazione è la retta passante per un punto X rispetto al quale il momento totale è nullo e parallela al vettore somma della sollecitazione. Resta da determinare il punto X risolvendo l'equazione $0 = \vec{M}_O + (-2\lambda\vec{e}_1)\times\overrightarrow{OX}$. L'affermazione sull'equivalenza è immediata dal momento che la nuova sollecitazione ha stessa somma e stesso momento rispetto a X.

I.4 Qui $\boldsymbol{\psi} \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è una curva regolare γ con ascissa curvilinea $s \in \boldsymbol{R}$, curvatura $k(s) > 0$ e torsione $\tau(s) \in \boldsymbol{R}$. Un disco di massa m è vincolato in

modo che il suo centro G appartenga alla curva γ (questo significa che può muoversi su γ) e che un suo diametro solidale AB sia sempre tangente alla curva γ in G. I vincoli sono lisci.

10 Quanti sono i gradi di libertà ℓ del disco?

a $\ell = 2$.

b $\ell = 3$.

c Nessuna delle precedenti.

11 Se la curva è piana, la velocità angolare del disco

a È parallela alla binormale $\boldsymbol{B}$ della curva.

b È parallela alla tangente $\boldsymbol{T}$ della curva.

c Nessuna delle precedenti.

12 Supponiamo che l'unica forza applicata sia il peso, γ sia un'elica circolare con asse parallelo alla direzione del peso e il disco parta da fermo. Allora

a La velocità angolare del disco si mantiene nulla per tutto il moto.

b La conservazione dell'energia implica

$$\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G(t)|^2 + mg\lambda s(t) = E\,,$$

per ogni t, ove $\lambda > 0$ è una costante legata alla geometria della curva e E è una costante determinata dai dati iniziali.

c Nessuna delle precedenti.

Soluzione

I: a

Il vincolo $G \in \gamma$ toglie 2 gradi di libertà e il parallelismo di $\overrightarrow{AB}$ a $\boldsymbol{T}$ ne toglie altri 2.

II: c

Se $\mathcal{P}$ è la terna fissa, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ con $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{T}$ è la terna solidale al disco, e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$, si ha

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot{s}k(s)\boldsymbol{B}(s) + \dot{\varphi}\boldsymbol{T}(s)\,,$$

ove φ è un opportuno angolo di rotazione e $s(t)$ denota l'ascissa curvilinea di G.

III: c

La velocità angolare non può mantenersi nulla perché la base solidale al disco non è fissa. Inoltre la conservazione dell'energia deve tenere conto dell'energia cinetica dovuta a $\boldsymbol{\omega}$.

I.5 Un corpo rigido è vincolato in modo che il suo moto è piano, il piano del moto è il piano 1–2 del riferimento fisso e due punti solidali distinti, detti A e B, sono vincolati a muoversi rispettivamente sull'asse 1 e sull'asse 2 del riferimento fisso.

13 Dove si trova il centro di istantanea rotazione?

a Coincide in ogni istante con il punto medio del segmento $\overline{AB}$.

b Se il corpo ha simmetria di rotazione, coincide in ogni istante con il suo centro di massa.

c Nessuna delle precedenti.

14 Che tipo di curva è la centroide fissa (base)?
a Una iperbole.
b Una circonferenza.
c Nessuna delle precedenti.
15 La centroide fissa (base) e quella mobile (rulletta) sono mutuamente tangenti in ogni istante?
a No, lo sono solo quando il centro di istantanea rotazione cade su uno degli assi coordinati.
b No, lo sono solo quando il segmento $\overline{AB}$ contiene il centro di massa.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: c
Dal teorema di Chasles segue che il centro di istantanea rotazione è il punto che si ottiene intersecando le perpendicolari agli assi 1 *e* 2 *passanti per* A *e* B.
II: b
La distanza del centro di istantanea rotazione dall'origine è costantemente uguale alla lunghezza del segmento $\overline{AB}$.
III: c
Sono sempre mutuamente tangenti: proprietà generale dei moti piani non traslatori.

I.6 Dire in quali dei seguenti casi si possono definire le piccole oscillazioni del sistema a vincoli lisci e fissi, soggetto a forze conservative, considerato. Qui $\ell = 2$ e il punto di equilibrio è $(q_1, q_2) = (0,0)$.
16 $U^{\text{L}}(q_1, q_2) = \alpha q_1^2 + \beta q_2^2$ con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti.
a Se $\alpha < 0$, $\beta > 0$ o se $\alpha > 0$, $\beta < 0$.
b Se $\alpha < 0$, $\beta < 0$.
c Nessuna delle precedenti.
17 $U^{\text{L}}(q_1, q_2) = -\alpha q_1^4 - \beta q_2^8$ con α, $\beta > 0$ costanti.
a In nessun caso.
b Solo se $T^{\text{L}} \geq C|\dot{\boldsymbol{q}}|^2$ con $C > 0$ abbastanza grande.
c Nessuna delle precedenti.
18 Se $U^{\text{L}}(0,0) = 0$ e per ogni (q_1, q_2) si ha

$$U^{\text{L}}(q_1, q_2) \leq -c(q_1^2 + q_2^2)\,,$$

con $c > 0$ costante opportuna.
a No in generale.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Nel caso b il potenziale ha nel punto di equilibrio un massimo isolato con hessiana definita negativa, nel caso a un punto di sella.
II: a
La matrice hessiana del potenziale in (0,0) *è nulla.*

III: b
La matrice hessiana del potenziale in (0,0) *è definita negativa (questo segue dalla formula di Taylor).*

Prova scritta del 00/01/2021

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 00/01/2021

I.1 Un disco di massa M e raggio R è vincolato a avere il centro G sul cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2\,,$$

e a mantenersi a esso tangente. Qui $L > 0$ e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso. Si usino le coordinate lagrangiane $z = x_{3G} \in \boldsymbol{R}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ angolo di rotazione del disco intorno all'asse a esso ortogonale in G, e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_G^{\text{L}}(z, \theta, \varphi) = L\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\,.$$

Qui I indica il momento d'inerzia del disco relativo a un suo diametro.
01 Calcolare l'energa cinetica del disco nel sistema di riferimento fisso.
a

$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2)\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(L^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
02 Quale affermazione è vera per il momento delle quantità di moto rispetto a G?
a È sempre ortogonale al disco.
b Scomposto nella base solidale $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al disco, ha le prime due componenti uguali.
c Nessuna delle precedenti.
03 Da quali coordinate lagrangiane dipende la quantità di moto del disco?
a φ e z.
b θ e z.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione

01: b
Usiamo il Teorema di König:

$$T = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{v}_G = -L\dot\varphi\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\dot\varphi\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \dot z\boldsymbol{e}_3\,.$$

Infine, introducendo la terna ausiliaria $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ con

$$\boldsymbol{w}_1 = \cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,\quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_3\times\boldsymbol{w}_1\,,\quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{e}_3\,,$$

si ha per $\mathcal{Z} = (\boldsymbol{e}_h)$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{Z}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot\varphi\boldsymbol{w}_3 + \dot\theta\boldsymbol{w}_1\,.$$

Se I è il momento diametrale del disco, la b segue dalla simmetria del disco.
02: c
Si ha (nelle componenti della terna $\mathcal{N}$ introdotta sopra)

$$\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 2I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\theta\\0\\\dot\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2I\dot\theta\\0\\I\dot\varphi\end{pmatrix}\,.$$

03: b
È noto

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_G = m(-L\dot\varphi\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\dot\varphi\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \dot z\boldsymbol{e}_3)\,.$$

I.2 Un disco di massa M e raggio R è vincolato a avere il centro G sul cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2\,,$$

e a mantenersi a esso tangente. Qui $L > 0$ e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso. Si usino le coordinate lagrangiane $z = x_{3G} \in \boldsymbol{R}$, $\theta \in (-\pi,\pi)$ angolo di rotazione del disco intorno all'asse a esso ortogonale in G, e $\varphi \in (-\pi,\pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_G^{\text{L}}(z,\theta,\varphi) = L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\,.$$

Qui I indica il momento d'inerzia del disco relativo a un suo diametro.
04 Calcolare l'energa cinetica del disco nel sistema di riferimento fisso.
a

$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2)\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(L^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
05 Quale affermazione è vera per il momento delle quantità di moto rispetto a G?

a È sempre ortogonale al disco.
b Scomposto nella base solidale $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al disco, ha le prime due componenti uguali.
c Nessuna delle precedenti.
06 Da quali coordinate lagrangiane dipende la quantità di moto del disco?
a φ e z.
b θ e z.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
01: b
Usiamo il Teorema di König:

$$T = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{v}_G = -L\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \dot{z}\boldsymbol{e}_3\,.$$

Infine, introducendo la terna ausiliaria $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ con

$$\boldsymbol{w}_1 = \cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_3\times\boldsymbol{w}_1\,, \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{e}_3\,,$$

si ha per $\mathcal{Z} = (\boldsymbol{e}_h)$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{Z}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{w}_3 + \dot{\theta}\boldsymbol{w}_1\,.$$

Se I è il momento diametrale del disco, la b segue dalla simmetria del disco.
02: c
Si ha (nelle componenti della terna $\mathcal{N}$ introdotta sopra)

$$\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 2I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I\dot{\theta} \\ 0 \\ I\dot{\varphi} \end{pmatrix}\,.$$

03: b
È noto

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_G = m(-L\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \dot{z}\boldsymbol{e}_3)\,.$$

I.3 Unc disco di massa M e raggio R è vincolato a avere il centro G sul cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2\,,$$

e a mantenersi a esso tangente. Qui $L > 0$ e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso. Si usino le coordinate lagrangiane $z = x_{3G} \in \boldsymbol{R}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ angolo di rotazione del disco intorno all'asse a esso ortogonale in G, e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_G^{\text{L}}(z, \theta, \varphi) = L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\,.$$

Qui I indica il momento d'inerzia del disco relativo a un suo diametro.
07 Calcolare l'energa cinetica del disco nel sistema di riferimento fisso.

a
$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2)\,.$$
b
$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(L^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2)\,.$$
c Nessuna delle precedenti.

08 Quale affermazione è vera per il momento delle quantità di moto rispetto a G?
a È sempre ortogonale al disco.
b Scomposto nella base solidale $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al disco, ha le prime due componenti uguali.
c Nessuna delle precedenti.

09 Da quali coordinate lagrangiane dipende la quantità di moto del disco?
a φ e z.
b θ e z.
c Nessuna delle precedenti.

Soluzione
01: b
Usiamo il Teorema di König:
$$T = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$
Quindi
$$\boldsymbol{v}_G = -L\dot\varphi\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\dot\varphi\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \dot z\boldsymbol{e}_3\,.$$
Infine, introducendo la terna ausiliaria $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ con
$$\boldsymbol{w}_1 = \cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,\quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_3\times\boldsymbol{w}_1\,,\quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{e}_3\,,$$
si ha per $\mathcal{Z} = (\boldsymbol{e}_h)$
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{Z}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot\varphi\boldsymbol{w}_3 + \dot\theta\boldsymbol{w}_1\,.$$
Se I è il momento diametrale del disco, la b segue dalla simmetria del disco.
02: c
Si ha (nelle componenti della terna $\mathcal{N}$ introdotta sopra)
$$\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 2I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\theta\\ 0\\ \dot\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I\dot\theta\\ 0\\ I\dot\varphi\end{pmatrix}\,.$$
03: b
È noto
$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_G = m(-L\dot\varphi\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\dot\varphi\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \dot z\boldsymbol{e}_3)\,.$$

I.4 Und disco di massa M e raggio R è vincolato a avere il centro G sul cilindro
$$x_1^2 + x_2^2 = L^2\,,$$

e a mantenersi a esso tangente. Qui $L > 0$ e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso. Si usino le coordinate lagrangiane $z = x_{3G} \in \boldsymbol{R}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ angolo di rotazione del disco intorno all'asse a esso ortogonale in G, e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_G^{\text{L}}(z, \theta, \varphi) = L\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui I indica il momento d'inerzia del disco relativo a un suo diametro.

10 Calcolare l'energa cinetica del disco nel sistema di riferimento fisso.

a
$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2) \,.$$

b
$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(L^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}(2I\dot\theta^2 + I\dot\varphi^2) \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

11 Quale affermazione è vera per il momento delle quantità di moto rispetto a G?

a È sempre ortogonale al disco.

b Scomposto nella base solidale $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al disco, ha le prime due componenti uguali.

c Nessuna delle precedenti.

12 Da quali coordinate lagrangiane dipende la quantità di moto del disco?

a φ e z.

b θ e z.

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

01: b

Usiamo il Teorema di König:

$$T = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} \,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{v}_G = -L\dot\varphi\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\dot\varphi\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \dot z\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Infine, introducendo la terna ausiliaria $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ con

$$\boldsymbol{w}_1 = \cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2 \,, \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_3 \times \boldsymbol{w}_1 \,, \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{e}_3 \,,$$

si ha per $\mathcal{Z} = (\boldsymbol{e}_h)$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{Z}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot\varphi\boldsymbol{w}_3 + \dot\theta\boldsymbol{w}_1 \,.$$

Se I è il momento diametrale del disco, la b segue dalla simmetria del disco.

02: c

Si ha (nelle componenti della terna $\mathcal{N}$ introdotta sopra)

$$\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 2I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\theta \\ 0 \\ \dot\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I\dot\theta \\ 0 \\ I\dot\varphi \end{pmatrix} \,.$$

03: b
È noto

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_G = m(-L\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \dot{z}\boldsymbol{e}_3)\,.$$

I.5 Une disco di massa M e raggio R è vincolato a avere il centro G sul cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2\,,$$

e a mantenersi a esso tangente. Qui $L > 0$ e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso. Si usino le coordinate lagrangiane $z = x_{3G} \in \boldsymbol{R}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ angolo di rotazione del disco intorno all'asse a esso ortogonale in G, e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_G^{\text{L}}(z, \theta, \varphi) = L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\,.$$

Qui I indica il momento d'inerzia del disco relativo a un suo diametro.
13 Calcolare l'energa cinetica del disco nel sistema di riferimento fisso.
a

$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(2I\dot{\theta}^2 + I\dot{\varphi}^2)\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(L^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(2I\dot{\theta}^2 + I\dot{\varphi}^2)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
14 Quale affermazione è vera per il momento delle quantità di moto rispetto a G?
a È sempre ortogonale al disco.
b Scomposto nella base solidale $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al disco, ha le prime due componenti uguali.
c Nessuna delle precedenti.
15 Da quali coordinate lagrangiane dipende la quantità di moto del disco?
a φ e z.
b θ e z.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
01: b
Usiamo il Teorema di König:

$$T = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{v}_G = -L\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \dot{z}\boldsymbol{e}_3\,.$$

Infine, introducendo la terna ausiliaria $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ con

$$\boldsymbol{w}_1 = \cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_3 \times \boldsymbol{w}_1\,, \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{e}_3\,,$$

si ha per $\mathcal{Z} = (\boldsymbol{e}_h)$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{Z}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{w}_3 + \dot{\theta}\boldsymbol{w}_1 \,.$$

Se I *è il momento diametrale del disco, la* b *segue dalla simmetria del disco.*
02: c
Si ha (nelle componenti della terna $\mathcal{N}$ *introdotta sopra)*

$$\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 2I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I\dot{\theta} \\ 0 \\ I\dot{\varphi} \end{pmatrix} .$$

03: b
È noto

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_G = m(-L\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \dot{z}\boldsymbol{e}_3) \,.$$

I.6 Unf disco di massa M e raggio R è vincolato a avere il centro G sul cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2 \,,$$

e a mantenersi a esso tangente. Qui $L > 0$ e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso. Si usino le coordinate lagrangiane $z = x_{3G} \in \boldsymbol{R}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ angolo di rotazione del disco intorno all'asse a esso ortogonale in G, e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_G^{\text{L}}(z, \theta, \varphi) = L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui I indica il momento d'inerzia del disco relativo a un suo diametro.
16 Calcolare l'energa cinetica del disco nel sistema di riferimento fisso.
a

$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(2I\dot{\theta}^2 + I\dot{\varphi}^2) \,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}(L^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(2I\dot{\theta}^2 + I\dot{\varphi}^2) \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
17 Quale affermazione è vera per il momento delle quantità di moto rispetto a G?
a È sempre ortogonale al disco.
b Scomposto nella base solidale $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al disco, ha le prime due componenti uguali.
c Nessuna delle precedenti.
18 Da quali coordinate lagrangiane dipende la quantità di moto del disco?
a φ e z.
b θ e z.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione

01: b
Usiamo il Teorema di König:

$$T = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{v}_G = -L\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \dot{z}\boldsymbol{e}_3\,.$$

Infine, introducendo la terna ausiliaria $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ con

$$\boldsymbol{w}_1 = \cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,\quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_3\times\boldsymbol{w}_1\,,\quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{e}_3\,,$$

si ha per $\mathcal{Z} = (\boldsymbol{e}_h)$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{Z}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{w}_3 + \dot{\theta}\boldsymbol{w}_1\,.$$

Se I è il momento diametrale del disco, la b segue dalla simmetria del disco.
02: c
Si ha (nelle componenti della terna $\mathcal{N}$ introdotta sopra)

$$\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 2I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ 0\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I\dot{\theta}\\ 0\\ I\dot{\varphi}\end{pmatrix}\,.$$

03: b
È noto

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_G = m(-L\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + \dot{z}\boldsymbol{e}_3)\,.$$

Prova scritta del 18/01/2021 II

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 18/01/2021 II

I.1 Una lamina rettangolare $ABCD$, di lati a, b con $a < b$, è vincolata a ruotare intorno alla diagonale AC con vincolo liscio.
È soggetta alla distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\delta_D$$

(ossia a una forza concentrata nel vertice D), con $\alpha > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ versore solidale e normale alla lamina.

Il sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ ha $\boldsymbol{X}_O$ nel centro della lamina (che è anche l'origine del sistema di riferimento fisso), e

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2\,.$$

In questo sistema le coordinate di D sono date da

$$\boldsymbol{X}_D = \boldsymbol{X}_O + \sum_{h=2}^{3} \lambda_{hD} \boldsymbol{u}_h\,,$$

e denotiamo il tensore di inerzia $\boldsymbol{\sigma}_O = (I_{hk})$.
Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo di rotazione $\varphi \in (-\pi, \pi)$ della lamina rispetto al sistema di riferimento fisso, tale che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

01 Dire quale delle seguenti è la corretta equazione di moto.
a $I_{22}\ddot{\varphi} = \lambda_{2D}\alpha$.
b $I_{22}\ddot{\varphi} = -\lambda_{3D}\alpha$.
c Nessuna delle precedenti.
02 Dire quale delle seguenti proprietà ha $\boldsymbol{L}_O$.
a $\boldsymbol{L}_O(t) \cdot \boldsymbol{u}_2(t) = 0$, per ogni t.
b $\boldsymbol{L}_O(t) \cdot \boldsymbol{u}_3(t) = 0$, per ogni t.
c Nessuna delle precedenti.
03 Dire quale delle funzioni seguenti rappresenta l'energia cinetica della lamina.
a

$$T = \frac{1}{2}(I_{22} + I_{33})\dot{\varphi}^2\,.$$

b

$$T = \frac{1}{2} I_{22}\dot{\varphi}^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti $\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2$ *e*

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \overrightarrow{OD} \times (\alpha \boldsymbol{u}_1) = -\lambda_{2D}\alpha \boldsymbol{u}_3 + \lambda_{3D}\alpha \boldsymbol{u}_2\,.$$

Quindi la seconda equazione di Eulero è

$$I_{22}\ddot{\varphi} = -\lambda_{3D}\alpha\,.$$

II: c
Le componenti di $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ *sono date da*

$$\begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -I_{22}\dot\varphi \\ -I_{23}\dot\varphi \end{pmatrix} .$$

III: b
Si ha

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}I_{22}\dot\varphi^2 .$$

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi su una superficie regolare S, data dal piano $x_3 = 0$, ossia

$$\boldsymbol{r}(x,y) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 , \qquad (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 .$$

Il vincolo è scabro, secondo la legge

$$|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}| = \mu|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}| ,$$

con $\mu > 0$ costante. Si supponga $\boldsymbol{v}(t) \neq 0$ per ogni t.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -kx\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_3$$

con $k > 0$, $b \geq 0$.
04 Dire quale dei seguenti è il sistema delle equazioni di moto.
a

$$m\ddot x = -kx - \mu b\frac{\dot x}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}} ,$$
$$m\ddot y = -\mu b\frac{\dot y}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}} .$$

b

$$m\ddot x = -kx - \mu b\frac{\dot x}{|\dot x|} ,$$
$$m\ddot y = -\mu b\frac{\dot y}{|\dot y|} .$$

c Nessuna delle precedenti.
05 Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dall'energia meccanica del punto definita da

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 + \frac{k}{2}x(t)^2 .$$

a $\dot{\mathcal{E}}(t) = -\mu b|\dot x(t)^2 + \dot y(t)^2|$.

b $\dot{\mathcal{E}}(t) = -\mu b\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$.
c Nessuna delle precedenti.
06 Dire quando è possibile che il moto sia rettilineo uniforme (diverso dalla quiete) con traiettoria parallela a uno degli assi cartesiani nel piano.
a Se $b = 0$ esistono tali moti su ogni retta parallela all'asse x_1.
b Se $b = 0$ esistono tali moti su ogni retta parallela all'asse x_2.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Si ha $|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| = |\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_3| = b$. *Quindi*

$$\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}} = -\mu b \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\,.$$

II: b
Si ha

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + kx\dot{x} = \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{v} = -\mu b|\boldsymbol{v}|\,.$$

III: c
Se $b = 0$, $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}} = \mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}} = 0$ *e le equazioni di moto sono*

$$m\ddot{x} = -kx\,, \qquad m\ddot{y} = 0\,.$$

Se il moto è rettilineo uniforme, si ha anche $\ddot{x} = 0$, *che implica* $x = 0$, *escludendo entrambe le risposte a, b.*

I.3 Dire quali delle seguenti forze direttamente applicate ammettano un potenziale lagrangiano, nei casi indicati. Il sistema di corpi rigidi è in ogni caso costituito dal singolo punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$.
Qui R, a, b, c, d, μ, $k > 0$ sono costanti.
07 Il punto è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = a\tau\boldsymbol{e}_1 + b\tau^2\boldsymbol{e}_2 + ce^{d\tau}\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \tau \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui $\tau \in \boldsymbol{R}$ è la coordinata lagrangiana.
a $\boldsymbol{F} = \mu x_1 \sin(kt)\boldsymbol{e}_3$.
b $\boldsymbol{F} = \mu\dot{x}_1\boldsymbol{e}_1$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Il punto è vincolato alla sfera mobile

$$x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - at)^2 = R^2\,, \qquad t > 0\,.$$

Si scelga la parametrizzazione lagrangiana

$$x_1 = R\cos\varphi\sin\theta\,, \quad x_2 = R\sin\varphi\sin\theta\,, \quad x_3 = at + R\cos\theta\,,$$

con $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$.
a $\boldsymbol{F} = x_1^2\boldsymbol{e}_1 + x_3^3\boldsymbol{e}_3$.
b $\boldsymbol{F} = x_2\boldsymbol{e}_1 - x_1\boldsymbol{e}_2$.

c Nessuna delle precedenti.
09 Il punto è vincolato al paraboloide

$$x_3 = a(x_1^2 + x_2^2)\,, \qquad x_3 > 0\,.$$

Si usino $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$ come coordinate lagrangiane.
a $\boldsymbol{F} = -kx_1\boldsymbol{e}_1 + \mu\dot{x}_2\boldsymbol{e}_2$.
b $\boldsymbol{F} = \mu e^{d\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\boldsymbol{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Nel caso 1:

$$Q_\tau = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial\tau} = \mu acd\sin(kt)\tau e^{d\tau}\,,$$

che ha potenziale lagrangiano

$$U^{\text{L}} = \frac{\mu ac}{d}\sin(kt)e^{d\tau}(d\tau - 1)\,.$$

Nel caso 2, Q_τ dipende da $\dot\tau$.
II: a
Infatti la forza in questo caso è conservativa con potenziale $U = x_1^3/3 + x_3^4/4$. Nel caso 2 si verifica che

$$Q_\varphi = -R^2(\sin\theta)^2\,, \qquad Q_\theta = 0\,,$$

che non ammettono potenziale lagrangiano.
III: b
Nel caso 1, la componente $Q_{x_2} = \mu\dot{x}_2$ dipende dalle derivate delle coordinate lagrangiane. Nel caso 2, la $\boldsymbol{F}$ sul vincolo è equivalente a

$$\boldsymbol{F}_1 = \mu e^{\frac{b}{a}\sqrt{x_3}}\,,$$

che è conservativa e quindi le componenti lagrangiane della forza ammettono un potenziale lagrangiano.

I.4 In ciascuno dei seguenti casi dire se il sistema di vincoli olonomi è regolare in tutte le configurazioni compatibili o no.
In tutti i casi il sistema di corpi rigidi è costituito dai due punti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3\,.$$

10 I vincoli sono

$$\begin{aligned}(z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 &= R^2\,,\\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= L_1^2\,,\\ z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 &= L_2^2\,,\end{aligned}$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^6$. Qui $L_2 > L_1 > 0$, $R > 0$ sono costanti.
a Sì, per ogni L_1, L_2, R.

b Sì, se $L_1 + L_2 > R > L_2 - L_1$.
c Nessuna delle precedenti.
11 Il vincolo è

$$z_1^{4p} + z_2^{6p} + z_3^{8p} + z_4^{4p} - z_5^{6p} - z_6^{8p} = 0\,,$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^6$. Qui $p \geq 1$ è un intero positivo.
a No, mai.
b Solo se p è pari.
c Nessuna delle precedenti.
12 I vincoli sono

$$\mu z_1 - \lambda z_6 = 0\,, \quad \mu z_2 - z_4 = 0\,, \quad \mu z_3 - \lambda z_5 = 0\,,$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^6$. Qui λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$ sono costanti con $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$.
a Sì, per ogni λ, μ come sopra.
b Sì, ma solo se $\lambda > 0$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Se $R \notin [L_2 - L_1, L_1 + L_2]$, non esistono configurazioni compatibili. In ogni caso la iacobiana è (a parte un fattore 2)

$$\begin{pmatrix} z_1 - z_4 & z_2 - z_5 & z_3 - z_6 & z_4 - z_1 & z_5 - z_2 & z_6 - z_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 & z_5 & z_6 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2 se e solo se

$$\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2 = \lambda \boldsymbol{X}_1\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1 = \mu \boldsymbol{X}_2\,,$$

con λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$, che d'altra parte è vero se e solo se $R = L_2 - L_1$ o $R = L_1 + L_2$.
II: a
La iacobiana (cioè il vettore gradiente del vincolo) si annulla sempre in $\boldsymbol{z} = 0$, che appartiene allo spazio delle configurazioni compatibili.
III: a
La iacobiana è

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \mu & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & -\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

che ovviamente ha rango massimo per ogni λ, μ non entrambi nulli.

I.5 Un corpo rigido non degenere C è vincolato a muoversi di moto polare con polo O.
Il momento delle forze esterne è dato da

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = -\alpha \boldsymbol{\omega}\,,$$

con $\alpha > 0$ costante.

13 L'energia cinetica si conserva durante il moto.
a Se e solo se il moto è la quiete.
b Se e solo se il moto è una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.
14 Si supponga $\boldsymbol{\omega} \neq 0$. Esistono moti che sono rotazioni.
a Non in generale, se non si fanno ipotesi speciali su α e $\boldsymbol{\sigma}_O$.
b Sì, qualunque forma abbia il corpo.
c Nessuna delle precedenti.
15 Si assuma $T(0) > 0$. Dire se è possibile che esista una costante $\beta > 0$ tale che

$$T(t) \geq \beta > 0\,, \qquad \text{per ogni } t \in (0, +\infty)\,.$$

a Se e solo se $0 < \alpha < \alpha_0$ con $\alpha_0 \in (0, +\infty)$ opportuno.
b Se e solo se $T(0) > \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Infatti

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\alpha|\boldsymbol{\omega}|^2\,,$$

che è strettamente negativo se il moto non è la quiete.
II: b
Si vede infatti che le rotazioni (non uniformi) intorno agli assi principali risolvono le equazioni di Eulero.
III: c
L'asserto non può mai verificarsi; infatti

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} \leq \frac{I_M}{2}|\boldsymbol{\omega}|^2\,,$$

ove I_M denota il massimo tra i momenti principali d'inerzia in O. Dunque

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\alpha|\boldsymbol{\omega}|^2 \leq -\frac{2\alpha}{I_M}T\,,$$

che come è noto implica che

$$T(t) \leq T(0)e^{-\frac{2\alpha}{I_M}t} \to 0\,, \qquad t \to +\infty\,.$$

I.6 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi sulla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.
16 Supponiamo che per un altro campo di forze $\boldsymbol{F}_1$ valga che $\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_1$ sia ortogonale al versore tangente $\boldsymbol{T}$ in ogni punto della curva. È vero che i due moti corrispondenti alle due forze (a parità di condizioni iniziali) coincidono?
a Sì sempre.
b Sì se il vincolo è liscio.
c Nessuna delle precedenti.

17 Se il vincolo è scabro e la forza $\boldsymbol{F}$ è conservativa, l'energia meccanica può conservarsi? (Si assuma che il moto non sia la quiete.)
a No, mai.
b Sì, indipendentemente dal valore del coefficiente d'attrito.
c Nessuna delle precedenti.
18 Il vincolo sia liscio, e $\boldsymbol{\psi}$ sia l'elica cilindrica

$$x_1 = R\cos(\alpha s)\,, \quad x_2 = R\sin(\alpha s)\,, \quad x_3 = h\alpha s\,,$$

con $h > 0$, $R > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ costanti, e $s \in \boldsymbol{R}$. Sia inoltre $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\text{L}}(s)$ con

$$\boldsymbol{F}^{\text{L}}(s) = -\alpha s \boldsymbol{T}(s)\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $\alpha > 0$ costante.
a Tutti i moti sono limitati.
b Tutti i moti (diversi dalla quiete) sono illimitati.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti in questo caso $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{T}$ quindi le due equazioni di moto coincidono. Le reazioni vincolari peraltro non coincidono in genere.
II: b
Si consideri il caso di una circonferenza di raggio R, e di un moto circolare uniforme su di essa di velocità c. Allora se $\boldsymbol{F}$ ha modulo mc^2/R e direzione centripeta, la reazione vincolare è nulla.
III: a
Infatti se $\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}} = 0$ si ha l'equazione di moto

$$m\ddot{s} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} = -\alpha s\,,$$

ossia l'equazione dei moti armonici che ha tutte soluzioni periodiche.

Prova scritta del 18/01/2021

MECCANICA RAZIONALE 6CFU
ING. MECCANICA

Prova scritta del 18/01/2021

I.1 Una lamina rettangolare $ABCD$, di lati a, b con $a < b$, è vincolata a ruotare intorno alla diagonale AC con vincolo liscio.
È soggetta alla distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}\delta_D$$

(ossia a una forza concentrata nel vertice D), con $\alpha > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ versore solidale e normale alla lamina.
Il sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ ha $\boldsymbol{X}_O$ nel centro della lamina (che è anche l'origine del sistema di riferimento fisso), e

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2\,.$$

In questo sistema le coordinate di D sono date da

$$\boldsymbol{X}_D = \boldsymbol{X}_O + \sum_{h=2}^{3} \lambda_{hD} \boldsymbol{u}_h\,,$$

e denotiamo il tensore di inerzia $\boldsymbol{\sigma}_O = (I_{hk})$.
Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo di rotazione $\varphi \in (-\pi, \pi)$ della lamina rispetto al sistema di riferimento fisso, tale che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

01 Dire quale delle seguenti è la corretta equazione di moto.
a $I_{22}\ddot{\varphi} = \lambda_{2D}\alpha$.
b $I_{22}\ddot{\varphi} = -\lambda_{3D}\alpha$.
c Nessuna delle precedenti.
02 Dire quale delle seguenti proprietà ha $\boldsymbol{L}_O$.
a $\boldsymbol{L}_O(t) \cdot \boldsymbol{u}_2(t) = 0$, per ogni t.
b $\boldsymbol{L}_O(t) \cdot \boldsymbol{u}_3(t) = 0$, per ogni t.
c Nessuna delle precedenti.
03 Dire quale delle funzioni seguenti rappresenta l'energia cinetica della lamina.
a

$$T = \frac{1}{2}(I_{22} + I_{33})\dot{\varphi}^2\,.$$

b

$$T = \frac{1}{2} I_{22}\dot{\varphi}^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Infatti $\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2$ *e*

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \overrightarrow{OD} \times (\alpha \boldsymbol{u}_1) = -\lambda_{2D}\alpha \boldsymbol{u}_3 + \lambda_{3D}\alpha \boldsymbol{u}_2\,.$$

Quindi la seconda equazione di Eulero è

$$I_{22}\ddot{\varphi} = -\lambda_{3D}\alpha\,.$$

II: c
Le componenti di $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ *sono date da*

$$\begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -I_{22}\dot\varphi \\ -I_{23}\dot\varphi \end{pmatrix} .$$

III: b
Si ha

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}I_{22}\dot\varphi^2 .$$

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi su una superficie regolare S, data dal piano $x_3 = 0$, ossia

$$\boldsymbol{r}(x,y) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 , \qquad (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 .$$

Il vincolo è scabro, secondo la legge

$$|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}| = \mu|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}| ,$$

con $\mu > 0$ costante. Si supponga $\boldsymbol{v}(t) \neq 0$ per ogni t.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -kx\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_3$$

con $k > 0$, $b \geq 0$.
04 Dire quale dei seguenti è il sistema delle equazioni di moto.
a

$$m\ddot x = -kx - \mu b\frac{\dot x}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}} ,$$
$$m\ddot y = -\mu b\frac{\dot y}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}} .$$

b

$$m\ddot x = -kx - \mu b\frac{\dot x}{|\dot x|} ,$$
$$m\ddot y = -\mu b\frac{\dot y}{|\dot y|} .$$

c Nessuna delle precedenti.
05 Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dall'energia meccanica del punto definita da

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 + \frac{k}{2}x(t)^2 .$$

a $\dot{\mathcal{E}}(t) = -\mu b|\dot x(t)^2 + \dot y(t)^2|$.

b $\dot{\mathcal{E}}(t) = -\mu b\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$.
c Nessuna delle precedenti.
06 Dire quando è possibile che il moto sia rettilineo uniforme (diverso dalla quiete) con traiettoria parallela a uno degli assi cartesiani nel piano.
a Se $b = 0$ esistono tali moti su ogni retta parallela all'asse x_1.
b Se $b = 0$ esistono tali moti su ogni retta parallela all'asse x_2.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Si ha $|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| = |\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_3| = b$. *Quindi*

$$\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}} = -\mu b \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\,.$$

II: b
Si ha

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + kx\dot{x} = \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{v} = -\mu b|\boldsymbol{v}|\,.$$

III: c
Se $b = 0$, $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}} = \mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}} = 0$ *e le equazioni di moto sono*

$$m\ddot{x} = -kx\,, \qquad m\ddot{y} = 0\,.$$

Se il moto è rettilineo uniforme, si ha anche $\ddot{x} = 0$, *che implica* $x = 0$, *escludendo entrambe le risposte a, b.*

I.3 Dire quali delle seguenti forze direttamente applicate ammettano un potenziale lagrangiano, nei casi indicati. Il sistema di corpi rigidi è in ogni caso costituito dal singolo punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$.
Qui R, a, b, c, d, μ, $k > 0$ sono costanti.
07 Il punto è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = a\tau\boldsymbol{e}_1 + b\tau^2\boldsymbol{e}_2 + ce^{d\tau}\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \tau \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui $\tau \in \boldsymbol{R}$ è la coordinata lagrangiana.
a $\boldsymbol{F} = \mu x_1 \sin(kt)\boldsymbol{e}_3$.
b $\boldsymbol{F} = \mu\dot{x}_1\boldsymbol{e}_1$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Il punto è vincolato alla sfera mobile

$$x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - at)^2 = R^2\,, \qquad t > 0\,.$$

Si scelga la parametrizzazione lagrangiana

$$x_1 = R\cos\varphi\sin\theta\,, \quad x_2 = R\sin\varphi\sin\theta\,, \quad x_3 = at + R\cos\theta\,,$$

con $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$.
a $\boldsymbol{F} = x_1^2\boldsymbol{e}_1 + x_3^3\boldsymbol{e}_3$.
b $\boldsymbol{F} = x_2\boldsymbol{e}_1 - x_1\boldsymbol{e}_2$.

c Nessuna delle precedenti.
09 Il punto è vincolato al paraboloide

$$x_3 = a(x_1^2 + x_2^2)\,, \qquad x_3 > 0\,.$$

Si usino $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$ come coordinate lagrangiane.
a $\boldsymbol{F} = -kx_1\boldsymbol{e}_1 + \mu\dot{x}_2\boldsymbol{e}_2$.
b $\boldsymbol{F} = \mu e^{d\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\boldsymbol{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Nel caso 1:

$$Q_\tau = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial\tau} = \mu acd\sin(kt)\tau e^{d\tau}\,,$$

che ha potenziale lagrangiano

$$U^{\text{L}} = \frac{\mu ac}{d}\sin(kt)e^{d\tau}(d\tau - 1)\,.$$

Nel caso 2, Q_τ dipende da $\dot\tau$.
II: a
Infatti la forza in questo caso è conservativa con potenziale $U = x_1^3/3 + x_3^4/4$. Nel caso 2 si verifica che

$$Q_\varphi = -R^2(\sin\theta)^2\,, \qquad Q_\theta = 0\,,$$

che non ammettono potenziale lagrangiano.
III: b
Nel caso 1, la componente $Q_{x_2} = \mu\dot{x}_2$ dipende dalle derivate delle coordinate lagrangiane. Nel caso 2, la $\boldsymbol{F}$ sul vincolo è equivalente a

$$\boldsymbol{F}_1 = \mu e^{\frac{b}{a}\sqrt{x_3}}\,,$$

che è conservativa e quindi le componenti lagrangiane della forza ammettono un potenziale lagrangiano.

I.4 ESERCIZIO PER 6CFU

Sia

$$m\ddot{x} = f(x)$$

l'equazione di un moto unidimensionale, con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$.
10 Supponiamo che

$$|f(x)| \le |\sin x|\,, \qquad \text{per ogni } x \in \boldsymbol{R}.$$

a Esistono infiniti punti di equilibrio stabile.
b Esistono infiniti punti di equilibrio, ma può darsi che nessuno sia stabile.
c Nessuna delle precedenti.
11 Supponiamo che

$$f(x) \ge x^2\,, \qquad \text{per ogni } x > 0.$$

Consideriamo le orbite nel piano delle fasi del moto.
a Esistono orbite definite per $x \in (x_0, +\infty)$, per qualche $x_0 \in \boldsymbol{R}$.
b Non esistono orbite illimitate.
c Nessuna delle precedenti.
12 Sia $f(x) \geq e^{-x^2}$ per ogni $x \in \boldsymbol{R}$.
a Non esistono punti di equilibrio.
b Esiste esattamente un punto di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti la f si annulla in tutti i punti $x = k\pi$, con k intero. Però il suo segno altrove resta arbitrario.
II: a
In questo caso infatti evidentemente $U(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, e quindi gli insiemi $E + U(x) \geq 0$ sono sempre illimitati a destra.
III: a
I punti di equilibrio corrispondono a $f(x) = 0$.

I.5 Un corpo rigido non degenere C è vincolato a muoversi di moto polare con polo O.
Il momento delle forze esterne è dato da

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = -\alpha\boldsymbol{\omega}\,,$$

con $\alpha > 0$ costante. Si supponga sempre $\boldsymbol{\omega} \neq 0$.
13 L'energia cinetica si conserva durante il moto.
a Se e solo se il moto è la quiete.
b Se e solo se il moto è una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.
14 Esistono moti che sono rotazioni.
a Non in generale, se non si fanno ipotesi speciali su α e $\boldsymbol{\sigma}_O$.
b Sì, qualunque forma abbia il corpo.
c Nessuna delle precedenti.
15 Si assuma $T(0) > 0$. Dire se è possibile che esista una costante $\beta > 0$ tale che

$$T(t) \geq \beta > 0\,, \qquad \text{per ogni } t \in (0, +\infty)\,.$$

a Se e solo se $0 < \alpha < \alpha_0$ con $\alpha_0 \in (0, +\infty)$ opportuno.
b Se e solo se $T(0) > \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Infatti

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\alpha|\boldsymbol{\omega}|^2\,,$$

che è strettamente negativo se il moto non è la quiete.

II: b
Si vede infatti che le rotazioni (non uniformi) intorno agli assi principali risolvono le equazioni di Eulero.
III: c
L'asserto non può mai verificarsi; infatti

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} \le \frac{I_M}{2}|\boldsymbol{\omega}|^2\,,$$

ove I_M denota il massimo tra i momenti principali d'inerzia in O. Dunque

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\alpha|\boldsymbol{\omega}|^2 \le -\frac{2\alpha}{I_M}T\,,$$

che come è noto implica che

$$T(t) \le T(0)e^{-\frac{2\alpha}{I_M}t} \to 0\,, \qquad t \to +\infty\,.$$

I.6 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi sulla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.
16 Supponiamo che per un altro campo di forze $\boldsymbol{F}_1$ valga che $\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_1$ sia ortogonale al versore tangente $\boldsymbol{T}$ in ogni punto della curva. È vero che i due moti corrispondenti alle due forze (a parità di condizioni iniziali) coincidono?
a Sì sempre.
b Sì se il vincolo è liscio.
c Nessuna delle precedenti.
17 Se il vincolo è scabro e la forza $\boldsymbol{F}$ è conservativa, l'energia meccanica può conservarsi? (Si assuma che il moto non sia la quiete.)
a No, mai.
b Sì, indipendentemente dal valore del coefficiente d'attrito.
c Nessuna delle precedenti.
18 Il vincolo sia liscio, e $\boldsymbol{\psi}$ sia l'elica cilindrica

$$x_1 = R\cos(\alpha s)\,, \quad x_2 = R\sin(\alpha s)\,, \quad x_3 = h\alpha s\,,$$

con $h > 0$, $R > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2+h^2}$ costanti, e $s \in \boldsymbol{R}$. Sia inoltre $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{L}}(s)$ con

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{L}}(s) = -\alpha s\boldsymbol{T}(s)\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $\alpha > 0$ costante.
a Tutti i moti sono limitati.
b Tutti i moti (diversi dalla quiete) sono illimitati.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Infatti in questo caso $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T} = \boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{T}$ quindi le due equazioni di moto coincidono. Le reazioni vincolari peraltro non coincidono in genere.

II: b
Si consideri il caso di una circonferenza di raggio R, e di un moto circolare uniforme su di essa di velocità c. Allora se $\boldsymbol{F}$ ha modulo mc^2/R e direzione centripeta, la reazione vincolare è nulla.
III: a
Infatti se $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\tan} = 0$ si ha l'equazione di moto

$$m\ddot{s} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} = -\alpha s\,,$$

ossia l'equazione dei moti armonici che ha tutte soluzioni periodiche.

Prova scritta del 18/01/2021

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 18/01/2021

I.1 Una lamina rettangolare $ABCD$, di lati a, b con $a > b$, è vincolata a ruotare intorno alla diagonale AC con vincolo liscio.
È soggetta alla distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\delta_B$$

(ossia a una forza concentrata nel vertice B), con $\alpha > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ versore solidale e normale alla lamina.
Il sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ ha $\boldsymbol{X}_O$ nel centro della lamina (che è anche l'origine del sistema di riferimento fisso), e

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\,.$$

In questo sistema le coordinate di B sono date da

$$\boldsymbol{X}_B = \boldsymbol{X}_O + \sum_{h=2}^{3} \lambda_{hB} \boldsymbol{u}_h\,,$$

e denotiamo il tensore di inerzia $\boldsymbol{\sigma}_O = (I_{hk})$.
Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo di rotazione $\varphi \in (-\pi, \pi)$ della lamina rispetto al sistema di riferimento fisso, tale che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

01 Dire quale delle seguenti è la corretta equazione di moto.
a $I_{33}\ddot{\varphi} = -\lambda_{2B}\alpha$.
b $I_{33}\ddot{\varphi} = \lambda_{3B}\alpha$.
c Nessuna delle precedenti.
02 Dire quale delle seguenti proprietà ha $\boldsymbol{L}_O$.
a $\boldsymbol{L}_O(t) \cdot \boldsymbol{u}_1(t) = 0$, per ogni t.
b $\boldsymbol{L}_O(t) \cdot \boldsymbol{u}_2(t) = 0$, per ogni t.
c Nessuna delle precedenti.
03 Dire quale delle funzioni seguenti rappresenta l'energia cinetica della lamina.
a

$$T = \frac{1}{2}(I_{23} + I_{33})\dot{\varphi}^2 \,.$$

b

$$T = \frac{1}{2} I_{13}\dot{\varphi}^2 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Infatti $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3$ *e*

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \overrightarrow{OB} \times (\alpha \boldsymbol{u}_1) = -\lambda_{2B}\alpha \boldsymbol{u}_3 + \lambda_{3B}\alpha \boldsymbol{u}_2 \,.$$

Quindi la terza equazione di Eulero è

$$I_{33}\ddot{\varphi} = -\lambda_{2B}\alpha \,.$$

II: a
Le componenti di $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ *sono date da*

$$\begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{23}\dot{\varphi} \\ I_{33}\dot{\varphi} \end{pmatrix} \,.$$

III: c
Si ha

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} I_{33}\dot{\varphi}^2 \,.$$

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi su una superficie regolare S, data dal piano $x_3 = 0$, ossia

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,.$$

Il vincolo è scabro, secondo la legge

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si supponga $\boldsymbol{v}(t) \neq 0$ per ogni t.

Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + R\boldsymbol{e}_3)$$

con $k > 0$, $R \geq 0$.

04 Dire quale dei seguenti è il sistema delle equazioni di moto.

a

$$m\ddot{x} = -kx - \mu kR\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\,,$$
$$m\ddot{y} = -ky - \mu kR\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\,.$$

b

$$m\ddot{x} = -kx - \mu kR\dot{x}\,,$$
$$m\ddot{y} = -ky - \mu kR\dot{y}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

05 Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dall'energia meccanica del punto definita da

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 + \frac{k}{2}[x(t)^2 + y(t)^2]\,.$$

a $\dot{\mathcal{E}}(t) = -\mu kR|\boldsymbol{v}(t)|$.

b $\dot{\mathcal{E}}(t) = 0$.

c Nessuna delle precedenti.

06 Dire quando è possibile che il moto sia circolare uniforme con traiettoria $x^2 + y^2 = L^2 > 0$.

a Se $R = 0$ per ogni valore di $L > 0$ esiste un tale moto.

b Se $R > 0$ esistono opportuni valori di $L > 0$ per cui esiste un tale moto.

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: a

Si ha $|\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| = |\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_3| = kR$. *Quindi*

$$\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}} = -\mu kR\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\,.$$

II: a

Si ha

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + k(x\dot{x} + y\dot{y}) = \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{v} = -\mu kR|\boldsymbol{v}|\,.$$

III: a

Se $R = 0$, $\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}} = \mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}} = 0$ *e il moto è armonico; per esempio si ha il moto circolare uniforme come richiesto dato da*

$$(x(t), y(t)) = L\Big(\cos\Big(\sqrt{\frac{k}{m}}t\Big), \sin\Big(\sqrt{\frac{k}{m}}t\Big)\Big)\,.$$

Se $R > 0$, l'energia meccanica non può conservarsi su un moto circolare uniforme (vedi sopra), come invece dovrebbe.

I.3 Dire quali delle seguenti forze direttamente applicate ammettano un potenziale lagrangiano, nei casi indicati. Il sistema di corpi rigidi è in ogni caso costituito dal singolo punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$.
Qui a, b, c, d, μ, $k > 0$ sono costanti.
07 Il punto è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = a\tau\boldsymbol{e}_1 + b\tau^2\boldsymbol{e}_2 + ce^{d\tau}\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \tau \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui $\tau \in \boldsymbol{R}$ è la coordinata lagrangiana.
a $\boldsymbol{F} = \mu x_3 e^{kt}\boldsymbol{e}_1$.
b $\boldsymbol{F} = \mu\dot{x}_2\boldsymbol{e}_2$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Il punto è vincolato alla sfera mobile

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2t^2\,, \qquad t > 0\,.$$

Si scelga la parametrizzazione lagrangiana

$$x_1 = at\cos\varphi\sin\theta\,, \quad x_2 = at\sin\varphi\sin\theta\,, \quad x_3 = at\cos\theta\,,$$

con $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$.
a $\boldsymbol{F} = -x_2\boldsymbol{e}_1 + x_1\boldsymbol{e}_2$.
b $\boldsymbol{F} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Il punto è vincolato al piano $x_3 = 0$. Si usino $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$ come coordinate lagrangiane.
a $\boldsymbol{F} = -k\dot{x}_1\boldsymbol{e}_1 + \mu x_2\boldsymbol{e}_2$.
b $\boldsymbol{F} = x_1\boldsymbol{e}_2 + ae^{bx_3}\boldsymbol{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
Nel caso 1:

$$Q_\tau = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial\tau} = a\mu ce^{d\tau+kt}\,,$$

che ha potenziale lagrangiano

$$U^{\text{L}} = \frac{a\mu c}{d}e^{d\tau+kt}\,.$$

Nel caso 2, Q_τ dipende da $\dot{\tau}$.
II: b
Infatti la forza in questo caso è conservativa con potenziale $U = |\boldsymbol{x}|^2/2$. Nel caso 1 si verifica che

$$Q_\varphi = a^2t^2(\sin\theta)^2\,, \qquad Q_\theta = 0\,,$$

che non ammettono potenziale lagrangiano.

III: c
Nel caso 1, la componente $Q_{x_1} = -k\dot{x}_1$ dipende dalle derivate delle coordinate lagrangiane. Nel caso 2,

$$Q_{x_1} = 0\,, \qquad Q_{x_2} = x_1\,,$$

non ammettono un potenziale lagrangiano.

I.4 In ciascuno dei seguenti casi dire se il sistema di vincoli olonomi è regolare in tutte le configurazioni compatibili o no.
In tutti i casi il sistema di corpi rigidi è costituito dai due punti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3\,.$$

10 I vincoli sono

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= R_1^2\,,\\ z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 &= R_2^2\,,\\ (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 &= L^2\,, \end{aligned}$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^6$. Qui L, R_1, $R_2 > 0$ sono costanti con $R_1 > R_2$.
a Sì, ma solo se $R_1 + R_2 > L > R_1 - R_2$.
b Sì, per ogni L, R_1, R_2.
c Nessuna delle precedenti.
11 Il vincolo è

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 - z_5^2 - z_6^2 + R^2 = 0\,,$$

con $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 > 0$. Qui $R > 0$ è costante.
a No, mai.
b Sì, sempre.
c Nessuna delle precedenti.
12 I vincoli sono

$$z_1 - \lambda z_4 = 0\,, \quad z_2 - \lambda z_5 = 0\,, \quad z_3 - \lambda z_6 = 0\,,$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^6$. Qui $\lambda \in \boldsymbol{R}$ è costante.
a Sì, per ogni λ.
b Sì, ma solo se $\lambda > 0$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
Se $L \notin [R_1 - R_2, R_1 + R_2]$, non esistono configurazioni compatibili. In ogni caso la iacobiana è

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & z_4 & z_5 & z_6\\ z_1 - z_4 & z_2 - z_5 & z_3 - z_6 & z_4 - z_1 & z_5 - z_2 & z_6 - z_3 \end{pmatrix}\,,$$

che ha rango 2 *se e solo se*

$$\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2 = \lambda \boldsymbol{X}_1\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1 = \mu \boldsymbol{X}_2\,,$$

con λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$, *che d'altra parte è vero se e solo se* $L = R_1 - R_2$ *o* $L = R_1 + R_2$.
II: b
La iacobiana è

$$(z_1, z_2, z_3, -z_4, -z_5, -z_6)\,,$$

che non si annulla mai sulle configurazioni compatibili.
III: a
La iacobiana è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\,,$$

che ovviamente ha rango massimo per ogni λ.

I.5 Un corpo rigido non degenere C è vincolato a muoversi di moto polare con polo O.
Il momento delle forze esterne è dato da

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = -\alpha \boldsymbol{\omega}\,,$$

con $\alpha > 0$ costante. Si supponga sempre $\boldsymbol{\omega} \neq 0$.
13 Tutti i moti sono delle rotazioni.
a No, esistono sempre moti non rotatori, in qualunque ipotesi sul corpo.
b Sì, sotto la sola ipotesi che $\boldsymbol{\sigma}_O$ abbia forma opportuna.
c Nessuna delle precedenti.
14 L'energia cinetica è decrescente in t.
a Sì, sempre.
b Solo per alcune condizioni iniziali, ma non per tutte.
c Nessuna delle precedenti.
15 Dire se è possibile che

$$T(t) \to 0\,, \qquad t \to t_0 < +\infty\,.$$

a Se e solo se $\alpha > \alpha_0$ con $\alpha_0 \in (0, +\infty)$ opportuno.
b Se e solo se $T(0) < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Infatti se $\boldsymbol{\sigma}_O = I\,\mathrm{id}$ *le equazioni di Eulero divengono* $I\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\alpha\boldsymbol{\omega}$, *risolte da*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(0) e^{-\frac{\alpha}{I}t}\,,$$

che corrisponde a una rotazione non costante.
II: a
Si sa infatti

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\alpha |\boldsymbol{\omega}|^2 < 0\,.$$

III: c
L'asserto non può mai verificarsi; infatti

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} \geq \frac{I_m}{2}|\boldsymbol{\omega}|^2\,,$$

ove I_m denota il minimo tra i momenti principali d'inerzia in O. Dunque

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\alpha|\boldsymbol{\omega}|^2 \geq -\frac{2\alpha}{I_m}T\,,$$

che come è noto implica che

$$T(t) \geq T(0)e^{-\frac{2\alpha}{I_m}t} > 0\,, \qquad t > 0\,.$$

I.6 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi sulla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.
16 Dire in quale caso, se il vincolo è liscio, l'energia cinetica si conserva.
a Se la curva è piana.
b Se la forza $\boldsymbol{F}$ è ortogonale al vettore tangente $\boldsymbol{T}$.
c Nessuna delle precedenti.
17 Se il vincolo è liscio, la forza $\boldsymbol{F}$ è posizionale, e la curva $\boldsymbol{\psi}$ è chiusa, allora il moto è periodico.
a Sì.
b Sì, ma solo se la curva è piana.
c Nessuna delle precedenti.
18 Il vincolo sia scabro, con

$$|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| = \mu|\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si assuma sempre $\dot{s} \neq 0$, e anche che $\boldsymbol{F}$ sia conservativa.
a La conservazione dell'energia non vale per nessun moto.
b La conservazione dell'energia vale se $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}})\cdot\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}})\cdot\dot{s}\boldsymbol{T} = 0\,.$$

II: c
Si consideri una forza che, ristretta alla curva, sia $\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{T}$ con $\alpha > 0$ costante. Allora l'equazione di moto è

$$m\ddot{s} = \alpha\,,$$

che chiaramente non conduce a un moto periodico.
III: b
Infatti se $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = 0$ si ha come noto per l'energia meccanica $\mathcal{E}$

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{v} = 0\,.$$

Questo per esempio è il caso se $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\psi}$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio R, e il moto è circolare uniforme con velocità data da $\dot{s}^2 = kR^2/m$.

Prova scritta del 15/02/2021 (1)

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 15/02/2021 (1)

I.1 Un disco di massa m e raggio R è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G sulla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

ove $(O, (x_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Su di esso agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha\overrightarrow{GP} \times \boldsymbol{e}_3\,\mathrm{d}S + k\boldsymbol{e}_1\,\mathrm{d}\delta_A\,,$$

ove $\mathrm{d}S$ è la misura di area sul disco, A è un punto solidale al disco che appartiene alla sua circonferenza bordo e P denota il generico punto del disco. Si tratta quindi della somma di una sollecitazione distribuita e di una forza concentrata in A. Qui α, $k > 0$ sono costanti e con I_{33} si denota il momento del disco rispetto all'asse a esso ortogonale in G.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G = L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{GA} = R\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{e}_2\,.$$

01 Dire quale è l'espressione corretta dell'energia cinetica in forma lagrangiana.
a

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}L^2\dot{\theta}^2 + \frac{I_{33}}{2}\dot{\varphi}^2\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}L^2\dot{\varphi}^2 + \frac{I_{33}}{2}\dot{\theta}^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
02 Dire quale è la corretta espressione delle componenti lagrangiane della forza concentrata $k\boldsymbol{e}_1\,\mathrm{d}\delta_A$.
a $Q^A_\varphi = -kL\sin\varphi$, $Q^A_\theta = -kR\sin\theta$.
b $Q^A_\varphi = -kL\cos\theta$, $Q^A_\theta = -kR\sin\theta$.
c Nessuna delle precedenti.

03 Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dalle componenti lagrangiane della forza distribuita $\alpha\overrightarrow{GP} \times \boldsymbol{e}_3 \, \mathrm{d}S$.
a $Q^{\mathrm{dist}}_{\varphi} = 0$ per ogni (φ, θ).
b $Q^{\mathrm{dist}}_{\theta} = 0$ per ogni (φ, θ).
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti per il teorema di König

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{m}{2}L^2\dot{\varphi}^2 + \frac{I_{33}}{2}\dot{\theta}^2 \, .$$

II: a
La parametrizzazione del generico punto del disco è

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}(\varphi, \theta, r, \psi) = (L\cos\varphi + r\cos(\theta + \psi))\boldsymbol{e}_1 + (L\sin\varphi + r\sin(\theta + \psi))\boldsymbol{e}_2 \, ,$$

$r \in [0, R]$, $\psi \in [0{,}2\pi]$. *Dato che* $\boldsymbol{X}_A = \boldsymbol{X}^{\text{L}}(\varphi, \theta, R{,}0)$, *dalla definizione di componenti lagrangiane delle forze segue la a.*
III: a
Usando la parametrizzazione data sopra

$$\alpha\overrightarrow{GP} \times \boldsymbol{e}_3 = \alpha r[\sin(\theta + \psi)\boldsymbol{e}_1 - \cos(\theta + \psi)\boldsymbol{e}_2] \, .$$

Poiché

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial \varphi} = -L\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 \, ,$$

che non dipende da ψ, *l'integrale sul disco di*

$$\alpha\overrightarrow{GP} \times \boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial \varphi}$$

si annulla. Invece

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial \theta} = -r[\sin(\theta + \psi)\boldsymbol{e}_1 - \cos(\theta + \psi)\boldsymbol{e}_2] \, ,$$

quindi

$$\alpha\overrightarrow{GP} \times \boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial \theta} = -\alpha r^2 \, ,$$

che non ha integrale nullo sul disco.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (R\cos(\alpha s), R\sin(\alpha s), h\alpha s) \, ,$$

$\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, R, $h > 0$, $s \in \boldsymbol{R}$. Il vincolo è scabro, con legge

$$|\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}}| = \mu|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}| \, ,$$

$\mu > 0$. Si prenda $s(t)$ come coordinata lagrangiana.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca dell'elica e k, τ curvatura e torsione rispettivamente (si ricordi che nell'elica k e τ sono costanti).

04 Sia $\dot{s}(0) = v_0 > 0$, e sul punto agisca la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{N}(s) + \beta \boldsymbol{B}(s)\,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti. Come si devono scegliere α e β in modo da rendere minima $|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\tan}|$ all'istante $t = 0$?
a $\alpha = mv_0^2 k$, $\beta = 0$.
b $\alpha = \beta = mv_0^2 k/2$.
c Nessuna delle precedenti.
05 Sul punto agisce la forza $\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{B}$, con $\beta > 0$ costante. Il moto con condizioni iniziali $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$ è illimitato? (Il moto è definito finché $\dot{s} > 0$.)
a Può esserlo, se v_0 è abbastanza grande.
b No, è sempre limitato.
c Nessuna delle precedenti.
06 Supponiamo che sia $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(s)$ (ossia $\boldsymbol{F}$ sia posizionale). Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.
a La forza vincolare tangente all'istante iniziale $t = 0$ è indipendente da $\dot{s}(0)$.
b La forza vincolare tangente all'istante iniziale $t = 0$ è indipendente da $s(0)$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Dalle equazioni di moto segue infatti

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\tan}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| = \mu \sqrt{(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{B})^2 + (m\dot{s}^2 k - \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N})^2}\,.$$

II: b
L'equazione di moto è

$$m\ddot{s} = -\mu\sqrt{\beta^2 + m^2\dot{s}^4 k^2} \le -\mu\beta < 0\,.$$

Quindi

$$\dot{s}(t) \le v_0 - \frac{\mu}{m}\beta t\,,$$

perciò $\dot{s}$ si annulla per la prima volta in $t = \bar{t} \le mv_0/\mu\beta$; pertanto $s(t) \le s(\bar{t}) < +\infty$.
III: c
Si ha infatti

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\tan}(0)| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}(0)| = \mu \sqrt{(\boldsymbol{F}(s(0))\cdot\boldsymbol{B}(s(0)))^2 + (m\dot{s}(0)^2 k - \boldsymbol{F}(s(0))\cdot\boldsymbol{N}(s(0)))^2}\,.$$

I.3 Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Sull'asta agisce la forza, applicata nell'estremo B

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{e}_3 - k(\boldsymbol{X}_B - L\boldsymbol{e}_1)\,.$$

Qui α, $k > 0$ sono costanti.
Si usi la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}_B^{\text{L}} = L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,$$

$\varphi \in (-\pi, \pi)$.
07 Si può definire un potenziale lagrangiano $U^{\text{L}} \in C^2((-\pi,\pi))$?
a No.
b Solo se $k = \alpha$.
c Nessuna delle precedenti.
08 All'interno dell'intervallo $(-\pi, \pi)$ quante posizioni di equilibrio esistono al massimo?
a 4.
b 2.
c Nessuna delle precedenti.
09 Se $2\alpha \le k$ esiste la posizione di equilibrio

$$\varphi_0 = -\arcsin\frac{2\alpha}{k} \in \Big[-\frac{\pi}{2}, 0\Big)\,.$$

In questa posizione si possono definire le piccole oscillazioni?
a Sì, sempre.
b Solo se $2\alpha < k$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Il potenziale lagrangiano esiste sempre; la forza è posizionale quindi si ha $Q_\varphi = Q_\varphi(\varphi)$ *e*

$$U^{\text{L}}(\varphi) = \int_0^\varphi Q_\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,;$$

si noti che la forza non è conservativa.
II: b
Si ha

$$\boldsymbol{F}_B^{\text{L}} = 2L\alpha(\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 - \cos\varphi\boldsymbol{e}_2) - k(\boldsymbol{X}_B^{\text{L}}(\varphi) - L\boldsymbol{e}_1)\,,$$

cosicché

$$Q_\varphi = \boldsymbol{F}_B^{\text{L}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}_B^{\text{L}}}{\partial\varphi} = -2L^2\alpha - kL^2\sin\varphi\,.$$

Quindi le posizioni di equilibrio sono date da

$$\sin\varphi = -\frac{2\alpha}{k}\,.$$

Al massimo ci sono 2 *valori di* $\varphi \in (-\pi,\pi)$ *che soddisfano questa uguaglianza.*
III: b
Dal calcolo sopra, $(U^{\text{L}})' = Q_\varphi$*; quindi*

$$(U^{\text{L}})''(\varphi_0) = -kL^2\cos\varphi_0\,,$$

che è negativo se e solo se $\varphi_0 > -\pi/2$.

I.4 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, e il piano delle fasi (x, p).
10 Se la curva

$$x^2 + p^2 = L^2\,,$$

con $L > 0$ è un'orbita, quale conclusione si può trarre?
a Esiste almeno un punto di equilibrio $\boldsymbol{x}_{\text{eq}}$ con $|\boldsymbol{x}_{\text{eq}}| < L$.
b Esiste almeno un punto di equilibrio $\boldsymbol{x}_{\text{eq}}$ con $|\boldsymbol{x}_{\text{eq}}| \geq L$.
c Nessuna delle precedenti.
11 Se un'orbita è limitata, cioè contenuta in un insieme

$$\{(x, p) \mid x^2 + p^2 \leq R^2\}\,,$$

con $R < +\infty$, e non è un punto di equilibrio, è sempre una curva chiusa.
a Sì, se $U(x)$ è una funzione limitata.
b No in generale.
c Nessuna delle precedenti.
12 Si considerino due moti $x_1(t)$ e $x_2(t)$, tali che $x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$, $\dot{x}_1(t_0) \neq \dot{x}_2(t_0)$ per un t_0 assegnato.
a Allora i due moti hanno certamente orbite diverse.
b Se x_1 e x_2 hanno la stessa orbita, sono entrambi moti periodici.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
Poiché le orbita sono curve di livello dell'energia meccanica, si ha per $p = 0$

$$U(-L) = U(L)\,.$$

Quindi in $(-L, L)$ esiste almeno un punto critico di U.
II: b
Per esempio può essere un'orbita che connette due punti di equilibrio instabile, come nel piano delle fasi di $m\ddot{x} = -k \sin x$.
III: c
I due moti hanno certamente la stessa orbita se sono uno traslato temporale dell'altro: $x_1(t) = x_2(t-T)$, $T > 0$, il che è compatibile con le ipotesi, indipendentemente dalla loro periodicità.

I.5 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare intorno al polo O.
13 Se $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) \neq 0$ per ogni t, e il moto è una rotazione intorno a un asse principale d'inerzia in O, allora $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t)$ ha direzione costante.
a Sì.
b Se è vero allora C ha ellissoide d'inerzia sferico.

c Nessuna delle precedenti.

14 Supponiamo che il moto sia una rotazione uniforme non nulla intorno a un asse non principale d'inerzia in O, e che $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) \neq 0$ per ogni t.

a $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t)$ può essere un vettore solidale al corpo.

b $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t)$ può essere un vettore costante nel sistema fisso.

c Nessuna delle precedenti.

15 Sia $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) = 0$ per ogni t. Dire quale delle seguenti quantità si conserva sempre in riferimento al moto alla Poinsot dell'ellissoide d'inerzia che rotola sul piano fisso Π ortogonale a $\boldsymbol{L}_O$.

a La direzione di $\boldsymbol{\omega}$.

b La componente di $\boldsymbol{\omega}$ normale a Π.

c Nessuna delle precedenti.

Soluzione

I: a

Si sa che nelle ipotesi fatte $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ è parallelo all'asse di rotazione, che ha direzione costante.

II: a

Supponiamo che l'asse di rotazione sia l'asse solidale $\boldsymbol{u}_3$; allora le equazioni di Eulero danno per le componenti di $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ nella base solidale (poichè $\dot{\omega}_3 = 0$)

$$M_1 = -I_{23}\omega_3^2\,, \quad M_2 = I_{13}\omega_3^2\,, \quad M_3 = 0\,.$$

Dunque $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ è costante nella terna solidale; poiché questa però si muove di rotazione non nulla nella fissa, non può essere costante in quest'ultima (avendo componenti non nulle ortogonali all'asse di rotazione).

III: b

La normale è $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$, che è costante. Quindi la componente è

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}|} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{2T}{|\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}|}\,,$$

che è costante per i noti integrali primi.

I.6 Si consideri un sistema di punti materiali liberi

$$(\boldsymbol{X}_1, m_1)\,, \ldots\,, (\boldsymbol{X}_n, m_n)\,, \qquad n \geq 100\,.$$

Sui punti agiscono le forze esterne $\boldsymbol{F}_1^{\text{ext}}$, …, $\boldsymbol{F}_n^{\text{ext}}$, e si assumono le usuali ipotesi sulle forze interne.

Qui $\boldsymbol{F}^{\text{ext}}$ è la risultante delle forze esterne e $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}$ è il momento risultante delle forze esterne rispetto al centro di massa G. Si suppongono note le condizioni iniziali.

16 Se $\boldsymbol{F}^{\text{ext}}(t) = 0$ e $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}(t) = 0$ per ogni t, allora le equazioni globali (o cardinali) della dinamica determinano il moto del sistema.

a In genere no.

b Sì, se si conoscono le $\boldsymbol{F}_i^{\text{ext}}$ per ciascun $i = 1, \ldots, n$.

c Nessuna delle precedenti.

17 Supponiamo inoltre che il sistema sia rigido non degenere e che abbia quindi 6 gradi di libertà. A esso si aggiunge un altro moto $\boldsymbol{X}_{n+1}$, che è vincolato da vincoli rigidi solo a p tra gli n moti precedenti.
a In genere il numero dei gradi di libertà aumenta se $p \geq 3$.
b Il numero dei gradi di libertà può diminuire.
c Nessuna delle precedenti.
18 Supponiamo che il sistema sia rigido non degenere, e che si conosca il moto del centro di massa G. Allora la seconda equazione globale

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_G}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}}$$

determina il moto del sistema.
a In genere no, a meno che $\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}} = 0$.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Se il sistema non è rigido la conoscenza delle sole forze esterne non è sufficiente a determinare il moto dei singoli punti.
II: c
Si sa che se $p \geq 3$ il numero dei gradi di libertà resta 6, perché un sistema rigido non può avere più di 6 gradi di libertà. Il numero dei gradi di libertà ovviamente non può diminuire aggiungendo un punto non altrimenti vincolato al sistema.
III: b
Infatti la seconda equazione globale si riduce alle equazioni di Eulero, che determinano il moto del sistema noto quello di un punto solidale.

Prova scritta del 15/02/2021 (2)

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 15/02/2021 (2)

I.1 Un disco di massa m e raggio R è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G sulla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

ove $(O, (x_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Su di esso agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP}\,\mathrm{d}S + \alpha \boldsymbol{e}_1\,\mathrm{d}\delta_A\,,$$

ove $\mathrm{d}S$ è la misura di area sul disco, A è un punto solidale al disco che appartiene alla sua circonferenza bordo e P denota il generico punto del disco. Si tratta quindi della somma di una sollecitazione distribuita e di una forza concentrata in A. Qui α, $\beta > 0$ sono costanti e con I_{33} si denota il momento del disco rispetto all'asse a esso ortogonale in G.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G = L\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + L\sin\theta \boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{GA} = R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,.$$

01 Dire quale è l'espressione corretta dell'energia cinetica in forma lagrangiana.
a

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}L^2\dot\theta^2 + \frac{I_{33}}{2}\dot\varphi^2\,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}L^2\dot\varphi^2 + \frac{I_{33}}{2}\dot\theta^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
02 Dire quale è la corretta espressione delle componenti lagrangiane della forza concentrata $\alpha\boldsymbol{e}_1\,\mathrm{d}\delta_A$.
a $Q^A_\theta = -\alpha R\sin\theta$, $Q^A_\varphi = -\alpha L\sin\varphi$.
b $Q^A_\theta = -\alpha L\sin\varphi$, $Q^A_\varphi = -\alpha R\sin\theta$.
c Nessuna delle precedenti.
03 Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dalle componenti lagrangiane della forza distribuita $\beta\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP}\,\mathrm{d}S$.
a $Q^{\mathrm{dist}}_\varphi = 0$ per ogni (φ, θ).
b $Q^{\mathrm{dist}}_\varphi \neq 0$ per ogni (φ, θ).
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
Infatti per il teorema di König

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{m}{2}L^2\dot\theta^2 + \frac{I_{33}}{2}\dot\varphi^2\,.$$

II: c
La parametrizzazione del generico punto del disco è

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta,r,\psi) = (L\cos\theta + r\cos(\varphi+\psi))\boldsymbol{e}_1 + (L\sin\theta + r\sin(\varphi+\psi))\boldsymbol{e}_2\,,$$

$r \in [0, R]$, $\psi \in [0{,}2\pi]$. *Dato che* $\boldsymbol{X}_A = \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta,R{,}0)$, *dalla definizione di componenti lagrangiane delle forze segue la c.*
III: b
Usando la parametrizzazione data sopra

$$\beta\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP} = -\beta r[\sin(\varphi+\psi)\boldsymbol{e}_1 - \cos(\varphi+\psi)\boldsymbol{e}_2]\,.$$

Si calcola

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = -r[\sin(\varphi+\psi)\boldsymbol{e}_1 - \cos(\varphi+\psi)\boldsymbol{e}_2]\,,$$

quindi

$$\beta \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial \theta} = \beta r^2 \,,$$

che ha integrale positivo sul disco.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (R\cos(\alpha s), R\sin(\alpha s), h\alpha s) \,,$$

$\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, R, $h > 0$, $s \in \boldsymbol{R}$. Il vincolo è scabro, con legge

$$|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}| = \mu |\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}| \,,$$

$\mu > 0$. Si prenda $s(t)$ come coordinata lagrangiana.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca dell'elica e k, τ curvatura e torsione rispettivamente (si ricordi che nell'elica k e τ sono costanti).
04 Sia $\dot{s}(0) = v_0 > 0$, e sul punto agisca la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{N}(s) + \beta \boldsymbol{B}(s) \,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Come si devono scegliere α e β in modo da rendere minima $|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}|$ all'istante $t = 0$?
a $\alpha = 1$, $\beta = 0$.
b $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$.
c Nessuna delle precedenti.
05 Sul punto non agiscono forze direttamente applicate. Il moto con condizioni iniziali $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$ si arresta in un tempo finito (cioè $\dot{s}(t) \to 0$ per $t \to t_0 < +\infty$)?
a No.
b No, ma solo se $v_0 > V > 0$ con V opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
06 Supponiamo che sia $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{T}$ con α costante. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.
a Il moto è indipendente da μ.
b La quantità $|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}|$ all'istante iniziale $t = 0$ è indipendente da $s(0)$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Dalle equazioni di moto segue infatti

$$|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}|^2 = \mu^2 |\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|^2 = \mu^2 [(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B})^2 + (m\dot{s}^2 k - \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N})^2] = \mu^2 [1 + (m\dot{s}^2 k)^2 - 2m\dot{s}^2 k\alpha] \,.$$

II: a
L'equazione di moto è

$$m\ddot{s} = -\mu m \dot{s}^2 k \,.$$

Integrando per separazione delle variabili

$$\dot{s}(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 \mu k t} \,, \qquad t > 0 \,,$$

perciò $\dot{s}$ non si annulla mai.
III: b
Si ha infatti

$$|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}(0)| = \mu|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}(0)| = \mu\sqrt{(\boldsymbol{F}(s(0))\cdot\boldsymbol{B}(s(0)))^2 + (m\dot{s}(0)^2k - \boldsymbol{F}(s(0))\cdot\boldsymbol{N}(s(0)))^2}$$
$$= \mu m\dot{s}(0)^2k\,.$$

I.3 Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Sull'asta agisce la forza, applicata nell'estremo B

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{e}_3 - k\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui α, $k > 0$ sono costanti.
Si usi la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_B = L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,$$

$\varphi \in (-\pi, \pi)$.
07 Si può definire un potenziale lagrangiano $U^{\text{L}} \in C^2((-\pi,\pi))$?
a No.
b Solo se $k = \alpha$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Se esiste una posizione di equilibrio $\varphi_0 > 0$ ne esiste una simmetrica $-\varphi_0$.
a Sì.
b Questo dipende dalla scelta di $L > 0$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Possono esistere infinite posizioni di equilibrio?
a Sì se $k = \alpha$.
b Sì, se L è sufficientemente piccolo in dipendenza degli altri parametri.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Il potenziale lagrangiano esiste sempre; la forza è posizionale quindi si ha $Q_\varphi = Q_\varphi(\varphi)$ e

$$U^{\text{L}}(\varphi) = \int_0^\varphi Q_\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,;$$

si noti che la forza non è conservativa.
II: a
Si ha

$$\boldsymbol{F}^{\text{L}}_B = 2L\alpha(\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 - \cos\varphi\boldsymbol{e}_2) - k\boldsymbol{e}_2\,,$$

cosicché

$$Q_\varphi = \boldsymbol{F}^{\text{L}}_B\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}^{\text{L}}_B}{\partial\varphi} = -2L^2\alpha - kL\cos\varphi\,.$$

Quindi le posizioni di equilibrio φ_0 sono date da

$$\cos\varphi_0 = -\frac{2L\alpha}{k}\,.$$

Poiché il coseno è una funzione pari, segue l'asserto.
III: c
Come si è visto sopra, esistono al massimo 2 punti di equilibrio.

I.4 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, e il piano delle fasi (x, p).
10 Se la curva (non chiusa, si noti)

$$\{(x,p) \mid x^2 + p^2 = L^2\,, x < L\}\,,$$

con $L > 0$ è un'orbita, quale conclusione si può trarre?
a Il punto $x = L$ non è di equilibrio.
b Il punto $x = L$ è di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.
11 Se un'orbita $p = p(x)$, $x \in J$, ove J è l'intervallo aperto di definizione della funzione $p(x)$, soddisfa $p(x) > 0$ per ogni $x \in J$, allora $p(x) > p_0 > 0$ per ogni $x \in J$, per un $p_0 > 0$ opportuno.
a Sì, ma solo se U ha punti di flesso.
b No in generale.
c Nessuna delle precedenti.
12 Se il potenziale U soddisfa $U(x) \to -\infty$ per $x \to \pm\infty$, allora esiste almeno un punto di equilibrio stabile.
a Sì, ne esiste esattamente uno.
b Sicuramente non ne esistono.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Se il punto (L,0) non appartiene all'orbita, vuol dire che il moto tende a esso in un tempo infinito e il punto è di equilibrio, secondo un noto risultato teorico.
II: b
Per esempio può essere un'orbita che connette due punti di equilibrio instabile, come nel piano delle fasi di $m\ddot{x} = -k\sin x$.
III: c
Sicuramente esiste un punto di massimo assoluto, ma non è detto che sia isolato, quindi non è detto che sia di equilibrio stabile.

I.5 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare intorno al polo O.
13 Se $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) \neq 0$ per ogni t, e non mantiene direzione costante, il moto può essere una rotazione intorno a un asse principale d'inerzia in O.

a Sì, se C ha ellissoide d'inerzia sferico.
b Sì, se C non ha ellissoide d'inerzia sferico.
c Nessuna delle precedenti.

14 Se $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) \neq 0$ per ogni t è costante nel sistema fisso, il moto può essere una rotazione uniforme non nulla intorno a un asse non principale d'inerzia in O.
a No.
b Sì se l'ellissoide d'inerzia è sferico.
c Nessuna delle precedenti.

15 Sia $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) = 0$ per ogni t. Dire quale delle seguenti quantità si conserva sempre.
a Il modulo $|\boldsymbol{\omega}|$.
b Il modulo $|\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}|$.
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE
I: c
Si sa che nelle ipotesi fatte $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ è parallelo all'asse di rotazione, che ha direzione costante.
II: a
Supponiamo che l'asse di rotazione sia l'asse solidale $\boldsymbol{u}_3$; allora le equazioni di Eulero danno per le componenti di $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ nella base solidale (poichè $\dot{\omega}_3 = 0$)

$$M_1 = -I_{23}\omega_3^2\,, \quad M_2 = I_{13}\omega_3^2\,, \quad M_3 = 0\,.$$

Dunque $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ è costante nella terna solidale; poiché questa però si muove di rotazione non nulla nella fissa, non può essere costante in quest'ultima (avendo componenti non nulle ortogonali all'asse di rotazione).
III: b
Si conosce infatti l'integrale primo $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{L}_O(t) = \boldsymbol{L}_O(0)$.

I.6 Si consideri un sistema di punti materiali liberi

$$(\boldsymbol{X}_1, m_1)\,, \ldots\,, (\boldsymbol{X}_n, m_n)\,, \qquad n \geq 100\,.$$

Sui punti agiscono le forze esterne $\boldsymbol{F}_1^{\text{ext}}$, …, $\boldsymbol{F}_n^{\text{ext}}$, e si assumono le usuali ipotesi sulle forze interne.
Qui $\boldsymbol{F}^{\text{ext}}$ è la risultante delle forze esterne e $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}$ è il momento risultante delle forze esterne rispetto al centro di massa G. Si suppongono note le condizioni iniziali.

16 Sia $\boldsymbol{F}^{\text{ext}}(t) = 0$ e $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}(t) = 0$ per ogni t. Dire quali dei seguenti moti sono determinati dalle equazioni globali della dinamica.
a Il moto di un punto del sistema, ma non di tutti.
b Il moto del centro di massa del sistema.
c Nessuna delle precedenti.

17 Supponiamo inoltre che il sistema sia rigido non degenere e che abbia quindi 6 gradi di libertà. A esso si aggiunge un altro moto $\boldsymbol{X}_{n+1}$, che è vincolato da vincoli rigidi solo a 2 tra gli n moti precedenti.

a Il numero dei gradi di libertà aumenta.
b Il numero dei gradi di libertà può diminuire.
c Nessuna delle precedenti.

18 Supponiamo che il sistema sia rigido non degenere, e che si conosca il momento $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}(t)$ come funzione del tempo. Allora si può determinare $\boldsymbol{L}_G(t)$.
a Sì.
b In genere no, a meno che $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE
I: b
La prima equazione globale determina il moto rettilineo uniforme del centro di massa.
II: a
Si aggiunge un grado di libertà, dovuto al fatto che il punto $\boldsymbol{X}_{n+1}$ può muoversi sulla circonferenza intersezione delle due sfere centrate sui 2 punti da cui $\boldsymbol{X}_{n+1}$ ha distanza prescritta. Il numero dei gradi di libertà ovviamente non può diminuire aggiungendo un punto non altrimenti vincolato al sistema.
III: a
Dalla seconda equazione globale

$$\boldsymbol{L}_G(t) = \boldsymbol{L}_G(0) + \int_0^t \boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Prova scritta del 15/02/2021 (6cfu)

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 15/02/2021 (6cfu)

I.1 Un disco di massa m e raggio R è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G sulla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

ove $(O, (x_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Su di esso agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP}\,\mathrm{d}S + \alpha \boldsymbol{e}_1\,\mathrm{d}\delta_A\,,$$

ove $\mathrm{d}S$ è la misura di area sul disco, A è un punto solidale al disco che appartiene alla sua circonferenza bordo e P denota il generico punto del

disco. Si tratta quindi della somma di una sollecitazione distribuita e di una forza concentrata in A. Qui α, $\beta > 0$ sono costanti e con I_{33} si denota il momento del disco rispetto all'asse a esso ortogonale in G.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G = L\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + L\sin\theta \boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{GA} = R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,.$$

01 Dire quale è l'espressione corretta dell'energia cinetica in forma lagrangiana.
a

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}L^2\dot{\theta}^2 + \frac{I_{33}}{2}\dot{\varphi}^2\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}L^2\dot{\varphi}^2 + \frac{I_{33}}{2}\dot{\theta}^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
02 Dire quale è la corretta espressione delle componenti lagrangiane della forza concentrata $\alpha\boldsymbol{e}_1\,\mathrm{d}\delta_A$.
a $Q^A_\theta = -\alpha R\sin\theta$, $Q^A_\varphi = -\alpha L\sin\varphi$.
b $Q^A_\theta = -\alpha L\sin\varphi$, $Q^A_\varphi = -\alpha R\sin\theta$.
c Nessuna delle precedenti.
03 Dire quale delle seguenti relazioni è soddisfatta dalle componenti lagrangiane della forza distribuita $\beta\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP}\,\mathrm{d}S$.
a $Q^{\text{dist}}_\varphi = 0$ per ogni (φ, θ).
b $Q^{\text{dist}}_\varphi \neq 0$ per ogni (φ, θ).
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Infatti per il teorema di König

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{m}{2}L^2\dot{\theta}^2 + \frac{I_{33}}{2}\dot{\varphi}^2\,.$$

II: c
La parametrizzazione del generico punto del disco è

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}(\varphi,\theta,r,\psi) = (L\cos\theta + r\cos(\varphi+\psi))\boldsymbol{e}_1 + (L\sin\theta + r\sin(\varphi+\psi))\boldsymbol{e}_2\,,$$

$r \in [0, R]$, $\psi \in [0{,}2\pi]$. *Dato che* $\boldsymbol{X}_A = \boldsymbol{X}^{\text{L}}(\varphi,\theta,R{,}0)$, *dalla definizione di componenti lagrangiane delle forze segue la c.*
III: b
Usando la parametrizzazione data sopra

$$\beta\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP} = -\beta r[\sin(\varphi+\psi)\boldsymbol{e}_1 - \cos(\varphi+\psi)\boldsymbol{e}_2]\,.$$

Si calcola

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial\varphi} = -r[\sin(\varphi+\psi)\boldsymbol{e}_1 - \cos(\varphi+\psi)\boldsymbol{e}_2]\,,$$

quindi

$$\beta \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GP} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial \theta} = \beta r^2 \,,$$

che ha integrale positivo sul disco.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (R\cos(\alpha s), R\sin(\alpha s), h\alpha s) \,,$$

$\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, R, $h > 0$, $s \in \boldsymbol{R}$. Il vincolo è scabro, con legge

$$|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}| = \mu |\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}| \,,$$

$\mu > 0$. Si prenda $s(t)$ come coordinata lagrangiana.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca dell'elica e k, τ curvatura e torsione rispettivamente (si ricordi che nell'elica k e τ sono costanti).
04 Sia $\dot{s}(0) = v_0 > 0$, e sul punto agisca la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{N}(s) + \beta \boldsymbol{B}(s) \,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Come si devono scegliere α e β in modo da rendere minima $|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}|$ all'istante $t = 0$?
a $\alpha = 1$, $\beta = 0$.
b $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$.
c Nessuna delle precedenti.
05 Sul punto non agiscono forze direttamente applicate. Il moto con condizioni iniziali $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$ si arresta in un tempo finito (cioè $\dot{s}(t) \to 0$ per $t \to t_0 < +\infty$)?
a No.
b No, ma solo se $v_0 > V > 0$ con V opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
06 Supponiamo che sia $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{T}$ con α costante. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.
a Il moto è indipendente da μ.
b La quantità $|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}|$ all'istante iniziale $t = 0$ è indipendente da $s(0)$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Dalle equazioni di moto segue infatti

$$|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}|^2 = \mu^2 |\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|^2 = \mu^2 [(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B})^2 + (m\dot{s}^2 k - \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N})^2 = \mu^2 (1 + (m\dot{s}^2 k)^2 - 2m\dot{s}^2 k\alpha)] \,.$$

II: a
L'equazione di moto è

$$m\ddot{s} = -\mu m \dot{s}^2 k \,.$$

Integrando per separazione delle variabili

$$\dot{s}(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 \mu k t} \,, \qquad t > 0 \,,$$

perciò $\dot{s}$ non si annulla mai.
III: b
Si ha infatti

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\tan}(0)| = \mu|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}(0)| = \mu\sqrt{(\boldsymbol{F}(s(0))\cdot\boldsymbol{B}(s(0)))^2 + (m\dot{s}(0)^2k - \boldsymbol{F}(s(0))\cdot\boldsymbol{N}(s(0)))^2}$$
$$= \mu m\dot{s}(0)^2k\,.$$

I.3 Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Sull'asta agisce la forza, applicata nell'estremo B

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{e}_3 - k\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui α, $k > 0$ sono costanti.
Si usi la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}_B^{\text{L}} = L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,$$

$\varphi \in (-\pi, \pi)$.
07 Si può definire un potenziale lagrangiano $U^{\text{L}} \in C^2((-\pi,\pi))$?
a No.
b Solo se $k = \alpha$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Se esiste una posizione di equilibrio $\varphi_0 > 0$ ne esiste una simmetrica $-\varphi_0$.
a Sì.
b Questo dipende dalla scelta di $L > 0$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Possono esistere infinite posizioni di equilibrio?
a Sì se $k = \alpha$.
b Sì, se L è sufficientemente piccolo in dipendenza degli altri parametri.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Il potenziale lagrangiano esiste sempre; la forza è posizionale quindi si ha $Q_\varphi = Q_\varphi(\varphi)$ e

$$U^{\text{L}}(\varphi) = \int_0^\varphi Q_\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,;$$

si noti che la forza non è conservativa.
II: a
Si ha

$$\boldsymbol{F}_B^{\text{L}} = 2L\alpha(\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 - \cos\varphi\boldsymbol{e}_2) - k\boldsymbol{e}_2\,,$$

cosicché

$$Q_\varphi = \boldsymbol{F}_B^{\text{L}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}_B^{\text{L}}}{\partial\varphi} = -2L^2\alpha - kL\cos\varphi\,.$$

Quindi le posizioni di equilibrio φ_0 sono date da

$$\cos\varphi_0 = -\frac{2L\alpha}{k}\,.$$

Poiché il coseno è una funzione pari, segue l'asserto.
III: a
Come si è visto sopra esistono al più 2 posizioni di equilibrio.

I.4 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, e il piano delle fasi (x,p).
10 Se la curva (non chiusa, si noti)

$$\{(x,p) \mid x^2 + p^2 = L^2\,, x < L\}\,,$$

con $L > 0$ è un'orbita, quale conclusione si può trarre?
a Il punto $x = L$ non è di equilibrio.
b Il punto $x = L$ è di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.
11 Se un'orbita $p = p(x)$, $x \in J$, ove J è l'intervallo aperto di definizione della funzione $p(x)$, soddisfa $p(x) > 0$ per ogni $x \in J$, allora $p(x) > p_0 > 0$ per ogni $x \in J$, per un $p_0 > 0$ opportuno.
a Sì, ma solo se U ha punti di flesso.
b No in generale.
c Nessuna delle precedenti.
12 Se il potenziale U soddisfa $U(x) \to -\infty$ per $x \to \pm\infty$, allora esiste almeno un punto di equilibrio stabile.
a Sì, ne esiste esattamente uno.
b Sicuramente non ne esistono.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Se il punto (L,0) non appartiene all'orbita, vuol dire che il moto tende a esso in un tempo infinito e il punto è di equilibrio, secondo un noto risultato teorico.
II: b
Per esempio può essere un'orbita che connette due punti di equilibrio instabile, come nel piano delle fasi di $m\ddot{x} = -k\sin x$.
III: c
Sicuramente esiste un punto di massimo assoluto, ma non è detto che sia isolato, quindi non è detto che sia di equilibrio stabile.

I.5 Un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi si muove soggetto a forze conservative di potenziale lagrangiano $U^{\text{L}}(x,y)$, ove $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate cartesiane. Si sa che (0,0) è un punto di equilibrio.

13 Supponiamo che l'hessiana sia

$$D^2U^{\text{L}}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} .$$

a Si possono definire le piccole oscillazioni.
b Il punto è di equilibrio instabile.
c Nessuna delle precedenti.
14 Supponiamo che l'hessiana sia

$$D^2U^{\text{L}}(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} .$$

a Si possono definire le piccole oscillazioni.
b Il punto è di equilibrio instabile.
c Nessuna delle precedenti.
15 Supponiamo che $(0,0)$ sia di equilibrio stabile, con $U(0,0) = 0$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se

$$x(0)^2 + y(0)^2 + \dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2 \leq \delta^2$$

allora

$$|U(x(t), y(t))| \leq \varepsilon\,, \qquad t > 0\,.$$

a In genere non è vero, a meno che non si abbiano informazioni ulteriori sull'hessiana.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Infatti l'hessiana è definita positiva e quindi si tratta di un minimo isolato.
II: a
Infatti l'hessiana è definita negativa e quindi si tratta di un massimo isolato in cui si può definire la lagrangiana ridotta.
III: b
Nelle ipotesi fatte, per $\eta > 0$ e $\delta = \delta(\eta) > 0$ opportuno vale

$$x(t)^2 + y(t)^2 + \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 \leq \eta^2\,, \qquad t > 0\,.$$

D'altra parte per $\varepsilon > 0$ fissato esiste un $\eta(\varepsilon)$ tale che se $x^2 + y^2 \leq \eta^2$ allora $|U(x,y)| \leq \varepsilon$, per continuità.

I.6 Si consideri un corpo rigido il cui supporto è un cubo. Dire quanti gradi di libertà ha il corpo sottoposto a ciascuno dei vincoli seguenti.
16 Due vertici A e B del cubo appartengono al piano fisso $x_3 = 0$.
a 4.
b 3.
c Nessuna delle precedenti.

17 Il centro del cubo è a distanza fissa R dall'origine.
a 3.
b 5.
c Nessuna delle precedenti.
18 Una diagonale del cubo AB deve mantenersi parallela all'asse fisso x_3.
a 1.
b 5.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Si impongono infatti due vincoli corrispondenti a $x_{3A} = 0$, $x_{3B} = 0$.
II: b
Si impone infatti il vincolo

$$x_{1K}^2 + x_{2K}^2 + x_{3K}^2 = R^2 \,,$$

se K *è il centro del cubo.*
III: c
In questo caso $\ell = 4$. *Si impongono infatti i due vincoli*

$$x_{1A} - x_{1B} = 0 \,, \qquad x_{2A} - x_{2B} = 0 \,.$$

Prova scritta del 29/03/2021

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 29/03/2021

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza L e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0 \,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Inoltre il centro G di AB deve avere quota $x_{3G} = 0$. Sull'asta agisce la forza (applicata in B)

$$\boldsymbol{F}_B = k|\boldsymbol{X}_B|^2 \boldsymbol{X}_B \,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(r, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

allora

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L(\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{u}_3)\,, \quad \boldsymbol{X}_G = r\boldsymbol{u}_1\,.$$

Sotto $\boldsymbol{X}_O$ denota l'origine del sistema di riferimento fisso, che ha coordinate (x_h).

01 Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze apparenti sono conservative nel senso lagrangiano e quindi esiste il loro potenziale lagrangiano U^{L}_{app}.

a Sì, e il potenziale è dato da

$$U^{\text{L}}_{app}(r,\varphi) = \frac{m}{2}\alpha^2\Big(r^2 + \frac{L^2}{3}\cos^2\varphi\Big)\,.$$

b No, le forze apparenti non sono conservative in senso lagrangiano.

c Nessuna delle precedenti.

02 Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze direttamente applicate ammettono potenziale lagrangiano.

a Sì ed esso vale

$$U^{\text{L}}_{da} = \frac{k}{4}(r^2 + L^2 + 2rL\cos\varphi)\,.$$

b Sì ed esso vale

$$U^{\text{L}}_{da} = \frac{k}{4}(r^2 + L^2 + 2rL\cos\varphi)^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

03 Esistono posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $r = 0$.

a Sì ne esistono almeno 2.

b Non ne esistono, per una opportuna scelta dei parametri.

c Nessuna delle precedenti.

Soluzione

I: a

È noto dalla teoria che la forza di Coriolis in questo caso ha componenti lagrangiane nulle. La forza di trascinamento ha distribuzione sull'asta

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{tr} = \frac{m\alpha^2}{2L}\lambda_1\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}s\,,\ \textit{con potenziale}\ \mathrm{d}U_{tr} = \frac{m\alpha^2}{4L}\lambda_1^2\,\mathrm{d}s\,,$$

che conduce al potenziale

$$U^{\text{L}}_{tr} = \int_{AB}\mathrm{d}U_{tr} = \int_{-L}^{L}\frac{m\alpha^2}{4L}(r + s\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}s$$

che ha il valore dato sopra.

II: b

Si ha

$$U_{da}(\boldsymbol{\lambda}_B) = \frac{k}{4}(\lambda_{1B}^2 + \lambda_{3B}^2)^2\,,$$

per cui

$$U^{\text{L}}_{da} = \frac{k}{4}[(r + L\cos\varphi)^2 + (L\sin\varphi)^2]^2 = \frac{k}{4}[r^2 + 2rL\cos\varphi + L^2]^2\,.$$

III: a
Il potenziale totale è

$$U^{\text{L}} = \frac{m}{2}\alpha^2\Big(r^2 + \frac{L^2}{3}\cos^2\varphi\Big) + \frac{k}{4}(r^2 + L^2 + 2rL\cos\varphi)^2\,,$$

da cui il sistema dell'equilibrio

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial r} &= m\alpha^2 r + k(r^2 + L^2 + 2rL\cos\varphi)(r + L\cos\varphi) = 0\,,\\ \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} &= -\frac{m\alpha^2}{6}L^2\sin 2\varphi + k(r^2 + L^2 + 2rL\cos\varphi)(-rL\sin\varphi) = 0\,,\end{aligned}$$

che dà per $r = 0$ che $\varphi = \pm\pi/2$.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove R, $h > 0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea.
Il vincolo è scabro.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \gamma x_3\boldsymbol{N} + \delta\boldsymbol{B}\,,$$

con γ, $\delta > 0$ costanti. Qui (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca dell'elica, che viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3\,,\\ \boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{B}(s) &= \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

e la curvatura $k(s) = R\alpha^2$.
04 Si supponga $\dot{s} \neq 0$ e che la reazione vincolare soddisfi

$$|\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}}| = \mu|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Allora l'equazione di moto è:
a

$$m\ddot{s} = -\mu\,\text{sign}(\dot{s})\sqrt{(\dot{s}^2 mk - \gamma h\alpha s)^2 + \delta^2}\,.$$

b

$$m\ddot{s} = -\mu\delta\,\text{sign}(\dot{s})\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
05 Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$, e che la reazione vincolare soddisfi all'equilibrio

$$|\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}}| \leq \mu_s|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|\,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Allora il punto materiale resta in equilibrio.
a Sì, ma solo se $0 < h \leq h_0$ con $h_0 > 0$ opportuno.
b Sì, ma solo se $\mu_s \geq \mu^0$ con $\mu^0 > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
06 Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0 > 0$, e che la reazione vincolare soddisfi, se $\dot{s} \neq 0$,

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Dire quale delle seguenti proprietà soddisfa $s(t)$.
a Vale in ogni caso $\dot{s}(t) > 0$ per ogni $t \in (0, +\infty)$.
b Vale $\dot{s}(t) \to 0$ per $t \to t_0-$, con $t_0 < +\infty$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Il sistema di moto dà

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= -\mu \operatorname{sign}(\dot{s}) |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,, \\ m\dot{s}^2 k &= \gamma h \alpha s + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} \,, \\ 0 &= \delta + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} \,, \end{aligned}$$

da cui subito la 1.
II: c
La componente tangente della forza direttamente applicata è nulla.
III: b
Infatti dalla prima equazione di moto

$$m\ddot{s} = -\mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \leq -\mu\delta < 0 \,.$$

I.3 Un cubo omogeneo C di spigolo L e massa m è vincolato ad avere il centro G nell'origine del sistema fisso.
Su di esso agisce una distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = [f_1(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{u}_1 + f_2(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{u}_2 + f_3(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{u}_3] \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} \,,$$

ove $\boldsymbol{\lambda}$ denota le coordinate nel sistema solidale al cubo $\mathcal{S} = (G, (\boldsymbol{u}_h))$, e le f_h sono funzioni continue su C.
07 Si assuma che il cubo parta da fermo all'istante iniziale $t = 0$. Allora il moto è una rotazione.
a No, a meno che almeno 2 tra le f_h si annullino identicamente.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
08 Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$, e che $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0$, ossia che tutte le f_h si annullino identicamente. Allora il moto è una rotazione.
a Sì.
b Solo se il cubo parte da certe posizioni opportune.
c Nessuna delle precedenti.

09 Supponiamo che $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = f_1(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$ (ossia che f_2, f_3 si annullino identicamente). Allora una delle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ in $(\boldsymbol{u}_h)$ si mantiene costante.
a Solo se f_1 è costante su C.
b No, mai.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti considerata la simmetria del cubo le equazioni di Eulero sono

$$I_{11}\dot{\omega}_h = \alpha_h\,,$$

con $\alpha_h \in \boldsymbol{R}$ costanti, perché la distribuzione di forze dipende solo dalle coordinate solidali. Quindi

$$\boldsymbol{\omega}(t) = t\sum_{h=1}^{3}\frac{\alpha_h}{I_{11}}\boldsymbol{u}_h\,,$$

e la direzione di $\boldsymbol{\omega}$ risulta solidale e quindi fissa.
II: a
Il moto è polare per inerzia e tutti gli assi sono principali in G.
III: c
Infatti

$$\boldsymbol{M}_G^{\mathrm{ext}}\cdot\boldsymbol{u}_1 = \int_C \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}\times(f_1(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{u}_1)\cdot\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = 0\,.$$

Quindi la prima equazione di Eulero implica $\dot{\omega}_1 = 0$.

I.4 Si consideri un moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x) = U'(x)\,.$$

Sia $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$.
10 Sia

$$\inf_{x\in\boldsymbol{R}} U(x) = -\infty\,,$$

e si consideri un'orbita del piano delle fasi corrispondente al livello energetico $E \in \boldsymbol{R}$.
a Esistono E per cui l'orbita è definita per ogni $x \in \boldsymbol{R}$.
b Per tutti i valori di E l'orbita è limitata.
c Nessuna delle precedenti.
11 Se due orbite nel piano delle fasi hanno un punto in comune, allora coincidono.
a Sì.
b Non in generale, ma può verificarsi.
c Nessuna delle precedenti.
12 Assumiamo che

$$U(x) < U(-L) = U(L)\,,\qquad -L < x < L\,,$$

per un dato $L > 0$.

a Se esiste al massimo un numero finito di punti di equilibrio in $(-L, L)$, allora almeno uno di essi è stabile.
b Esistono almeno due punti di equilibrio in $(-L, L)$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Poiché le orbite hanno dominio in $\{E \geq -U(x)\} = \{U(x) \geq -E\}$, nell'ipotesi fatta per ogni E esistono x per cui l'orbita non è definita. Inoltre, possono esistere comunque orbite illimitate (per esempio se $U(x) = -e^x$).
II: a
È un risultato teorico.
III: c
La U può avere un unico punto critico di minimo in $(-L, L)$, e quindi di equilibrio instabile.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi sulla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.
13 Dire in quale caso, se il vincolo è liscio, l'energia cinetica si conserva.
a Se la curva è piana.
b Se la forza $\boldsymbol{F}$ è parallela al vettore normale principale $\boldsymbol{N}$.
c Nessuna delle precedenti.
14 Se il vincolo è liscio, la forza $\boldsymbol{F}$ è posizionale, e la curva $\boldsymbol{\psi}$ è chiusa, allora la velocità si mantiene limitata durante tutto il moto.
a Sì.
b Sì, ma solo se la curva è piana.
c Nessuna delle precedenti.
15 Il vincolo sia scabro, con

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si assuma sempre $\dot{s} \neq 0$, e anche che $\boldsymbol{F}$ sia conservativa.
a La conservazione dell'energia vale, purché $\mu > 0$ sia abbastanza piccolo.
b La conservazione dell'energia vale, purché sia $\mathbf{f}_{\text{vin}} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\text{vin}}) \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\text{vin}}) \cdot \dot{s}\boldsymbol{T} = 0 \,.$$

II: c
Si consideri una forza che, ristretta alla curva, sia $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{T}$ con $\alpha > 0$ costante. Allora l'equazione di moto è

$$m\ddot{s} = \alpha \,,$$

che chiaramente conduce a una velocità illimitata.

III: b
Infatti se $\mathbf{f}_{\text{vin}} = 0$ *si ha come noto per l'energia meccanica* $\mathcal{E}$

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{v} = 0\,.$$

Questo per esempio è il caso se $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{x}$, ψ *è la circonferenza di centro l'origine e raggio* R, *e il moto è circolare uniforme con velocità data da* $\dot{s}^2 = kR^2/m$.

I.6 Si considerino due sistemi mobili di riferimento $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ e $\Sigma = (\boldsymbol{X}_\Omega, \mathcal{N})$. Qui $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ e $\boldsymbol{v}_\mathcal{S}$, $\boldsymbol{v}_\Sigma$ denotano le velocità di $\boldsymbol{X}$ relative rispettivamente a $\mathcal{S}$ e a Σ.
16 Dire quale delle seguenti formule è valida per un qualunque moto $\boldsymbol{X} \in C^2(I)$.
a

$$\boldsymbol{v}_\mathcal{S} = \boldsymbol{v}_{\Omega,\Sigma} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_\Omega) + \boldsymbol{v}_\Sigma\,.$$

b

$$\boldsymbol{v}_\mathcal{S} = \boldsymbol{v}_{\Omega,\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_\Omega) + \boldsymbol{v}_\Sigma\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
17 Supponiamo che

$$\boldsymbol{v}_\Sigma = k\boldsymbol{w}_1\,, \quad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \alpha\boldsymbol{w}_1\,, \quad \boldsymbol{v}_{\Omega,\mathcal{S}} = 0\,.$$

Qui α, $k \in \boldsymbol{R}$.
È possibile che il moto $\boldsymbol{X}$ sia solidale a $\mathcal{S}$?
a Sì, è solidale a $\mathcal{S}$ se $k = 0$, senza altre condizioni.
b Sì, in alcuni casi anche se $\alpha \neq 0$.
c Nessuna delle precedenti.
18 Si sa che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}}\,,$$

ove $\mathcal{P}$ è la terna fissa.
Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.
a La terna $\mathcal{N}$ è fissa.
b La terna $\mathcal{M}$ è fissa.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Segue dalla teoria.
II: b
Segue dalla formula nella soluzione della prima domanda se $\boldsymbol{v}_\mathcal{S} = 0$ *(che equivale a essere solidale a* $\mathcal{S}$*) che*

$$0 = k\boldsymbol{w}_1 + \alpha\boldsymbol{w}_1 \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_\Omega)\,,$$

che è impossibile se $k \neq 0$. *In questo caso dobbiamo poi richiedere che* $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_\Omega$ *sia parallelo a* $\boldsymbol{w}_1$ *o che* $\alpha = 0$.

III: a
Dalla teoria sappiamo

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} - \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} = 0$$

nelle ipotesi fatte qui.

Prova scritta del 03/06/2021

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 03/06/2021

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato dal vincolo mobile

$$\lambda_3 = \beta\lambda_1^3\,, \qquad \lambda_2 = 0\,,$$

ove $\beta > 0$ è costante e $\boldsymbol{\lambda}$ denota le coordinate nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, con $\boldsymbol{X}_O = 0$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sul punto agisce il peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Si scelga $x = \lambda_1 \in \boldsymbol{R}$ come coordinata lagrangiana.
01 Quale affermazione soddisfa il potenziale lagrangiano U^{L} delle forze apparenti in $\mathcal{S}$?
a

$$U^{\text{L}}_{\text{app}} = \frac{m}{2}\alpha^2(x^2 + \beta^2 x^6)\,.$$

b

$$U^{\text{L}}_{\text{app}} = \frac{m}{2}\alpha^2 x^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
02 Quale delle seguenti affermazioni concernenti le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ è corretta?
a Ne esiste esattamente 1, ed è stabile.
b Ne esistono due, una stabile e l'altra instabile.
c Nessuna delle precedenti.

03 L'energia cinetica $T^{\text{L}}_{\mathcal{S}}$ relativa al sistema $\mathcal{S}$ è data da

a
$$T^{\text{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1+9\beta^2x^4)\,.$$

b
$$T^{\text{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1+9\beta^2x^2)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: b

Infatti la forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle in questo caso e quella di trascinamento e il suo potenziale sono dati da:

$$\boldsymbol{F}_{T} = m\alpha^2\lambda_1\boldsymbol{u}_1\,, \qquad U_{\text{app}} = \frac{m}{2}\alpha^2\lambda_1^2\,.$$

II: b

Il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ è:

$$U^{\text{L}}(x) = \frac{m}{2}\alpha^2x^2 - mg\beta x^3\,.$$

Quindi

$$(U^{\text{L}})'(x) = 0 \qquad \textit{se e solo se } x = 0 \textit{ o } x = \alpha^2/(3g\beta) := x_0.$$

Ma 0 è instabile e x_0 è stabile, perché

$$(U^{\text{L}})''(0) = m\alpha^2 > 0\,, \qquad (U^{\text{L}})''(x_0) = -m\alpha^2 < 0\,.$$

III: a

Infatti

$$T^{\text{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}|^2 = \frac{m}{2}\left|\dot{x}\boldsymbol{u}_1 + 3\beta x^2\dot{x}\boldsymbol{u}_3\right|^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1+9\beta^2x^4)\,.$$

I.2 Un corpo rigido è formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R e da un'asta AB solidale al disco, ortogonale a esso con il punto medio nel centro G del disco. L'asta ha lunghezza $2L$ e massa m.

Si scelga come sistema di riferimento solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_G, (\boldsymbol{u}_h))$, con $\boldsymbol{u}_3 = \overrightarrow{AB}/(2L)$.

04 Il corpo si muove di moto polare per inerzia di polo G.

a Fissati M, R, $L > 0$, per un'opportuna scelta di m tutti i moti sono di rotazione uniforme.

b Esistono sempre moti per inerzia non periodici, per qualunque scelta di M, m, R, $L > 0$.

c Nessuna delle precedenti.

05 Il corpo si muove di moto polare di polo G, soggetto a un momento delle forze esterne dato da

$$\boldsymbol{M}^{\text{ext}}_{G} = \beta\boldsymbol{u}_2\,,$$

con $\beta > 0$ costante; inoltre

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha\boldsymbol{u}_1(0)\,,$$

$\alpha > 0$ costante.
a Vale $\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{u}_1(t) = \beta$ per ogni t.
b Vale $|\boldsymbol{\omega}(t)| =$ costante.
c Nessuna delle precedenti.
06 Il corpo si muove di moto polare di polo A. Il momento delle forse esterne soddisfa

$$\boldsymbol{M}_A^{\text{ext}} = -\mu\boldsymbol{\omega}\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si assuma $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$; T indica l'energia cinetica.
a Il seguente limite esiste finito:

$$\lim_{t\to+\infty} T(t)\,.$$

b Vale

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = +\infty\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Basta mostrare che la matrice d'inerzia è della forma I id. *Infatti*

$$I_{11} = I_{11}^{\text{disco}} + I_{11}^{\text{asta}} = I_{22}\,, \quad I_{33} = I_{33}^{\text{disco}} = 2I_{11}^{\text{disco}}\,.$$

Quindi basta imporre

$$I_{33} = I_{11} \quad \textit{ossia} \quad I_{11}^{\text{disco}} = I_{11}^{\text{asta}}\,,$$

che è un'equazione in m della forma $\alpha m = \beta$ con α, $\beta > 0$.
II: c
Le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3\,,\\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \beta\,,\\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

per cui per ogni t si ha

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha\boldsymbol{u}_1(t) + \beta t\boldsymbol{u}_2(t)\,.$$

III: a
Infatti

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_A^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\mu|\boldsymbol{\omega}|^2 \leq 0\,.$$

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ si muove vincolato alla sfera S

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$. Il vincolo è liscio.

07 Sia

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) = \alpha \boldsymbol{e}_1 - \beta |\dot{\boldsymbol{X}}|^2 \boldsymbol{X} \,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti.
a La forza non ammette potenziale lagrangiano.
b L'energia meccanica si conserva lungo tutti i moti.
c Nessuna delle precedenti.
08 Sia

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -k(\boldsymbol{x} - R\boldsymbol{e}_3) \,,$$

ove $k > 0$ è costante.
a L'insieme dei punti di equilibrio dipende da $k > 0$.
b La reazione vincolare è parallela a $\boldsymbol{F}$ lungo ogni moto.
c Nessuna delle precedenti.
09 Sia

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \nabla U(\boldsymbol{x}) \,,$$

e $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$.
a Se $U(\boldsymbol{x}) = g(|\boldsymbol{x}|)$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$, per un'opportuna $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, allora l'energia cinetica si conserva lungo tutti i moti.
b Se U (come funzione di 3 variabili) ha un punto di sella in $x_0 = R\boldsymbol{e}_3$, questo è un punto di equilibrio instabile per il moto vincolato.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
La componente normale $\beta|\dot{\boldsymbol{X}}|^2\boldsymbol{X}$ della $\boldsymbol{F}$, che non è conservativa mentre la $\alpha\boldsymbol{e}_1$ lo è, ha componenti lagrangiane nulle.
II: c
La $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ deve essere ortogonale alla sfera, quindi in genere non è parallela a $\boldsymbol{F}$. Per ogni $k > 0$ si hanno solo i due punti di equilibrio $\pm R\boldsymbol{e}_3$ ove può valere $\boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\text{vin}} = 0$.
III: a
Infatti

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = \nabla U \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

perché il gradiente di U è ortogonale a S che è di livello per U. Inoltre per esempio

$$U(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - x_2^2 + (x_3 - R)^2$$

in coordinate (x_1, x_2) su S diventa

$$U^{\text{L}}(x_1, x_2) = -2\Big[x_1^2 + x_2^2 - R^2 + \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}\Big] \,,$$

con

$$\nabla U^{\text{L}}(0{,}0) = 0 \,, \qquad D^2 U^{\text{L}}(0{,}0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

I.4 Consideriamo un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi regolari, con ℓ gradi di libertà, e il relativo potenziale lagrangiano U^{L} delle forze direttamente applicate.

10 Sia $\ell = 1$ e i vincoli siano mobili. Allora
a U^{L} esiste sempre.
b U^{L} non esiste mai.
c Nessuna delle precedenti.
11 Sia $\ell = 2$ e le componenti lagrangiane delle forze siano per $(q_1, q_2) \in \boldsymbol{R}^2$

$$Q_1 = q_1 t + q_2 \,, \qquad Q_2 = q_1 + q_2 \,.$$

a U^{L} esiste, in tutto $\boldsymbol{R}^2$.
b U^{L} esiste, ma non in tutto $\boldsymbol{R}^2$.
c Nessuna delle precedenti.
12 Le forze direttamente applicate sono nulle.
a U^{L} esiste sicuramente se i vincoli sono fissi.
b Tutti i punti di equilibrio sono stabili.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Se le forze direttamente applicate sono conservative, U^{L} esiste. Può darsi che non esista, se per esempio tali forze sono dipendenti dalla velocità.
II: a
Infatti per integrazione si ha

$$U^{\text{L}}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2} q_1^2 t + q_1 q_2 + \frac{1}{2} q_2^2 \,.$$

III: a
In realtà esiste anche se i vincoli sono mobili, ed è costante.

I.5 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia di polo $\boldsymbol{X}_O$.
13 Supponiamo che in $\boldsymbol{X}_O$ i 3 momenti principali d'inerzia soddisfino

$$I_{11} = I_{22} \,, \qquad I_{33} > I_{11} \,.$$

a Tutti i moti sono rotazioni uniformi.
b Tutti i moto sono periodici, ma alcuni non sono rotazioni.
c Nessuna delle precedenti.
14 Supponiamo che in $\boldsymbol{X}_O$ la terna $(\boldsymbol{u}_h)$ sia solidale e principale d'inerzia, e che

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \boldsymbol{u}_1(0) + \beta \boldsymbol{u}_2(0) \,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti. Si sappia inoltre che il moto risulta essere una rotazione uniforme.
a Allora ciascuno dei due versori $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ si mantiene costante (rispetto alla terna fissa) durante il moto.
b Allora esistono infinite direzioni solidali che possono essere l'asse di una rotazione uniforme.
c Nessuna delle precedenti.

15 Supponiamo che C sia una lamina e che il polo $\boldsymbol{X}_O$ sia sulla retta perpendicolare a C nel centro di massa G, con $d = |\boldsymbol{X}_O - \boldsymbol{X}_G| > 0$. Sia fissato $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$ parallelo a $\boldsymbol{X}_O - \boldsymbol{X}_G$. Indichiamo con T l'energia cinetica del corpo.
a Allora T è indipendente da d.
b Allora T è costante nel tempo, ma dipende da d.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Le poloidi sono o i punti dati dai vertici dell'ellissoide d'inerzia (rotazioni) o le circonferenze parallele al piano 1,2 *(precessioni regolari).*
II: b
Poiché solo gli assi principali possono essere assi di rotazione, esiste un terzo asse principale nel piano solidale $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ e quindi tutte le direzioni di tale piano sono principali. Non è invece detto che se la somma di due vettori è costante, allora ciascuno dei due si mantenga costante.
III: a
Poiché se $\boldsymbol{\omega}(0)$ ha direzione principale, allora il moto è una rotazione uniforme, se $\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha(\boldsymbol{X}_O - \boldsymbol{X}_G)$ allora il moto è una rotazione uniforme perché per Huygens l'asse perpendicolare alla lamina è principale anche nel polo $\boldsymbol{X}_O$. Inoltre il momento d'inerzia per tale asse è indipendente da d.

I.6 Un punto materiale è vincolato a muoversi su una curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea. Si assuma che la curvatura $k(s)$ sia ovunque strettamente positiva e che il vincolo sia liscio. Si scelga s come coordinata lagrangiana.
16 Supponiamo che per due istanti $t_1 \neq t_2$ si abbia

$$\boldsymbol{v}(t_1) = \boldsymbol{v}(t_2) \neq 0\,, \qquad \boldsymbol{a}(t_1) = \boldsymbol{a}(t_2)\,.$$

Allora:
a $k(s(t_1)) = k(s(t_2))$.
b La curva è piana nel tratto percorso tra t_1 e t_2.
c Nessuna delle precedenti.
17 La forza direttamente applicata $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(s)$ sia posizionale. Allora:
a Se la curva è piana e chiusa il moto è periodico.
b Esiste una funzione $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ tale che valga lungo ciascun moto

$$\frac{m}{2}\dot{s}(t)^2 = g(s(t)) + C\,,$$

per un'opportuna $C \in \boldsymbol{R}$ dipendente dal moto.
c Nessuna delle precedenti.
18 La curva sia una circonferenza di centro l'origine e raggio R:

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Si assuma $\dot{s}(t) \neq 0$ per ogni t e che la forza direttamente applicata sia

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_3\,,$$

con λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$ costanti.
a Se $\lambda = 0$ allora esistono moti per cui $|\mathbf{f}_{\text{vin}}(t)|$ è costante.
b Se $\mu = 0$ allora esistono moti per cui $|\mathbf{f}_{\text{vin}}(t)|$ è costante.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Infatti da

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{T}\,, \qquad \boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{T} + \dot{s}^2 k \boldsymbol{N}$$

seguono nell'ordine

$$\boldsymbol{T}(s(t_1)) = \pm\boldsymbol{T}(s(t_2))\,, \quad \dot{s}(t_1) = \pm\dot{s}(t_2)\,, \quad \boldsymbol{N}(s(t_1)) = \boldsymbol{N}(s(t_2))$$

e la tesi.
II: b
Si ha

$$m\ddot{s} = \boldsymbol{F}(s)\cdot\boldsymbol{T}(s) =: \gamma(s)\,.$$

Quindi moltiplicando per $\dot{s}$ e integrando si arriva a

$$\frac{m}{2}\dot{s}(t)^2 = \frac{m}{2}\dot{s}(0)^2 + \int_{s(0)}^{s(t)} \gamma(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

III: b
Se $\mu = 0$ la forza è parallela a $\boldsymbol{N}$, il moto è circolare uniforme e la reazione vincolare è data da

$$\mathbf{f}_{\text{vin}}\cdot\boldsymbol{N} = \lambda + m\dot{s}^2 R^{-1}\,.$$

Altrimenti, il moto non è uniforme e la reazione vincolare deve variare.

Prova scritta del 02/07/2021

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 02/07/2021

I.1 In ciascuno dei seguenti casi rispondere alla domanda sui sistemi di coordinate lagrangiane ammissibili.
01 Un'asta rigida AB di lunghezza L e massa m è vincolata a mantenere l'estremo A sul piano $x_3 = 0$ e l'estremo B sul piano $x_3 = R < L$. Poniamo $r = \sqrt{L^2 - R^2}$.
Quale dei seguenti sistemi di coordinate lagrangiane è ammissibile?

a $(q_1, q_2, q_3) \in \boldsymbol{R}^2 \times (-\pi, \pi)$ con

$$\boldsymbol{X}_A^{\text{L}} = q_1 \boldsymbol{e}_1 + q_2 \boldsymbol{e}_2 \,,$$
$$\boldsymbol{X}_B^{\text{L}} = (r \cos q_3 + q_1)\boldsymbol{e}_1 + (r \sin q_3 + q_2)\boldsymbol{e}_2 + R\boldsymbol{e}_3 \,.$$

b $(q_1, q_2, q_3) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ con

$$\boldsymbol{X}_A^{\text{L}} = q_1 \cos q_2 \boldsymbol{e}_1 + q_1 \sin q_2 \boldsymbol{e}_2 \,,$$
$$\boldsymbol{X}_B^{\text{L}} = (r q_3 + q_1 \cos q_2)\boldsymbol{e}_1 + (r q_3 + q_1 \sin q_2)\boldsymbol{e}_2 + R\boldsymbol{e}_3 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

02 Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L è vincolata ad avere i due vertici opposti A, C sulla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{L^2}{2} \,.$$

Si assuma che $x_{3A} > 0$.
Dire quali delle seguenti scelte di coordinate cartesiane possono far parte dello stesso sistema di coordinate lagrangiane.
a x_{1A}, x_{1C}.
b x_{1A}, x_{2A}, x_{3C}.
c Nessuna delle precedenti.

03 Un punto $\boldsymbol{X}$ è vincolato alla superficie

$$x_3 = x_1 x_2 \,.$$

Dire quale delle seguenti parametrizzazioni lagrangiane è ammissibile.
a $(q_1, q_2) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}} = e^{-q_1^2} \cos q_2 \boldsymbol{e}_1 + e^{-q_1^2} \sin q_2 \boldsymbol{e}_2 + e^{-2q_1^2} \cos q_2 \sin q_2 \boldsymbol{e}_3 \,.$$

b $(q_1, q_2) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}} = q_1^3 \boldsymbol{e}_1 + q_2 \boldsymbol{e}_2 + q_1^3 q_2 \boldsymbol{e}_3 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

Soluzione
I: a
Infatti

$$|\boldsymbol{X}_A^{\text{L}} - \boldsymbol{X}_B^{\text{L}}|^2 = L^2 \,.$$

II: c
Si ha sempre $x_{hA} = -x_{hC}$, $h = 1, 2, 3$. *Quindi anche* $x_{3C} = -\sqrt{L^2/2 - x_{1A}^2 - x_{2A}^2}$.
III: a
In b il vincolo è soddisfatto ma la iacobiana è

$$\begin{pmatrix} 3q_1^2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3q_1^2 q_2 & q_1^3 \end{pmatrix}$$

che è singolare se $q_1 = 0$.

I.2 Un cilindro di raggio $R > 0$, e altezza $2H > 0$ si muove di moto polare con polo nel centro di massa G.

04 Si assuma che il moto sia polare per inerzia. Allora tutti i moti sono rotazioni.

a Sì, per una scelta opportuna di R, H.

b No, non si può mai esserne certi.

c Nessuna delle precedenti.

05 Si assuma che il moto sia polare per inerzia. Sia $(G, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale tale che $\boldsymbol{u}_3$ sia parallelo all'asse del cilindro. Sia $\omega_3(0) > 0$.

a Allora $\omega_3(t)$ cambia segno infinite volte per $t > 0$.

b Allora $\omega_3(t) > 0$ per ogni $t > 0$.

c Nessuna delle precedenti.

06 Si assuma che sul corpo sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u} \times \overrightarrow{GA}\,,$$

nel punto solidale A che appartiene a una circonferenza di base del cilindro. Qui $k > 0$ è una costante e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale al corpo. Il cilindro parte da fermo all'istante $t = 0$.

Dire quale affermazione è corretta.

a La componente della velocità angolare lungo l'asse del cilindro è funzione lineare del tempo.

b Se la componente della velocità angolare lungo l'asse del cilindro è identicamente nulla, allora il moto è la quiete.

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: a

Basta scegliere R e H in modo che l'ellissoide d'inerzia centrale sia una sfera.

II: b

Dalle equazioni di Eulero segue che $\omega_3(0)$ è costante.

III: a

Scegliamo un sistema solidale $(G, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{u}_3$ assiale e

$$\overrightarrow{GA} = R\boldsymbol{u}_1 + H\boldsymbol{u}_3\,, \qquad \boldsymbol{u} = \sum_{h=1}^{3} \alpha_h \boldsymbol{u}_h\,.$$

Le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot\omega_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - kH(\alpha_3 R - \alpha_1 H)\,,\\ I_{11}\dot\omega_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + k\alpha_2(H^2 + R^2)\,,\\ I_{33}\dot\omega_3 &= kR(\alpha_3 R - \alpha_1 H)\,. \end{aligned}$$

Quindi $\omega_3(t) = kR(\alpha_3 R - \alpha_1 H)t/I_{33}$, che potrebbe annullarsi (senza che il moto sia la quiete) se $\alpha_3 R = \alpha_1 H$.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (R\cos(\alpha s), R\sin(\alpha s), h\alpha s)\,, \quad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $\alpha = (R^2 + h^2)^{-1/2}$, s lunghezza d'arco.
Il vincolo è scabro, con legge di attrito dinamico

$$|\mathbf{f}^{\rm tan}_{\rm vin}| = \mu |\mathbf{f}^{\rm nor}_{\rm vin}|\,,$$

$\mu > 0$ costante. Sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.
Si ricordi:

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h)\,, \quad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0)\,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R)\,, \quad k(s) = R\alpha^2\,, \quad \tau(s) = -\alpha^2 h\,.$$

07 Si assuma $s(0) = 0$, $\dot s(0) < 0$. Allora
a L'energia cinetica T soddisfa $T(t) \geq T(0)/2$ per ogni $t \geq 0$ per cui è definito il moto.
b Si ha che $\dot s(t) \to 0$ per $t \to t_0 < +\infty$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Si assuma $s(0) = 0$, $\dot s(0) > 0$. Allora
a L'energia cinetica T soddisfa $T(t) \geq T(0)/2$ per ogni $t \geq 0$ per cui è definito il moto.
b Si ha che $\dot s(t) \to 0$ per $t \to t_0 < +\infty$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Si assuma $\dot s(t) < 0$. È possibile un moto tale che $\dot s(t) \to -\infty$ per $t \to +\infty$?
a No, per nessun valore di $\mu > 0$.
b Sì, per qualsiasi valore di $\mu > 0$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
L'equazione di moto è

$$\begin{aligned} m\ddot s &= -mgh\alpha - \operatorname{sign}(\dot s)\mu|\mathbf{f}^{\rm nor}_{\rm vin}|\,,\\ m\dot s^2 k &= \mathbf{f}_{\rm vin}\cdot\boldsymbol{N}\,,\\ 0 &= -mgR\alpha + \mathbf{f}_{\rm vin}\cdot\boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$m\ddot s = -mgh\alpha + \mu\sqrt{m^2\dot s^4 k^2 + m^2 g^2 R^2\alpha^2}\,.$$

Perciò il comportamento dipende da μ.
II: b
Vale in questo caso

$$m\ddot s = -mgh\alpha - \mu\sqrt{m^2\dot s^4 k^2 + m^2 g^2 R^2\alpha^2} \leq -mgh\alpha < 0\,.$$

III: a
Infatti dall'equazione di moto segue $\ddot{s} \geq 0$ *se*

$$\mu^2(\dot{s}^4 k^2 + g^2 R^2 \alpha^2) \geq g^2 h^2 \alpha^2 \,.$$

Quindi esiste una costante $c \geq 0$ *(ricavabile dalla disuguaglianza sopra) tale che se* $\dot{s} \leq -c$ *allora* $\ddot{s} \geq 0$*, il che ovviamente impedisce che* $\dot{s}(t) \to -\infty$ *per* $t \to +\infty$*.*

I.4 Un punto materiale si muove vincolato a una curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, con curvatura $k(s) > 0$ e torsione $\tau(s)$.
10 La terna intrinseca $(\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s))$ si può definire se e solo se:
a $\tau(s) > 0$.
b $\tau(s) \neq 0$.
c Nessuna delle precedenti.
11 L'accelerazione $\boldsymbol{a}$ nella posizione s può essere:
a Un qualunque vettore nella forma $\alpha\boldsymbol{T}(s) + \beta\boldsymbol{N}(s)$, con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ arbitrari.
b Un qualunque vettore nella forma $\alpha\boldsymbol{T}(s) + \beta\boldsymbol{B}(s)$, con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ arbitrari.
c Nessuna delle precedenti.
12 È possibile che risulti $\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{a}(t) = 0$ anche se $\boldsymbol{v}(t) \neq 0$, $\boldsymbol{a}(t) \neq 0$?
a Sì per ogni curva $\boldsymbol{\psi}$ come sopra.
b Sì, ma solo se la curva $\boldsymbol{\psi}$ è piana.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Occorre e basta che $k(s) > 0$*.*
II: c
Si ha come noto

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{T}(s) + \dot{s}^2 k(s)\boldsymbol{N}(s)\,,$$

quindi vale l'espressione in a*, ma con* $\beta \geq 0$*.*
III: a
Se $\boldsymbol{v}(t) \neq 0$ *la componente di* $\boldsymbol{a}(t)$ *normale a* $\boldsymbol{v}(t)$ *è diversa da zero, ma quella parallela può essere nulla, se* $\ddot{s}(t) = 0$*.*

I.5 Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di m vincoli olonomi regolari, con $\ell = 3n - m$ gradi di libertà.
13 L'energia meccanica si conserva se:
a Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e le forze direttamente applicate sono conservative.
b Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e le componenti lagrangiane delle forze sono conservative in senso lagrangiano.
c Nessuna delle precedenti.
14 L'insieme degli atti di moto del sistema in una fissata configurazione compatibile costituisce:
a Tutto $\boldsymbol{R}^{3n}$.
b Un sottospazio affine di $\boldsymbol{R}^{3n}$ di dimensione ℓ.
c Nessuna delle precedenti.

15 Supponiamo che $n = 2$ e i vincoli siano per i due moti $\boldsymbol{X}_1 = (z_1, z_2, z_3)$, $\boldsymbol{X}_2 = (z_4, z_5, z_6)$,

$$f_1(z_1, z_2, z_3) = 0\,, \quad f_2(z_4, z_5, z_6) = 0\,, \quad z_1 = z_4\,.$$

Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e le forze direttamente applicate sono nulle.
a Possono non esistere punti di equilibrio.
b L'energia cinetica si conserva lungo ciascun moto.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Oltre alle condizioni di a, occorre che i vincoli siano fissi.
II: b
È lo spazio degli spostamenti effettivi.
III: b
Infatti vale la conservazione dell'energia, ma il potenziale è costante. Tutti i punti sono di equilibrio perché le forze applicate sono nulle e i vincoli sono fissi.

I.6 Sia C un corpo rigido non degenere.
16 Sia $I^P_{\boldsymbol{uu}}$ il momento d'inerzia relativo all'asse passante per P e parallelo al versore $\boldsymbol{u}$; P e $\boldsymbol{u}$ sono solidali al corpo rigido. Quale dei seguenti casi è possibile?
a

$$\sup_{P \in \boldsymbol{R}^3} I^P_{\boldsymbol{uu}} < +\infty\,, \qquad \boldsymbol{u} \text{ fissato.}$$

b

$$\inf_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^3\,, |\boldsymbol{u}| = 1} I^P_{\boldsymbol{uu}} > 0\,, \qquad P \text{ fissato.}$$

c Nessuna delle precedenti.
17 Tra i moti polari per inerzia di polo O esistono moti in cui $\boldsymbol{\omega}$ mantiene direzione costante, ma modulo non costante?
a Solo per geometrie particolari del corpo.
b No, mai.
c Nessuna delle precedenti.
18 Supponiamo che il corpo sia soggetto a una distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \beta \sin(\alpha x_2) \boldsymbol{e}_1 \,\mathrm{d}\mu\,,$$

ove α, $\beta > 0$ sono costanti e $\mathrm{d}\mu$ è la misura caratteristica del corpo. In assenza di vincoli, le equazioni globali della dinamica sono sufficienti a determinare il moto di C?
a Sì.
b Solo sotto l'ipotesi che le forze interne siano nulle.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE

I: b
Il sup *in a è infinito per il Teorema di Huygens; l'*inf *in b è raggiunto in un asse principale e quindi è positivo.*
II: b
Le rotazioni per inerzia sono costanti.
III: a
Le equazioni globali sono sufficienti per determinare i moti dei corpi rigidi non vincolati (sotto ipotesi di regolarità sulle forze direttamente applicate).

Prova scritta del 16/09/2021

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 16/09/2021

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a muoversi sul piano verticale $x_3 = 0$ mantenendo l'estremo A nell'origine O del sistema di riferimento fisso.
Sull'asta agiscono il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_2$ e la distribuzione di forza elastica

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{P'P}\,\mathrm{d}s\,,$$

ove P è il generico punto dell'asta e P' la sua proiezione ortogonale sull'asse $x_2 = 0$. Qui $k > 0$ è costante e $\mathrm{d}s$ è la misura di lunghezza dell'asta.
Si usi come coordinata lagrangiana $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\boldsymbol{X}_B = 2L(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2)\,.$$

01 Le forze applicate sono conservative in senso lagrangiano?
a Sì, e

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -mgL\sin\varphi - \frac{4kL^3}{3}(\cos\varphi)^2\,.$$

b Sì, e

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -mgL\sin\varphi - \frac{4kL^3}{3}(\sin\varphi)^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
02 Le posizioni di equilibrio dell'asta soddisfano:
a Sono esattamente 3.
b Sono tutte stabili.
c Nessuna delle precedenti.

03 L'energia cinetica dell'asta in forma lagrangiana:
a È di fatto dipendente sia da φ che da $\dot\varphi$, ossia in genere

$$\frac{\partial T^{\text{L}}}{\partial \varphi} \neq 0\,, \qquad \frac{\partial T^{\text{L}}}{\partial \dot\varphi} \neq 0\,.$$

b Dipende da $\dot\varphi$ ma non da φ, ossia per ogni φ, $\dot\varphi$ si ha

$$\frac{\partial T^{\text{L}}}{\partial \varphi} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Si ha la distribuzione di potenziale elastico

$$\mathrm{d}U_{\text{el}} = -k\frac{x_2^2}{2}\,\mathrm{d}s\,;$$

così

$$U^{\text{L}}_{\text{el}}(\varphi) = \int_0^{2L} \Big[-\frac{k}{2}(s\sin\varphi)^2\Big]\,\mathrm{d}s = -\frac{4kL^3}{3}(\sin\varphi)^2\,.$$

A questo va aggiunto il potenziale gravitazionale $-mgx_{2G}$.
II: c
Si ha

$$U^{\text{L}\prime}(\varphi) = -L\cos\varphi\Big(mg + \frac{8}{3}kL^2\sin\varphi\Big)\,.$$

Quindi i punti di equilibrio sono $\pm\pi/2$ e, qualora

$$\frac{3mg}{8kL^2} < 1\,,$$

anche

$$\varphi_0 := -\arcsin\frac{3mg}{8kL^2}\,, \qquad -\pi - \varphi_0\,.$$

Pertanto le posizioni di equilibrio sono 2 o 4. Calcoliamo poi

$$U^{\text{L}\prime\prime}(\varphi) = L\sin\varphi\Big(mg + \frac{8}{3}kL^2\sin\varphi\Big) - \frac{8kL^3}{3}(\cos\varphi)^2\,.$$

Quindi

$$U^{\text{L}\prime\prime}\Big(\pm\frac{\pi}{2}\Big) = \pm L\Big(mg \pm \frac{8kL^2}{3}\Big)\,;$$

dato che $U^{\text{L}\prime\prime}(\pi/2) > 0$ sicuramente l'equilibrio in $\varphi = \pi/2$ non è stabile.
III: b
Il moto è polare e

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{I}{2}\dot\varphi^2\,,$$

con I momento d'inerzia relativo all'asse ortogonale all'asta.

I.2 Dire in ciascuno dei seguenti casi quale è una parametrizzazione lagrangiana corretta per i due moti $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ vincolati come indicato.
Le q_h indicano le coordinate lagrangiane.
04 Il moto $\boldsymbol{X}_2$ è vincolato a appartenere al piano individuato dall'asse x_3 e dal moto $\boldsymbol{X}_1$ (che si assume non appartenente all'asse x_3).
a Si ha $(q_1, \dots, q_5) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times \boldsymbol{R}^3$ e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h \boldsymbol{e}_h \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = q_4 \boldsymbol{e}_1 + \frac{q_2 q_4}{q_1} \boldsymbol{e}_2 + q_5 \boldsymbol{e}_3 \,.$$

b Si ha $(q_1, \dots, q_5) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times \boldsymbol{R}^3$ e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h \boldsymbol{e}_h \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = q_4 \boldsymbol{e}_1 + q_5 \boldsymbol{e}_2 - \frac{q_2 q_4}{q_1} \boldsymbol{e}_3 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
05 I due moti appartengono alla stessa sfera mobile

$$(x_1 - \alpha(t))^2 + (x_2 - \beta(t))^2 + x_3^2 = R^2 \,,$$

e al piano $x_3 = 0$. Qui α, $\beta \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ e $R > 0$ è costante.
a Si ha $(q_1, \dots, q_4) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1 &= [\alpha(t) + R \cos q_1 \sin q_2] \boldsymbol{e}_1 + [\beta(t) + R \sin q_1 \sin q_2] \boldsymbol{e}_2 + R \cos q_2 \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{X}_2 &= [\alpha(t) + R \cos q_3 \sin q_4] \boldsymbol{e}_1 + [\beta(t) + R \sin q_3 \sin q_4] \boldsymbol{e}_2 + R \cos q_4 \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

b Si ha $(q_1, q_2, q_3) \in (-\pi, \pi) \times \boldsymbol{R}^2$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1 &= [\alpha(t) + R \cos q_1] \boldsymbol{e}_1 + [\beta(t) + R \sin q_1] \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{X}_2 &= [q_2 - \alpha(t) - R \cos q_1] \boldsymbol{e}_1 + [q_3 - \beta(t) - R \sin q_1] \boldsymbol{e}_2 \,. \end{aligned}$$

c Nessuna delle precedenti.
06 I due moti sono vincolati a restare a distanza costante $R > 0$.
a Si ha $(q_1, q_2, q_3) \in \boldsymbol{R}^3$ e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h \boldsymbol{e}_h \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = \sum_{h=1}^{3} \Big(q_h - \frac{R}{\sqrt{3}} \Big) \boldsymbol{e}_h \,.$$

b Si ha

$$(q_1, \dots, q_5) \in \{ \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^5 \mid (q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 < R^2 \} \,,$$

e

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{h=1}^{3} q_h \boldsymbol{e}_h \,, \quad \boldsymbol{X}_2 = q_4 \boldsymbol{e}_1 + q_5 \boldsymbol{e}_2 + [q_3 + \sqrt{R^2 - (q_1 - q_4)^2 - (q_2 - q_5)^2}] \boldsymbol{e}_3 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
La parametrizzazione a soddisfa i vincoli ed è regolare; la b non soddisfa i vincoli.
II: c
La a non rispetta il vincolo di appartenenza al piano, la b non rispetta il vincolo di appartenenza alla sfera per $\boldsymbol{X}_2$ (e ha 3 coordinate invece di 4).
III: b
Si controlla direttamente la condizione $|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2| = R$, che vale per entrambe le parametrizzazioni. La a però non rispetta il corretto numero di gradi di libertà $\ell = 5$, quindi non può essere valida.

I.3 Una piramide con base quadrata, di massa m, altezza H e spigolo di base L, è vincolata a muoversi di moto polare intorno al suo centro di massa G. Il vincolo è liscio.
07 Supponiamo che l'unica forza applicata sia il peso. Allora:
a Tutti i moti sono delle rotazioni.
b Esiste un versore solidale $\boldsymbol{u}$ tale che se $\boldsymbol{\omega}(0) \cdot \boldsymbol{u}(0) = 0$, allora il moto è una rotazione, altrimenti in genere non lo è.
c Nessuna delle precedenti.
08 Supponiamo che l'unica forza applicata sia il peso. Allora:
a Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_G(t)$ si mantiene parallelo a $\boldsymbol{\omega}(t)$ durante il moto.
b Il prodotto $\boldsymbol{L}_G(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t)$ si mantiene costante durante il moto.
c Nessuna delle precedenti.
09 Supponiamo che l'unica forza applicata sia

$$\boldsymbol{F}_V = \alpha \boldsymbol{u}\,,$$

ove V è il vertice della piramide, $\alpha > 0$ è costante e il versore solidale $\boldsymbol{u}$ è parallelo alla base della piramide. La forza è applicata in V. Il corpo parte da fermo.
Allora:
a Il moto è sempre una rotazione.
b Il moto può essere una rotazione per una scelta opportuna dei parametri, ma in genere non lo è.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
In una base solidale con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale alla base della piramide si ha

$$\boldsymbol{\sigma}_G = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix},$$

quindi tutti i vettori del piano $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ sono principali e si può prendere $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_3$.
II: b
Infatti

$$\boldsymbol{L}_G \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\sigma}_G \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = 2T$$

e T è un integrale primo del moto nei moti polari per inerzia.
III: a
Scegliamo in G la base $(\boldsymbol{u}_h)$ con $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{u}_3 = \overrightarrow{GV}/h$, ove $h = |\overrightarrow{GV}|$; allora

$$\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = \overrightarrow{GV} \times \boldsymbol{F}_V = h\alpha \boldsymbol{u}_2 \,.$$

Le equazioni di Eulero quindi assumono la forma

$$\begin{aligned} I_{11}\dot\omega_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 \,, \\ I_{11}\dot\omega_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + h\alpha \,, \\ I_{33}\dot\omega_3 &= 0 \,, \end{aligned}$$

e hanno per soluzione

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{h\alpha}{I_{11}} t \boldsymbol{u}_2(t) \,.$$

I.4 Qui $\boldsymbol{\psi} \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è una curva regolare γ con ascissa curvilinea $s \in \boldsymbol{R}$, curvatura $k(s) > 0$ e torsione $\tau(s) \in \boldsymbol{R}$. Un disco di massa m è vincolato in modo che il suo centro G appartenga alla curva γ (questo significa che può muoversi su γ) e che un suo diametro solidale AB sia sempre tangente alla curva γ in G. I vincoli sono lisci.
10 Quanti sono i gradi di libertà ℓ del disco?
a $\ell = 2$.
b $\ell = 3$.
c Nessuna delle precedenti.
11 Se la curva è piana, la velocità angolare del disco
a È parallela alla binormale $\boldsymbol{B}$ della curva.
b È parallela alla tangente $\boldsymbol{T}$ della curva.
c Nessuna delle precedenti.
12 Supponiamo che l'unica forza applicata sia il peso, γ sia un'elica circolare con asse parallelo alla direzione del peso e il disco parta da fermo. Allora
a La velocità angolare del disco si mantiene nulla per tutto il moto.
b La conservazione dell'energia implica

$$\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G(t)|^2 + mg\lambda s(t) = E \,,$$

per ogni t, ove $\lambda > 0$ è una costante legata alla geometria della curva e E è una costante determinata dai dati iniziali.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
Il vincolo $G \in \gamma$ toglie 2 gradi di libertà e il parallelismo di $\overrightarrow{AB}$ a $\boldsymbol{T}$ ne toglie altri 2.
II: c
Se $\mathcal{P}$ è la terna fissa, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ con $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{T}$ è la terna solidale al disco, e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$, si ha

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \dot s k(s) \boldsymbol{B}(s) + \dot\varphi \boldsymbol{T}(s) \,,$$

ove φ è un opportuno angolo di rotazione e $s(t)$ denota l'ascissa curvilinea di G.
III: c
La velocità angolare non può mantenersi nulla perché la base solidale al disco non è fissa. Inoltre la conservazione dell'energia deve tenere conto dell'energia cinetica dovuta a $\boldsymbol{\omega}$.

I.5 Una lamina rettangolare $ABCD$ di massa m e lati $a > b > 0$ è vincolata a ruotare intorno alla diagonale AC. Il vincolo rispetta l'ipotesi dei lavori virtuali.
13 Non sono applicate forze. Sia $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.
a Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{\omega}(t) = 0\,.$$

b Il momento delle reazioni vincolari non è nullo.
c Nessuna delle precedenti.
14 Supponiamo che alla lamina venga applicata la forza solidale

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}\,,$$

nel vertice A, con $k > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ solidale e ortogonale alla lamina.
a La forza indicata è incompatibile con il vincolo assegnato.
b Applicare o meno la forza indicata non cambia le reazioni vincolari.
c Nessuna delle precedenti.
15 Alla lamina viene applicato un campo di forze, peraltro incognito. Sappiamo anche che il moto risultante è tale che $\boldsymbol{\omega}(t)$ non è costante. Allora
a Il campo di forze applicato ha componente del momento (rispetto a G) lungo l'asse di rotazione non identicamente nulla.
b Il campo di forze applicato non è conservativo.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
È noto dalle equazioni di Eulero che se l'asse di rotazione non è principale il momento delle forze esterne normale all'asse non può annullarsi.
II: c
Poiché

$$0 = m\boldsymbol{a}_G = \mathbf{f}_{\text{vin}} + \boldsymbol{F}_A\,,$$

si ha $\mathbf{f}_{\text{vin}} = -\boldsymbol{F}_A$.
III: a
L'equazione di Eulero lungo l'asse di rotazione dà

$$I_{33}\dot{\omega}_3 = M_3^{\text{ext}}$$

perché il vincolo è liscio.

I.6 Dire in quali dei seguenti casi si possono definire le piccole oscillazioni del sistema a vincoli lisci e fissi, soggetto a forze conservative, considerato. Qui $\ell = 2$ e il punto di equilibrio è $(q_1, q_2) = (0,0)$.

16 $U^{\text{L}}(q_1, q_2) = \alpha q_1^2 + \beta q_2^2$ con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti.
a Se $\alpha < 0$, $\beta > 0$ o se $\alpha > 0$, $\beta < 0$.
b Se $\alpha < 0$, $\beta < 0$.
c Nessuna delle precedenti.
17 $U^{\text{L}}(q_1, q_2) = -\alpha q_1^4 - \beta q_2^8$ con α, $\beta > 0$ costanti.
a In nessun caso.
b Solo se $T^{\text{L}} \geq C|\dot{\boldsymbol{q}}|^2$ con $C > 0$ abbastanza grande.
c Nessuna delle precedenti.
18 Se $U^{\text{L}}(0,0) = 0$ e per ogni (q_1, q_2) si ha

$$U^{\text{L}}(q_1, q_2) \leq -c(q_1^2 + q_2^2)\,,$$

con $c > 0$ costante opportuna.
a No in generale.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Nel caso b il potenziale ha nel punto di equilibrio un massimo isolato con hessiana definita negativa, nel caso a un punto di sella.
II: a
La matrice hessiana del potenziale in (0,0) *è nulla.*
III: b
La matrice hessiana del potenziale in (0,0) *è definita negativa (questo segue dalla formula di Taylor).*

Prova scritta del 19/10/2021

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 19/10/2021

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1 \sin(\beta t) + x_2 \cos(\beta t) = 0\,,$$

ove $\beta > 0$ è costante. Inoltre il centro G di AB deve avere quota $x_{3G} = 0$. Sull'asta agisce la forza (applicata in B)

$$\boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{X}_B\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(r, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che se

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

allora

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_3)\,, \quad \boldsymbol{X}_G = r\boldsymbol{u}_1\,.$$

Sotto $\boldsymbol{X}_O$ denota l'origine del sistema di riferimento fisso, che ha coordinate (x_h).
01 Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze apparenti sono conservative nel senso lagrangiano e quindi esiste il loro potenziale lagrangiano U^{L}_{app}.
a Sì, e il potenziale è dato da

$$U^{\text{L}}_{app}(r, \varphi) = \frac{m}{2}\beta^2 r^2\,.$$

b Sì, ma il potenziale non è quello dato nella risposta precedente.
c Nessuna delle precedenti.
02 Nel sistema fisso di riferimento le forze direttamente applicate ammettono potenziale lagrangiano.
a Sì ed esso può essere preso uguale a

$$U^{\text{L}}_{da} = -\frac{k}{2}r^2\,.$$

b Sì ed esso può essere preso uguale a

$$U^{\text{L}}_{da} = -\frac{k}{2}rL\sin\varphi\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
03 Dire quali delle seguenti espressioni dà l'energia cinetica dell'asta nel sistema fisso di riferimento. Qui I è il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse ad essa ortogonale nel suo centro.
a

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}r^2\beta^2 + \frac{I}{2}(\dot\varphi^2 + \beta^2(\sin\varphi)^2)\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\beta^2) + \frac{I}{2}\beta^2(\cos\varphi)^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
È noto dalla teoria che la forza di Coriolis in questo caso ha componenti lagrangiane nulle. La forza di trascinamento ha distribuzione sull'asta

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{tr} = \frac{m\beta^2}{2L}\lambda_1\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}s\,,\ \textit{con potenziale}\ \mathrm{d}U_{tr} = \frac{m\beta^2}{4L}\lambda_1^2\,\mathrm{d}s\,,$$

che conduce al potenziale

$$U_{tr}^{\text{L}} = \int_{AB} \mathrm{d}U_{tr} = \int_{-L}^{L} \frac{m\beta^2}{4L}(r + s\cos\varphi)^2 \,\mathrm{d}s = \frac{m\beta^2}{2}(r^2 + \frac{L^2}{3}(\cos\varphi)^2)$$

che non è il valore dato sopra.
II: c
Si ha

$$U_{da}(\boldsymbol{x}_B) = -\frac{k}{2}(x_{1B}^2 + x_{2B}^2 + x_{3B}^2)\,,$$

per cui

$$U_{da}^{\text{L}} = -\frac{k}{2}[(r + L\cos\varphi)^2 + (L\sin\varphi)^2] = -\frac{k}{2}[r^2 + 2rL\cos\varphi + L^2]\,.$$

III: c
Usiamo il teorema di König. La velocità di G è

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_G}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\boldsymbol{u}_1 + r\dot{\boldsymbol{u}}_1 = \dot{r}\boldsymbol{u}_1 + r\beta\boldsymbol{u}_2\,.$$

Il termine di energia cinetica relativa al centro di massa richiede di calcolare la velocità angolare della terna solidale all'asta $\mathcal{N}$ data da

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2L}\,, \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_2\,, \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2\,.$$

Se $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, si ha

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} = \beta\boldsymbol{u}_3 - \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2 = \beta(\sin\varphi\boldsymbol{w}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{w}_3) - \dot{\varphi}\boldsymbol{w}_2\,.$$

Poiché rispetto a $\mathcal{N}$ la matrice d'inerzia in G è $\mathrm{diag}(0, I, I)$, segue

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\beta^2) + \frac{I}{2}(\dot{\varphi}^2 + \beta^2(\cos\varphi)^2)\,.$$

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove R, $h > 0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea.
Il vincolo è scabro.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \gamma x_3\boldsymbol{T} + \delta\boldsymbol{B}\,,$$

con γ, $\delta > 0$ costanti. Qui (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca dell'elica, che viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{B}(s) &= \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e la curvatura $k(s) = R\alpha^2$.
04 Si supponga $\dot{s} > 0$ e che la reazione vincolare soddisfi

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Allora l'equazione di moto è:
a

$$m\ddot{s} = \delta - \mu \,\text{sign}(\dot{s}) \sqrt{\dot{s}^4 m^2 k^2 + \delta^2} \,.$$

b

$$m\ddot{s} = \gamma h \alpha s - \mu \sqrt{\dot{s}^4 m^2 k^2 + \delta^2} \,.$$

c Nessuna delle precedenti.
05 Si supponga che $s(0) = 1/\alpha$, $\dot{s}(0) = 0$, e che la reazione vincolare soddisfi all'equilibrio

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| \leq \mu_s |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Allora il punto materiale resta in equilibrio.
a Sì, se $R \geq R_0$ con $R_0 > 0$ opportuno.
b Sì, se $\delta \geq \delta_0$ con $\delta_0 > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
06 Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0 < 0$, e che la reazione vincolare soddisfi, se $\dot{s} \neq 0$,

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Dire quale delle seguenti proprietà soddisfa $s(t)$.
a Vale $\ddot{s}(t) > 0$ per $t \in (0, \bar{t})$, con $\bar{t} > 0$ opportuno.
b Il moto è indipendente dal valore di μ.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Il sistema di moto dà

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \gamma R \alpha s - \mu \,\text{sign}(\dot{s}) |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,, \\ m\dot{s}^2 k &= \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} \,, \\ 0 &= \delta + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} \,, \end{aligned}$$

da cui subito la b.
II: b
La componente tangente della forza direttamente applicata è $|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}| = \gamma h$. *Questa, perché si abbia equilibrio, non deve superare il massimo della componente tangente della reazione vincolare; la reazione all'equilibrio è data da*

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = -\boldsymbol{F} \,, \quad \textit{per cui} \quad \mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}} = -\delta \boldsymbol{B} \,.$$

Perciò la condizione è

$$\mu_s |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| = \mu_s \delta \geq \gamma h \,.$$

III: a
Infatti dalla prima equazione di moto

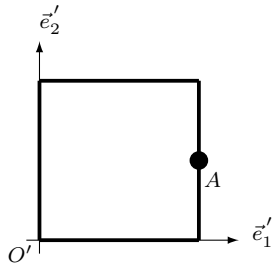
$$m\ddot{s} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} + \mu|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \geq \gamma h \alpha s + \mu\delta\,,$$

che implica

$$m\ddot{s}(0) \geq \mu\delta > 0\,.$$

Inoltre sottraendo le equazioni di moto corrispondenti a due μ diversi si vede che la b è impossibile.

I.3 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando l'elemento A di massa M a una lamina rigida omogenea di forma quadrata di massa M e lato $2L$. In figura è rappresentato il corpo assieme al riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i'\}$. Si nota che $\overrightarrow{O'A} = 2L\vec{e}_1' + L\vec{e}_2'$.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo O' sull'asse fisso 1 e l'asse 3 solidale costantemente parallelo all'omologo asse fisso 3.
Come coordinate lagrangiane si possono usare la coordinata cartesiana 1 di O' e l'anomalia φ individuata dall'asse fisso 1 e dall'asse solidale 1 orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.
07 Quanto valgono le coordinate del centro di massa del corpo rispetto al riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i'\}$?
a $\left(\frac{3}{2}L, L, 0\right)$.
b $\left(\frac{3}{2}L, \frac{1}{2}L, 0\right)$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Quanto vale il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse 3 solidale?
a $\frac{23}{3}ML^2$.
b $\frac{16}{3}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Quanto vale il momento angolare del corpo calcolato usando come polo di riduzione il centro di massa?
a $\frac{23}{6}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
b $\frac{7}{6}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
Si usa la proprietà additiva a partire dalle coordinate $(L, L, 0)$ del centro di massa della lamina e dalla coordinate $(2L, L, 0)$ di A.

II: a
Per il contributo della lamina si ha

$$\int_0^{2L}\int_0^{2L} \mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2' \frac{M}{4L^2}[(x_1')^2+(x_2')^2] = \frac{M}{4L^2}\Big[2L\frac{1}{3}8L^3 + 2L\frac{1}{3}8L^3\Big] = \frac{8}{3}ML^2.$$

Per il contributo dell'elemento si ha $M[(2L)^2+L^2] = 5ML^2$.
III: b
Il moto rispetto al riferimento del centro di massa è rotatorio e i prodotti di inerzia $I'_{G,13}$ *e* $I'_{G,23}$ *sono nulli, allora il momento angolare si può scrivere come* $I'_{G',33}\dot{\varphi}\vec{e}_3'$.
Per il calcolo del momento di inerzia si può usare il teorema di Huygens e scrivere

$$I'_{G',33} = I'_{O',33} - 2M\|\overrightarrow{O'G}\|^2 = \frac{23}{3}ML^2 - 2M\Big[\frac{9}{4}L^2 + L^2\Big] = \frac{7}{6}ML^2.$$

I.4 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, e il piano delle fasi (x,p).
10 Se la curva (non chiusa, si noti)

$$\{(x,p) \mid x^2+p^2 = L^2\,, x < L\}\,,$$

con $L > 0$ è un'orbita, quale conclusione si può trarre?
a Il punto $x = L$ non è di equilibrio.
b Il moto non è periodico.
c Nessuna delle precedenti.
11 Se un'orbita $p = p(x)$, $x \in J$, ove J è l'intervallo aperto di definizione della funzione $p(x)$, soddisfa $p(x) > 0$ per ogni $x \in J$, allora $p(x) > p_0 > 0$ per ogni $x \in J$, per un $p_0 > 0$ opportuno.
a Non può succedere.
b Può succedere o no.
c Nessuna delle precedenti.
12 Se il potenziale U soddisfa $U(x) \to -\infty$ per $x \to \pm\infty$, allora esiste almeno un punto di equilibrio stabile.
a Sì, sotto l'ulteriore ipotesi che esista esattamente un punto di equilibrio.
b Sicuramente non ne esistono.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Se il punto (*L*,0) *non appartiene all'orbita, vuol dire che il moto tende a esso in un tempo infinito e il punto è di equilibrio, secondo un noto risultato teorico.*
II: b
Per esempio consideriamo le orbite che connettono due punti di equilibrio instabile, come nel piano delle fasi di $m\ddot{x} = -k\sin x$, *o quelle corrispondenti a grandi energie nello stesso piano delle fasi.*

III: a
Sicuramente esiste un punto di massimo assoluto, e se esiste un solo equilibrio allora è isolato, quindi è di equilibrio stabile.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi sulla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.
13 Dire in quale caso, se il vincolo è liscio, l'energia cinetica si conserva.
a Se la curva è piana.
b Se la forza $\boldsymbol{F}$ è ortogonale al vettore normale principale $\boldsymbol{N}$.
c Nessuna delle precedenti.
14 Se il vincolo è liscio, la forza $\boldsymbol{F}$ è conservativa, allora l'energia meccanica si conserva.
a Sì sempre.
b No, in generale.
c Nessuna delle precedenti.
15 Il vincolo sia scabro, con

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si assuma sempre $\dot{s} < 0$, e anche che $\boldsymbol{F}$ sia conservativa.
a La conservazione dell'energia vale se $|\mathbf{f}_{\text{vin}}| = 0$.
b La conservazione dell'energia vale se la torsione della curva è una costante.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: c
Infatti in genere nelle condizioni indicate

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\text{vin}}) \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\text{vin}}) \cdot \dot{s}\boldsymbol{T} = \dot{s}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} \neq 0 \,.$$

II: a
Infatti la reazione vincolare fa lavoro nullo.
III: a
Infatti se $\mathbf{f}_{\text{vin}} = 0$ *si ha come noto per l'energia meccanica* $\mathcal{E}$

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \,.$$

Questo per esempio è il caso se $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\psi}$ *è la circonferenza di centro l'origine e raggio* R, *e il moto è circolare uniforme con velocità data da* $\dot{s}^2 = kR^2/m$.

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando un elemento di massa M al punto A del bordo di un disco omogeneo di massa M. Il corpo è vincolato a muoversi in un piano verticale fisso rispetto all'osservatore terrestre mantenendosi a contatto dall'interno con una guida circolare giacente nel medesimo piano. L'atto di moto è in ogni istante con assenza di strisciamento.
16 Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:

a L'atto di moto è in ogni istante elicoidale e l'asse del moto è tangente alla guida nel punto di contatto tra corpo e guida.
b L'atto di moto è in ogni istante rotatorio e il centro di istantanea rotazione è il punto del bordo del disco opposto ad A.
c Nessuna delle precedenti.

17 Quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento del centro di massa?
a $\frac{1}{2}I\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e I il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro geometrico del disco e ortogonale al disco stesso.
b $\frac{1}{2}J\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e J il momento d'inerzia relativo all'asse ortogonale al disco e passante per il punto medio tra il centro del disco e il punto A.
c Nessuna delle precedenti.

18 Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
a La centroide fissa (base) è una curva degenere coincidente con il centro della guida.
b La centroide fissa (base) coincide con la guida.
c Nessuna delle precedenti.

Soluzione
I: c
Il punto solidale che occupa la posizione del punto di contatto ha velocità nulla, quindi l'atto è rotatorio, ma il centro di istantanea rotazione concide con il punto di contatto.
II: b
Il moto relativo al centro di massa è rotatorio con asse ortogonale al corpo e passante per il centro di massa.
III: b
È la curva descritta rispetto al riferimento fisso dal punto di contatto.

Prova scritta del 14/01/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 14/01/2022

I.1 Un disco di centro G, raggio R e massa m è vincolato a giacere sul piano mobile $\Pi(t) = \langle \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_3(t) \rangle$ e a avere un punto solidale A della circonferenza suo bordo appartenente alla curva

$$\lambda_3 = \alpha \cos(\beta\lambda_1)\,, \qquad \lambda_2 = 0\,,$$

ove $\boldsymbol{\lambda}$ indica le coordinate nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\gamma t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\gamma t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\gamma t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\gamma t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

per ogni $t \in \boldsymbol{R}$.
Sul disco agisce la forza, applicata in G,

$$\boldsymbol{F}_G = \delta\overrightarrow{AG} \times \boldsymbol{u}_2\,.$$

Qui α, β, γ, $\delta > 0$. Si prendano come coordinate lagrangiane $(x, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_A^{\text{L}} = x\boldsymbol{u}_1(t) + \alpha\cos(\beta x)\boldsymbol{u}_3(t)\,, \quad \overrightarrow{AG} = R\cos\varphi\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\varphi\boldsymbol{u}_3(t)\,.$$

01 Allora l'energia cinetica lagrangiana $T_{\mathcal{S}}^{\text{L}}$ del disco, relativa al sistema $\mathcal{S}$:
a Dipende da α, β.
b È un polinomio di grado 2 in $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$, con un termine non nullo di grado 0.
c Nessuna delle precedenti.
02 Le componenti lagrangiane di $\boldsymbol{F}_G$ sono:
a

$$Q_x^G = -\delta R(\sin\varphi + \alpha\beta\cos\varphi\sin(\beta x))\dot{x}\,, \quad Q_\varphi^G = \delta R^2\dot{\varphi}\,.$$

b

$$Q_x^G = -\delta R(\sin\varphi + \alpha\beta\cos\varphi\sin(\beta x))\,, \quad Q_\varphi^G = \delta R^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
03 In $\mathcal{S}$ la distribuzione di forze di trascinamento $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\text{T}}$ sul disco:
a Ha una corrispondente distribuzione di potenziale

$$\mathrm{d}U_{\text{T}} = \frac{m\delta^2}{\pi R^2}\frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}{2}\,.$$

b Non ha una corrispondente distribuzione di potenziale.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
$T_{\mathcal{S}}^{\text{L}}$ non risente del moto di $\mathcal{S}$, quindi è indipendente da γ. D'altra parte in $\mathcal{S}$ il vincolo è fisso quindi la $T_{\mathcal{S}}^{\text{L}}$ è una forma quadratica in $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$.
II: b
Calcoliamo:

$$\boldsymbol{F}_G = \delta R(\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{u}_3) \times \boldsymbol{u}_2 = \delta R(-\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{u}_3)\,,$$

e

$$\frac{\partial\boldsymbol{X}_G^{\text{L}}}{\partial x} = \boldsymbol{u}_1 - \alpha\beta\sin(\beta x)\boldsymbol{u}_3\,, \quad \frac{\partial\boldsymbol{X}_G^{\text{L}}}{\partial\varphi} = R(-\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{u}_3)\,.$$

III: c
Infatti

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{T} = \frac{m\delta^2}{\pi R^2}\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \,\mathrm{d}S\,.$$

Quindi

$$\mathrm{d}U_{T} = \frac{m\delta^2}{\pi R^2}\frac{\lambda_1^2}{2}\,.$$

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 x_2\,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2\,,$$

con vincolo scabro secondo la legge di Coulomb-Morin.
Il punto è soggetto alla forza costante

$$\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{e}_1\,.$$

Qui α, $\beta > 0$ sono costanti.
04 Consideriamo il caso di attrito statico $|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}| \le \mu_s |\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|$, $\mu_s > 0$ costante. Allora l'insieme delle posizioni di equilibrio:
a Dipende in effetti da α ma non da β.
b Comprende in ogni caso entrambi gli assi.
c Nessuna delle precedenti.
05 Consideriamo il caso di attrito dinamico $|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}| = \mu |\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|$, $\mu > 0$ costante, ove si suppone $\boldsymbol{v} \neq 0$. Allora:
a Si ha nelle equazioni di moto $|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}| = \mu |\boldsymbol{F}^{\text{nor}}|$.
b Sono possibili moti rettilinei uniformi sull'asse x_1.
c Nessuna delle precedenti.
06 Consideriamo il caso di attrito dinamico $|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}| = \mu |\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|$, $\mu > 0$ costante, ove si suppone $\boldsymbol{v} \neq 0$. Allora:
a Esistono moti per cui l'energia meccanica si conserva.
b Il modulo della velocità $|\boldsymbol{v}(t)|$ è funzione non crescente di t.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Si calcola con l'usuale rappresentazione cartesiana della normale alla superficie

$$|\boldsymbol{F}^{\text{nor}}| = \left| \beta \boldsymbol{e}_1 \cdot \frac{\alpha x_2 \boldsymbol{e}_1 + \alpha x_1 \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{1 + \alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}} \right| = \frac{\alpha\beta |x_2|}{\sqrt{1 + \alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}}\,.$$

Quindi la condizione è

$$|\boldsymbol{F}^{\tan}|^2 = \beta^2 - |\boldsymbol{F}^{\text{nor}}|^2 \le \mu_s^2 |\boldsymbol{F}^{\text{nor}}|^2\,,$$

ossia

$$1 + \alpha^2 x_1^2 \le \mu_s^2 \alpha^2 x_2^2\,.$$

II: c
Se $x_2 = 0$, ossia sull'asse x_1, si ha $x_3 = 0$ e $\boldsymbol{v} = \dot{x}_1\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{a} = \ddot{x}_1\boldsymbol{e}_1$. L'equazione di moto diviene $m\ddot{x}_1 = \beta$. Quindi sono possibili moti sull'asse x_1, ma non uniformi.
III: a
Consideriamo i moti rettilinei con $x_2 = 0$ del punto precedente. Per essi vale l'equazione di moto

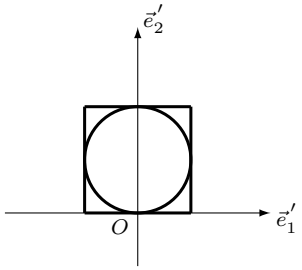
$$m\ddot{x}_1 = \beta\,,$$

ossia la conservazione dell'energia

$$\frac{m}{2}\dot{x}_1^2 - \frac{\beta}{2}x_1^2 = E\,.$$

Però per questi moti si ha che $|\dot{x}_1(t)|$ è crescente se $\dot{x}_1(0) > 0$.

I.3 Una lamina pesante rigida omogenea di massa M è stata ottenuta praticando un foro circolare di raggio $a/2$ a una lamina quadrata di lato a in modo che il centro del foro e quello della lamina quadrata siano coincidenti. Il riferimento $\{O, \vec{e}_i'\}$ in figura è solidale alla lamina.



Il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ ha asse 2 verticale ascendente. La lamina è vincolata in modo che l'asse 3 solidale è costantemente coincidente con l'omologo asse fisso e la lamina si muove di moto rotatorio attorno all'asse 3. I vincoli sono perfetti. Sul sistema agisce il peso. Si usi come coordinata lagrangiana l'anomalia φ associata all'angolo di vertice O e di primo e secondo lato gli assi 1 fisso e solidale e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.

07 Quanto vale il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse coordinato 2 del riferimento solidale in figura?
a $\frac{16-3\pi}{48(4-\pi)}Ma^2$
b $\frac{64-15\pi}{48(4-\pi)}Ma^2$
c Nessuna delle precedenti.

08 Quanto vale l'energia cinetica della lamina?
a $\frac{64-15\pi}{96(4-\pi)}Ma^2\dot{\varphi}^2$
b $\frac{40-9\pi}{48(4-\pi)}Ma^2\dot{\varphi}^2$
c Nessuna delle precedenti.

09 Qual è l'equazione pura del moto?
a $\frac{64-15\pi}{24(4-\pi)}Ma^2\ddot{\varphi} = (Mga/2)\sin\varphi$
b $\frac{40-9\pi}{24(4-\pi)}Ma^2\ddot{\varphi} = (Mga/2)\sin\varphi$
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE
I: a
L'area è $a^2-\pi a^2/4$ e la densità vale $4M/(4a^2-\pi a^2)$. Si considerano due corpi fittizi di massa $m_{\mathrm{P}} = a^2 \times 4M/(4a^2 - \pi a^2)$ con forma il quadrato e $m_{\mathrm{F}} = -(\pi a^2/4) \times 4M/(4a^2-\pi a^2)$ con forma il foro. Il momento d'inerzia relativo all'asse 2 può essere scritto come $I'_{O,22} = m_{\mathrm{P}} a^2/12 + m_{\mathrm{F}}(a/2)^2/4$.
II: b
Il moto è rotatorio e la velocità angolare è $\dot\varphi \vec e_3$. Allora, l'energia cinetica può essere scritta come $I'_{O,33}\dot\varphi^2/2$. Per il calcolo del momento d'inerzia si procede come segue: il centro di massa del corpo è il centro geometrico del foro e, per motivi di simmetria, $I'_{C,11} = I'_{O,22}$. Dal teorema di Huygens segue che $I'_{O,11} = I'_{C,11} + M(a/2)^2$ e, infine, essendo il corpo piano, si ha $I'_{O,33} = I'_{O,11} + I'_{O,22}$.
III: b
Osservato che $\vec L_O = I'_{O,33}\dot\varphi\vec e_3$, si ha $\mathrm{d}\vec L_O = \frac{40-9\pi}{24(4-\pi)} Ma^2\ddot\varphi\vec e_3$. Inoltre, $\overrightarrow{OG} = (a/2)\vec e_2' = (a/2)(-\sin\varphi\vec e_1 + \cos\varphi\vec e_2)$ e $\overrightarrow{OG} \times (-Mg\vec e_2) = (Mga/2)\sin\varphi\vec e_3$. Ricordando che la componente lungo l'asse della cerniera del momento totale della sollecitazione vincolare di una cerniera ideale è nulla si trova l'equazione richiesta.

I.4 Si consideri un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ che si muove vincolato alla curva regolare γ intersezione delle due superfici

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0\,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0\,.$$

Si assuma che su γ i due vettori ∇f_1 e ∇f_2 siano sempre linearmente indipendenti, in modo che per ogni $\boldsymbol{x} \in \gamma$ risulti ben definito il piano

$$\mathit{\Pi}(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla f_1(\boldsymbol{x}), \nabla f_2(\boldsymbol{x}) \rangle\,.$$

10 Se sul punto agisce la forza $\boldsymbol{F}$ allora:
a La reazione vincolare appartiene a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{x})$ sia nel caso di vincolo liscio che scabro.
b Se il vincolo è liscio, le componenti di $\boldsymbol{F}$ che giacciono su $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{x})$ sono irrilevanti per il moto.
c Nessuna delle precedenti.
11 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ soddisfa
a $\boldsymbol{a}(t)$ è normale a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
b $\boldsymbol{a}(t) \in \mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
c Nessuna delle precedenti.
12 La velocità $\boldsymbol{v}(t)$ soddisfa:
a $\boldsymbol{v}(t)$ è normale a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
b $\boldsymbol{v}(t) \in \mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Il piano $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$ è il piano normale alla curva in $\boldsymbol{X}(t)$. Se il vincolo è liscio la reazione ha componente ortogonale a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{x})$ nulla, e quindi solo tale componente di $\boldsymbol{F}$ determina il moto lungo γ.

Se il vincolo è scabro, la reazione invece ha in genere componente ortogonale a $\Pi(\boldsymbol{x})$ non nulla.
II: c
Il piano $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$ è il piano normale alla curva in $\boldsymbol{X}(t)$ e l'accelerazione in genere non è né tangente né normale alla curva.
II: a
Segue dal punto precedente perché $\boldsymbol{v}$ è tangente alla curva.

I.5 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$, e il suo diagramma di fase con orbite $(x(t), p(t))$.
13 Supponiamo che esista un solo punto di equilibrio e che questo sia stabile. Allora:
a Esistono sempre orbite illimitate.
b Tutte le orbite sono limitate.
c Nessuna delle precedenti.
14 Supponiamo che

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0 \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} p(t) = p_0 \in \boldsymbol{R}\,.$$

Allora:
a I due limiti dati sono incompatibili.
b Si ha che x_0 è di equilibrio e che $p_0 = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
15 Supponiamo che

$$f(x) = \alpha x e^{-\alpha^2 x^2}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $\alpha < 0$ costante. Allora:
a Il punto $x = 0$ è di equilibrio stabile.
b Non esistono orbite illimitate.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: c
Se $f(x) = -x$ si ha un controesempio a a; invece se $f = U'$ con

$$U(x) = -\frac{x^2}{1+x^2}\,,$$

si ha un controesempio a b.
II: b
Segue dalla teoria.
III: a
La a è vera perché $\alpha < 0$, come segue studiando

$$U(x) = -\frac{e^{-\alpha^2 x^2}}{2\alpha}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Se $E > 0$ le corrispondenti orbite sono illimitate, non avvicinandosi mai all'asse x.

I.6 Una lamina rigida è stata ottenuta saldando due dischi omogenei di massa M e $2M$ e di raggio R in modo che i due dischi risultino complanari e mutuamente tangenti. La lamina si muove appoggiata a un piano liscio orizzontale e l'unica sollecitazione attiva agente su di essa è il peso.

16 Dove si trova il centro di massa della lamina?
a nel centro del disco di massa $2M$;
b nel punto medio del segmento avente per estremi i centri dei due dischi;
c Nessuna delle precedenti.

17 Cosa si può dire della sollecitazione vincolare?
a ha trinomio invariante nullo;
b ha momento totale ortogonale al piano di appoggio;
c Nessuna delle precedenti.

18 Cosa si può dire del moto del centro di massa della lamina se la sua velocità iniziale è non nulla e parallela al piano d'appoggio e la velocità angolare iniziale è diversa da zero?
a è rettilineo uniforme;
b è circolare uniforme;
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE
I: c
Usando la proprietà di composizione dei centri di massa, si deduce che il centro di massa si trova sul segmento congiungente i centri dei due dischi, spostato verso il centro del disco di massa maggiore.
II: a
Nel caso di corpo appoggiato su un piano liscio la sollecitazione vincolare ha somma ortogonale al piano e momento totale parallelo al piano di appoggio.
III: a
La prima equazione cardinale, essendo la somma della sollecitazione vincolare e il peso perpendicolari al piano d'appoggio, implica che le componenti dell'accelerazione del centro di massa relative a due assi mutuamente perpendicoari e giacenti sul piano d'appoggio sono nulle.

Prova scritta del 14/01/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 14/01/2022

I.1 Un disco di centro G, raggio R e massa m è vincolato a giacere sul piano mobile $\Pi(t) = \langle \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_3(t) \rangle$ e a avere un punto solidale A della circonferenza

suo bordo appartenente alla curva

$$\lambda_3 = \alpha\cos(\beta\lambda_1)\,, \qquad \lambda_2 = 0\,,$$

ove $\boldsymbol{\lambda}$ indica le coordinate nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\delta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\delta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\delta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\delta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

per ogni $t \in \boldsymbol{R}$.
Sul disco agisce la forza, applicata in G,

$$\boldsymbol{F}_G = \gamma\overrightarrow{GA} \times \boldsymbol{u}_2\,.$$

Qui α, β, γ, $\delta > 0$. Si prendano come coordinate lagrangiane $(x, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_A^{\text{L}} = x\boldsymbol{u}_1(t) + \alpha\cos(\beta x)\boldsymbol{u}_3(t)\,, \quad \overrightarrow{AG} = R\cos\varphi\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\varphi\boldsymbol{u}_3(t)\,.$$

01 Allora l'energia cinetica lagrangiana $T_{\mathcal{S}}^{\text{L}}$ del disco, relativa al sistema $\mathcal{S}$:
a Dipende da α, β e δ.
b È una forma quadratica in $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$.
c Nessuna delle precedenti.
02 Le componenti lagrangiane di $\boldsymbol{F}_G$ sono:
a

$$Q_x^G = \gamma R(\sin\varphi + \alpha\beta\cos\varphi\sin(\beta x))\,, \quad Q_\varphi^G = -\gamma R^2\,.$$

b

$$Q_x^G = -\gamma R\alpha\beta^2\dot{x}\cos\varphi\sin(\beta x)\,, \quad Q_\varphi^G = R\dot{\varphi}(x\sin\varphi + \alpha\cos\varphi\cos(\beta x))\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
03 In $\mathcal{S}$ la distribuzione di forze di trascinamento $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\text{T}}$ sul disco:
a Ha una corrispondente distribuzione di potenziale

$$\mathrm{d}U_{\text{T}} = \frac{m\delta^2}{\pi R^2}\frac{\lambda_1^2}{2}\,.$$

b Ha una corrispondente distribuzione di potenziale

$$\mathrm{d}U_{\text{T}} = \frac{m\delta^2}{\pi R^2}\frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}{2}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
$T_{\mathcal{S}}^{\text{L}}$ non risente del moto di $\mathcal{S}$, quindi è indipendente da δ. D'altra parte in $\mathcal{S}$ il vincolo è fisso.

II: a
Calcoliamo:

$$\boldsymbol{F}_G = -\gamma R(\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{u}_3) \times \boldsymbol{u}_2 = \gamma R(\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 - \cos\varphi\boldsymbol{u}_3)\,,$$

e

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}}}{\partial x} = \boldsymbol{u}_1 - \alpha\beta\sin(\beta x)\boldsymbol{u}_3\,, \quad \frac{\partial \boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} = R(-\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{u}_3)\,.$$

III: a
Infatti

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_T = \frac{m\delta^2}{\pi R^2}\lambda_1\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}S\,.$$

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 x_2\,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2\,,$$

con vincolo scabro secondo la legge di Coulomb-Morin.
Il punto è soggetto alla forza costante

$$\boldsymbol{F} = \beta\boldsymbol{e}_1\,.$$

Qui α, $\beta > 0$ sono costanti.
04 Consideriamo il caso di attrito statico $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \le \mu_s|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|$, $\mu_s > 0$ costante. Allora l'insieme delle posizioni di equilibrio:
a Dipende in effetti sia da α che da β.
b Comprende in ogni caso entrambi gli assi.
c Nessuna delle precedenti.
05 Consideriamo il caso di attrito dinamico $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|$, $\mu > 0$ costante, ove si suppone $\boldsymbol{v} \neq 0$. Allora:
a Si ha nelle equazioni di moto $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu|\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}|$.
b Sono possibili moti rettilinei su uno degli assi.
c Nessuna delle precedenti.
06 Consideriamo il caso di attrito dinamico $|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|$, $\mu > 0$ costante, ove si suppone $\boldsymbol{v} \neq 0$. Allora:
a Lungo tutti i possibili moti si ha che l'energia cinetica $T(t)$ è una funzione decrescente di t.
b Esistono moti per cui l'energia meccanica si conserva.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: c
Si calcola con l'usuale rappresentazione cartesiana della normale alla superficie

$$|\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}| = \left|\beta\boldsymbol{e}_1 \cdot \frac{\alpha x_2\boldsymbol{e}_1 + \alpha x_1\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{1+\alpha^2x_1^2+\alpha^2x_2^2}}\right| = \frac{\alpha\beta|x_2|}{\sqrt{1+\alpha^2x_1^2+\alpha^2x_2^2}}\,.$$

Quindi la condizione è

$$|\boldsymbol{F}^{\tan}|^2 = \beta^2 - |\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}|^2 \le \mu_s^2|\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}|^2\,,$$

ossia

$$1 + \alpha^2 x_1^2 \leq \mu_s^2 \alpha^2 x_2^2 \,.$$

II: b
Se $x_2 = 0$, ossia sull'asse x_1, si ha $x_3 = 0$ e $\boldsymbol{v} = \dot{x}_1 \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{a} = \ddot{x}_1 \boldsymbol{e}_1$. L'equazione di moto diviene $m\ddot{x}_1 = \beta$.
III: b
Consideriamo i moti rettilinei con $x_2 = 0$ del punto precedente. Per essi vale l'equazione di moto

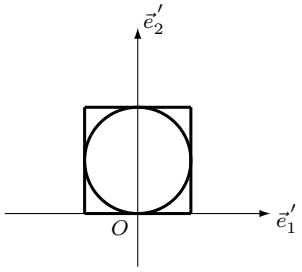
$$m\ddot{x}_1 = \beta \,,$$

ossia la conservazione dell'energia

$$\frac{m}{2}\dot{x}_1^2 - \frac{\beta}{2}x_1^2 = E \,.$$

Dunque l'energia cinetica può crescere.

I.3 Una lamina pesante rigida omogenea di massa M è stata ottenuta praticando un foro circolare di raggio $a/2$ a una lamina quadrata di lato a in modo che il centro del foro e quello della lamina quadrata siano coincidenti. Il riferimento $\{O, \vec{e}_i'\}$ in figura è solidale alla lamina.



Il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ ha asse 2 verticale ascendente. La lamina è vincolata in modo che l'asse 3 solidale è costantemente coincidente con l'omologo asse fisso e la lamina si muove di moto rotatorio attorno all'asse 3. I vincoli sono perfetti. Sul sistema agisce il peso. Si usi come coordinata lagrangiana l'anomalia φ associata all'angolo di vertice O e di primo e secondo lato gli assi 1 fisso e solidale e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.

07 Quanto vale il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse coordinato 1 del riferimento solidale in figura?
a $\frac{64-15\pi}{48(4-\pi)} Ma^2$
b $\frac{16-3\pi}{48(4-\pi)} Ma^2$
c Nessuna delle precedenti.

08 Quanto vale il momento angolare $\vec{L}_O$ della lamina?
a $\frac{64-15\pi}{48(4-\pi)} Ma^2 \dot{\varphi} \vec{e}_3$
b $\frac{40-9\pi}{24(4-\pi)} Ma^2 \dot{\varphi} \vec{e}_3$
c Nessuna delle precedenti.

09 Qual è l'equazione pura del moto?
a $\frac{40-9\pi}{24(4-\pi)} Ma^2 \dot{\varphi}^2 = (Mga/2) \sin\varphi$

b $\frac{64-15\pi}{48(4-\pi)} Ma^2\ddot{\varphi} = (Mga/2)\cos\varphi$
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
L'area è $a^2-\pi a^2/4$ *e la densità vale* $4M/(4a^2-\pi a^2)$*. Si considerano due corpi fittizi di massa* $m_{\mathrm{P}} = a^2 \times 4M/(4a^2-\pi a^2)$ *con forma il quadrato e* $m_{\mathrm{F}} = -(\pi a^2/4) \times 4M/(4a^2-\pi a^2)$ *con forma il foro. Il centro di massa del corpo è il centro geometrico del foro. Il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse* 1 *può essere scritto come* $I'_{C,11} = m_{\mathrm{P}}a^2/12 + m_{\mathrm{F}}(a/2)^2/4$*. Il momento d'inerzia richiesto segue quindi dal teorema di Huygens:* $I'_{O,11} = I'_{C,11} + M(a/2)^2$*.*
II: b
Il riferimento è principale e la velocità angolare è $\dot{\varphi}\vec{e}_3$*. Allora,* $\vec{L}_O = I'_{O,33}\dot{\varphi}\vec{e}_3$*. Per il calcolo del momento d'inerzia si procede come segue:* $I'_{O,33} = I'_{O,11} + I'_{O,22} = I'_{O,11} + I'_{C,11}$*, ove nell'ultima uguaglianza si sono usate proprietà di simmetria della figura.*
III: c
Osservato che $\mathrm{d}\vec{L}_O = \frac{40-9\pi}{24(4-\pi)} Ma^2\ddot{\varphi}\vec{e}_3$*,* $\overrightarrow{OG} = (a/2)\vec{e}_2' = (a/2)(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2)$ *e* $\overrightarrow{OG} \times (-Mg\vec{e}_2) = (Mga/2)\sin\varphi\vec{e}_3$*, ricordando che la componente lungo l'asse della cerniera del momento totale della sollecitazione vincolare di una cerniera ideale è nullo, proiettando la seconda equazione cardinale su* $\vec{e}_3$ *si trova* $\frac{40-9\pi}{24(4-\pi)} Ma^2\ddot{\varphi} = (Mga/2)\sin\varphi$*.*

I.4 Si consideri un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ che si muove vincolato alla curva regolare γ intersezione delle due superfici

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0\,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0\,.$$

Si assuma che su γ i due vettori ∇f_1 e ∇f_2 siano sempre linearmente indipendenti, in modo che per ogni $\boldsymbol{x} \in \gamma$ risulti ben definito il piano

$$\mathit{\Pi}(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla f_1(\boldsymbol{x}), \nabla f_2(\boldsymbol{x}) \rangle\,.$$

10 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ soddisfa
a $\boldsymbol{a}(t) \in \mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
b $\boldsymbol{a}(t)$ è normale a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
c Nessuna delle precedenti.
11 La velocità $\boldsymbol{v}(t)$ soddisfa:
a $\boldsymbol{v}(t) \in \mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
b $\boldsymbol{v}(t)$ è normale a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
c Nessuna delle precedenti.
12 Se sul punto agisce la forza $\boldsymbol{F}$ allora:
a Se il vincolo è liscio, le componenti di $\boldsymbol{F}$ che giacciono su $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{x})$ sono irrilevanti per il moto.
b La reazione vincolare appartiene a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{x})$ sia nel caso di vincolo liscio che scabro.
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE
I: c
Il piano $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$ è il piano normale alla curva in $\boldsymbol{X}(t)$ e l'accelerazione in genere non è né tangente né normale alla curva.
II: b
Segue dal punto precedente perché $\boldsymbol{v}$ è tangente alla curva.
III: a
Se il vincolo è liscio la reazione ha componente ortogonale a $\Pi(\boldsymbol{x})$ nulla, e quindi solo tale componente di $\boldsymbol{F}$ determina il moto lungo γ.
Se il vincolo è scabro, la reazione invece ha in genere componente ortogonale a $\Pi(\boldsymbol{x})$ non nulla.

I.5 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$, e il suo diagramma di fase con orbite $(x(t), p(t))$.
13 Supponiamo che

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0 \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} p(t) = p_0 \in \boldsymbol{R}\,.$$

Allora:
a Si ha $p_0 = 0$ e x_0 è di equilibrio.
b I due limiti dati sono incompatibili.
c Nessuna delle precedenti.
14 Supponiamo che esista un solo punto di equilibrio e che questo sia stabile. Allora:
a Tutte le orbite sono limitate.
b Esistono sempre orbite illimitate.
c Nessuna delle precedenti.
15 Supponiamo che

$$f(x) = \alpha x e^{-\alpha^2 x^2}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $\alpha \neq 0$ costante. Allora:
a Il punto $x = 0$ è di equilibrio stabile.
b Esistono orbite illimitate.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Segue dalla teoria.
II: c
Se $f(x) = -x$ si ha un controesempio a b; invece se $f = U'$ con

$$U(x) = -\frac{x^2}{1+x^2}\,,$$

si ha un controesempio a a.

III: b
La a è vera solo se $\alpha < 0$. Invece si ha che

$$U(x) = -\frac{e^{-\alpha^2 x^2}}{2\alpha}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

pertanto se $E > 1/(2|\alpha|)$ le corrispondenti orbite sono illimitate, non avvicinandosi mai all'asse x.

I.6 Una lamina rigida rettangolare di lati di lunghezza a e $2a$ è stata ottenuta saldando lungo un lato due lamine quadrate omogenee di massa M e $2M$ e di lato di lunghezza a. La lamina si muove appoggiata a un piano liscio orizzontale e l'unica sollecitazione attiva agente su di essa è il peso.
16 Dove si trova il centro di massa della lamina rettangolare?
a nel punto medio del segmento avente per estremi i centri delle due lamine quadrate;
b nel centro della lamina quadrata di massa $2M$;
c Nessuna delle precedenti.
17 Cosa si può dire della sollecitazione vincolare?
a è equivalente a una forza applicata in un punto della lamina;
b è equivalente a una coppia;
c Nessuna delle precedenti.
18 Cosa si può dire dell'atto di moto?
a l'atto di moto non è né traslatorio né rotatorio;
b l'atto di moto è traslatorio oppure rotatorio;
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Usando la proprietà di composizione dei centri di massa, si deduce che il centro di massa si trova sul segmento congiungente i due centri delle lamine quadrate, spostato verso il centro della lamina di massa maggiore.
II: a
Nel caso di corpo appoggiato su un piano liscio la sollecitazione vincolare è equivalente a una forza applicata in un punto del poligono d'appoggio, che, in questo caso, coincide con la regione su cui poggiano i punti della lamina.
III: b
Il moto è piano, quindi il trinomio invariante è nullo.

Prova scritta del 04/02/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 04/02/2022

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla circonferenza mobile di raggio $R > 0$

$$\boldsymbol{\psi}(s,t) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3(t)\,, \qquad s \in (0{,}2\pi R)\,,$$

ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante.
Sul punto non sono applicate sollecitazioni dirette. Si usi s come coordinata lagrangiana; $\boldsymbol{X}_O$ indica l'origine del sistema di riferimento fisso, centro della circonferenza.
01 Il vincolo sia liscio. Allora l'equazione di moto è:
a

$$m\ddot{s} = -m\alpha^2 R\cos^2\frac{s}{R}\,.$$

b

$$m\ddot{s} = -m\alpha^2 R\cos\frac{s}{R}\sin\frac{s}{R}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
02 Il vincolo soddisfi la legge di attrito statico di Coulomb-Morin con coefficiente di attrito $\mu_s > 0$. Allora:
a Esistono infinite posizioni di equilibrio relativo alla circonferenza.
b Esistono solo 4 posizioni di equilibrio relativo alla circonferenza.
c Nessuna delle precedenti.
03 Il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico (quindi assumiamo $\boldsymbol{v} \neq 0$), con coefficiente d'attrito $\mu > 0$. Scrivendo le equazioni di moto nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, quale forza apparente può essere trascurata?
a La forza di trascinamento.
b La forza di Coriolis.
c Nessuna delle precedenti.

I.2 Una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato $2L$ è vincolata a mantenere il lato AB parallelo all'asse x_1 del sistema di riferimento fisso, ossia più precisamente

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L\boldsymbol{e}_1\,.$$

Sulla lamina agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_C = \alpha\overrightarrow{AC} \times \boldsymbol{e}_1\,,$$

applicata nel vertice C opposto a A; qui $\alpha > 0$ è costante.

04 Quale delle seguenti è compatibile con una corretta rappresentazione lagrangiana? Qui $(x, y, z, \varphi) \in \boldsymbol{R}^3 \times (-\pi, \pi)$ sono le coordinate lagrangiane.
a

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_A(x, y, x, \varphi) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\,,$$
$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_C(x, y, z, \varphi) = (x + 2L)\boldsymbol{e}_1 + (y + 2L)\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + (z + 2L)\sin\varphi\boldsymbol{e}_3\,.$$

b

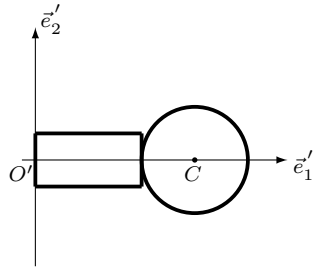
$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_A(x, y, x, \varphi) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\,,$$
$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_C(x, y, z, \varphi) = (x + 2L)\boldsymbol{e}_1 + (y + 2L\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2 + (z + 2L\sin\varphi)\boldsymbol{e}_3\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
05 Supponiamo di usare come coordinate lagrangiane

$$(x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, x_{2C}) \in Q\,,$$

in un opportuno $Q \subset \boldsymbol{R}^4$. Allora le componenti lagrangiane delle forze (ossia di $\boldsymbol{F}_C$) soddisfano:
a $Q_{x_{3A}} = 0$.
b $Q_{x_{1A}} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
06 La forza $\boldsymbol{F}_C$:
a È conservativa nel sistema di riferimento fisso.
b È costante nel sistema di riferimento solidale alla lamina.
c Nessuna delle precedenti.

I.3 Un corpo rigido piano pesante di massa $2M$ è stato ottenuto saldando una lamina rettangolare omogenea di lati di lunghezza R e $2R$ e di massa M a un disco di raggio R e massa M in modo che il disco risulti tangente al lato corto della lamina rettangolare nel punto medio del suo lato. Il riferimento $\{O', \vec{e}'_i\}$ in figura è solidale al corpo.



Rispetto a un riferimento fisso terrestre con asse 2 verticale ascendente, il corpo si muove in modo che il piano solidale 1–2 è costantemente coincidente con l'omologo piano fisso. Inoltre il punto O' è vincolato a scorrere sull'asse fisso 2 e il centro del disco C è vincolato a scorrere sull'asse fisso 1. Si usi come coordinata lagrangiana l'anomalia φ associata all'angolo di vertice C e

di primo e secondo lato gli assi 1 fisso e solidale e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.
L'unica sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso e i vincoli sono perfetti.
07 Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse coordinato 1 del riferimento solidale in figura?
a $\frac{127}{12}MR^2$.
b $\frac{1}{3}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Quanto vale il momento angolare del corpo calcolato usando come polo il centro di massa?
a $\frac{35}{12}MR^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
b $\frac{131}{12}MR^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Da quale relazione sono legate le componenti della somma e del momento totale della sollecitazione vincolare relative agli assi fissi in corrispondenza di un qualsiasi moto del sistema?
a $M^{\mathrm{v}}_{G,3} = 0,\ f^{\mathrm{v}}_1 = 0,\ f^{\mathrm{v}}_2 = 0$.
b $M^{\mathrm{v}}_{G,3} = R\sin\varphi f^{\mathrm{v}}_1 + 3R\cos\varphi f^{\mathrm{v}}_2$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Lamina rettangolare: l'area è $2R^2$ e la densità vale $M/(2R^2)$, allora

$$I'_{O,11,\text{rettangolo}} = \int_0^{2R} \mathrm{d}x'_1 \int_{-R/2}^{R/2} \mathrm{d}x'_2 \frac{M}{2R^2}(x'_2)^2 = \frac{1}{12}MR^2.$$

Disco: usando il teorema di Huygens, si ha $I'_{O,11,\text{disco}} = MR^2/4$. Sommando i due contributi si trova il risultato richiesto.
II: a
La velocità angolare vale $\dot{\varphi}\vec{e}_3'$. Il centro di massa del corpo cade nel punto di saldatura. Il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse 3 vale

$$I'_{G,33} = I'_{O',33} - 2M(2R)^2 = \frac{131}{12}MR^2 - 8MR^2 = \frac{35}{12}MR^2.$$

Il risultato segue dal fatto che l'asse 3 è principale.
III: c
In primo luogo si calcola $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'G} = 2R\cos\varphi\vec{e}_1 - R\sin\varphi\vec{e}_2$ e $\vec{v}_G = -2R\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{e}_1 - R\dot{\varphi}\cos\varphi\vec{e}_2$. Allora $\mathrm{d}L^{\mathrm{v}} = [\vec{f}^{\mathrm{v}}\cdot\vec{v}_G + \vec{M}^{\mathrm{v}}_G\cdot\vec{\omega}] = [-2R\dot{\varphi}\sin\varphi f^{\mathrm{v}}_1 - R\dot{\varphi}\cos\varphi f^{\mathrm{v}}_2 + \dot{\varphi}M^{\mathrm{v}}_{G,3}]\mathrm{d}t$. Il risultato richiesto segue dall'ipotesi di vincolo ideale.

I.4 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \ldots, n$, è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$f_k(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad k = 1, \ldots, m\,.$$

Si assume l'ipotesi dei lavori virtuali.

10 Supponiamo che i vincoli siano mobili, ma che risultino fissi nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$. Sui punti materiali non sono direttamente applicate sollecitazioni. Allora le equazioni di Lagrange scritte in $\mathcal{S}$:
a Possono essere sempre scritte mediante la lagrangiana $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ scritta in $\mathcal{S}$.
b Non contengono il tempo come variabile esplicita, ossia esso vi appare solo attraverso le $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$, $\ddot{\boldsymbol{q}}$.
c Nessuna delle precedenti.
11 Supponiamo che i vincoli siano nella forma

$$f_k(\boldsymbol{z}, t) = g_k(\boldsymbol{z}) + b_k(t)\,, \qquad k = 1, \dots, m\,,$$

per opportune funzioni g_k, b_k. Allora in due posizioni compatibili che differiscono solo per t, ossia

$$(\boldsymbol{z}_1, t_1)\,, \qquad (\boldsymbol{z}_1, t_2)\,,$$

quale delle seguenti vale?
a Si ha $V_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} = V_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$, ma $N_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} \neq N_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$.
b Si ha $V_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} \neq V_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$, ma $N_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} = N_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$.
c Nessuna delle precedenti.
12 Supponiamo che nessuna delle f_k dipenda di fatto dalle coordinate del punto $\boldsymbol{X}_1$. Allora:
a La reazione vincolare su $\boldsymbol{X}_1$ è nulla.
b Questo non può accadere se il sistema di vincoli è regolare.
c Nessuna delle precedenti.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a vincoli olonomi regolari fissi lisci e a forze di potenziale

$$U(x_1, x_2, x_3) = -\alpha(x_1^2 + x_3^2)\,, \qquad (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3\,.$$

Qui $\alpha > 0$ è costante.
13 Nelle ipotesi fatte vale la conservazione dell'energia.
a In generale no, dipende dai vincoli.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
14 Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
a Solo punti ove

$$\nabla U(x_1, x_2, x_3) = -2\alpha(x_1,0, x_3) = 0$$

possono essere di equilibrio.
b Qualunque punto di $\boldsymbol{R}^3$ può essere di equilibrio, per un'opportuna scelta dei vincoli.
c Nessuna delle precedenti.
15 Supponiamo che (0,0,0) risulti di equilibrio. Allora esso:

a È necessariamente instabile.
b È necessariamente stabile.
c Nessuna delle precedenti.

I.6 Un corpo rigido di massa M è vincolato mediante una cerniera cilindrica perfetta ed il peso è l'unica sollecitazione attiva. Si indica con $\{O, \vec{e}_i\}$ un riferimento fisso con asse 2 verticale ascendente, ove O è un punto dell'asse della cerniera.
16 Cosa si può dire del momento totale $\vec{M}_O^{\text{v}}$ della sollecitazione vincolare?
a Ha la componente lungo l'asse della cerniera nulla comunque sia orientato l'asse della cerniera e qualunque sia lo stato di moto del sistema.
b È uguale a $\overrightarrow{OG} \times (Mg\vec{e}_3) + \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$, ove $\vec{L}_O$ è il momento totale della quantità di moto e G il centro di massa del corpo.
c Nessuna delle precedenti.
17 Cosa si può dire della somma della sollecitazione vincolare?
a Ha la componente lungo l'asse della cerniera nulla comunque sia orientato l'asse della cerniera e qualunque sia lo stato di moto del sistema.
b È uguale a $Mg\vec{e}_2 + \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$, ove $\vec{P}$ è la quantità di moto totale.
c Nessuna delle precedenti.
18 Cosa si può dire dei moti del sistema se il centro di massa appartiene all'asse della cerniera?
a A seconda del dato iniziale il corpo è in quiete oppure in moto rotatorio uniforme.
b A seconda del dato iniziale il corpo è in quiete oppure in moto rotatorio uniformemente accelerato.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Segue dall'ipotesi di vincolo perfetto.
II: b
Segue immediatamente dalla prima equazione cardinale.
III: a
Introdotta una opportuna anomalia di rotazione φ, dalla seconda equazione cardinale si trova l'equazione pura $\ddot{\varphi} = 0$.

Prova scritta del 04/02/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 04/02/2022

I.1 Una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato $2L$ è vincolata a mantenere il lato AB parallelo all'asse x_1 del sistema di riferimento fisso, ossia più precisamente

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Sulla lamina agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_C = \alpha\overrightarrow{AC} \times \boldsymbol{e}_1 \,,$$

applicata nel vertice C opposto a A; qui $\alpha > 0$ è costante.

01 Quale delle seguenti è compatibile con una corretta rappresentazione lagrangiana? Qui $(x, y, z, \varphi) \in \boldsymbol{R}^3 \times (-\pi, \pi)$ sono le coordinate lagrangiane.

a

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_A(x, y, x, \varphi) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 \,,$$
$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_C(x, y, z, \varphi) = (x + 2L)\boldsymbol{e}_1 + (y + 2L\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2 + (z + 2L\sin\varphi)\boldsymbol{e}_3 \,.$$

b

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_A(x, y, x, \varphi) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 \,,$$
$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_C(x, y, z, \varphi) = (x + 2L)\boldsymbol{e}_1 + (y + 2L)\cos\varphi\boldsymbol{e}_2 + (z + 2L)\sin\varphi\boldsymbol{e}_3 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

02 La forza $\boldsymbol{F}_C$:

a È conservativa nel sistema di riferimento fisso.

b È costante nel sistema di riferimento solidale alla lamina.

c Nessuna delle precedenti.

03 Supponiamo di usare come coordinate lagrangiane

$$(x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, x_{2C}) \in Q \,,$$

in un opportuno $Q \subset \boldsymbol{R}^4$. Allora le componenti lagrangiane delle forze (ossia di $\boldsymbol{F}_C$) soddisfano:

a $Q_{x_{1A}} = 0$.

b $Q_{x_{3A}} = 0$.

c Nessuna delle precedenti.

Soluzione

I: a

Nella b il punto C descrive nel piano $x_1 = x$ una ellisse di centro l'origine e semiassi $|y + 2L|$, $|z + 2L|$ piuttosto che una circonferenza di centro (y, z) e raggio $2L$ come in a.

II: b

Infatti è il prodotto vettoriale di vettori solidali.

III: a

La rappresentazione lagrangiana quindi è

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_C = (x_{1A} + 2L)\boldsymbol{e}_1 + x_{2C}\boldsymbol{e}_2 + (x_{3A} \pm \sqrt{4L^2 - (x_{2C} - x_{2A})^2}\boldsymbol{e}_3 \,,$$

ove si sceglie uno dei due segni. Quindi

$$Q_{x_{1A}} = \boldsymbol{F}_C \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_C^{\mathrm{L}}}{\partial x_{1A}} = \alpha \overrightarrow{AC} \times \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0\,.$$

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla circonferenza mobile di raggio $R > 0$

$$\boldsymbol{\psi}(s,t) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3(t)\,, \qquad s \in (0{,}2\pi R)\,,$$

ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante.
Sul punto non sono applicate sollecitazioni dirette. Si usi s come coordinata lagrangiana; $\boldsymbol{X}_O$ indica l'origine del sistema di riferimento fisso, centro della circonferenza.

04 Il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico (quindi assumiamo $\boldsymbol{v} \neq 0$), con coefficiente d'attrito $\mu > 0$. Scrivendo le equazioni di moto nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, quale forza apparente può essere trascurata?
a La forza di trascinamento.
b La forza di Coriolis.
c Nessuna delle precedenti.

05 Il vincolo sia liscio. Allora l'equazione di moto è:
a

$$m\ddot{s} = -m\alpha^2 R\cos\frac{s}{R}\sin\frac{s}{R}\,.$$

b

$$m\ddot{s} = -m\alpha^2 R\cos^2\frac{s}{R}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

06 Il vincolo soddisfi la legge di attrito statico di Coulomb-Morin con coefficiente di attrito $\mu_s > 0$. Allora:
a Esistono solo 4 posizioni di equilibrio relativo alla circonferenza.
b Esistono infinite posizioni di equilibrio relativo alla circonferenza.
c Nessuna delle precedenti.

Soluzione
I: c
Non si può trascurare la forza di trascinamento perché ha componente tangente alla circonferenza non nulla; infatti dato che $\boldsymbol{\omega} = \alpha\boldsymbol{u}_3$,

$$\boldsymbol{F}_{\scriptscriptstyle T} = m\alpha^2\lambda_1\boldsymbol{u}_1 = m\alpha^2 R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1\,.$$

La forza di Coriolis, dato che

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \dot{s}\boldsymbol{T} = \dot{s}\Big(-\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1 + \cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3\Big)\,,$$

vale

$$\boldsymbol{F}_{C} = 2m\alpha\dot{s}\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_2\,,$$

cioè è ortogonale alla circonferenza, ma contribuisce quindi alla componente ortogonale della reazione e pertanto anche a quella tangente per la legge di attrito.
II: a
Per il calcolo del punto precedente

$$m\ddot{s} = \boldsymbol{F}_{T}\cdot\boldsymbol{T} = -m\alpha^2 R\cos\frac{s}{R}\sin\frac{s}{R}\,.$$

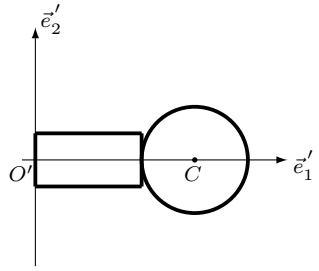
III: b
La condizione di equlibrio relativo è

$$|\boldsymbol{F}_{T}\cdot\boldsymbol{T}| \le \mu_s\sqrt{(\boldsymbol{F}_{T}\cdot\boldsymbol{N})^2 + (\boldsymbol{F}_{T}\cdot\boldsymbol{B})^2} = \mu_s|\boldsymbol{F}_{T}\cdot\boldsymbol{N}|\,,$$

ossia

$$\cos\frac{s}{R} = 0 \quad \textit{oppure} \quad \Big|\sin\frac{s}{R}\Big| \le \mu_s\Big|\cos\frac{s}{R}\Big|\,.$$

I.3 Un corpo rigido piano pesante di massa $2M$ è stato ottenuto saldando una lamina rettangolare omogenea di lati di lunghezza R e $2R$ e di massa M a un disco di raggio R e massa M in modo che il disco risulti tangente al lato corto della lamina rettangolare nel punto medio del suo lato. Il riferimento $\{O', \vec{e}_i'\}$ in figura è solidale al corpo.



Rispetto a un riferimento fisso terrestre con asse 2 verticale ascendente, il corpo si muove in modo che il piano solidale 1–2 è costantemente coincidente con l'omologo piano fisso. Inoltre il punto O' è vincolato a scorrere sull'asse fisso 2 e il centro del disco C è vincolato a scorrere sull'asse fisso 1. Si usi come coordinata lagrangiana l'anomalia φ associata all'angolo di vertice C e di primo e secondo lato gli assi 1 fisso e solidale e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3.
L'unica sollecitazione attiva agente sul corpo è il peso e i vincoli sono perfetti.
07 Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse coordinato 2 del riferimento solidale in figura?
a $\frac{127}{12}MR^2$.

b $\frac{131}{12}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Quanto vale il momento angolare del corpo calcolato usando come polo il centro di massa?
a $\frac{127}{12}MR^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
b $\frac{35}{12}MR^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Da quale relazione sono legate le componenti della somma e del momento totale della sollecitazione vincolare relative agli assi fissi in corrispondenza di un qualsiasi moto del sistema?
a $M^{\mathrm{v}}_{G,3} = 2R\sin\varphi f^{\mathrm{v}}_1 + R\cos\varphi f^{\mathrm{v}}_2$.
b $M^{\mathrm{v}}_{G,3} = 0,\ f^{\mathrm{v}}_1 = 0,\ f^{\mathrm{v}}_2 = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Lamina rettangolare: l'area è $2R^2$ e la densità vale $M/(2R^2)$, allora

$$I'_{O,22,\mathrm{rettangolo}} = \int_0^{2R} \mathrm{d}x'_1 \int_{-R/2}^{R/2} \mathrm{d}x'_2 \frac{M}{2R^2}(x'_1)^2 = \frac{4}{3}MR^2.$$

Disco: usando il teorema di Huygens, si ha $I'_{O,22,\mathrm{disco}} = MR^2/4 + M(3R)^2 = 37MR^2/4$. Sommando i due contributi si trova il risultato richiesto.
II: b
La velocità angolare vale $\dot{\varphi}\vec{e}'_3$. Il centro di massa del corpo cade nel punto di saldatura. Il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse 3 vale

$$I'_{G,33} = I'_{O',33} - 2M(2R)^2 = \frac{131}{12}MR^2 - 8MR^2 = \frac{35}{12}MR^2.$$

Il risultato segue dal fatto che l'asse 3 è principale.
III: a
In primo luogo si calcola $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'G} = 2R\cos\varphi\vec{e}_1 - R\sin\varphi\vec{e}_2$ e $\vec{v}_G = -2R\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{e}_1 - R\dot{\varphi}\cos\varphi\vec{e}_2$. Allora $\mathrm{d}L^{\mathrm{v}} = [\vec{f}^{\mathrm{v}}\cdot\vec{v}_G + \vec{M}^{\mathrm{v}}_G\cdot\vec{\omega}] = [-2R\dot{\varphi}\sin\varphi f^{\mathrm{v}}_1 - R\dot{\varphi}\cos\varphi f^{\mathrm{v}}_2 + \dot{\varphi}M^{\mathrm{v}}_{G,3}]\mathrm{d}t$. Il risultato richiesto segue dall'ipotesi di vincolo ideale.

I.4 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \ldots, n$, è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$f_k(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad k = 1, \ldots, m\,.$$

Si assume l'ipotesi dei lavori virtuali.
10 Supponiamo che nessuna delle f_k dipenda di fatto dalle coordinate del punto $\boldsymbol{X}_1$. Allora:
a Questo non può accadere se il sistema di vincoli è regolare.
b La reazione vincolare su $\boldsymbol{X}_1$ è nulla.
c Nessuna delle precedenti.

11 Supponiamo che i vincoli siano nella forma

$$f_k(\boldsymbol{z}, t) = g_k(\boldsymbol{z}) + b_k(t)\,, \qquad k = 1, \dots, m\,,$$

per opportune funzioni g_k, b_k. Allora in due posizioni compatibili che differiscono solo per t, ossia

$$(\boldsymbol{z}_1, t_1)\,, \qquad (\boldsymbol{z}_1, t_2)\,,$$

quale delle seguenti vale?
a Si ha $V_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} = V_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$, ma $N_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} \neq N_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$.
b Si ha $V_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} \neq V_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$, ma $N_{\boldsymbol{z}_1,t_1}\boldsymbol{f} = N_{\boldsymbol{z}_1,t_2}\boldsymbol{f}$.
c Nessuna delle precedenti.
12 Supponiamo che i vincoli siano mobili, ma che risultino fissi nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$. Sui punti materiali non sono direttamente applicate sollecitazioni. Allora le equazioni di Lagrange scritte in $\mathcal{S}$:
a Non contengono il tempo come variabile esplicita, ossia esso vi appare solo attraverso le $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$, $\ddot{\boldsymbol{q}}$.
b Possono essere sempre scritte mediante la lagrangiana $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ scritta in $\mathcal{S}$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Vale come noto per la ipotesi dei lavori virtuali, per opportuni $c_k \in \boldsymbol{R}$,

$$\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^1 = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \nabla_{\boldsymbol{x}_1} f_k = 0\,.$$

II: c
Entrambi gli spazi coincidono nelle due posizioni; infatti è noto dalla teoria che dipendono solo dai $\nabla_{\boldsymbol{z}} f_k(\boldsymbol{z}, t) = \nabla_{\boldsymbol{z}} g_k(\boldsymbol{z})$.
III: c
Il tempo può apparire mediante le forze apparenti, che non sempre hanno potenziale lagrangiano.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a vincoli olonomi regolari fissi lisci e a forze di potenziale

$$U(x_1, x_2, x_3) = -\alpha(x_1^2 + x_3^2)\,, \qquad (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3\,.$$

Qui $\alpha > 0$ è costante.
13 Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
a Solo punti ove

$$\nabla U(x_1, x_2, x_3) = -2\alpha(x_1{,}0, x_3) = 0$$

possono essere di equilibrio.
b Qualunque punto di $\boldsymbol{R}^3$ può essere di equilibrio, per un'opportuna scelta dei vincoli.

c Nessuna delle precedenti.
14 Supponiamo che (0,0,0) risulti di equilibrio. Allora esso:
a È necessariamente stabile.
b È necessariamente instabile.
c Nessuna delle precedenti.
15 Nelle ipotesi fatte vale la conservazione dell'energia.
a Sì.
b In generale no, dipende dai vincoli.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Se per esempio il vincolo è la superficie

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0\,,$$

occorre e basta per l'equilibrio che $\lambda \nabla f = \nabla U$ *per un* $\lambda \in \boldsymbol{R}$ *opportuno.*
II: c
Se il vincolo è $x_2 = 0$ *è stabile, se il vincolo è* $x_3 = 0$ *è instabile.*
III: a
Segue dalla teoria (le reazioni vincolari fanno lavoro complessivo nullo).

I.6 Un corpo rigido di massa M è vincolato mediante una cerniera cilindrica perfetta ed il peso è l'unica sollecitazione attiva. Si indica con $\{O, \vec{e}_i\}$ un riferimento fisso con asse 3 verticale ascendente, ove O è un punto dell'asse della cerniera.
16 Cosa si può dire della somma della sollecitazione vincolare?
a È uguale a $Mg\vec{e}_3 + \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$, ove $\vec{P}$ è la quantità di moto totale.
b Ha la componente lungo l'asse della cerniera nulla comunque sia orientato l'asse della cerniera e qualunque sia lo stato di moto del sistema.
c Nessuna delle precedenti.
17 Cosa si può dire del momento totale $\vec{M}^{\mathrm{v}}_O$ della sollecitazione vincolare?
a Ha la componente lungo l'asse della cerniera nulla comunque sia orientato l'asse della cerniera e qualunque sia lo stato di moto del sistema.
b È uguale a $\overrightarrow{OG} \times (Mg\vec{e}_3) + \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$, ove $\vec{P}$ è la quantità di moto totale e G il centro di massa del corpo.
c Nessuna delle precedenti.
18 Cosa si può dire delle configurazioni di equilibrio se il centro di massa appartiene all'asse della cerniera?
a Tutte le configurazioni sono di equilibrio.
b Esistono solo due configurazioni di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Segue immediatamente dalla prima equazione cardinale.
II: a
Segue dall'ipotesi di vincolo perfetto.

III: a
Segue dalle equazioni cardinali della statica.

Prova scritta del 21/03/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 21/03/2022

I.1 Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Sul vertice A è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = kx_1\boldsymbol{e}_1\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si usino come coordinate lagrangiane $(x, y, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_A = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{AB} = L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

La scelta è tale che la diagonale AC è data da

$$\overrightarrow{AC} = L\sqrt{2}\Big(\cos\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big)\boldsymbol{e}_1 + \sin\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big)\boldsymbol{e}_2\Big)\,,$$

01 Il potenziale lagrangiano U^{L}:
a Non esiste.
b Vale

$$U^{\text{L}} = \frac{k}{2}x^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
02 Sia I il momento d'inerzia della lamina nel centro di massa, relativo a $\boldsymbol{e}_3$. Allora l'energia cinetica della lamina vale:
a

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}\Big[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{L^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \sqrt{2}L\dot{x}\dot{\varphi}\sin\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big) + \sqrt{2}L\dot{y}\dot{\varphi}\cos\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big)\Big] + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
03 L'equazione di Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial T^{\text{L}}}{\partial \dot\varphi}\Big] - \frac{\partial T^{\text{L}}}{\partial \varphi} = Q_\varphi \ :$$

a Si riduce con calcoli opportuni a $\ddot\varphi = 0$.
b Presenta $Q_\varphi = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti

$$U^{\text{L}}(x,y,\varphi) = U(\boldsymbol{X}^{\text{L}}_A(x,y,\varphi)) = \frac{k}{2}(x^{\text{L}}_1(x,y,\varphi))^2 = \frac{k}{2}x^2\,.$$

II: a
Usiamo il teorema di König. Si ha intanto per il centro di massa G

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_G = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + \frac{L}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\varphi+\frac{\pi}{4}\Big)\boldsymbol{e}_1 + \sin\Big(\varphi+\frac{\pi}{4}\Big)\boldsymbol{e}_2\Big)\,,$$

da cui

$$|\boldsymbol{v}_G|^2 = \dot x^2 + \dot y^2 + \frac{L^2}{2}\dot\varphi^2 - \sqrt{2}L\dot x\dot\varphi\sin\Big(\varphi+\frac{\pi}{4}\Big) + \sqrt{2}L\dot y\dot\varphi\cos\Big(\varphi+\frac{\pi}{4}\Big)\,.$$

Infine la componente dovuta a $\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\boldsymbol{e}_3$ *è* $I\dot\varphi^2/2$.
III: b
Infatti (tornando alla prima domanda)

$$Q_\varphi = \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial\varphi} = 0\,,$$

ma T^{L} *dipende anche da* φ *perciò a non può essere vera.*

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

ove $R > 0$.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3\,,$$

ove α, β, $\gamma \in \boldsymbol{R}$.
04 Il vincolo sia scabro di attrito dinamico (assumiamo quindi $\boldsymbol{v} \neq 0$) del tipo $|\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}}| = \mu|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|$, con $\mu > 0$. Allora:
a Le equazioni di moto dipendono da α, β, ma non da γ.
b Si possono scegliere le coordinate lagrangiane in modo che le equazioni di moto siano indipendenti da α o da β a scelta.
c Nessuna delle precedenti.

05 Il vincolo sia liscio. Allora:
a Le equazioni di moto dipendono da α, β, ma non da γ.
b Si possono scegliere le coordinate lagrangiane in modo che le equazioni di moto siano indipendenti da α o da β a scelta.
c Nessuna delle precedenti.
06 Il vincolo sia scabro di attrito statico, del tipo $|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}| \leq \mu|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|$, con $\mu > 0$. Allora:
a Qualunque sia $\mu > 0$ esistono sempre infinite posizioni di equilibrio.
b Per certe scelte di α, β, $\gamma \in \boldsymbol{R}$, $\mu > 0$, non esistono posizioni di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Se il vincolo è scabro, anche la componente binormale della forza entra nell'equazione di moto attraverso il termine di attrito, quindi a non vale. Neppure b vale, perché la forza non può essere eliminata dalle equazioni di moto.
II: a
Se il vincolo è liscio la componente normale della forza è irrilevante per le equazioni di moto, e γ appare solo in tale componente.
III: a
L'equilibrio si ha se $|\boldsymbol{F}^{\tan}| \leq \mu|\boldsymbol{F}^{\text{nor}}|$. Questo equivale a

$$|\boldsymbol{F}^{\tan}|^2 \leq \frac{\mu^2}{1+\mu^2}|\boldsymbol{F}|^2\,,$$

Ma

$$\boldsymbol{F}^{\tan} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{-x_2\boldsymbol{e}_1 + x_1\boldsymbol{e}_2}{R} = \frac{-\alpha x_2 + \beta x_1}{R}\,.$$

Quindi la condizione diviene

$$\frac{(-\alpha x_2 + \beta x_1)^2}{R^2} \leq \frac{\mu^2}{1+\mu^2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,.$$

Se $\boldsymbol{F} \neq 0$ la disuguaglianza è vera in senso stretto se $(-x_2, x_1)$ è ortogonale a (α, β), quindi esistono infiniti (x_1, x_2) ove è verificata. Se $\boldsymbol{F} = 0$ tutte le posizioni sono di equilibrio.

I.3 Un corpo rigido piano omogeneo di massa M ha la forma di un triangolo rettangolo con cateti di lunghezza L e $2L$. Il riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i'\}$ ha origine nel vertice dell'angolo retto e asse 3 perpendicolare alla lamina; inoltre, il cateto di lunghezza maggiore giace sul semiasse positivo 1 e quello di lunghezza minore sul semiasse positivo 2.
07 Quanto vale il prodotto d'inerzia relativo agli assi 1 e 2?
a $\frac{1}{6}ML^2$.
b $-\frac{1}{6}ML^2$
c Nessuna delle precedenti.
08 Il corpo viene mantenuto in rotazione uniforme con velocità angolare costante di modulo λ attorno a un asse fisso coincidente con l'asse 1 solidale. La rotazione è antioraria rispetto allo stesso asse. Quanto vale il momento angolare calcolato usando come polo di riduzione O?

a $\frac{1}{6}ML^2\lambda\vec{e}_1' - \frac{1}{6}ML^2\lambda\vec{e}_2'$
b $\frac{1}{6}ML^2\lambda\vec{e}_1'$
c Nessuna delle precedenti.

09 Il corpo viene mantenuto in rotazione uniforme con velocità angolare costante di modulo λ attorno a un asse fisso coincidente con l'asse 2 solidale. Quanto vale l'energia cinetica?
a $\frac{1}{12}ML^2\lambda^2$
b $\frac{1}{6}ML^2\lambda^2$
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE
I: b
L'area vale L^2, la densità M/L^2, quindi

$$I'_{O,12} = -\int_0^{2L} \mathrm{d}x'_1 \int_0^{L-x'_1/2} \mathrm{d}x'_2 \frac{M}{L^2} x'_1 x'_2 = -\int_0^{2L} \mathrm{d}x'_1 \frac{M}{L^2} x'_1 \frac{1}{2}\Big(L - \frac{1}{2}x'_1\Big)^2 = -\frac{1}{6}ML^2.$$

II: a
La velocità angolare vale $\lambda\vec{e}_1'$. Dal momento che l'asse 3 è principale, si ha

$$L'_O = \begin{pmatrix} I'_{O,11} & I'_{O,12} & 0 \\ I'_{O,21} & I'_{O,22} & I'_{O,23} \\ 0 & I'_{O,32} & I'_{O,33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I'_{O,11} \\ \lambda I'_{O,12} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resta quindi da calcolare

$$I'_{O,11} = \int_0^{2L} \mathrm{d}x'_1 \int_0^{L-x'_1/2} \mathrm{d}x'_2 \frac{M}{L^2}(x'_2)^2 = \int_0^{2L} \mathrm{d}x'_1 \frac{M}{L^2}\frac{1}{3}\Big(L - \frac{1}{2}x'_1\Big)^3 = \frac{1}{6}ML^2.$$

III: c
Essendo il moto rotatorio $T = I'_{O,22}\lambda^2/2$. Resta quindi da calcolare

$$I'_{O,22} = \int_0^{2L} \mathrm{d}x'_1 \int_0^{L-x'_1/2} \mathrm{d}x'_2 \frac{M}{L^2}(x'_1)^2 = \int_0^{2L} \mathrm{d}x'_1 \frac{M}{L^2}(x'_1)^2\Big(L - \frac{1}{2}x'_1\Big) = \frac{2}{3}ML^2.$$

I.4 Consideriamo un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi regolari, con ℓ gradi di libertà e il relativo potenziale lagrangiano U^{L} delle forze direttamente applicate.

10 I vincoli siano mobili nel sistema di riferimento fisso, ma fissi nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$. Allora, volendo scrivere la lagrangiana in $\mathcal{S}$ (ove quindi si deve tener conto anche delle forze apparenti)
a U^{L} nel sistema di riferimento $\mathcal{S}$ non esiste sicuramente a causa della forza di Coriolis.
b Se U^{L} esiste nel sistema di riferimento fisso può esistere o no nel sistema di riferimento mobile.

c Nessuna delle precedenti.
11 Sia $\ell = 2$ e le componenti lagrangiane delle forze siano per $(q_1, q_2) \in \boldsymbol{R}^2$

$$Q_1 = q_1 + q_2 t\,, \qquad Q_2 = q_1 + q_2\,.$$

a U^{L} esiste, in tutto $\boldsymbol{R}^2$.
b U^{L} non esiste in nessun aperto di $\boldsymbol{R}^2$.
c Nessuna delle precedenti.
12 Le forze direttamente applicate sono nulle.
a U^{L} esiste sicuramente (nel sistema di riferimento fisso).
b U^{L} può non esistere nel sistema di riferimento fisso, ma si può sempre trovare un sistema di riferimento mobile in cui esiste.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti la forza di Coriolis (in certi casi) può avere componenti lagrangiane nulle.
II: b
Infatti non è soddisfatta la condizione necessaria:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} = t \neq 1 = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\,.$$

III: a
Infatti U^{L} è costante.

I.5 Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di m vincoli olonomi regolari, con $\ell = 3n - m$ gradi di libertà.
13 L'energia meccanica si conserva se:
a Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e i vincoli sono fissi.
b Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e le componenti lagrangiane delle forze sono conservative in senso lagrangiano.
c Nessuna delle precedenti.
14 I vincoli siano fissi. L'insieme degli atti di moto del sistema in una fissata configurazione compatibile costituisce:
a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{3n}$ di dimensione ℓ.
b Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{3n}$ di dimensione m.
c Nessuna delle precedenti.
15 Supponiamo che $n = 2$ e i vincoli siano per i due moti $\boldsymbol{X}_1 = (z_1, z_2, z_3)$, $\boldsymbol{X}_2 = (z_4, z_5, z_6)$,

$$f_1(z_1, z_2, z_3) = 0\,, \quad f_2(z_4, z_5, z_6) = 0\,, \quad z_1 = z_4\,.$$

Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e le forze direttamente applicate sono costanti ma non nulle.
a Non esistono configurazioni compatibili con i vincoli che siano di equilibrio.
b L'energia meccanica del sistema si conserva lungo ciascun moto.
c Nessuna delle precedenti.

Soluzione
I: c
Oltre alle condizioni di a, occorre che le forze direttamente applicate siano conservative.
II: a
È lo spazio degli spostamenti effettivi che coincide se i vincoli sono fissi con quello degli spostamenti virtuali.
III: b
Vale b perché le forze costanti sono conservative e i vincoli sono fissi. La a non vale, perché le forze direttamente applicate possono essere ortogonali ai vincoli.

I.6 Un disco è vincolato a muoversi in un piano rotolando senza strisciare su una retta di tale piano.
16 Cosa si può dire dell'atto di moto?
a È rototraslatorio.
b È rotatorio.
c Nessuna delle precedenti.
17 Cosa si può dire dell'asse di istantanea rotazione?
a Non è definito.
b È perpendicolare al piano su cui si svolge il moto.
c Nessuna delle precedenti.
18 Cosa si può dire della centroide fissa (base) e di quella mobile (rulletta)?
a La base coincide con la retta di appoggio e la rulletta con il bordo del disco.
b La base coincide con la retta d'appoggio e la rulletta degenera nel punto di contatto.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Il punto solidale a contatto con la retta d'appoggio ha velocità nulla in ogni istante.
II: b
L'atto di moto è rotatorio e la velocità angolare è perpendicolare al piano del moto.
III: a
Il centro di istantanea rotazione è in ogni istante il punto di contatto tra disco e retta d'appoggio.

Prova scritta del 07/06/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 07/06/2022

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza R e massa m è vincolata a avere l'estremo B sull'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove R, $h > 0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea. Inoltre l'estremo A dell'asta è vincolato a stare sull'asse x_3 alla stessa quota di B.
Si usi l'ascissa curvilinea s di B come coordinata lagrangiana. Qui (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca dell'elica, che viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{B}(s) &= \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3\,;
\end{aligned}$$

la curvatura è $k(s) = R\alpha^2$.
01 Denotiamo con I il momento d'inerzia dell'asta nel centro di massa, relativo a un asse ortogonale all'asta. L'energia cinetica dell'asta è data da:
a

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}\alpha^2(R^2 + h^2)\dot{s}^2 + \frac{I}{2}\alpha^2\dot{s}^2\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}\alpha^2\Big(\frac{R^2}{4} + h^2\Big)\dot{s}^2 + \frac{I}{2}\alpha^2\dot{s}^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
02 Sull'asta agisce, come unica forza direttamente applicata, il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$. L'asta all'istante iniziale $t = 0$ è ferma con $s(0) = 0$. La velocità lagrangiana $\dot{s}(t)$ all'istante $t > 0$ può essere determinata come funzione:
a Necessariamente di entrambi $s(t)$ e R (oltre che di altre quantità).
b Di $s(t)$.
c Nessuna delle precedenti.
03 Sull'asta agisce l'unica forza direttamente applicata data da

$$\boldsymbol{F}_B = f(s)\boldsymbol{T}(s)\,, \qquad f \in C^1(\boldsymbol{R})\,,$$

applicata in B. L'equazione di Lagrange ha la forma (ove $K > 0$ è una costante opportuna):
a $K\ddot{s} = f(s)$.
b $K\ddot{s} = -f(s)$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Usiamo il teorema di König. Scegliamo la terna solidale

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{R}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

Allora il moto di $(\boldsymbol{u}_h)$ *è una rotazione e vale*

$$\boldsymbol{\omega} = \Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{u}_2\Big)\boldsymbol{u}_3 = \alpha\dot{s}\boldsymbol{u}_3\,.$$

Inoltre

$$\boldsymbol{v}_G = \alpha\dot{s}\Big(-\frac{R}{2}\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \frac{R}{2}\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\boldsymbol{e}_3\Big)\,,$$

cosicché

$$|\boldsymbol{v}_G|^2 = \alpha^2\dot{s}^2\Big(\frac{R^2}{4} + h^2\Big)\,.$$

Tenuto conto che $\boldsymbol{\sigma}_G = \mathrm{diag}(0, I, I)$ *si ha b.*
II: a
Per la conservazione dell'energia

$$T^{\text{L}} + mgh\alpha s = 0\,.$$

Quindi

$$\dot{s}(t)^2 = -\frac{mgh\alpha s(t)}{T^{\text{L}}}\,,$$

e dai calcoli (si veda anche la domanda precedente)

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}\alpha^2\Big(\frac{R^2}{4} + h^2\Big)\dot{s}^2 + \frac{mR^2}{24}\alpha^2\dot{s}^2\,,$$

e quindi

$$\dot{s}(t)^2 = -\frac{2gh\alpha^{-1}s(t)}{\frac{R^2}{3} + h^2}\,.$$

III: a
Si ha per $K > 0$ *opportuna*

$$T^{\text{L}} = \frac{K}{2}\dot{s}^2\,.$$

Inoltre

$$Q_s = f(s)\boldsymbol{T}(s) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_B^{\text{L}}}{\partial s} = f(s)\boldsymbol{T}(s) \cdot \boldsymbol{T}(s) = f(s)\,.$$

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove R, $h > 0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea. La terna intrinseca dell'elica viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{B}(s) &= \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3\,;
\end{aligned}$$

la curvatura è $k(s) = R\alpha^2$.

04 Sul punto agisce, come unica forza direttamente applicata,

$$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{e}_2\,,$$

ove $k > 0$ è costante. Il vincolo è liscio.
a Esistono infinite posizioni di equilibrio, qualunque sia $k > 0$.
b Per certi valori di $k > 0$ non esistono posizioni di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.
05 Sul punto agisce, come unica forza direttamente applicata,

$$\boldsymbol{F} = kx_3\boldsymbol{e}_3\,,$$

ove $k > 0$ è costante. Il vincolo è scabro, secondo la legge dell'attrito statico di Coulomb-Morin, con coefficiente d'attrito $\mu_s > 0$.
a Per certi valori dei parametri h, R, k, m, μ_s non esistono posizioni di equilibrio.
b Fissati h, R, k, m, μ_s ad arbitrio, esistono posizioni di equilibrio con $|s|$ grande a piacere.
c Nessuna delle precedenti.
06 Sul punto agisce, come unica forza direttamente applicata,

$$\boldsymbol{F} = c_1\boldsymbol{T} + c_2\boldsymbol{N}\,,$$

ove c_1, $c_2 > 0$ sono costanti. Il vincolo è scabro, secondo la legge dell'attrito statico di Coulomb-Morin, con coefficiente d'attrito $\mu_s > 0$.
a L'esistenza di posizioni di equilibrio dipende dal valore di c_1, c_2, μ_s, ma non da quello di h, R.
b Le eventuali posizioni di equilibrio sono in numero finito.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Sono di equilibrio tutte e sole le posizioni ove

$$\boldsymbol{T}(s)\cdot\boldsymbol{F}(s) = kR\alpha\cos(\alpha s) = 0\,,$$

che sono infinite.
II: c
Come noto si ha equilibrio se e solo se

$$|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}|^2 \le \frac{\mu_s^2}{1+\mu_s^2}|\boldsymbol{F}|^2\,,$$

vale a dire

$$|kx_3h\alpha|^2 \le \frac{\mu_s^2}{1+\mu_s^2}|kx_3|^2\,.$$

A parte il caso $x_3 = 0$ in cui si ha sempre equilibrio, questo equivale a

$$h^2\alpha^2 \le \frac{\mu_s^2}{1+\mu_s^2}\,,$$

che equivale a sua volta alla restrizione

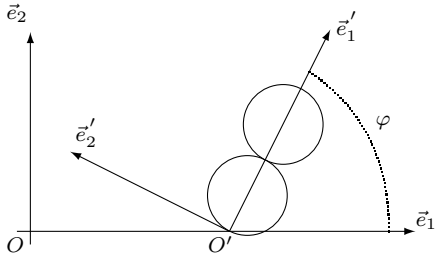
$$\frac{h}{R} \leq \mu_s \,.$$

III: a
Deve essere

$$|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}| \leq \mu_s |(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N})\boldsymbol{N} + (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B}| \,,$$

che equivale a $c_1 \leq \mu_s c_2$.

I.3 Un sistema olonomo a vincoli perfetti è costituito da una lamina rigida pesante ottenuta saldando come illustrato in figura due dischi di medesima massa $M/2$ e medesimo raggio R. Il corpo è vincolato a muoversi in un piano verticale fisso rispetto al riferimento terrestre. Il punto O' solidale al corpo è vincolato a scorrere su una retta orizzontale del piano del moto.



Il riferimento terrestre $\{O, \vec{e}_i\}$ ha piano 1–2 coincidente con quello del moto, asse 1 coincidente con la retta su cui scorre O' e asse 2 verticale ascendente. Il riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i'\}$ ha piano 1–2 coincidente con quello della lamina e $\vec{e}_3' = \vec{e}_3$.
Posto $\overrightarrow{OO'} = q\vec{e}_1$, si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa q appena definita e l'anomalia φ indicata in figura.
07 Quanto vale il momento d'inerzia rispetto all'asse solidale 3?
a $\frac{11}{2}MR^2$.
b $-\frac{11}{12}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Quanto vale la coordinata 1 del centro di massa relativa al riferimento fisso?
a $R\sin\varphi$.
b $q + 2R\cos\varphi$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Quanto vale l'energia cinetica del corpo rispetto al riferimento del centro di massa?
a $\frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2$.
b $-\frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Ricordando l'espressione del momento d'inerzia di un disco omogeneo e il teorema

degli assi paralleli si ha

$$I'_{O,33} = \Big(\frac{1}{2}\frac{M}{2}R^2 + \frac{M}{2}R^2\Big) + \Big(\frac{1}{2}\frac{M}{2}R^2 + \frac{M}{2}(3R)^2\Big) = \frac{11}{2}MR^2.$$

II: b
Per ragioni di simmetria il centro di massa cade nel punto di saldatura. Allora

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'G} = q\vec{e}_1 + 2R\vec{e}_1^{\,'} = q\vec{e}_1 + 2R(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2).$$

III: a
Il moto relativo al riferimento del centro di massa è rotatorio, quindi l'energia cinetica è $I'_{G,33}\dot{\varphi}^2/2$. Usando il teorema degli assi paralleli si ha

$$I'_{G,33} = I'_{O',33} - M(2R)^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

I.4 Si considerino i seguenti vincoli per il moto

$$\boldsymbol{X} = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,.$$

10 Il vincolo è

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t) = \begin{pmatrix} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - \alpha t^2 \\ z_3 - \beta t \end{pmatrix} = 0\,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti. Qui $t > 0$.
a Esiste sempre almeno un intervallo $t \in (0, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$ in cui il vincolo è olonomo regolare.
b Fissato $\beta > 0$, esistono $\alpha > 0$ per cui il vincolo non è regolare.
c Nessuna delle precedenti.
11 Il vincolo è

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t) = \begin{pmatrix} z_1 - 3 \\ z_2 - 2t \end{pmatrix} = 0\,,$$

con $t > 0$.
a Il vincolo è equivalente a un vincolo fisso.
b Il sistema vincolato ha 2 gradi di libertà.
c Nessuna delle precedenti.
12 Il vincolo è

$$f(\boldsymbol{z},t) = z_1 - \alpha z_2 z_3 - \beta t = 0\,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti.
a L'insieme delle configurazioni ammissibili è una superficie regolare (eventualmente mobile) di $\boldsymbol{R}^3$, per qualunque scelta di α, $\beta \in \boldsymbol{R}$.
b Per vincoli di questo tipo non si può porre l'ipotesi dei lavori virtuali.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE

I: b
Poiché $\boldsymbol{f} \in C^\infty$; la iacobiana è

$$\begin{pmatrix} 2z_1 & 2z_2 & 2z_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che è non singolare se $(z_1, z_2) \neq (0,0)$ nelle configurazioni ammissibili. Questo è vero se

$$z_3 = \beta t < \sqrt{\alpha t^2}\,,$$

ossia $\beta < \sqrt{\alpha}$. Viceversa se $\beta \geq \sqrt{\alpha}$ il vincolo è degenere o non ha soluzioni.
II: c
Il vincolo consiste nella retta mobile

$$\boldsymbol{\psi}(s,t) = 3\boldsymbol{e}_1 + 2t\boldsymbol{e}_2 + s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$

Il moto ha $\ell = 1$.
III: a
Infatti lo spazio delle configurazioni ammissibili ha la rappresentazione

$$\boldsymbol{r}(\varphi,\theta) = (\alpha\varphi\theta + \beta t, \varphi, \theta)\,, \qquad (\varphi,\theta) \in \boldsymbol{R}^2\,,$$

con

$$\boldsymbol{r}_\varphi = (\alpha\theta,1,0)\,, \qquad \boldsymbol{r}_\theta = (\alpha\varphi,0,1)\,, \qquad \boldsymbol{r}_\varphi \times \boldsymbol{r}_\theta \neq 0\,.$$

I.5 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$. Denotiamo con U il potenziale, ossia assumiamo $U' = f$.
13 Per alcune scelte di f si può concludere che ciascun moto è limitato.
a È vero, per infinite scelte di f.
b L'unico caso in cui è vero è quello di f identicamente nulla.
c Nessuna delle precedenti.
14 Sia $U(x) \geq 0$ e $U(0) = U(L) = 0$.
a Esiste almeno un punto di equilibrio stabile.
b Esiste almeno un punto di equilibrio, che però può essere instabile.
c Nessuna delle precedenti.
15 Consideriamo il piano delle fasi per il moto. Supponiamo che $(x(t), p(t))$, $t \in \boldsymbol{R}$, sia un'orbita.
a Se l'orbita è illimitata allora $p(t)$ è illimitata.
b Se l'orbita è limitata, allora corrisponde a un moto periodico.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Poiché vale per la conservazione dell'energia

$$-U(x) \leq T - U(x) = E\,,$$

basta che

$$-U(x) \to +\infty\,, \qquad x \to \pm\infty\,.$$

Per esempio

$$U(x) = -\alpha x^2\,, \quad \alpha > 0\,,$$

e quindi $f(x) = -2\alpha x$. *Nel caso* $f = 0$ *non è vero che tutti i moti sono limitati.*
II: b
Le ipotesi fatte implicano che esista un punto critico di U *in* $[0, L]$ *che sia un massimo, e quindi che esista un punto di equilibrio. Ma il massimo può non essere isolato; per esempio si potrebbe avere* $U(x) = 0$ *per ogni* $0 \le x \le L$.
III: c
Può darsi che l'orbita sia illimitata solo nella componente x. *Inoltre le orbite che connettono due punti di equilibrio instabile sono limitate ma non periodiche.*

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando un elemento di massa M a un punto del bordo di un disco omogeneo di massa M e raggio r. Il corpo è vincolato a muoversi in un piano verticale fisso rispetto all'osservatore terrestre mantenendosi a contatto dall'esterno con una guida circolare giacente nel medesimo piano. L'atto di moto è in ogni istante con assenza di strisciamento.

16 Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
a L'atto di moto è in ogni istante traslatorio.
b L'atto di moto è in ogni istante rotatorio e il centro di istantanea rotazione cade nel punto di contatto tra corpo e guida.
c Nessuna delle precedenti.

17 Per quanto riguarda la sollecitazione peso si può dire che
a È equivalente a una forza applicata nel punto di contatto.
b È equivalente a una coppia di momento $2Mgr$.
c Nessuna delle precedenti.

18 Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
a La centroide fissa (base) coincide con la traiettoria del centro di massa del corpo.
b La centroide fissa (base) coincide con la guida.
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE
I: b
Il punto solidale che occupa la posizione del punto di contatto ha velocità nulla, quindi l'atto è rotatorio e il centro di istantanea rotazione concide con il punto di contatto.
II: c
La sollecitazione peso è equivalente a una forza applicata nel centro di massa.
III: b
È la curva descritta rispetto al riferimento solidale dal punto di contatto che, in ogni istante, si trova sulla guida.

Prova scritta del 12/07/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 12/07/2022

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 > 0\,,$$

con vincolo liscio. Si usino come coordinate lagrangiane le coordinate $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$ della parametrizzazione

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,.$$

Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -\lambda\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \lambda\cos\varphi\boldsymbol{e}_2\,,$$

con $\lambda > 0$ costante. Le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} R\ddot{\varphi}\sin\theta &= -2R\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{\lambda}{m}\,,\\ \ddot{\theta} &= \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\,. \end{aligned}$$

01 Il punto parta da fermo. Allora:
a Possono esistere moti non di quiete con θ costante.
b Possono esistere moti non di quiete con φ costante.
c Nessuna delle precedenti.
02 Il potenziale lagrangiano in questo caso
a Non esiste.
b Esiste e si ha almeno per qualche (φ, θ)

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial\varphi}(\varphi,\theta) \neq 0\,, \qquad \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial\theta}(\varphi,\theta) \neq 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
03 Il punto parta da fermo con $\theta(0) = \pi/4$. Allora esiste un intervallo di tempi $(0, \bar{t})$ in cui
a $\theta(t) < \pi/4$.
b $\theta(t) > \pi/4$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione

I: a
Se $\theta(t) = \pi/2$ per ogni t, la soluzione è completata da

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\lambda t^2}{2Rm}\,.$$

Se fosse $\varphi(t) = \varphi(0)$ per ogni t, la prima equazione darebbe un assurdo.
II: a
Poiché

$$Q_\varphi = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial \varphi} = R\lambda \sin\theta\,,$$
$$Q_\theta = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial \theta} = 0\,,$$

il potenziale non esiste (non è soddisfatta la condizione necessaria di chiusura).
III: b
Infatti dalla prima equazione

$$\frac{R}{\sqrt{2}}\ddot{\varphi}(0) = \frac{\lambda}{m} > 0\,.$$

Quindi $\dot{\varphi}(t) > 0$ per $t \in (0, t_1)$, $t_1 > 0$ opportuno, e dalla seconda equazione si ottiene (ragionando per continuità sul segno di $\cos\theta$) che $\ddot{\theta}(t) > 0$ per $t \in (0, \bar{t})$, $t_1 \geq \bar{t} > 0$ opportuno. Infine si ha $\dot{\theta}(t) > 0$ (almeno) in $(0, \bar{t})$.

I.2 Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conervative; si assume l'ipotesi dei lavori virtuali. Indichiamo con U^{L} il potenziale lagrangiano. Si assume che $\ell = 2$ e che $\boldsymbol{q} = 0$ sia una posizione di equilibrio.

04 Si sa che

$$D^2U^{\text{L}}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ è stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ non è stabile.
c Nessuna delle precedenti.

05 Si sa che

$$D^2U^{\text{L}}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

a Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ è stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ non è stabile.
c Nessuna delle precedenti.

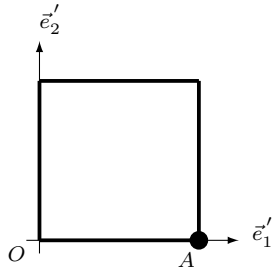
06 Si ha

$$U^{\text{L}}(q_1, q_2) = -q_1^2 - q_2^4\,, \qquad (q_1, q_2) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

a Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ è stabile, e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ non è stabile.
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE
I: c
Infatti non si può dire neanche se $\boldsymbol{q} = 0$ *sia di massimo o di sella.*
II: a
Infatti l'hessiana è definita negativa.
III: c
Infatti $\boldsymbol{q} = 0$ *è di massimo isolato, ma l'hessiana non è ivi definita negativa.*

I.3 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando l'elemento A di massa M a una lamina rigida omogenea di forma quadrata di medesima massa M e lato $2L$. In figura è rappresentato il corpo assieme al riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i'\}$. Si nota che $\overrightarrow{OA} = 2L\vec{e}_1'$.



Il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ ha asse 2 verticale ascendente. Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse solidale 2 costantemente coincidente con l'omologo asse fisso.
Come coordinata lagrangiana si usa l'anomalia φ individuata dall'asse fisso 1 e dall'asse solidale 1 orientata in verso antiorario rispetto all'asse 2.
Si risponda alle seguenti domande:
07 Quanto vale il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse 1 del riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i'\}$?
a $\frac{4}{3}ML^2$.
b $\frac{17}{3}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Quanto vale il prodotto d'inerzia del corpo relativo agli assi 1 e 2 del riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i'\}$?
a $\frac{1}{3}ML^2$.
b $-ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Si scriva lo sviluppo rispetto alla base solidale del momento angolare $\vec{L}_O$.
a $-ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_1' + \frac{16}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_2'$.
b $+ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_1' + \frac{16}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_2'$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
l'elemento non contribuisce perché giace sull'asse 1*, quindi il momento d'inerzia è*

quello del quadrato di lato $2L$*:*

$$\int_0^{2L} \mathrm{d}x_1' \int_0^{2L} \mathrm{d}x_2' \frac{M}{4L^2}(x_2')^2 = \frac{M}{4L^2} 2L \frac{1}{3}(2L)^3 \,.$$

II: b
L'elemento non contribuisce perché la sua coordinata 2 *vale zero, quindi il prodotto d'inerzia è quello del quadrato di lato* $2L$*:*

$$-\int_0^{2L} \mathrm{d}x_1' \int_0^{2L} \mathrm{d}x_2' \frac{M}{4L^2} x_1' x_2' = -\frac{M}{4L^2} \frac{1}{2}(2L)^2 \frac{1}{2}(2L)^2 \,.$$

III: a
Il momento d'inerzia relativo all'asse due del quadrato è uguale a quello relativo all'asse uno, pertanto il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse due si ottiene sommando a quello relativo all'asse 1 *il contributo dell'elemento:* $I'_{O,22} = \frac{4}{3}ML^2 + M(2L)^2 = \frac{16}{3}ML^2$*. Inoltre si osserva che* $I'_{O,23} = 0$ *e la velocità angolare vale* $\dot{\varphi}\vec{e}_2'$*. Allora* $\vec{L}_O = I'_{O,12}\dot{\varphi}\vec{e}_1' + I'_{O,22}\dot{\varphi}\vec{e}_2'$*.*

I.4 Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con ascissa curvilinea s.
Consideriamo il moto

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t)) \,, \qquad t \in \boldsymbol{R} \,,$$

vincolato alla curva.
Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva, assumendo che la curvatura $k(s)$ sia strettamente positiva.
10 Se $\boldsymbol{v}(\bar{t}) = 0$ allora l'accelerazione $\boldsymbol{a}(\bar{t})$ soddisfa
a $\boldsymbol{a}(\bar{t})$ è parallela a $\boldsymbol{B}(s(\bar{t}))$.
b $\boldsymbol{a}(\bar{t})$ è parallela a $\boldsymbol{T}(s(\bar{t}))$.
c Nessuna delle precedenti.
11 Se la curva è piana, allora
a $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) = 0$ per ogni t.
b $\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{v}(t) = 0$ per ogni t.
c Nessuna delle precedenti.
12 Se si ha

$$s(t_1) = s(t_2) \,,$$

per due istanti $t_1 < t_2$ allora
a $\boldsymbol{a}(t_1)$ e $\boldsymbol{a}(t_2)$ sono parallele.
b $\boldsymbol{v}(t_1)$ e $\boldsymbol{v}(t_2)$ sono parallele.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Infatti

$$\boldsymbol{a}(\bar{t}) = \ddot{s}(\bar{t})\boldsymbol{T}(s(\bar{t})) + \dot{s}(\bar{t})^2 k(s(\bar{t}))\boldsymbol{N}(s(\bar{t})) = \ddot{s}(\bar{t})\boldsymbol{T}(s(\bar{t})) \,.$$

II: c
a e b sono ingiustificate.
III: b
Infatti $\boldsymbol{v}(t_1)$ e $\boldsymbol{v}(t_2)$ sono parallele a $\boldsymbol{T}(s(t_1)) = \boldsymbol{T}(s(t_2))$.

I.5 Si consideri un moto unidimensionale di equazione

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$.
13 Quale delle seguenti curve può essere un'orbita nel piano delle fasi (x, p)?
a

$$\frac{x^2}{4} + p^2 = 1\,.$$

b

$$(x-1)^2 + (p-1)^2 = 4\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
14 Se il moto $x(t)$ è definito per ogni $t \in (-\infty, +\infty)$ e non è di quiete, allora
a L'orbita corrispondente nel piano delle fasi è illimitata.
b Devono esistere punti di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.
15 Sia $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$. Allora
a Esiste almeno un punto di equilibrio stabile.
b Esiste almeno un punto di equilibrio instabile.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
b non è simmetrica rispetto all'asse x.
II: c
L'orbita può essere una curva chiusa, quindi a non vale. Inoltre non vale neanche b, perché se $f(x) = 1$ per ogni x, tutti i moti sono definiti su $\boldsymbol{R}$, ma non esistono punti di equilibrio.
III: a
Infatti $x = 0$ è un punto di massimo isolato per il potenziale:

$$U'(0) = f(0) = 0\,, \qquad U''(0) = f'(0) < 0\,.$$

I.6 Un corpo rigido è stato ottenuto saldando un elemento di massa M nel punto A di un disco omogeno di massa M e raggio R. Il punto A dista $r < R$ dal centro geometrico C del disco. Considerato il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ con asse 2 verticale ascendente, il corpo è vincolato a muoversi nel piano 1–2 in modo che A e C scorrano, rispettivamente, sugli assi 1 e 2 di detto riferimento.
16 È possibile determinare moti tali che in ogni istante il trinomio invariante dell'atto di moto sia diverso da zero?

a No.
b Sì, scegliendo opportunamente r.
c Nessuna delle precedenti.

17 Supponendo che il corpo non sia a riposo, quanto vale l'energia cinetica del moto del corpo rispetto al riferimento del centro di massa?
a $\frac{1}{2}J\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e J il momento d'inerzia relativo all'asse passante per A e ortogonale alla lamina.
b $\frac{1}{2}I\|\vec{\omega}\|^2$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo e I il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro di massa del corpo e ortogonale al corpo stesso.
c Nessuna delle precedenti.

18 Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
a È possibile scegliere r in modo che la centroide mobile (rulletta) sia un'ellisse con assi l'uno il doppio dell'altro.
b La centroide mobile (rulletta) è una circonferenza.
c Nessuna delle precedenti.

Soluzione
I: a
Essendo il moto piano, l'atto di moto è necessariamente traslatorio oppure rotatorio, pertanto il trinomio invariante è sempre uguale a zero.
II: b
Il moto relativo al centro di massa è rotatorio con asse ortogonale al corpo e passante per il centro di massa.
III: b
Dal punto di vista cinematico il sistema si comporta come un ellissografo e la rulletta è una circonferenza dello spazio solidale di raggio $r/2$ e centro il punto medio del segmento $\overline{AC}$.

Prova scritta del 06/09/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 06/09/2022

I.1 Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conservative; si assume l'ipotesi dei lavori virtuali. Indichiamo con U^{L} il potenziale lagrangiano. Si assume che $\ell = 3$ e che $\boldsymbol{q} = 0$ sia una posizione di equilibrio.

01 Si sa che

$$D^2U^{\text{L}}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

a Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ è stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ non è stabile.
c Nessuna delle precedenti.

02 Si sa che

$$D^2U^{\text{L}}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

a Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ è stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b Non ci sono informazioni sufficienti neppure per dire se $\boldsymbol{q} = 0$ sia stabile.
c Nessuna delle precedenti.

03 Si ha

$$U^{\text{L}}(q_1, q_2, q_3) = -q_1^2 - q_2^4 - q_3^4 - q_1^4 q_2^8 q_3 \,, \qquad (q_1, q_2, q_3) \in \boldsymbol{R}^3 \,.$$

a Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ non è stabile.
b Il punto $\boldsymbol{q} = 0$ è stabile, ma non vi possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE
I: c
Infatti $\boldsymbol{q} = 0$ è stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
II: c
Infatti l'hessiana ha autovalori -5, 0, 1 e quindi $\boldsymbol{q} = 0$ è un punto di sella. Perciò l'equilibrio non è stabile.
III: b
Infatti $\boldsymbol{q} = 0$ è di massimo isolato, ma l'hessiana non è ivi definita negativa.

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato al paraboloide

$$x_3 = a x_1 x_2 \,,$$

con vincolo liscio. Si usino come coordinate lagrangiane le coordinate $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ della parametrizzazione

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}(x, y) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + axy\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Sul punto agisce la forza $\boldsymbol{F}$, che viene specificata sotto nei vari casi.
Le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} m(1 + a^2y^2)\ddot{x} + 2ma^2y\dot{x}\dot{y} + ma^2xy\ddot{y} &= Q_x \,, \\ ma^2xy\ddot{x} + 2ma^2x\dot{x}\dot{y} + m(1 + a^2x^2)\ddot{y} &= Q_y \,. \end{aligned}$$

04 Supponiamo che $\boldsymbol{F} = 0$ (cioè le forze direttamente applicate sono nulle). Allora:
a Possono esistere moti non di quiete con $x \neq 0$ costante.
b Tutti i moti sono limitati.
c Nessuna delle precedenti.
05 Supponiamo che $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{X}$, con $k > 0$ costante. Allora:
a Non esistono moti con x costante.
b Tutti i moti sono limitati.
c Nessuna delle precedenti.
06 Supponiamo che $\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{e}_1$, con $k > 0$ costante. Allora:
a Non esistono moti con y costante.
b Tutti i moti sono limitati.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
In questo caso $Q_x = Q_y = 0$. Se $x(t) = x_0$ per ogni t, la I e la II equazione sono soddisfatte dalla scelta $y(t) = \dot{y}_0 t + y_0$.
Quindi b non vale.
II: b
Per la conservazione dell'energia, dato che $U^{\text{L}} = -k(x^2 + y^2 + a^2x^2y^2)/2$, si ha

$$\frac{k}{2}(x^2 + y^2 + a^2x^2y^2) \leq T^{\text{L}} - U^{\text{L}} = E < +\infty\,.$$

In questo caso $Q_x = -kx(1+a^2y^2)$, $Q_y = -ky(1+a^2x^2)$. Quindi a non vale perché esiste il moto $(0, y(t))$ con y soluzione di

$$m\ddot{y} = -ky\,.$$

III: c
In questo caso $Q_x = k$, $Q_y = 0$. Perciò per $y(t) = y_0$ le equazioni si riducono a

$$m(1 + a^2y_0^2)\ddot{x} = k\,, \qquad ma^2xy_0\ddot{x} = 0\,,$$

che per $y_0 = 0$ hanno soluzione. Quindi a non vale; lo stesso argomento mostra che b non vale.

I.3 Un corpo rigido piano omogeneo di massa M ha la forma di un triangolo rettangolo con cateti di lunghezza L e $2L$. Il riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i'\}$ ha origine nel vertice dell'angolo retto e asse 3 perpendicolare alla lamina; inoltre, il cateto di lunghezza minore giace sul semiasse positivo 1 e quello di lunghezza maggiore sul semiasse positivo 2.
07 Quanto vale il prodotto d'inerzia relativo agli assi 1 e 2?
a $-\frac{1}{6}ML^2$
b $\frac{1}{6}ML^2$
c Nessuna delle precedenti.
08 Il corpo viene mantenuto in rotazione uniforme con velocità angolare costante di modulo λ attorno a un asse fisso coincidente con l'asse 1 solidale.

La rotazione è antioraria rispetto allo stesso asse. Quanto vale il momento angolare calcolato usando come polo di riduzione O?
a $\frac{2}{3}ML^2\lambda\vec{e}_1' - \frac{1}{6}ML^2\lambda\vec{e}_2'$
b $\frac{1}{6}ML^2\lambda\vec{e}_1'$
c Nessuna delle precedenti.
09 Il corpo viene mantenuto in rotazione uniforme con velocità angolare costante di modulo λ attorno a un asse fisso coincidente con l'asse 2 solidale. Quanto vale l'energia cinetica?
a $\frac{1}{12}ML^2\lambda^2$
b $\frac{2}{7}ML^2\lambda^2$
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
L'area vale L^2, la densità M/L^2, quindi

$$I'_{O,12} = -\int_0^L \mathrm{d}x'_1 \int_0^{2L-2x'_1} \mathrm{d}x'_2 \frac{M}{L^2} x'_1 x'_2 = -\int_0^L \mathrm{d}x'_1 \frac{M}{L^2} x'_1 \frac{1}{2}\Big(2L - 2x'_1\Big)^2 = -\frac{1}{6}ML^2.$$

II: a
La velocità angolare vale $\lambda\vec{e}_1'$. Dal momento che l'asse 3 è principale, si ha

$$L'_O = \begin{pmatrix} I'_{O,11} & I'_{O,12} & 0 \\ I'_{O,21} & I'_{O,22} & I'_{O,23} \\ 0 & I'_{O,32} & I'_{O,33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I'_{O,11} \\ \lambda I'_{O,12} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resta quindi da calcolare

$$I'_{O,11} = \int_0^L \mathrm{d}x'_1 \int_0^{2L-2x'_1} \mathrm{d}x'_2 \frac{M}{L^2}(x'_2)^2 = \int_0^L \mathrm{d}x'_1 \frac{M}{L^2}\frac{1}{3}\Big(2L - 2x'_1\Big)^3 = \frac{2}{3}ML^2.$$

III: a
Essendo il moto rotatorio $T = I'_{O,22}\lambda^2/2$. Resta quindi da calcolare

$$I'_{O,22} = \int_0^L \mathrm{d}x'_1 \int_0^{2L-2x'_1} \mathrm{d}x'_2 \frac{M}{L^2}(x'_1)^2 = \int_0^L \mathrm{d}x'_1 \frac{M}{L^2}(x'_1)^2\Big(2L - 2x'_1\Big) = \frac{1}{6}ML^2.$$

I.4 Si consideri un moto unidimensionale di equazione

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$.
10 Quale delle seguenti curve può essere un'orbita nel piano delle fasi (x, p)?
a

$$x^2 + p^2 = 4\,, \qquad p > 1\,.$$

b

$$x^2 + p^2 = 4\,, \qquad p > 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

11 Se il moto (massimale) $x(t)$ è definito solo per $t < 1$, allora

a Per $t \to 1-$ l'orbita deve tendere a un punto di equilibrio.

b Per $t \to 1-$ l'orbita deve diventare illimitata.

c Nessuna delle precedenti.

12 Sia $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ $x \notin \{0,1\}$. Allora

a Esiste almeno un punto di equilibrio stabile.

b Non esistono punti di equilibrio stabile.

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: b

Se un'orbita non contiene i suoi estremi, questi devono corrispondere a punti di equilibrio (quindi appartenere a $p = 0$).

II: b

Infatti il caso in a è impossibile, e quello in b segue dai teoremi sulle soluzioni massimali.

III: b

Infatti gli unici punti di equilibrio 0, 1 *sono di sella per il potenziale che è strettamente crescente su $\boldsymbol{R}$.*

I.5 Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con ascissa curvilinea s.
Consideriamo il moto

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,,$$

vincolato alla curva.
Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva, assumendo che la curvatura $k(s)$ sia strettamente positiva.

13 Se $\boldsymbol{a}(\bar{t}) = 0$ allora la velocità $\boldsymbol{v}(\bar{t})$:

a Può essere qualunque vettore parallelo a $\boldsymbol{T}(s(\bar{t}))$.

b È univocamente determinata.

c Nessuna delle precedenti.

14 Si consideri la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ della terna $(\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$ e si assuma $\ddot{s}(t) > 0$ per ogni t. Allora:

a $\boldsymbol{\omega}$ può mantenere direzione costante.

b $\boldsymbol{\omega}(t)$ si annulla almeno per un t.

c Nessuna delle precedenti.

15 Supponiamo che valga $\dot{s}(t) \neq 0$ per ogni $t \in \boldsymbol{R}$, e che la curva non sia chiusa, cosicché il moto non possa risultare periodico. Allora:

a Il moto è illimitato.

b Può accadere che $\boldsymbol{v}(t_1) = \boldsymbol{v}(t_2)$ per due istanti $t_1 \neq t_2$.

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: b
Infatti

$$\boldsymbol{a}(\bar{t}) = \ddot{s}(\bar{t})\boldsymbol{T}(s(\bar{t})) + \dot{s}(\bar{t})^2 k(s(\bar{t}))\boldsymbol{N}(s(\bar{t})) = 0$$

implica $\boldsymbol{v}(\bar{t}) = \dot{s}(\bar{t})\boldsymbol{T}(s(\bar{t})) = 0$.
II: a
Per esempio se la curva è piana, $\boldsymbol{\omega}$ *è diretta come* $\boldsymbol{B}$ *che ha direzione normale al piano.*
b non è vero perché per esempio se $s(t) = ae^{bt}$ *con* $a,\ b > 0$ *vale* $\ddot{s}(t) > 0$ *ma* $\dot{s}(t) > 0$ *per ogni* t*, quindi* $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$.
III: b
Infatti se $\boldsymbol{T}(s(t_1)) = \boldsymbol{T}(s(t_2))$ *basta supporre* $\dot{s}(t_1) = \dot{s}(t_2)$*. Questo può per esempio accadere sull'elica, ove* $\boldsymbol{T}$ *è periodico.*
a non vale, perché se per esempio $s(t) = a\,\mathrm{arctg}(bt)$*,* $a,\ b > 0$*, il moto percorre distanza finita sulla curva.*

I.6 Un corpo rigido di massa M è vincolato mediante una cerniera cilindrica perfetta ed il peso è l'unica sollecitazione attiva. Si indica con $\{O, \vec{e}_i\}$ un riferimento fisso con asse 2 verticale ascendente, ove O è un punto dell'asse della cerniera.

16
Cosa si può dire della somma della sollecitazione vincolare?
a è nulla qalunque sia lo stato di moto del sistema;
b è uguale a $Mg\vec{e}_2 + \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$, ove $\vec{P}$ è la quantità di moto totale;
c Nessuna delle precedenti.

17 Cosa si può dire del momento totale $\vec{M}_O^{\mathrm{v}}$ della sollecitazione vincolare?
a ha componente 2 nulla qualunque sia lo stato di moto del sistema e comunque sia orientato l'asse della cerniera;
b ha la componente lungo l'asse della cerniera nulla comunque sia orientato l'asse della cerniera e qualunque sia lo stato di moto del sistema;
c Nessuna delle precedenti.

18 Cosa si può dire delle configurazioni di equilibrio se l'asse della cerniera coincide con l'asse 2?
a tutte le configurazioni sono di equilibrio;
b esistono solo due configurazioni di equilibrio;
c Nessuna delle precedenti.

Soluzione
I: b
Segue immediatamente dalla prima equazione cardinale.
II: b
Segue dall'ipotesi di vincolo perfetto.
III: a
Segue dalle fatto che l'asse della cerniera è verticale.

Prova scritta del 19/10/2021

MECCANICA RAZIONALE

ING. MECCANICA

Prova scritta del 19/10/2021

I.1 Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1 \sin(\beta t) + x_2 \cos(\beta t) = 0\,,$$

ove $\beta > 0$ è costante. Inoltre il centro G di AB deve avere quota $x_{3G} = 0$. Sull'asta agisce la forza (applicata in B)

$$\boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{X}_B\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(r, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che se

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

allora

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_3)\,, \quad \boldsymbol{X}_G = r\boldsymbol{u}_1\,.$$

Sotto $\boldsymbol{X}_O$ denota l'origine del sistema di riferimento fisso, che ha coordinate (x_h).
01 Nel sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ le forze apparenti sono conservative nel senso lagrangiano e quindi esiste il loro potenziale lagrangiano U^{L}_{app}.
a Sì, e il potenziale è dato da

$$U^{\text{L}}_{app}(r, \varphi) = \frac{m}{2}\beta^2 r^2\,.$$

b Sì, ma il potenziale non è quello dato nella risposta precedente.
c Nessuna delle precedenti.
02 Nel sistema fisso di riferimento le forze direttamente applicate ammettono potenziale lagrangiano.
a Sì ed esso può essere preso uguale a

$$U^{\text{L}}_{da} = -\frac{k}{2}r^2\,.$$

b Sì ed esso può essere preso uguale a

$$U^{\text{L}}_{da} = -\frac{k}{2}rL\sin\varphi\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

03 Dire quali delle seguenti espressioni dà l'energia cinetica dell'asta nel sistema fisso di riferimento. Qui I è il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse ad essa ortogonale nel suo centro.

a

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2} r^2 \beta^2 + \frac{I}{2}(\dot{\varphi}^2 + \beta^2 (\sin\varphi)^2)\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\beta^2) + \frac{I}{2}\beta^2(\cos\varphi)^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

Soluzione

I: b

È noto dalla teoria che la forza di Coriolis in questo caso ha componenti lagrangiane nulle. La forza di trascinamento ha distribuzione sull'asta

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{tr} = \frac{m\beta^2}{2L}\lambda_1 \boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}s\,,\ \textit{con potenziale}\ \mathrm{d}U_{tr} = \frac{m\beta^2}{4L}\lambda_1^2\,\mathrm{d}s\,,$$

che conduce al potenziale

$$U_{tr}^{\text{L}} = \int\limits_{AB} \mathrm{d}U_{tr} = \int\limits_{-L}^{L} \frac{m\beta^2}{4L}(r + s\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}s = \frac{m\beta^2}{2}(r^2 + \frac{L^2}{3}(\cos\varphi)^2)$$

che non è il valore dato sopra.

II: c

Si ha

$$U_{da}(\boldsymbol{x}_B) = -\frac{k}{2}(x_{1B}^2 + x_{2B}^2 + x_{3B}^2)\,,$$

per cui

$$U_{da}^{\text{L}} = -\frac{k}{2}[(r + L\cos\varphi)^2 + (L\sin\varphi)^2] = -\frac{k}{2}[r^2 + 2rL\cos\varphi + L^2]\,.$$

III: c

Usiamo il teorema di König. La velocità di G è

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_G}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\boldsymbol{u}_1 + r\dot{\boldsymbol{u}}_1 = \dot{r}\boldsymbol{u}_1 + r\beta\boldsymbol{u}_2\,.$$

Il termine di energia cinetica relativa al centro di massa richiede di calcolare la velocità angolare della terna solidale all'asta $\mathcal{N}$ data da

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2L}\,,\quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_2\,,\quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2\,.$$

Se $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, si ha

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \beta\boldsymbol{u}_3 - \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2 = \beta(\sin\varphi\boldsymbol{w}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{w}_3) - \dot{\varphi}\boldsymbol{w}_2\,.$$

Poiché rispetto a $\mathcal{N}$ la matrice d'inerzia in G è $\mathrm{diag}(0, I, I)$, segue

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\beta^2) + \frac{I}{2}(\dot{\varphi}^2 + \beta^2(\cos\varphi)^2)\,.$$

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato all'elica cilindrica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove R, $h > 0$ e $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$ sono costanti; qui s è l'ascissa curvilinea. Il vincolo è scabro.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata

$$\boldsymbol{F} = \gamma x_3 \boldsymbol{T} + \delta \boldsymbol{B}\,,$$

con γ, $\delta > 0$ costanti. Qui (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca dell'elica, che viene riportata per comodità:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= -\alpha R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + \alpha R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{N}(s) &= -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{B}(s) &= \alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R\boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e la curvatura $k(s) = R\alpha^2$.
04 Si supponga $\dot{s} > 0$ e che la reazione vincolare soddisfi

$$|\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}}| = \mu|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Allora l'equazione di moto è:
a

$$m\ddot{s} = \delta - \mu\,\text{sign}(\dot{s})\sqrt{\dot{s}^4 m^2 k^2 + \delta^2}\,.$$

b

$$m\ddot{s} = \gamma h\alpha s - \mu\sqrt{\dot{s}^4 m^2 k^2 + \delta^2}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
05 Si supponga che $s(0) = 1/\alpha$, $\dot{s}(0) = 0$, e che la reazione vincolare soddisfi all'equilibrio

$$|\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}}| \le \mu_s|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|\,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Allora il punto materiale resta in equilibrio.
a Sì, se $R \ge R_0$ con $R_0 > 0$ opportuno.
b Sì, se $\delta \ge \delta_0$ con $\delta_0 > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
06 Si supponga che $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0 < 0$, e che la reazione vincolare soddisfi, se $\dot{s} \neq 0$,

$$|\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}}| = \mu|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|\,,$$

con $\mu > 0$ costante. Dire quale delle seguenti proprietà soddisfa $s(t)$.
a Vale $\ddot{s}(t) > 0$ per $t \in (0, \bar{t})$, con $\bar{t} > 0$ opportuno.
b Il moto è indipendente dal valore di μ.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione

I: b
Il sistema di moto dà

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \gamma R\alpha s - \mu\,\mathrm{sign}(\dot{s})|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,, \\ m\dot{s}^2 k &= \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{N}\,, \\ 0 &= \delta + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}\cdot\boldsymbol{B}\,, \end{aligned}$$

da cui subito la b.
II: b
La componente tangente della forza direttamente applicata è $|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}| = \gamma h$*. Questa, perché si abbia equilibrio, non deve superare il massimo della componente tangente della reazione vincolare; la reazione all'equilibrio è data da*

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = -\boldsymbol{F}\,, \quad \textit{per cui} \quad \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}} = -\delta\boldsymbol{B}\,.$$

Perciò la condizione è

$$\mu_s|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| = \mu_s\delta \geq \gamma h\,.$$

III: a
Infatti dalla prima equazione di moto

$$m\ddot{s} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T} + \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \geq \gamma h\alpha s + \mu\delta\,,$$

che implica

$$m\ddot{s}(0) \geq \mu\delta > 0\,.$$

Inoltre sottraendo le equazioni di moto corrispondenti a due μ *diversi si vede che la b è impossibile.*

I.3 Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, con il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Sull'asta agisce la forza, applicata nell'estremo B

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{e}_3 - k\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui α, $k > 0$ sono costanti.
Si usi la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{L}} = L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,$$

$\varphi \in (-\pi, \pi)$.
07 Si può definire un potenziale lagrangiano $U^{\mathrm{L}} \in C^2((-\pi,\pi))$?
a Sì, e vale la conservazione dell'energia.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
08 Esiste almeno una posizione di equilibrio?
a Sì.
b Questo dipende dalla scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
09 Possono esistere infinite posizioni di equilibrio?

a Sì se α è sufficientemente piccolo in dipendenza degli altri parametri.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Il potenziale lagrangiano esiste sempre; la forza è posizionale quindi si ha $Q_\varphi = Q_\varphi(\varphi)$ *e*

$$U^{\text{L}}(\varphi) = \int_0^\varphi Q_\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,;$$

si noti che la forza non è conservativa.
II: b
Si ha

$$\boldsymbol{F}_B^{\text{L}} = 2L\alpha(\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 - \cos\varphi\boldsymbol{e}_2) - k\boldsymbol{e}_2\,,$$

cosicché

$$Q_\varphi = \boldsymbol{F}_B^{\text{L}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_B^{\text{L}}}{\partial\varphi} = -2L^2\alpha - kL\cos\varphi\,.$$

Quindi le posizioni di equilibrio φ_0 *sono date da*

$$\cos\varphi_0 = -\frac{2L\alpha}{k}\,.$$

Quindi si ha equilibrio solo se $k \geq 2L\alpha$.
III: b
Come si è visto sopra, esistono al massimo 2 *punti di equilibrio.*

I.4 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, e il piano delle fasi (x, p).
10 Se la curva (non chiusa, si noti)

$$\{(x,p) \mid x^2 + p^2 = L^2\,, x < L\}\,,$$

con $L > 0$ è un'orbita, quale conclusione si può trarre?
a Il punto $x = L$ non è di equilibrio.
b Il moto non è periodico.
c Nessuna delle precedenti.
11 Se un'orbita $p = p(x)$, $x \in J$, ove J è l'intervallo aperto di definizione della funzione $p(x)$, soddisfa $p(x) > 0$ per ogni $x \in J$, allora $p(x) > p_0 > 0$ per ogni $x \in J$, per un $p_0 > 0$ opportuno.
a Non può succedere.
b Può succedere o no.
c Nessuna delle precedenti.
12 Se il potenziale U soddisfa $U(x) \to -\infty$ per $x \to \pm\infty$, allora esiste almeno un punto di equilibrio stabile.

a Sì, sotto l'ulteriore ipotesi che esista esattamente un punto di equilibrio.
b Sicuramente non ne esistono.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Se il punto (L,0) non appartiene all'orbita, vuol dire che il moto tende a esso in un tempo infinito e il punto è di equilibrio, secondo un noto risultato teorico.
II: b
Per esempio consideriamo le orbite che connettono due punti di equilibrio instabile, come nel piano delle fasi di $m\ddot{x} = -k \sin x$*, o quelle corrispondenti a grandi energie nello stesso piano delle fasi.*
III: a
Sicuramente esiste un punto di massimo assoluto, e se esiste un solo equilibrio allora è isolato, quindi è di equilibrio stabile.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a muoversi sulla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea; si assuma che $\boldsymbol{\psi}$ abbia curvatura $k > 0$.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.
13 Dire in quale caso, se il vincolo è liscio, l'energia cinetica si conserva.
a Se la curva è piana.
b Se la forza $\boldsymbol{F}$ è ortogonale al vettore normale principale $\boldsymbol{N}$.
c Nessuna delle precedenti.
14 Se il vincolo è liscio, la forza $\boldsymbol{F}$ è conservativa, allora l'energia meccanica si conserva.
a Sì sempre.
b No, in generale.
c Nessuna delle precedenti.
15 Il vincolo sia scabro, con

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante. Si assuma sempre $\dot{s} < 0$, e anche che $\boldsymbol{F}$ sia conservativa.
a La conservazione dell'energia vale se $|\mathbf{f}_{\text{vin}}| = 0$.
b La conservazione dell'energia vale se la torsione della curva è una costante.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Infatti in genere nelle condizioni indicate

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\text{vin}}) \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{F} + \mathbf{f}_{\text{vin}}) \cdot \dot{s}\boldsymbol{T} = \dot{s}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} \neq 0 \,.$$

II: a
Infatti la reazione vincolare fa lavoro nullo.
III: a
Infatti se $\mathbf{f}_{\text{vin}} = 0$ *si ha come noto per l'energia meccanica* $\mathcal{E}$

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \,.$$

Questo per esempio è il caso se $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\psi}$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio R, e il moto è circolare uniforme con velocità data da $\dot{s}^2 = kR^2/m$.

I.6 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare intorno al polo O.

16 Se $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) \neq 0$ per ogni t, e non mantiene direzione costante, il moto può essere una rotazione intorno a un asse principale d'inerzia in O.

a Sì, se C ha ellissoide d'inerzia con due soli assi uguali.

b Sì, se C ha ellissoide d'inerzia sferico.

c Nessuna delle precedenti.

17 Se $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) \neq 0$ per ogni t è costante nel sistema fisso, il moto può essere una rotazione uniforme non nulla intorno a un asse non principale d'inerzia in O con $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ parallelo a tale asse.

a No.

b Sì se l'ellissoide d'inerzia è sferico.

c Nessuna delle precedenti.

18 Sia $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) = 0$ per ogni t. Dire quale delle seguenti quantità si conserva sempre.

a Il versore di $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$.

b Il versore di $\boldsymbol{\omega}$.

c Nessuna delle precedenti.

Soluzione

I: c

Si sa che nelle ipotesi fatte $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ è parallelo all'asse di rotazione, che ha direzione costante.

II: a

Si sa che nelle ipotesi fatte $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ ha componenti normali all'asse di rotazione.

III: a

Si conosce infatti l'integrale primo $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{L}_O(t) = \boldsymbol{L}_O(0)$.

Prova scritta del 26/01/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 26/01/2022

I.1 Un cilindro di massa m, altezza H e raggio R è vincolato a muoversi di moto polare con polo nel centro A di una delle due basi, che coincide con l'origine del sistema di riferimento fisso.

Nel centro B dell'altra base è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha x_3 \boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale al cilindro e ortogonale a $\overrightarrow{AB}$; $\alpha > 0$ è una costante e (x_h) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso.
All'istante $t = 0$ il cilindro parte da fermo nella posizione tale che $\overrightarrow{AB}(0) = H\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{e}_2$.
01 L'energia cinetica del cilindro soddisfa:
a L'energia cinetica si mantiene costante durante il moto.
b L'energia cinetica si mantiene decrescente durante il moto.
c Nessuna delle precedenti.
02 Il moto del cilindro è:
a Tale che $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ si mantiene costante.
b Una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.
03 Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
a Non esiste il potenziale della forza $\boldsymbol{F}_B$ nella forma $U \in C^2(E)$ per nessun aperto non vuoto $E \subset \boldsymbol{R}^3$.
b Esiste il potenziale U della forza $\boldsymbol{F}_B$ come $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Se la base del sistema di riferimento solidale $\mathcal{S} = (A, (\boldsymbol{u}_h))$ *è*

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = H^{-1}\overrightarrow{AB}\,,$$

cosicché $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$*, si hanno le equazioni di Eulero*

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - \alpha H x_3\,,\\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3\,,\\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Quindi $\omega_2(t) = \omega_3(t) = 0$ *per ogni* t*. Quindi il moto è una rotazione intorno all'asse* $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1$*, ma non uniforme perché se* $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_1$ *allora*

$$I_{11}\ddot{\varphi} = -\alpha H^2 \sin\varphi\,.$$

II: c
La a e la b non sono possibili perché $T(0) = 0$*, e il cilindro non resta fermo per il ragionamento del punto precedente.*
III: b
Infatti la forza non è posizionale.

I.2 Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(\varphi) = Re^{\varphi}(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2)\,, \quad \varphi \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove $R > 0$ è costante. Si assuma come noto che la curvatura k non si annulla. Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{T}\,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante e $\boldsymbol{T}$ denota il versore tangente alla curva nella posizione $\boldsymbol{X}$, ossia

$$\boldsymbol{T}(s(\varphi)) = \frac{\boldsymbol{\Psi}'(\varphi)}{|\boldsymbol{\Psi}'(\varphi)|}\,, \quad {}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,.$$

04 Il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

e sia $\boldsymbol{v} \neq 0$.
Si assumano prescritte le condizioni iniziali e quindi determinato univocamente il moto $\boldsymbol{X}$.
a Esistono sia moti per cui la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(t)$ si annulla per qualche t, sia moti per cui non lo fa.
b La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(t)$ si annulla sempre per qualche t.
c Nessuna delle precedenti.
05 Il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu_s |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Allora:
a Non esistono posizioni di equilibrio.
b Esistono infinite posizioni di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.
06 Il vincolo sia liscio. Allora l'equazione di moto è:
a $m\ddot{\varphi} = \alpha$.
b $m\sqrt{2}Re^{\varphi}(\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}) = \alpha$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Infatti l'equazione di moto è $m\ddot{s} = \alpha$. *Inoltre*

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = |\boldsymbol{\Psi}'(\varphi)| = \sqrt{2R^2e^{2\varphi}} = \sqrt{2}Re^{\varphi}\,.$$

Quindi

$$\dot{s} = \sqrt{2}Re^{\varphi}\dot{\varphi}\,, \qquad \ddot{s} = \sqrt{2}Re^{\varphi}(\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi})\,.$$

II: c
Si sa che $k \neq 0$; *comunque dai calcoli si ha*

$$k(s(\varphi)) = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}(s(\varphi))\right| = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\boldsymbol{T}(s(\varphi))\right| \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi)\right|^{-1} \neq 0\,,$$

quindi

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N} = mk\dot{s}^2 \neq 0\,.$$

III: b
Infatti all'equilibrio si deve avere

$$\alpha = |\boldsymbol{F}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu_s |\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}| = 0\,,$$

impossibile.

I.3 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m)$ e $(\boldsymbol{X}_2, m)$ entrambi di uguale massa m sono vincolati come segue:

- $\boldsymbol{X}_1$ è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,;$$

- $\boldsymbol{X}_2$ è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

  e ad appartenere allo stesso piano che contiene $\boldsymbol{X}_1$ e l'asse x_3.

Sui due punti agiscono le forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}_1} = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) = -\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}_2}\,.$$

Qui k, $R > 0$ sono costanti.
07 Supponiamo che i due punti partano da fermi, con $\boldsymbol{X}_1(0) = R\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{X}_2(0) = R\boldsymbol{e}_3$. Allora:
a Vale $\boldsymbol{X}_2(t) = \boldsymbol{X}_2(0)$ per ogni t.
b L'energia cinetica $T(t)$ soddisfa $T(t) \leq kR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Dire quale delle seguenti è una parametrizzazione lagrangiana corretta del sistema.
a

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,,$$

$(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0, \pi)$.
b

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{R^2 - y_1^2 - y_2^2}\boldsymbol{e}_3\,,$$

$(y_1, y_2) \in \{y_1^2 + y_2^2 < R^2\}$.
c Nessuna delle precedenti.
09 L'energia cinetica in forma lagrangiana del sistema (nelle coordinate lagrangiane denotate da $(q_1, q_2) \in Q$):
a Può assumere ogni valore reale, su opportuni moti lagrangiani.
b Dipende esplicitamente dal tempo t.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
La a non copre tutto il vincolo, perché $\boldsymbol{X}_2$ appartiene allo stesso meridiano di $\boldsymbol{X}_1$,

mentre potrebbe appartenere anche a quello opposto; tuttavia la parametrizzazione resta corretta. La b non soddisfa il vincolo su $\boldsymbol{X}_1$.
II: c
I vincoli sono fissi, quindi T^{L} *non può dipendere esplicitamente da* t. *Tuttavia è non negativa.*
III: a
Infatti la conservazione dell'energia dà

$$T(t) + \frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^2 = \frac{k}{2}(\sqrt{2}R)^2 = kR^2\,.$$

Inoltre $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}_2}$ *ha all'istante* $t = 0$ *componente tangente ai vincoli non nulla.*

I.4 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia rispetto al polo O (sulla cui posizione non si fanno ipotesi).
10 Se $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ si mantiene costante durante il moto, allora anche $\boldsymbol{\omega}(t)$ è costante.
a Non è vero in generale.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
11 Tutti i moti per cui la direzione di $\boldsymbol{\omega}(t)$ si mantiene costante (si assuma $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per ogni t) sono periodici.
a È sempre vero.
b È vero solo se l'ellissoide d'inerzia in O è sferico.
c Nessuna delle precedenti.
12 Se il corpo è un cilindro (solido) circolare retto omogeneo allora tutti i moti sono periodici.
a Può accadere, ma in genere non è vero.
b È sempre vero.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
Se O *è a distanza* $d > 0$ *dall'asse del cilindro, sul piano ortogonale all'asse cui appartiene il centro di massa, i momenti d'inerzia in* O *si trovano con il teorema di Huygens e si vede che sono in genere tutti e* 3 *diversi tra di loro. Quindi esistono moti per inerzia non periodici.*
II: b
Se l'ellissoide d'inerzia in O *ha simmetria di rotazione, non è vero per tutti i moti che non sono rotazioni, quindi vale b.*
III: b
Si sa dalla teoria che le sole rotazioni sono quelle intorno agli assi principali e sono uniformi.

I.5 Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.
13 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:
a Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
b Esistono infinite terne principali d'inerzia.
c Nessuna delle precedenti.
14 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:
a Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
b Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
c Nessuna delle precedenti.
15 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)]\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$

Allora:
a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
b Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Per il teorema di Huygens, se I' denota il momento rispetto all'asse passante per G e parallelo a quello dato, e d la distanza tra i due assi,

$$I' = I - md^2 < I\,.$$

Tuttavia possono esistere infiniti altri assi con lo stesso momento I'.
II: a
Questo è il caso in cui $(\boldsymbol{u}_h)$ è principale e $I^O_{11} = I^O_{22}$. D'altra parte se il moto è di rotazione, l'asse di rotazione è solidale.
III: a
Per l'ipotesi che $\boldsymbol{w}$ sia principale

$$I^O_{\boldsymbol{ww}}\frac{\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}} = I^O_{\boldsymbol{ww}}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\sigma}^O\boldsymbol{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\sigma}^O(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2) = \frac{I^O_{11}}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_1 + \frac{I^O_{22}}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_2\,,$$

da cui $I^O_{11} = I^O_{\boldsymbol{ww}} = I^O_{22}$ e tutti i versori del piano $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$ sono principali in O.

I.6 Dire quali dei seguenti vincoli per due punti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{u}_1 + z_2\boldsymbol{u}_2 + z_3\boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{u}_1 + z_5\boldsymbol{u}_2 + z_6\boldsymbol{u}_3\,,$$

sono olonomi regolari nell'aperto $A \subset \boldsymbol{R}^6$ indicato.
16 Qui $A = \{z_3 > 0, z_6 > 0\}$.
a

$$(z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 - R^2 = 0\,, \quad z_1^2 + z_4^2 = 0\,.$$

b

$$z_3 - \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = 0\,, \quad z_6 - \sqrt{z_4^2 + z_5^2} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
17 Qui $A = \boldsymbol{R}^6$.
a

$$z_1 - |z_2 - z_3| = 0\,, \quad z_4 = 0\,.$$

b

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 4(z_4^2 + z_5^2 + z_6^2) = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
18 Qui $A = \boldsymbol{R}^6$.
a

$$z_1 - 2z_4 = 0\,, \quad \sin(2z_1) - \sin(4z_4) = 0\,.$$

b

$$z_1 - 2z_4 = 0\,, \quad z_2 - 2z_5 = 0\,, \quad z_3 - 2z_6 = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
Nel caso b il gradiente del secondo vincolo si annulla se $z_1 = z_4 = 0$. Nel caso a invece i due gradienti sono sempre linearmente indipendenti.
II: a
In b, nelle configurazioni compatibili il gradiente del secondo vincolo è multiplo del primo. Nel caso a invece i tre gradienti sono sempre linearmente indipendenti.
III: c
Nel caso a il primo vincolo non è derivabile se $z_2 = z_3$. Nel caso b il gradiente del vincolo si annulla nell'origine.

Prova scritta del 26/01/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 26/01/2022

I.1 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m)$ e $(\boldsymbol{X}_2, m)$ entrambi di uguale massa m sono vincolati come segue:

- $\boldsymbol{X}_1$ è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,;$$

- $\boldsymbol{X}_2$ è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

e ad appartenere allo stesso piano che contiene $\boldsymbol{X}_1$ e l'asse x_3.

Sui due punti agiscono le forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}_1} = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) = -\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}_2}\,.$$

Qui k, $R > 0$ sono costanti.
01 Dire quale delle seguenti è una parametrizzazione lagrangiana corretta del sistema.
a

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,,$$

$(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0, \pi)$.
b

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{R^2 - y_1^2 - y_2^2}\boldsymbol{e}_3\,,$$

$(y_1, y_2) \in \{y_1^2 + y_2^2 < R^2\}$.
c Nessuna delle precedenti.
02 L'energia cinetica in forma lagrangiana del sistema (nelle coordinate lagrangiane denotate da $(q_1, q_2) \in Q$):
a Dipende esplicitamente dal tempo t.
b Può assumere ogni valore reale, su opportuni moti lagrangiani.
c Nessuna delle precedenti.
03 Supponiamo che i due punti partano da fermi, con $\boldsymbol{X}_1(0) = R\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{X}_2(0) = R\boldsymbol{e}_3$. Allora:
a L'energia cinetica $T(t)$ soddisfa $T(t) \le kR^2$.
b Vale $\boldsymbol{X}_2(t) = \boldsymbol{X}_2(0)$ per ogni t.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
La a non copre tutto il vincolo, perché $\boldsymbol{X}_2$ appartiene allo stesso meridiano di $\boldsymbol{X}_1$, mentre potrebbe appartenere anche a quello opposto; tuttavia la parametrizzazione resta corretta. La b non soddisfa il vincolo su $\boldsymbol{X}_1$.
II: c
I vincoli sono fissi, quindi T^{L} non può dipendere esplicitamente da t. Tuttavia è non negativa.
III: a
Infatti la conservazione dell'energia dà

$$T(t) + \frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^2 = \frac{k}{2}(\sqrt{2}R)^2 = kR^2\,.$$

Inoltre $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}_2}$ ha all'istante $t = 0$ componente tangente ai vincoli non nulla.

I.2 Un cilindro di massa m, altezza H e raggio R è vincolato a muoversi di moto polare con polo nel centro A di una delle due basi, che coincide con

l'origine del sistema di riferimento fisso.
Nel centro B dell'altra base è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_B = \alpha x_3 \boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale al cilindro e ortogonale a $\overrightarrow{AB}$; $\alpha > 0$ è una costante e (x_h) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso.
All'istante $t = 0$ il cilindro parte da fermo nella posizione tale che $\overrightarrow{AB}(0) = H\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{e}_2$.
04 Il moto del cilindro è:
a Una rotazione.
b Tale che $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ si mantiene costante.
c Nessuna delle precedenti.
05 L'energia cinetica del cilindro soddisfa:
a L'energia cinetica si mantiene costante durante il moto.
b L'energia cinetica si mantiene decrescente durante il moto.
c Nessuna delle precedenti.
06 Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
a Esiste il potenziale U della forza $\boldsymbol{F}_B$ come $U \in C^2(\boldsymbol{R}^3)$.
b Non esiste il potenziale della forza $\boldsymbol{F}_B$ nella forma $U \in C^2(E)$ per nessun aperto non vuoto $E \subset \boldsymbol{R}^3$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Se la base del sistema di riferimento solidale $\mathcal{S} = (A, (\boldsymbol{u}_h))$ è

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = H^{-1}\overrightarrow{AB}\,,$$

cosicché $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, si hanno le equazioni di Eulero

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - \alpha H x_3\,,\\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3\,,\\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Quindi $\omega_2(t) = \omega_3(t) = 0$ per ogni t. Quindi il moto è una rotazione intorno all'asse $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1$, ma non uniforme perché se $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_1$ allora

$$I_{11}\ddot{\varphi} = -\alpha H^2 \sin\varphi\,.$$

II: c
La a e la b non sono possibili perché $T(0) = 0$, e il cilindro non resta fermo per il ragionamento del punto precedente.
III: b
Infatti la forza non è posizionale.

I.3 Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(\varphi) = Re^{\varphi}(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2)\,, \quad \varphi \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove $R > 0$ è costante. Si assuma come noto che la curvatura k non si annulla. Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{T}\,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante e $\boldsymbol{T}$ denota il versore tangente alla curva nella posizione $\boldsymbol{X}$, ossia

$$\boldsymbol{T}(s(\varphi)) = \frac{\boldsymbol{\Psi}'(\varphi)}{|\boldsymbol{\Psi}'(\varphi)|}\,, \quad {}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,.$$

07 Il vincolo sia liscio. Allora l'equazione di moto è:
a $m\ddot{\varphi} = \alpha$.
b $m\sqrt{2}Re^{\varphi}(\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}) = \alpha$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

e sia $\boldsymbol{v} \neq 0$.
Si assumano prescritte le condizioni iniziali e quindi determinato univocamente il moto $\boldsymbol{X}$.
a La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(t)$ si annulla sempre per qualche t.
b Esistono sia moti per cui la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}(t)$ si annulla per qualche t, sia moti per cui non lo fa.
c Nessuna delle precedenti.
09 Il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu_s |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu_s > 0$ costante. Allora:
a Esistono infinite posizioni di equilibrio.
b Non esistono posizioni di equilibrio.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti l'equazione di moto è $m\ddot{s} = \alpha$. Inoltre

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = |\boldsymbol{\Psi}'(\varphi)| = \sqrt{2R^2e^{2\varphi}} = \sqrt{2}Re^{\varphi}\,.$$

Quindi

$$\dot{s} = \sqrt{2}Re^{\varphi}\dot{\varphi}\,, \qquad \ddot{s} = \sqrt{2}Re^{\varphi}(\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi})\,.$$

II: c
Si sa che $k \neq 0$; comunque dai calcoli si ha

$$k(s(\varphi)) = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}(s(\varphi))\right| = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\boldsymbol{T}(s(\varphi))\right| \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi)\right|^{-1} \neq 0\,,$$

quindi

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N} = mk\dot{s}^2 \neq 0\,.$$

III: b
Infatti all'equilibrio si deve avere

$$\alpha = |\boldsymbol{F}^{\tan}| \leq \mu_s |\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}| = 0\,,$$

impossibile.

I.4 Sia C un corpo rigido non degenere, di massa m e centro di massa G. Denotiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.
10 Sia I il momento d'inerzia relativo a un asse solidale passante per un punto $P \neq G$, ma non per G. Allora:
a Esiste almeno un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
b Esiste al più un asse solidale rispetto al quale il momento d'inerzia è minore di I.
c Nessuna delle precedenti.
11 Sia r l'asse non solidale a C dato da

$$r(t): \quad \boldsymbol{X}_O(t) + s[\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}_1(t) + \sin(\alpha t)\boldsymbol{u}_2(t)]\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$

Allora:
a Il momento d'inerzia rispetto a $r(t)$ può essere costante.
b Il moto può essere di rotazione intorno a $r(t)$.
c Nessuna delle precedenti.
12 Supponiamo che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O, ma che anche

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}}$$

lo sia. Allora:
a Esistono infinite terne principali d'inerzia.
b Deve essere $\boldsymbol{X}_O = \boldsymbol{X}_G$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
Per il teorema di Huygens, se I' denota il momento rispetto all'asse passante per G e parallelo a quello dato, e d la distanza tra i due assi,

$$I' = I - md^2 < I\,.$$

Tuttavia possono esistere infiniti altri assi con lo stesso momento I'.
II: a
Questo è il caso in cui $(\boldsymbol{u}_h)$ è principale e $I^O_{11} = I^O_{22}$. D'altra parte se il moto è di rotazione, l'asse di rotazione è solidale.
III: a
Per l'ipotesi che $\boldsymbol{w}$ sia principale

$$I^O_{\boldsymbol{ww}} \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{2}} = I^O_{\boldsymbol{ww}} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\sigma}^O \boldsymbol{w} = \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{\sigma}^O (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = \frac{I^O_{11}}{\sqrt{2}} \boldsymbol{u}_1 + \frac{I^O_{22}}{\sqrt{2}} \boldsymbol{u}_2\,,$$

da cui $I^O_{11} = I^O_{\boldsymbol{ww}} = I^O_{22}$ *e tutti i versori del piano* $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ *sono principali in* O.

I.5 Dire quali dei seguenti vincoli per due punti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{u}_1 + z_2\boldsymbol{u}_2 + z_3\boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{u}_1 + z_5\boldsymbol{u}_2 + z_6\boldsymbol{u}_3\,,$$

sono olonomi regolari nell'aperto $A \subset \boldsymbol{R}^6$ indicato.

13 Qui $A = \{z_3 > 0, z_6 > 0\}$.

a

$$z_3 - \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = 0\,, \quad z_6 - \sqrt{z_4^2 + z_5^2} = 0\,.$$

b

$$(z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 - R^2 = 0\,, \quad z_1^2 + z_4^2 = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

14 Qui $A = \boldsymbol{R}^6$.

a

$$z_1 - 2z_4 = 0\,, \quad z_2 - 2z_5 = 0\,, \quad z_3 - 2z_6 = 0\,.$$

b

$$z_1 - 2z_4 = 0\,, \quad \sin(2z_1) - \sin(4z_4) = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

15 Qui $A = \boldsymbol{R}^6$.

a

$$z_1 - |z_2 - z_3| = 0\,, \quad z_4 = 0\,.$$

b

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 4(z_4^2 + z_5^2 + z_6^2) = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: a

Nel caso b il gradiente del secondo vincolo si annulla se $z_1 = z_4 = 0$. *Nel caso a invece i due gradienti sono sempre linearmente indipendenti.*

II: a

In b, nelle configurazioni compatibili il gradiente del secondo vincolo è multiplo del primo. Nel caso a invece i tre gradienti sono sempre linearmente indipendenti.

III: c

Nel caso a il primo vincolo non è derivabile se $z_2 = z_3$. *Nel caso b il gradiente del vincolo si annulla nell'origine.*

I.6 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia rispetto al polo O (sulla cui posizione non si fanno ipotesi).

16 Se il corpo è un cilindro (solido) circolare retto omogeneo allora tutti i moti sono periodici.

a Può accadere, ma in genere non è vero.

b È sempre vero.

c Nessuna delle precedenti.

17 Se $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ si mantiene costante durante il moto, allora anche $\boldsymbol{\omega}(t)$ è costante.
a Sì.
b Non è vero in generale.
c Nessuna delle precedenti.
18 Tutti i moti per cui la direzione di $\boldsymbol{\omega}(t)$ si mantiene costante (si assuma $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per ogni t) sono periodici.
a È vero solo se l'ellissoide d'inerzia in O è sferico.
b È sempre vero.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Se O è a distanza $d > 0$ dall'asse del cilindro, sul piano ortogonale all'asse cui appartiene il centro di massa, i momenti d'inerzia in O si trovano con il teorema di Huygens e si vede che sono in genere tutti e 3 diversi tra di loro. Quindi esistono moti per inerzia non periodici.
II: b
Se l'ellissoide d'inerzia in O ha simmetria di rotazione, non è vero per tutti i moti che non sono rotazioni, quindi vale b.
III: b
Si sa dalla teoria che le sole rotazioni sono quelle intorno agli assi principali e sono uniformi.

Prova scritta del 16/02/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 16/02/2022

I.1 Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,; \end{aligned}$$

qui $\alpha > 0$ è una costante. Denotiamo con $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ le coordinate in $\mathcal{S}$.
Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$\lambda_2 = 0 \,,$$

e a avere l'estremo A sulla retta

$$\lambda_1 = \lambda_3\,, \qquad \lambda_2 = 0\,.$$

Sull'asta agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.
Si usino come coordinate lagrangiane $x = \lambda_{1A}$ e $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{u}_3)\,.$$

01 Il vincolo è:
a Mobile sia rispetto al sistema di riferimento fisso che a quello mobile.
b Mobile rispetto al sistema di riferimento fisso, ma fisso rispetto a quello mobile.
c Nessuna delle precedenti.
02 Il potenziale lagrangiano della forza di trascinamento in $\mathcal{S}$ è dato da:
a

$$U^{\mathrm{T}}(x,\varphi) = \frac{m\alpha^2}{4L}\int_0^{2L}(x + s\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}s\,.$$

b

$$U^{\mathrm{T}}(x,\varphi) = \frac{m}{4L}\Big[\alpha\int_0^{2L}(x + s\cos\varphi)\,\mathrm{d}s\Big]^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
03 Denotiamo con I il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse a essa ortogonale nel centro di massa G. Se si scrive l'energia cinetica dell'asta nel sistema fisso con il teorema di König, il termine $\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}/2$ che ivi appare è dato da:
a

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{I}{2}[\dot\varphi^2 + \alpha^2(\cos\varphi)^2]\,.$$

b

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{I}{2}[\dot\varphi^2 + \alpha^2(\sin\varphi)^2]\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti le equazioni del vincolo nelle coordinate del sistema mobile non dipendono dal tempo t.
II: a
Deve essere

$$U^{T}(x,\varphi) = \int_0^{2L}\mathrm{d}U^{T}\,, \qquad \mathrm{d}U^{T} = \frac{m\alpha^2}{2L}\frac{\lambda_1^2}{2}\,\mathrm{d}s\,.$$

poiché

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{T} = \frac{m\alpha^2}{2L}\lambda_1\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}s\,.$$

III: a
Infatti se $\mathcal{P}$ denota la terna fissa, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ quella solidale all'asta

$$\boldsymbol{w}_1 = \cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_2\,, \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2\,,$$

si ha

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \alpha\boldsymbol{u}_3 - \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2 = \alpha\sin\varphi\boldsymbol{w}_1 - \dot{\varphi}\boldsymbol{w}_2 + \alpha\cos\varphi\boldsymbol{w}_3\,.$$

Inoltre nella base $\mathcal{N}$ si ha $\boldsymbol{\sigma}_G^{\mathcal{N}} = \mathrm{diag}(0, I, I)$.

I.2 Un cilindro di massa m, raggio R e altezza H è vincolato a muoversi di moto polare con polo nel centro del cilindro, coincidente con l'origine del sistema di riferimento fisso $\boldsymbol{X}_O$. Consideriamo il sistema di riferimento solidale con il cilindro $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, con $\boldsymbol{u}_3$ parallelo all'asse del cilindro. Sul cilindro, nel punto solidale B appartenente a una delle circonferenze di base dato da

$$\boldsymbol{X}_B = R\boldsymbol{u}_2 + \frac{H}{2}\boldsymbol{u}_3\,,$$

è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_B = \lambda\boldsymbol{u}\,,$$

con $\lambda > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ versore solidale al cilindro.
Il cilindro parte da fermo.
04 Allora:
a Il moto è polare per inerzia.
b Esiste un piano solidale Π tale che se $\boldsymbol{u} \in \Pi$ allora il moto è una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.
05 Supponiamo che $\boldsymbol{u}$ sia parallelo all'asse del cilindro. Allora:
a Il moto è periodico.
b L'energia cinetica aumenta durante il moto, ma rimane limitata.
c Nessuna delle precedenti.
06 Qualunque sia la direzione di $\boldsymbol{u}$, il sistema delle equazioni di Eulero può essere visto come un sistema differenziale del primo ordine nelle componenti di $\boldsymbol{\omega}$.
a Sì.
b In generale no, ma è vero per speciali geometrie del cilindro.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Poiché sia B che $\boldsymbol{F}_B$ sono solidali, anche $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ lo è. Dalla teoria si sa che se il momento è diretto lungo un asse principale in O, allora il moto è una rotazione intorno a quell'asse (se per esempio $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ come in questo caso). Ma se $\boldsymbol{u}$ appartiene al piano $\langle\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\rangle$, allora $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ è diretto lungo l'asse $\boldsymbol{u}_1$, che è principale in O, per la simmetria materiale di rotazione del cilindro.
II: c
Allora, se $\boldsymbol{u} = \pm\boldsymbol{u}_3$ si ha

$$\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = \pm\lambda R\boldsymbol{u}_1\,,$$

e le equazioni di moto sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot\omega_1 &= (I_{11}-I_{33})\omega_2\omega_3 \pm \lambda R\,,\\ I_{11}\dot\omega_2 &= (I_{33}-I_{11})\omega_1\omega_3\,,\\ I_{33}\dot\omega_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Quindi $\omega_3(t)=0$ per ogni t, da cui $\omega_2(t)=0$ e $\omega_1(t)=\pm\lambda R t/I_{11}$ per ogni t.
III: a
Infatti, poiché $\boldsymbol{F}_B$ e B sono solidali, anche $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ lo è, quindi le equazioni di Eulero non contengono esplicitamente gli angoli di Eulero.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a vincoli olonomi regolari fissi e lisci, e a forze direttamente applicate conservative. Ha lagrangiana

$$\mathcal{L} = \alpha(1+x^2)\dot x^2 + 2\sqrt{\alpha\gamma}xy\dot x\dot y + \gamma(1+y^2)\dot y^2 - \delta x^2 - \varepsilon y^2 - \eta x^3\,,$$

con α, γ, δ, ε, $\eta > 0$ costanti. Qui $(x,y)\in\boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate lagrangiane. Si considerano le piccole oscillazioni in (0,0).
07 La lagrangiana ridotta è data da
a

$$\mathcal{L}^* = \alpha(1+x^2)\dot x^2 + \gamma(1+y^2)\dot y^2 - \delta x^2 - \varepsilon y^2\,.$$

b

$$\mathcal{L}^* = \alpha\dot x^2 + \gamma\dot y^2 - \delta x^2 - \varepsilon y^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
08 Le frequenze normali $\omega_i/(2\pi)$, $i=1,\,2$ sono date da:
a

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}}\,,\qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}\,.$$

b

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\,,\qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\varepsilon}}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
09 In questo caso, i moti delle piccole oscillazioni coincidono esattamente con quelli del sistema originario?
a Sì se

$$|x| + |\dot x| + |y| + |\dot y| \le c\,,$$

con $c>0$ opportuno.
b Sì se $y(t)=0$ per ogni t.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Infatti per passare alla lagrangiana ridotta occorre mettere $(x,y)=(0,0)$ nella matrice dell'energia cinetica e approssimare il potenziale con il termine di secondo grado nello sviluppo di Taylor.

II: a
Si sa dalla teoria che l'equazione che determina le $\boldsymbol{\omega}_i$ è

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2\alpha\omega^2 & 0 \\ 0 & 2\gamma\omega^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\delta & 0 \\ 0 & -2\varepsilon \end{pmatrix}\right) = 0\,.$$

III: c
Infatti in entrambi i casi a e b le equazioni di Lagrange per $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^*$ sono diverse e non equivalenti, per esempio quelle per $\mathcal{L}$ contengono η.

I.4 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia di polo $\boldsymbol{X}_O$. Si assuma $\boldsymbol{\omega} \neq 0$.
Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ un sistema di riferimento solidale con C, con $\mathcal{M}$ principale d'inerzia in $\boldsymbol{X}_O$. Denotiamo con I_{hh} il momento d'inerzia relativo a $\boldsymbol{u}_h$ in $\boldsymbol{X}_O$.
10 È possibile garantire a priori che tutti i moti siano periodici?
a Sì, se il corpo ha geometria delle masse particolare.
b No, esistono sempre moti non periodici.
c Nessuna delle precedenti.
11 Supponiamo che $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ sia un vettore solidale. Allora il moto è di rotazione.
a Sì.
b In genere no.
c Nessuna delle precedenti.
12 Si considerino le due funzioni del tempo

$$f_1(t) = \sum_{h=1}^{3} I_{hh}\omega_h(t)^2\,, \qquad f_2(t) = \sum_{h=1}^{3} I_{hh}^2\omega_h(t)^2\,.$$

Allora:
a La f_1 si mantiene costante, ma la f_2 in genere no.
b La f_2 si mantiene costante, ma la f_1 in genere no.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
Se l'ellissoide d'inerzia ha simmetria di rotazione, i moti sono tutti periodici.
II: a
È noto che $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ è sempre costante nel sistema di riferimento fisso. Se è anche solidale, la sua direzione è sia solidale che costante, quindi il moto è di rotazione. Infatti in questo caso è noto dalla teoria che $\boldsymbol{\omega}$ ha la direzione del vettore sia solidale che costante, cioè di $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$.
III: c
Infatti entrambe sono costanti perché

$$f_1(t) = 2T(t)\,, \qquad f_2(t) = |\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}(t)|^2\,,$$

e per i noti integrali primi del moto.

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie regolare S. Il vincolo è scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico; si assuma $\boldsymbol{v} \neq 0$.
Sul punto agisce la forza direttamente applicata conservativa $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, di potenziale $U(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$.
Denotiamo con $\boldsymbol{\nu}$ la normale alla superficie.
13 L'energia meccanica $T - U$:
a Certamente non si conserva.
b Esistono sia casi in cui si conserva che casi in cui non si conserva.
c Nessuna delle precedenti.
14 Supponiamo che

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) = 0\,, \qquad \text{per ogni } \boldsymbol{x} \in S.$$

Allora:
a Di fatto i moti sono indipendenti dal coefficiente di attrito μ.
b S è una superficie di livello per U.
c Nessuna delle precedenti.
15 Supponiamo che la traiettoria di $\boldsymbol{X}$ sia data da una curva regolare

$$\{\boldsymbol{\psi}(s) \mid s \in I\} \subset S\,,$$

con s ascissa curvilinea e terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ (assumiamo che la curvatura k sia positiva). Allora:
a I tre prodotti $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nu}$ possono in genere assumere qualunque valore in $[-1,1]$.
b Se l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ soddisfa $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{N} = 0$ in qualche tempo $\bar{t}$, allora in quel $\bar{t}$ vale anche $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Per esempio se S è un piano e $\boldsymbol{F}$ è costante; se è parallela al piano l'energia si conserva, altrimenti no.
II: c
Infatti può essere $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} \neq 0$, quindi $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{\nu} \neq 0$ e il moto quindi dipende da μ (perché c'è in effetti attrito). Inoltre S è una superficie di livello se $\boldsymbol{F} = \nabla U$ è normale a S, non se è tangente.
III: b
La a non vale, perché $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ in ogni caso. Per lo stesso motivo vale b perché

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = \dot{s}^2 k \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{\nu}\,, \qquad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{N} = \dot{s}^2 k\,.$$

Notiamo che moti circolari nel piano o su una sfera danno esempi in cui $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nu}$ possono assumere qualunque valore in $[-1,1]$.

I.6 Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, 2$, è soggetto a vincoli olonomi regolari. Assumiamo l'ipotesi dei lavori virtuali.

Si usi la notazione

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3\,.$$

16 Supponiamo che i vincoli siano mobili. Se la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^1$ fa lavoro nullo, allora anche $\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^2$ fa lavoro nullo?
a Può essere, ma in genere no.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
17 Supponiamo che il vincolo sia di rigidità, cioè sia dato da

$$f(\boldsymbol{z}) = |\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^2 - L^2 = 0\,,$$

con $L > 0$. Allora:
a La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^1$ è parallela a $\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2$.
b La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^1$ è ortogonale a $\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2$.
c Nessuna delle precedenti.
18 Supponiamo che che i vincoli siano fissi e che $\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^1$ faccia lavoro nullo. Allora:
a La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^2$ fa lavoro virtuale nullo, ma in genere non fa lavoro nullo.
b La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^2$ fa lavoro nullo.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Per esempio se i vincoli sono $z_1 = 0$, $z_4 = \alpha t^2$.
II: a
Infatti $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ e

$$N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} = \langle \nabla f \rangle = \{(\lambda(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2), -\lambda(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2)) \mid \lambda \in \boldsymbol{R}\}\,.$$

III: b
La a non è vera perché il lavoro virtuale e quello effettivo coincidono per i vincoli fissi. La b vale per lo stesso motivo e perché

$$\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^1 \cdot \boldsymbol{v} + \mathbf{f}_{\text{vin}}{}^2 \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

per ogni $\boldsymbol{v}$ spostamento virtuale, cioè effettivo.

Prova scritta del 21/03/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 21/03/2022

I.1 Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Sul vertice A è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = kx_1\boldsymbol{e}_1\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Si usino come coordinate lagrangiane $(x, y, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_A = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{AB} = L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

La scelta è tale che la diagonale AC è data da

$$\overrightarrow{AC} = L\sqrt{2}\Big(\cos\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big)\boldsymbol{e}_1 + \sin\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big)\boldsymbol{e}_2\Big)\,,$$

01 Il potenziale lagrangiano U^{L}:
a Non esiste.
b Vale

$$U^{\text{L}} = \frac{k}{2}x^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
02 Sia I il momento d'inerzia della lamina nel centro di massa, relativo a $\boldsymbol{e}_3$. Allora l'energia cinetica della lamina vale:
a

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}\Big[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{L^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \sqrt{2}L\dot{x}\dot{\varphi}\sin\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big) + \sqrt{2}L\dot{y}\dot{\varphi}\cos\Big(\varphi + \frac{\pi}{4}\Big)\Big] + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
03 L'equazione di Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial T^{\text{L}}}{\partial\dot{\varphi}}\Big] - \frac{\partial T^{\text{L}}}{\partial\varphi} = Q_\varphi\ :$$

a Si riduce con calcoli opportuni a $\ddot{\varphi} = 0$.
b Presenta $Q_\varphi = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione

I: b
Infatti

$$U^{\text{L}}(x,y,\varphi) = U(\boldsymbol{X}^{\text{L}}_A(x,y,\varphi)) = \frac{k}{2}(x^{\text{L}}_1(x,y,\varphi))^2 = \frac{k}{2}x^2\,.$$

II: a
Usiamo il teorema di König. Si ha intanto per il centro di massa G

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_G = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + \frac{L}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\varphi+\frac{\pi}{4}\Big)\boldsymbol{e}_1 + \sin\Big(\varphi+\frac{\pi}{4}\Big)\boldsymbol{e}_2\Big)\,,$$

da cui

$$|\boldsymbol{v}_G|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{L^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \sqrt{2}L\dot{x}\dot{\varphi}\sin\Big(\varphi+\frac{\pi}{4}\Big) + \sqrt{2}L\dot{y}\dot{\varphi}\cos\Big(\varphi+\frac{\pi}{4}\Big)\,.$$

Infine la componente dovuta a $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$ *è* $I\dot{\varphi}^2/2$.
III: b
Infatti (tornando alla prima domanda)

$$Q_\varphi = \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial\varphi} = 0\,,$$

ma T^{L} *dipende anche da* φ *perciò a non può essere vera.*

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

ove $R > 0$.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3\,,$$

ove α, β, $\gamma \in \boldsymbol{R}$.
04 Il vincolo sia scabro di attrito dinamico (assumiamo quindi $\boldsymbol{v} \neq 0$) del tipo $|\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}}| = \mu|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|$, con $\mu > 0$. Allora:
a Le equazioni di moto dipendono da α, β, ma non da γ.
b Si possono scegliere le coordinate lagrangiane in modo che le equazioni di moto siano indipendenti da α o da β a scelta.
c Nessuna delle precedenti.
05 Il vincolo sia liscio. Allora:
a Le equazioni di moto dipendono da α, β, ma non da γ.
b Si possono scegliere le coordinate lagrangiane in modo che le equazioni di moto siano indipendenti da α o da β a scelta.
c Nessuna delle precedenti.
06 Il vincolo sia scabro di attrito statico, del tipo $|\mathbf{f}^{\text{tan}}_{\text{vin}}| \leq \mu|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|$, con $\mu > 0$. Allora:
a Qualunque sia $\mu > 0$ esistono sempre infinite posizioni di equilibrio.
b Per certe scelte di α, β, $\gamma \in \boldsymbol{R}$, $\mu > 0$, non esistono posizioni di equilibrio.

c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Se il vincolo è scabro, anche la componente binormale della forza entra nell'equazione di moto attraverso il termine di attrito, quindi a non vale. Neppure b vale, perché la forza non può essere eliminata dalle equazioni di moto.
II: a
Se il vincolo è liscio la componente normale della forza è irrilevante per le equazioni di moto, e γ appare solo in tale componente.
III: a
L'equilibrio si ha se $|\boldsymbol{F}^{\tan}| \le \mu|\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}|$. Questo equivale a

$$|\boldsymbol{F}^{\tan}|^2 \le \frac{\mu^2}{1+\mu^2}|\boldsymbol{F}|^2\,,$$

Ma

$$\boldsymbol{F}^{\tan} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{-x_2\boldsymbol{e}_1 + x_1\boldsymbol{e}_2}{R} = \frac{-\alpha x_2 + \beta x_1}{R}\,.$$

Quindi la condizione diviene

$$\frac{(-\alpha x_2 + \beta x_1)^2}{R^2} \le \frac{\mu^2}{1+\mu^2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,.$$

Se $\boldsymbol{F} \neq 0$ la disuguaglianza è vera in senso stretto se $(-x_2, x_1)$ è ortogonale a (α, β), quindi esistono infiniti (x_1, x_2) ove è verificata. Se $\boldsymbol{F} = 0$ tutte le posizioni sono di equilibrio.

I.3 Un cilindro omogeneo di raggio R, altezza H e massa m si muove di moto polare intorno al centro A di una delle basi.
Sul cilindro sono applicate sollecitazioni dirette tali che il loro momento rispetto a A sia

$$\boldsymbol{M}_A^{\mathrm{ext}} = \alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_3\,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ non entrambi nulli.
Qui si considera il sistema di riferimento solidale al cilindro $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_A, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{u}_3$ parallelo all'asse del cilindro. Scriviamo come usuale per la velocità angolare del cilindro

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3}\omega_h\boldsymbol{u}_h\,.$$

07 Esistono condizioni iniziali per cui il moto risulta di rotazione?
a Se $\alpha = 0$ sì.
b No, mai.
c Nessuna delle precedenti.
08 Supponiamo che la geometria del cilindro sia tale che in A valga $I_{11} = I_{22} = I_{33}$, e che il cilindro parta da fermo. Allora:
a Il moto è di rotazione.
b Se $\alpha \neq \beta$ il moto non è di rotazione.

c Nessuna delle precedenti.

09 Quando possiamo concludere che per un certo $\bar{t}$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(\bar{t}) = 0?$$

Qui T è l'energia cinetica.

a Se $\alpha = 0$ e $\omega_2(\bar{t}) = 0$.

b Se $\beta = 0$ e $\omega_1(\bar{t}) = 0$.

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: a

Nel caso a il momento $\boldsymbol{M}_A^{\mathrm{ext}}$ è diretto come $\boldsymbol{u}_3$ che è principale in A. Quindi il moto può essere di rotazione intorno a quell'asse se le condizioni iniziali sono opportune.

II: a

In questo caso il sistema delle equazioni di Eulero è

$$I_{11}\dot{\omega}_1 = \alpha\,, \quad I_{11}\dot{\omega}_2 = 0\,, \quad I_{11}\dot{\omega}_3 = \beta\,,$$

da cui

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{t}{I_{11}}(\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_3)\,.$$

Perciò $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione solidale e quindi costante.

III: b

Si sa

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_A^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3\,.$$

I.4 Consideriamo un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi regolari, con ℓ gradi di libertà e il relativo potenziale lagrangiano U^{L} delle forze direttamente applicate.

10 I vincoli siano mobili nel sistema di riferimento fisso, ma fissi nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$. Allora, volendo scrivere la lagrangiana in $\mathcal{S}$ (ove quindi si deve tener conto anche delle forze apparenti)

a U^{L} nel sistema di riferimento $\mathcal{S}$ non esiste sicuramente a causa della forza di Coriolis.

b Se U^{L} esiste nel sistema di riferimento fisso può esistere o no nel sistema di riferimento mobile.

c Nessuna delle precedenti.

11 Sia $\ell = 2$ e le componenti lagrangiane delle forze siano per $(q_1, q_2) \in \boldsymbol{R}^2$

$$Q_1 = q_1 + q_2 t\,, \qquad Q_2 = q_1 + q_2\,.$$

a U^{L} esiste, in tutto $\boldsymbol{R}^2$.

b U^{L} non esiste in nessun aperto di $\boldsymbol{R}^2$.

c Nessuna delle precedenti.

12 Le forze direttamente applicate sono nulle.

a U^{L} esiste sicuramente (nel sistema di riferimento fisso).

b U^{L} può non esistere nel sistema di riferimento fisso, ma si può sempre trovare un sistema di riferimento mobile in cui esiste.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti la forza di Coriolis (in certi casi) può avere componenti lagrangiane nulle.
II: b
Infatti non è soddisfatta la condizione necessaria:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} = t \neq 1 = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\,.$$

III: a
Infatti U^{L} è costante.

I.5 Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di m vincoli olonomi regolari, con $\ell = 3n - m$ gradi di libertà.
13 L'energia meccanica si conserva se:
a Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e i vincoli sono fissi.
b Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e le componenti lagrangiane delle forze sono conservative in senso lagrangiano.
c Nessuna delle precedenti.
14 I vincoli siano fissi. L'insieme degli atti di moto del sistema in una fissata configurazione compatibile costituisce:
a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{3n}$ di dimensione ℓ.
b Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{3n}$ di dimensione m.
c Nessuna delle precedenti.
15 Supponiamo che $n = 2$ e i vincoli siano per i due moti $\boldsymbol{X}_1 = (z_1, z_2, z_3)$, $\boldsymbol{X}_2 = (z_4, z_5, z_6)$,

$$f_1(z_1, z_2, z_3) = 0\,, \quad f_2(z_4, z_5, z_6) = 0\,, \quad z_1 = z_4\,.$$

Vale l'ipotesi dei lavori virtuali e le forze direttamente applicate sono costanti ma non nulle.
a Non esistono configurazioni compatibili con i vincoli che siano di equilibrio.
b L'energia meccanica del sistema si conserva lungo ciascun moto.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Oltre alle condizioni di a, occorre che le forze direttamente applicate siano conservative.
II: a
È lo spazio degli spostamenti effettivi che coincide se i vincoli sono fissi con quello degli spostamenti virtuali.
III: b
Vale b perché le forze costanti sono conservative e i vincoli sono fissi. La a non vale, perché le forze direttamente applicate possono essere ortogonali ai vincoli.

I.6 Sia C un corpo rigido non degenere.

16 Sia $I^P_{\boldsymbol{uu}}$ il momento d'inerzia relativo all'asse passante per P e parallelo al versore $\boldsymbol{u}$; P e $\boldsymbol{u}$ sono solidali al corpo rigido. Quale dei seguenti casi è possibile?

a

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^3\,,|\boldsymbol{u}|=1} I^P_{\boldsymbol{uu}} = \inf_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^3\,,|\boldsymbol{u}|=1} I^P_{\boldsymbol{uu}}\,, \qquad P \text{ fissato.}$$

b

$$\inf_{P\in\boldsymbol{R}^3} I^P_{\boldsymbol{uu}} = 0\,, \qquad \boldsymbol{u} \text{ fissato.}$$

c Nessuna delle precedenti.

17 Tra i moti polari per inerzia di polo O esistono moti in cui $\boldsymbol{\omega}$ mantiene modulo non costante?

a Sì, ma solo sotto ipotesi sulla geometria delle masse del corpo.

b Sì, sempre.

c Nessuna delle precedenti.

18 Supponiamo che il corpo sia soggetto a una distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \beta f(\dot{x}_1)\boldsymbol{e}_1\,\mathrm{d}\mu\,,$$

ove α, $\beta > 0$ sono costanti, $\mathrm{d}\mu$ è la misura caratteristica del corpo e $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ è una funzione. In assenza di vincoli, le equazioni globali della dinamica sono sufficienti a determinare il moto di C?

a No, a meno che f sia costante.

b Sì, almeno se si assume $f \in C^1(\boldsymbol{R})$.

c Nessuna delle precedenti.

Soluzione

I: a

Il sup *e l'*inf *in a sono raggiunti in assi principali e quindi possono essere uguali se tutti i momenti principali lo sono. L'*inf *in b per Huygens è raggiunto nel centro di massa ed è quindi positivo.*

II: a

Occorre assumere che l'ellissoide d'inerzia non sia di rotazione.

III: b

Le equazioni globali sono sufficienti per determinare i moti dei corpi rigidi non vincolati (sotto ipotesi di regolarità sulle forze direttamente applicate).

Prova scritta del 22/06/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 22/06/2022

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva

$$\lambda_3 = f(\lambda_1)\,, \qquad \lambda_2 = 0\,,$$

ove $(\boldsymbol{\lambda})$ rappresenta le coordinate nel sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ con O origine del sistema fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Qui $\alpha > 0$ è costante e $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, con $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$.
Sul punto agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.
01 Dire per quale delle seguenti scelte $\boldsymbol{\lambda} = 0$ è una posizione di equilibrio stabile relativo a $\mathcal{S}$. Qui $\beta > 0$ è una costante.
a $f(\lambda_1) = \beta\lambda_1^4$, per $\beta > 0$ opportuna.
b $f(\lambda_1) = \beta\lambda_1^2$, per $\beta > 0$ opportuna.
c Nessuna delle precedenti.
02
Si dia per noto che l'equazione di moto del punto è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m\dot\lambda_1\big(1 + f'(\lambda_1)^2\big)\big] - m\dot\lambda_1^2 f'(\lambda_1) f''(\lambda_1) - m\alpha^2\lambda_1 + mgf'(\lambda_1) = 0\,.$$

Possono esistere moti in cui $\lambda_1(t)$ è costante, con $\lambda_1 \neq 0$?
a Se f è scelta opportunamente, possono esisterne infiniti.
b Considerate le condizioni $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ già poste, esiste una sola scelta di f per cui moti di questo tipo sono ammissibili.
c Nessuna delle precedenti.
03 Quale delle seguenti condizioni garantisce che tutti i moti siano limitati? Qui $\beta > 0$ è una costante.
a $f(\lambda_1) = \beta\lambda_1^4$, con $\beta > 0$ fissata ad arbitrio.
b $f(\lambda_1) = \beta\lambda_1^2$, con $\beta > 0$ fissata ad arbitrio.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Come è noto si può ignorare la forza di Coriolis (che ha componenti lagrangiane nulle). Usiamo come coordinata lagrangiana λ_1. In $\mathcal{S}$ le sole forze da considerare sono il peso e la forza di trascinamento

$$\boldsymbol{F}_{\text{T}} = m\alpha^2\lambda_1\boldsymbol{u}_1\,.$$

Quindi il potenziale lagrangiano è

$$U^{\text{L}}(\lambda_1) = \frac{m}{2}\alpha^2\lambda_1^2 - mgf(\lambda_1)\,,$$

che ha un massimo isolato in $\lambda_1 = 0$ solo nel caso b, con $\beta > \alpha^2/(2g)$.

II: a
Si vede che imponendo $\lambda_1 =$ costante nell'equazione di moto, si ottiene

$$gf'(\lambda_1) = \alpha^2 \lambda_1 \,.$$

Poiché si può scegliere f (in infiniti modi diversi) in modo che questa equazione abbia infinite soluzioni, vale a.
III: a
Il potenziale è stato dato sopra. Poiché

$$-U^{\text{L}} \leq T^{\text{L}} - U^{\text{L}} = E \,,$$

i moti sono limitati se

$$-U^{\text{L}}(\lambda_1) = -\frac{m}{2}\alpha^2\lambda_1^2 + mgf(\lambda_1) \to +\infty$$

per $|\lambda_1| \to +\infty$.

I.2 Una lamina rettangolare $ABCD$ di massa m e lati $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{BC} = b$, con $a > b > 0$, è vincolata a muoversi di moto polare di polo il centro di massa G della lamina.
Nel seguito $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}$ denota il momento delle forze esterne rispetto a G, e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ una base solidale principale in G, con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al piano della lamina.
04 L'asse solidale passante per G di versore

$$\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_3 \,,$$

con α, $\beta > 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ può essere principale?
a No.
b Solo se $a = nb$ con n intero.
c Nessuna delle precedenti.
05 Si sa che il moto è polare per inerzia, con

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \lambda\boldsymbol{u}_1(0) + \mu\boldsymbol{u}_2(0) \,,$$

con λ, $\mu > 0$ costanti.
a $\boldsymbol{\omega}(t)$ può mantenere direzione costante nel sistema fisso.
b $\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}(t)$ può mantenere direzione costante nel sistema solidale.
c Nessuna delle precedenti.
06 Scegliere l'enunciato corretto.
a L'energia cinetica $T(t)$ può assumere qualunque valore in $(-\infty, +\infty)$ per $t > 0$ fissato, se $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}$ è opportuno.
b L'energia cinetica T si può scrivere come una forma quadratica nelle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ in $(\boldsymbol{u}_h)$, con coefficienti dipendenti solo da a, b, m.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione

I: a
Infatti, se lo fosse esisterebbe un piano di assi principali, ossia due momenti principali centrali dovrebbero essere uguali tra di loro, impossibile per la geometria delle masse della lamina.
II: c
Il moto non può essere una rotazione perché $\boldsymbol{\omega}(0)$ non è principale, quindi a non vale.
Si sa poi che $\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}$ è costante nel sistema fisso; se avesse direzione costante nel sistema solidale, allora il moto sarebbe una rotazione, il che esclude b.
III: b
L'energia cinetica non può essere negativa, quindi a non vale. Poiché nei moti polari di polo G

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}\,,$$

e $\boldsymbol{\sigma}_G$ ha componenti dipendenti solo da a, b, m, vale la b.

I.3 Rispondere alle seguenti domande sui vincoli specificati.
Qui:

$$\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_6) \in \boldsymbol{R}^6\,,$$

sono le coordinate locali di un sistema formato dai due moti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3\,.$$

07 I vincoli sono

$$f_1(\boldsymbol{z}) = z_3 = 0\,, \qquad f_2(\boldsymbol{z}) = z_6 - z_4^2 - z_5^2 = 0\,.$$

a I vincoli sono olonomi regolari in ogni configurazione ammissibile.
b Esiste esattamente una configurazione ammissibile in cui i vincoli non sono regolari.
c Nessuna delle precedenti.
08 I vincoli sono

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}) &= z_3 - z_6 - L = 0\,,\\ f_2(\boldsymbol{z}) &= (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 - L^2 = 0\,, \end{aligned}$$

con $L > 0$ costante.
a I vincoli sono olonomi regolari in ogni configurazione ammissibile.
b Esiste esattamente una configurazione ammissibile in cui i vincoli non sono regolari.
c Nessuna delle precedenti.
09 I vincoli sono

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}) = z_3 = 0\,, \qquad f_2(\boldsymbol{z}) = z_6 - L = 0\,,\\ f_3(\boldsymbol{z}) = (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 - L^2 = 0\,, \end{aligned}$$

con $L > 0$ costante.

a I vincoli sono olonomi regolari in ogni configurazione ammissibile.
b Esiste esattamente una configurazione ammissibile in cui i vincoli non sono regolari.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
La matrice iacobiana è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2z_4 & -2z_5 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha sempre rango 2.
II: c
Sostituendo il primo vincolo nel secondo si ha

$$z_1 = z_4\,, \qquad z_2 = z_5\,.$$

La matrice iacobiana

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2(z_1-z_4) & 2(z_2-z_5) & 2(z_3-z_6) & -2(z_1-z_4) & -2(z_2-z_5) & -2(z_3-z_6) \end{pmatrix},$$

quindi diviene nelle posizioni ammissibili

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2L & 0 & 0 & -2L \end{pmatrix},$$

che è singolare. Poiché questo avviene in tutte le infinite configurazioni ammissibili, non possono valere né a né b.
III: c
Sostituendo il primo e il secondo vincolo nel terzo si ha

$$z_1 = z_4\,, \qquad z_2 = z_5\,.$$

La matrice iacobiana, che è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2(z_1-z_4) & 2(z_2-z_5) & 2(z_3-z_6) & -2(z_1-z_4) & -2(z_2-z_5) & -2(z_3-z_6) \end{pmatrix},$$

quindi diviene nelle posizioni ammissibili

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2L & 0 & 0 & 2L \end{pmatrix},$$

che è singolare. Poiché questo avviene in tutte le infinite configurazioni ammissibili, non possono valere né a né b.

I.4 Sia $\boldsymbol{\psi}(s)$ una curva regolare con curvatura $k > 0$, cui è vincolato un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$. Sul punto agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$.
Qui $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ denota la terna intrinseca della curva.

10 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ del punto all'istante t è:
a Indipendente da $\boldsymbol{F}$ se il vincolo è liscio.
b Sempre ortogonale a $\boldsymbol{T}$ se $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
c Nessuna delle precedenti.
11 Per questo vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali
a Non si può porre.
b Equivale a $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
12 Supponiamo che la curva $\boldsymbol{\psi}$ sia piana e consideriamo la terna mobile $\mathcal{M}(t) = (\boldsymbol{T}(s(t)), \boldsymbol{N}(s(t)), \boldsymbol{B}(s(t)))$. Allora il moto di $\mathcal{M}(t)$ rispetto alla terna fissa (supponendo $\dot{s}(t) \neq 0$) è:
a Una traslazione.
b Una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Le a e b sono prive di senso.
II: b
L'ipotesi dei lavori virtuali è data da (usando s come coordinata lagrangiana)

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\text{L}}}{\partial s} = \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{\psi}' = \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0\,.$$

III: b
Il moto di una terna rispetto a un'altra non è mai una traslazione, quindi a non vale. Poiché la curva è piana si ha che $\boldsymbol{B}$ è normale al piano, quindi fissa; perciò il moto è una rotazione intorno a $\boldsymbol{B}$.

I.5 Una lamina non omogenea a forma di superficie sferica S di raggio $R > 0$ ha densità

$$\rho(P) > 0 \quad \text{non uniforme.}$$

Qui P denota il punto generico di S e $(\boldsymbol{\lambda})$ un sistema di coordinate solidali a S con origine nel centro (geometrico) della sfera S.
13 Il centro di massa G della lamina
a Non è mai esterno alla sfera, ma non è necessariamente nel centro geometrico.
b È sempre nel centro geometrico della sfera, per qualunque scelta della densità ρ.
c Nessuna delle precedenti.
14 Se per una funzione $\tilde{\rho}$ opportuna

$$\rho(\boldsymbol{\lambda}) = \tilde{\rho}(|\lambda_1|)\,,$$

allora
a Il centro di massa appartiene al piano $\lambda_1 = 0$.
b I 3 momenti d'inerzia principali in G sono uguali.

c Nessuna delle precedenti.
15 Se per una funzione $\tilde{\rho}$ opportuna

$$\rho(\boldsymbol{\lambda}) = \tilde{\rho}(\lambda_1)\,,$$

allora
a Il centro di massa appartiene al piano $\lambda_1 = 0$.
b Il centro di massa appartiene all'asse λ_1.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Infatti

$$|\boldsymbol{\lambda}_G| = \left| \frac{1}{m} \int_S \boldsymbol{\lambda} \rho(\boldsymbol{\lambda})\, \mathrm{d}S \right| \leq \frac{1}{m} \int_S |\boldsymbol{\lambda}| \rho(\boldsymbol{\lambda})\, \mathrm{d}S = R\,.$$

II: a
In questo caso $\lambda_1 = 0$ è un piano di simmetria materiale ortogonale, quindi contiene G, perciò vale a.
In realtà in questo caso G è nel centro geometrico di S (si veda la domanda successiva), ma non è detto che i 3 momenti siano uguali nonostante 2 certamente lo siano per la simmetria di rotazione.
III: b
Infatti ρ ha simmetria di rotazione intorno all'asse λ_1, quindi vale b. D'altra parte $\lambda_1 = 0$ non è necessariamente di simmetria materiale ortogonale (si pensi al caso in cui $\tilde{\rho}$ è strettamente crescente).

I.6 Sia C un corpo rigido non degenere.
Denotiamo con $\boldsymbol{F}^{\text{ext}}$ la risultante delle forze esterne e con $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}$ il momento delle forze esterne rispetto al centro di massa G, sotto le usuali ipotesi sulle forze interne.
16 Sia C libero da vincoli. Fissate le condizioni iniziali il moto di C dipende solo da $\boldsymbol{F}^{\text{ext}}$ e da $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}$.
a Sì.
b In genere no, anche se è vero per particolari geometrie del corpo.
c Nessuna delle precedenti.
17 Supponiamo che C mantenga un punto solidale Z fisso, cioè che il moto sia polare di polo Z. Il vincolo sia liscio.
a Se il momento delle forze esterne rispetto a Z è identicamente nullo, tutti i moti sono di rotazione.
b Se il momento delle forze esterne rispetto a Z è identicamente nullo, l'energia cinetica si conserva durante il moto.
c Nessuna delle precedenti.
18 Supponiamo che C sia vincolato a muoversi di rotazione intorno all'asse fisso r con vincolo liscio. Il momento delle forze direttamente applicate rispetto a un punto fisso $Z \in r$ è nullo. Per un moto generico e senza ulteriori ipotesi su r:

a Il momento delle reazioni vincolari rispetto a Z è certamente nullo.
b Il momento delle reazioni vincolari rispetto a Z è certamente non nullo.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Segue dalla teoria che le equazioni globali della dinamica determinano il moto di un rigido.
II: b
È un integrale primo del moto nel caso di moti polari per inerzia, che non sono in genere tutti di rotazione.
III: c
a e b non valgono: il momento delle reazioni è nullo se r è principale in Z, e non lo è se r non è principale in Z.

Prova scritta del 20/07/2022

MECCANICA RAZIONALE 6cfu
ING. MECCANICA

Prova scritta del 20/07/2022

I.1 Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata al piano mobile $\langle \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_3(t)\rangle$ ove

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

e $\alpha > 0$ è costante. Su di essa agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica applicata in A data da $\boldsymbol{F}_A = -kM\overrightarrow{OA}$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e $k > 0$ è costante. Introduciamo le coordinate lagrangiane $(x, y, \varphi) \in \boldsymbol{R}^2 \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_A = x\boldsymbol{u}_1 + z\boldsymbol{u}_3\,, \quad \overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{u}_3)\,.$$

Le equazioni di Lagrange allora sono:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{x} - L\dot{\varphi}\sin\varphi] - \alpha^2 x - \alpha^2 L\cos\varphi + kx = 0\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\dot{z} + L\dot{\varphi}\cos\varphi\Big] + g + kz = 0\,,\\ \frac{4}{3}L\ddot{\varphi} + \ddot{z}\cos\varphi - \ddot{x}\sin\varphi + \alpha^2 x\sin\varphi + \frac{2}{3}L\alpha^2\sin(2\varphi) + g\cos\varphi = 0\,.\end{aligned}$$

01 Esistono moti in cui x, z, φ si mantengono costanti con $x = 0$?
a Sì.
b No, se non per speciali valori dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
02 Esistono moti in cui x, z, φ si mantengono costanti con $\varphi = 0$?
a Sì, per speciali valori dei parametri.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
03 Esistono moti in cui x, z, φ si mantengono costanti con $z = 0$?
a Sì, se $k > 1$.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Si vede subito che $x = 0$, $z = -g/k$, $\varphi = \pm\pi/2$ è soluzione.
II: b
La terza equazione darebbe infatti l'assurdo $g = 0$.
III: c
La seconda equazione darebbe infatti l'assurdo $z = -g/k \neq 0$.

I.2 Un cilindro di raggio R, altezza $2H$ e massa M è vincolato ad avere il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Nel centro A di una delle due basi è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{u}\,,$$

con $\boldsymbol{u}$ versore solidale al cilindro ortogonale a $\overrightarrow{GA}$, e $\alpha \geq 0$ costante.
04 Sia $\alpha > 0$ e il cilindro sia fermo all'istante iniziale. Allora:
a Il moto è una rotazione uniforme.
b Lungo il moto non si conserva l'energia cinetica.
c Nessuna delle precedenti.
05 Sia $\alpha > 0$. Allora il moto può essere una rotazione?
a Solo se il cilindro parte da fermo, cioè $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$.
b Esistono infinite condizioni iniziali diverse per $\boldsymbol{\omega}(0)$ per cui il moto è una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.
06 Sia $\alpha = 0$. Allora si può essere certi che il moto sia una rotazione (escludiamo la quiete)?
a Solo per speciali geometrie del cilindro.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Scegliendo un sistema di riferimento solidale $(G, (\boldsymbol{u}_h))$ con

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = H^{-1}\overrightarrow{GA}\,,$$

si ha

$$\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = H\boldsymbol{u}_3 \times \alpha\boldsymbol{u}_1 = H\alpha\boldsymbol{u}_2\,.$$

Quindi le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3\,,\\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + H\alpha\,,\\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Se i dati iniziali danno $\omega_h(0) = 0$*, si ottiene*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = H\alpha t\boldsymbol{u}_2(t)\,,$$

e $T = I_{11}|\omega_2|^2/2$ *non costante.*
II: b
Dal punto precedente, sono ammissibili tutte le condizioni tali che

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \beta\boldsymbol{u}_2(0)\,, \qquad \beta \in \boldsymbol{R}\,.$$

III: a
Il moto è polare per inerzia; perciò tutti i moti sono rotazioni se e solo se $I_{11} = I_{22} = I_{33}$*.*

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.

07 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\text{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2\,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle precedenti.

08 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\text{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4\,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle precedenti.

09 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\text{L}}(x, y) = -\alpha(x - 1)^2 - \beta(y - 2)^2\,.$$

Allora:
a Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.

c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
L'hessiana è

$$\begin{pmatrix} -2\alpha & -\beta \\ -\beta & -2\gamma \end{pmatrix},$$

con determinante $4\alpha\gamma - \beta^2 > 0$*; perciò è definita negativa.*
II: c
Il punto è di equilibrio instabile, infatti è un punto sella. Se $x = y$*, allora*

$$U^{\text{L}}(x,x) = -(\alpha+\gamma)x^4 - \beta x^2 < 0\,, \quad x \neq 0\,.$$

Se $x = -y$ *invece*

$$U^{\text{L}}(x,-x) = -(\alpha+\gamma)x^4 + \beta x^2 > 0\,, \quad |x| < \sqrt{\beta/(\alpha+\gamma)}\,.$$

III: a
Infatti

$$\nabla U^{\text{L}}(x,y) = 0 \quad \textit{se e solo se} \quad (x,y) = (1,2)\,,$$

con hessiana

$$D^2U^{\text{L}}(1,2) = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 \\ 0 & -2\beta \end{pmatrix}.$$

I.4 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, con curvatura $k(s) > 0$. Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva. Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$. Nel seguito α, $\beta > 0$ sono costanti, il moto non è di quiete e il vincolo scabro va inteso nel senso di Coulomb-Morin.
10 Se $\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{T} + \beta\boldsymbol{N}$, allora sotto quali ulteriori ipotesi $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$?
a Nessuna, è sempre vero.
b Non è vero se il vincolo è scabro, ma è vero se il vincolo è liscio.
c Nessuna delle precedenti.
11 Se la curva è piana e $\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{B}$, allora il moto è indipendente da α.
a In ogni caso.
b Solo se il vincolo è scabro.
c Nessuna delle precedenti.
12 Se $\boldsymbol{F} = \beta\boldsymbol{N}$ e il vincolo è scabro, allora ammettendo che $\boldsymbol{F}$ sia conservativa, si può concludere che:
a L'energia meccanica si conserva.
b L'energia meccanica non si conserva.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Segue subito dalle equazioni di moto $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B}$.
II: c
È vero solo se il vincolo è liscio: in questo caso solo $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ *entra nell'equazione di moto.*

III: c
Non è detto che si conservi, ma può accadere se di fatto $\mathbf{f}_{\text{vin}} = 0$. *Per esempio questo accade se la curva è una circonferenza percorsa con moto uniforme e* $\beta > 0$ *è opportuno.*

I.5 Consideriamo un sistema di n punti materiali soggetti al vincolo olonomo regolare

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,,$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^{n_c}$, $n_c = 3n$, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{n_c+1} \to \boldsymbol{R}^m$.
13 L'ipotesi dei lavori virtuali
a Si può porre solo se i vincoli sono fissi.
b Nel caso di un solo punto vincolato a una curva equivale a quella di vincolo scabro.
c Nessuna delle precedenti.
14 Sia $(\bar{\boldsymbol{z}},\bar{t})$ una configurazione ammissibile. Tutti i sistemi di coordinate lagrangiane in un intorno di $(\bar{\boldsymbol{z}},\bar{t})$
a Hanno lo stesso numero di coordinate.
b Parametrizzano lo stesso sottoinsieme dello spazio delle configurazioni compatibili.
c Nessuna delle precedenti.
15 Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali, in una data configurazione ammissibile le singole reazioni vincolari su ciascun punto
a Sono nulle.
b Possono fare lavoro diverso da zero.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
L'ILV si può porre anche per i vincoli mobili, e nel caso b equivale a quella di vincolo liscio.
II: a
Hanno tutti $\ell = n_c - m$ *coordinate. b in genere non è vera, basta pensare al caso della sfera con coordinate longitudine e colatitudine, o cartesiane.*
III: b
L'ILV dice solo che il lavoro virtuale complessivo delle reazioni vincolari è nullo.

I.6 Un corpo rigido C ha massa M e centro di massa G. I vincoli sotto introdotti soddisfano tutti l'ipotesi dei lavori virtuali.
16 Supponiamo che le sollecitazioni direttamente applicate al corpo abbiano momento totale rispetto a G nullo. Il corpo è vincolato ad avere G fisso.
a È possibile scegliere le condizioni iniziali in modo che il moto sia una rotazione (diversa dalla quiete).
b Il moto non è una rotazione, salvo il caso in cui l'ellissoide d'inerzia in G sia sferico.
c Nessuna delle precedenti.
17 Il moto sia polare per inerzia di polo G. Allora

a Il momento delle quantità di moto di polo G è nullo.
b L'energia cinetica è nulla.
c Nessuna delle precedenti.
18 Il corpo è vincolato ad avere il centro di massa G fisso. Allora l'energia cinetica del corpo è una forma quadratica a coefficienti costanti
a Nelle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ nella terna fissa.
b Nelle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ nella terna solidale.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Basta che all'istante iniziale un asse principale d'inerzia sia diretto come $\boldsymbol{\omega}(0)$.
II: c
Le quantità specificate in a e b devono essere costanti, ma non necessariamente nulle.
III: b
Infatti

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,,$$

e $\boldsymbol{\sigma}_G$ *è costante nella terna solidale.*

Prova scritta del 20/07/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 20/07/2022

I.1 Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata al piano mobile $\langle \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_3(t)\rangle$ ove

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

e $\alpha > 0$ è costante. Su di essa agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica applicata in A data da $\boldsymbol{F}_A = -kM\overrightarrow{OA}$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e $k > 0$ è costante. Introduciamo le coordinate lagrangiane $(x, y, \varphi) \in \boldsymbol{R}^2 \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_A = x\boldsymbol{u}_1 + z\boldsymbol{u}_3\,, \quad \overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{u}_3)\,.$$

Le equazioni di Lagrange allora sono:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{x} - L\dot{\varphi}\sin\varphi] - \alpha^2 x - \alpha^2 L\cos\varphi + kx = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\dot{z} + L\dot{\varphi}\cos\varphi\Big] + g + kz = 0\,,$$
$$\frac{4}{3}L\ddot{\varphi} + \ddot{z}\cos\varphi - \ddot{x}\sin\varphi + \alpha^2 x\sin\varphi + \frac{2}{3}L\alpha^2\sin(2\varphi) + g\cos\varphi = 0\,.$$

01 Esistono moti in cui x, z, φ si mantengono costanti con $x = 0$?
a Sì.
b No, se non per speciali valori dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
02 Esistono moti in cui x, z, φ si mantengono costanti con $\varphi = 0$?
a Sì, per speciali valori dei parametri.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
03 Esistono moti in cui x, z, φ si mantengono costanti con $z = 0$?
a Sì, se $k > 1$.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
Si vede subito che $x = 0$, $z = -g/k$, $\varphi = \pm\pi/2$ è soluzione.
II: b
La terza equazione darebbe infatti l'assurdo $g = 0$.
III: c
La seconda equazione darebbe infatti l'assurdo $z = -g/k \neq 0$.

I.2 Un cilindro di raggio R, altezza $2H$ e massa M è vincolato ad avere il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Nel centro A di una delle due basi è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{u}\,,$$

con $\boldsymbol{u}$ versore solidale al cilindro ortogonale a $\overrightarrow{GA}$, e $\alpha \geq 0$ costante.
04 Sia $\alpha > 0$ e il cilindro sia fermo all'istante iniziale. Allora:
a Il moto è una rotazione uniforme.
b Lungo il moto non si conserva l'energia cinetica.
c Nessuna delle precedenti.
05 Sia $\alpha > 0$. Allora il moto può essere una rotazione?
a Solo se il cilindro parte da fermo, cioè $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$.
b Esistono infinite condizioni iniziali diverse per $\boldsymbol{\omega}(0)$ per cui il moto è una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.
06 Sia $\alpha = 0$. Allora si può essere certi che il moto sia una rotazione (escludiamo la quiete)?

a Solo per speciali geometrie del cilindro.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Scegliendo un sistema di riferimento solidale $(G, (\boldsymbol{u}_h))$ *con*

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = H^{-1}\overrightarrow{GA}\,,$$

si ha

$$\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = H\boldsymbol{u}_3 \times \alpha\boldsymbol{u}_1 = H\alpha\boldsymbol{u}_2\,.$$

Quindi le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3\,,\\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + H\alpha\,,\\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Se i dati iniziali danno $\omega_h(0) = 0$*, si ottiene*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = H\alpha t\boldsymbol{u}_2(t)\,,$$

e $T = I_{11}|\omega_2|^2/2$ *non costante.*
II: b
Dal punto precedente, sono ammissibili tutte le condizioni tali che

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \beta\boldsymbol{u}_2(0)\,, \qquad \beta \in \boldsymbol{R}\,.$$

III: a
Il moto è polare per inerzia; perciò tutti i moti sono rotazioni se e solo se $I_{11} = I_{22} = I_{33}$*.*

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.
07 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\text{L}}(x, y) = -\alpha x^2 - \beta xy - \gamma y^2\,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle precedenti.
08 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\text{L}}(x, y) = -\alpha x^4 - \beta xy - \gamma y^4\,,$$

con $\alpha\gamma > \beta^2/4$. Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.

c Nessuna delle precedenti.
09 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\text{L}}(x,y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^2\,.$$

Allora:
a Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
L'hessiana è

$$\begin{pmatrix} -2\alpha & -\beta \\ -\beta & -2\gamma \end{pmatrix},$$

con determinante $4\alpha\gamma - \beta^2 > 0$*; perciò è definita negativa.*
II: c
Il punto è di equilibrio instabile, infatti è un punto sella. Se $x = y$*, allora*

$$U^{\text{L}}(x,x) = -(\alpha+\gamma)x^4 - \beta x^2 < 0\,, \quad x \neq 0\,.$$

Se $x = -y$ *invece*

$$U^{\text{L}}(x,-x) = -(\alpha+\gamma)x^4 + \beta x^2 > 0\,, \quad |x| < \sqrt{\beta/(\alpha+\gamma)}\,.$$

III: a
Infatti

$$\nabla U^{\text{L}}(x,y) = 0 \quad \textit{se e solo se} \quad (x,y) = (1,2)\,,$$

con hessiana

$$D^2U^{\text{L}}(1,2) = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 \\ 0 & -2\beta \end{pmatrix}.$$

I.4 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, con curvatura $k(s) > 0$. Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva. Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$. Nel seguito α, $\beta > 0$ sono costanti, il moto non è di quiete e il vincolo scabro va inteso nel senso di Coulomb-Morin.
10 Se $\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{T} + \beta\boldsymbol{N}$, allora sotto quali ulteriori ipotesi $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$?
a Nessuna, è sempre vero.
b Non è vero se il vincolo è scabro, ma è vero se il vincolo è liscio.
c Nessuna delle precedenti.
11 Se la curva è piana e $\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{B}$, allora il moto è indipendente da α.
a In ogni caso.
b Solo se il vincolo è scabro.
c Nessuna delle precedenti.
12 Se $\boldsymbol{F} = \beta\boldsymbol{N}$ e il vincolo è scabro, allora ammettendo che $\boldsymbol{F}$ sia conservativa, si può concludere che:
a L'energia meccanica si conserva.

b L'energia meccanica non si conserva.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Segue subito dalle equazioni di moto $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B}$.
II: c
È vero solo se il vincolo è liscio: in questo caso solo $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ *entra nell'equazione di moto.*
III: c
Non è detto che si conservi, ma può accadere se di fatto $\mathbf{f}_{\text{vin}} = 0$. *Per esempio questo accade se la curva è una circonferenza percorsa con moto uniforme e* $\beta > 0$ *è opportuno.*

I.5 Consideriamo un sistema di n punti materiali soggetti al vincolo olonomo regolare

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,,$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^{n_c}$, $n_c = 3n$, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{n_c+1} \to \boldsymbol{R}^m$.
13 Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$
a Dipende dalla scelta delle coordinate lagrangiane.
b Non si può definire se non vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
c Nessuna delle precedenti.
14 Sia $(\bar{\boldsymbol{z}},\bar{t})$ una configurazione ammissibile. Tutti i sistemi di coordinate lagrangiane in un intorno di $(\bar{\boldsymbol{z}},\bar{t})$
a Hanno lo stesso numero di coordinate.
b Parametrizzano lo stesso sottoinsieme dello spazio delle configurazioni compatibili.
c Nessuna delle precedenti.
15 Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali, in una data configurazione ammissibile la reazione vincolare complessiva

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = (\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^1, \ldots, \mathbf{f}_{\text{vin}}{}^n) \in \boldsymbol{R}^{n_c}\,,$$

di fatto
a È nulla.
b Deve appartenere a un sottospazio vettoriale di dimensione $< n_c$, ma non è in genere nulla.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
a non vale, per esempio perché

$$V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} = N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}^{\perp}\,.$$

b non vale perché nella ILV si usa una base di $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$.
II: a
Hanno tutti $\ell = n_c - m$ *coordinate. b in genere non è vera, basta pensare al caso della sfera con coordinate longitudine e colatitudine, o cartesiane.*

III: b
È ristretta a $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ che ha dimensione $m < n_c$.

I.6 Un corpo rigido C ha massa M e centro di massa G. I vincoli sotto introdotti soddisfano tutti l'ipotesi dei lavori virtuali.
16 Supponiamo che le sollecitazioni direttamente applicate al corpo abbiano momento totale rispetto a G parallelo al versore fisso $\boldsymbol{e}_1$. Il corpo è vincolato ad avere G fisso. Il corpo parte da fermo.
a È possibile disporre il corpo all'istante iniziale in modo che il moto sia una rotazione.
b Il moto non è una rotazione, salvo il caso in cui l'ellissoide d'inerzia in G sia sferico.
c Nessuna delle precedenti.
17 Il corpo è vincolato a ruotare intorno all'asse fisso per G parallelo a $\boldsymbol{e}_1$ (con G fisso). Allora:
a $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}$ deve essere parallelo a $\boldsymbol{e}_1$.
b $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}$ non può essere parallelo a $\boldsymbol{e}_1$.
c Nessuna delle precedenti.
18 Il corpo è vincolato ad avere il centro di massa G fisso. Allora l'energia cinetica del corpo è una forma quadratica a coefficienti costanti
a Nelle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ nella terna fissa.
b Nelle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ nella terna solidale.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Basta che all'istante iniziale un asse principale d'inerzia sia diretto come $\boldsymbol{e}_1$.
II: c
Dipende se $\boldsymbol{e}_1$ è o meno principale d'inerzia.
III: b
Infatti

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,,$$

e $\boldsymbol{\sigma}_G$ è costante nella terna solidale.

Prova scritta del 21/09/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 21/09/2022

I.1 Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata al piano mobile $\langle \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_3(t)\rangle$ ove

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

e $\alpha > 0$ è costante. Su di essa agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$. Introduciamo le coordinate lagrangiane $(x, z, \varphi) \in \boldsymbol{R}^2 \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_A = x\boldsymbol{u}_1 + z\boldsymbol{u}_3\,, \quad \overrightarrow{AB} = 2L(\cos\varphi\boldsymbol{u}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{u}_3)\,.$$

01 Vale per il sistema la conservazione dell'energia (nel sistema di riferimento fisso)?
a Sì, ma solo se $\alpha > 0$ assume valori particolari.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
02 Quali relazioni soddisfano le le componenti lagrangiane delle forze nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$?
a

$$Q_x = M\alpha^2(x + L\cos\varphi)\,, \qquad Q_z = 0\,.$$

b

$$Q_\varphi = 0\,, \qquad Q_z = -Mg\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
03 Esistono posizioni di equilibrio relativo al sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$?
a Sì, se $\alpha > 0$ è opportuno.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
No: i vincoli sono mobili e le reazioni vincolari fanno lavoro non nullo.
II: c
Infatti, a parte la forza di Coriolis che ha componenti nulle, le forze sono la forza peso e quella di trascinamento con distribuzione sull'asta

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_T = \frac{M}{2L}\alpha^2(x + s\cos\varphi)\boldsymbol{u}_1\,.$$

Quindi

$$Q_\varphi = -M\alpha^2 L\sin\varphi\Big(x + \frac{2}{3}L\cos\varphi\Big)\,.$$

Inoltre $Q_z = -Mg$.
III: b
La componente lagrangiana delle forze $Q_z = -Mg$ non si annulla mai.

I.2 Un cilindro di raggio R, altezza $2H$ e massa M è vincolato ad avere il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Nel centro A di una delle due basi è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \cos(\beta t)\boldsymbol{u}\,,$$

con $\boldsymbol{u}$ versore solidale al cilindro ortogonale a $\overrightarrow{GA}$, e $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ costanti.
04 Sia $\alpha > 0$ e il cilindro sia fermo all'istante iniziale. Allora:
a Il cilindro resta fermo per ogni $t > 0$.
b Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_G$ è solidale al cilindro.
c Nessuna delle precedenti.
05 Sia $\alpha > 0$ e $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0 \boldsymbol{u}(0)$, con $\omega_0 > 0$. Allora:
a Esistono infiniti istanti t in cui $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$.
b Non esiste alcun istante t in cui $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
06 Sia $\alpha = 0$. Allora:
a Il momento $\boldsymbol{L}_G$ è costante nel sistema fisso e anche solidale al cilindro.
b Il momento $\boldsymbol{L}_G$ è costante nel sistema fisso o solidale al cilindro, ma in genere non ha entrambe le proprietà.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Scegliendo un sistema di riferimento solidale $(G, (\boldsymbol{u}_h))$ *con*

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = H^{-1}\overrightarrow{GA}\,,$$

si ha

$$\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = H\boldsymbol{u}_3 \times \alpha \cos(\beta t)\boldsymbol{u}_1 = H\alpha \cos(\beta t)\boldsymbol{u}_2\,.$$

Quindi le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3\,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + H\alpha \cos(\beta t)\,, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Se i dati iniziali danno $\omega_h(0) = 0$*, si ottiene*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{H\alpha}{I_{11}\beta} \sin(\beta t)\boldsymbol{u}_2(t)\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega} = \frac{H\alpha}{\beta} \sin(\beta t)\boldsymbol{u}_2(t)\,.$$

Perciò $\boldsymbol{\omega}$ *non è sempre nulla;* $\boldsymbol{L}_G$ *non ha modulo costante e quindi non può essere solidale.*
II: b
Dal punto precedente, si ha

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_0\boldsymbol{u}_1 + \frac{H\alpha}{I_{11}\beta} \sin(\beta t)\boldsymbol{u}_2(t)\,, \qquad t > 0\,.$$

III: b
Il moto è polare per inerzia; perciò in tutti i moti $\boldsymbol{L}_G$ è costante (ma non necessariamente solidale).

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è soggetto a forze conservative e vincoli olonomi regolari fissi. Le coordinate lagrangiane sono $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Nel seguito α, β, $\gamma > 0$ sono costanti.
07 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\text{L}}(x, y) = -\alpha x^2 + \beta xy - \gamma y^2 \,.$$

Allora nel punto di equilibrio (0,0) si possono definire le piccole oscillazioni se:
a $\alpha > \beta$.
b $\alpha\gamma > \beta^2$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\text{L}}(x, y) = -\alpha x^2 + \beta x^4 y^6 - \gamma y^4 \,.$$

Allora il punto (0,0):
a È di equilibrio stabile, ma non vi si possono definire le piccole oscillazioni.
b È di equilibrio stabile e vi si possono definire le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle precedenti.
09 Il potenziale lagrangiano sia

$$U^{\text{L}}(x, y) = -\alpha(x-1)^2 - \beta(y-2)^6 + \gamma \,.$$

Allora:
a Esiste un unico punto di equilibrio ed è stabile.
b Esiste un unico punto di equilibrio ed è instabile.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
L'hessiana è

$$\begin{pmatrix} -2\alpha & \beta \\ \beta & -2\gamma \end{pmatrix},$$

con determinante $4\alpha\gamma - \beta^2$; perciò nel caso b è definita negativa, ma non in genere nel caso a.
II: a
Il punto è di equilibrio stabile, infatti è un punto di massimo isolato; ma l'hessiana in (0,0) *vale*

$$\begin{pmatrix} -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi non è definita negativa.
III: a
Infatti

$$\nabla U^{\text{L}}(x, y) = 0 \quad \textit{se e solo se} \quad (x, y) = (1,2)\,,$$

e (1,2) *è evidentemente di massimo isolato (anche se con hessiana solo semidefinita negativa).*

I.4 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, con curvatura $k(s) > 0$. Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva. Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$. Nel seguito α, $\beta > 0$ sono costanti, si assume $\dot{s}(t) \neq 0$ per ogni t e il vincolo scabro va inteso nel senso di Coulomb-Morin.

10 Se $\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{T} + \beta\boldsymbol{B}$, allora sotto quali ulteriori ipotesi $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} = 0$ all'istante t?

a Nessuna, è sempre vero.

b Nelle ipotesi fatte non è mai vero.

c Nessuna delle precedenti.

11 La curva sia una circonferenza e $\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{T}$; il vincolo sia scabro e sia $\dot{s} > 0$. Allora:

a L'energia meccanica si conserva.

b L'equazione di moto assume la forma, per una costante $c > 0$ opportuna,

$$m\ddot{s} = \alpha - c\dot{s}^2 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

12 La curva sia una circonferenza e $\boldsymbol{F} = 0$; il vincolo sia scabro e sia $\dot{s} > 0$. Allora:

a L'energia meccanica si conserva.

b L'energia meccanica non si conserva.

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: b

Segue subito dalle equazioni di moto che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} = m\dot{s}^2 k(s) > 0$.

II: b

a non è vera in genere. La b segue dalle equazioni di moto per il vincolo scabro; vale infatti

$$m\ddot{s} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} - \mu\,\text{sign}(\dot{s})|m\dot{s}^2 k(s)| = \alpha - \mu m k(s)\dot{s}^2 \,.$$

III: b

L'energia meccanica si riduce a quella cinetica. L'equazione di moto è quella vista nel punto precedente con $\alpha = 0$, *e quindi* $\ddot{s} \neq 0$.

I.5 Consideriamo un sistema di n punti materiali soggetti al vincolo olonomo regolare

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0 \,,$$

con $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^{n_c}$, $n_c = 3n$, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{n_c+1} \to \boldsymbol{R}^m$.

13 L'ipotesi dei lavori virtuali

a Determina la forma funzionale dell'energia cinetica lagrangiana del sistema.

b Nel caso di un solo punto vincolato a una superficie equivale a quella di vincolo liscio.

c Nessuna delle precedenti.

14 Sia $(\bar{\boldsymbol{z}},\bar{t})$ una configurazione ammissibile.

a Esiste sempre un sistema di coordinate lagrangiane che parametrizza le configurazioni ammissibili in un intorno di $(\bar{\boldsymbol{z}},\bar{t})$.

b Il numero delle coordinate lagrangiane può dipendere dalla particolare posizione sullo spazio delle configurazioni ammissibili.

c Nessuna delle precedenti.

15 Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali e i vincoli sono fissi, le singole reazioni vincolari su ciascun punto

a Sono sicuramente diverse da zero.

b Possono fare lavoro diverso da zero.

c Nessuna delle precedenti.

Soluzione

I: b

La forma funzionale di $T^{\text{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ è indipendente dalla ILV. Vale invece la b.

II: a

Esistono almeno le coordinate indipendenti date dal teorema del Dini.

III: b

L'ILV dice solo che il lavoro virtuale (e anche totale nel caso dei vincoli fissi) complessivo delle reazioni vincolari è nullo.

I.6 Un corpo rigido C ha massa M e centro di massa G. I vincoli sotto introdotti soddisfano tutti l'ipotesi dei lavori virtuali.

16 Supponiamo che G sia fisso e che le sollecitazioni direttamente applicate al corpo abbiano momento totale rispetto a G nullo; escludiamo il moto di quiete.

a È possibile scegliere $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$ in modo che il moto sia una rotazione.

b Il moto non è una rotazione, salvo il caso in cui l'ellissoide d'inerzia in G sia sferico.

c Nessuna delle precedenti.

17 Il corpo è vincolato a ruotare intorno a un asse fisso r per G (con G fisso). Allora:

a Il versore di r è sempre solidale.

b $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}}$ deve essere parallelo a r.

c Nessuna delle precedenti.

18 Il corpo è libero da vincoli ed è soggetto a una distribuzione di forze $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ non identicamente nulla. Allora

a $\boldsymbol{X}_G(t)$ non può essere costante.

b $\boldsymbol{\omega}(t)$ non può essere costante.

c Nessuna delle precedenti.

Soluzione

I: a

È il caso del moto polare per inerzia. Basta che $\boldsymbol{\omega}(0)$ sia diretto come un asse principale d'inerzia.

II: a

La a è vera perché se il moto è una rotazione, $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione costante e solidale.

La b non vale se r non è principale d'inerzia.
III: c
Infatti per la prima equazione globale se il corpo parte da fermo e $\boldsymbol{F}^{\text{ext}} = 0$ *si ha* $\boldsymbol{v}_G = 0$. *Inoltre se per esempio la distribuzione di forza è il peso, e di nuovo il corpo parte da fermo,* $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$ *per ogni* t.

Prova scritta del 11/10/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 11/10/2022

I.1 Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m)$ e $(\boldsymbol{X}_2, m)$ entrambi di uguale massa m sono vincolati come segue:

- $\boldsymbol{X}_1$ è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,;$$

- $\boldsymbol{X}_2$ è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

  e ad appartenere allo stesso piano che contiene $\boldsymbol{X}_1$ e l'asse x_3.

Sui due punti agiscono le forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}_1} = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) = -\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}_2}\,.$$

Qui k, $R > 0$ sono costanti.
01 Dire quale delle seguenti è una parametrizzazione lagrangiana corretta del sistema.
a

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{R^2 - y_1^2 - y_2^2}\boldsymbol{e}_3\,,$$

$(y_1, y_2) \in \{y_1^2 + y_2^2 = R^2\}$.
b

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}} = R\cos\psi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\psi\boldsymbol{e}_2\,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\text{L}} = R\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3\,,$$

$(\psi, \varphi, \theta) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi) \times (0,\pi)$.

c Nessuna delle precedenti.
02 L'energia cinetica in forma lagrangiana del sistema:
a È costante lungo ciascun moto del sistema.
b Può assumere ogni valore reale positivo, su opportuni moti lagrangiani.
c Nessuna delle precedenti.
03 Supponiamo che i due punti partano da fermi, con $\boldsymbol{X}_1(0) = R\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{X}_2(0) = -R\boldsymbol{e}_1$. Allora:
a L'energia cinetica $T(t)$ soddisfa $T(\bar{t}) > kR^2/2$ per qualche opportuno $\bar{t} > 0$.
b Vale $\boldsymbol{X}_2(t) = \boldsymbol{X}_2(0)$ per ogni t.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
La b non soddisfa il secondo vincolo, e ha 3 coordinate lagrangiane invece che 2. La a non è neanche definita su un aperto.
II: b
I vincoli sono fissi, quindi T^{L} *è una forma quadratica definita positiva nelle* $\dot{\boldsymbol{q}}$*; perciò può assumere ogni valore positivo (o nullo). Non c'è motivo perché debba restare costante lungo i moti.*
III: b
Infatti la posizione iniziale è di equilibrio; il potenziale lagrangiano è

$$U^{\text{L}}(\boldsymbol{q}) = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_1^{\text{L}}(\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{X}_2^{\text{L}}(\boldsymbol{q})|^2 \geq -\frac{k}{2}4R^2\,,$$

e

$$U^{\text{L}}(\boldsymbol{q}(0)) = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_1^{\text{L}}(\boldsymbol{q}(0)) - \boldsymbol{X}_2^{\text{L}}(\boldsymbol{q}(0))|^2 = -\frac{k}{2}4R^2\,,$$

quindi la posizione iniziale è di minimo.

I.2 Il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(\varphi) = Re^{\varphi}(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2)\,, \quad \varphi \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove $R > 0$ è costante. Si assuma come noto che la curvatura k non si annulla. Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{T}\,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante e $\boldsymbol{T}$ denota il versore tangente alla curva nella posizione $\boldsymbol{X}$, ossia

$$\boldsymbol{T}(s(\varphi)) = \frac{\boldsymbol{\Psi}'(\varphi)}{|\boldsymbol{\Psi}'(\varphi)|}\,, \quad {}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,.$$

04 Il vincolo sia liscio e il punto fermo per $t = 0$. Allora durante il moto
a $\ddot{\varphi}$ si mantiene costante.
b $\ddot{\varphi}$ si mantiene positivo almeno in un intervallo $(0, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$ opportuno.
c Nessuna delle precedenti.
05 Il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}|\,,$$

e sia $\boldsymbol{v} \neq 0$.
Si assumano prescritte le condizioni iniziali e quindi determinato univocamente il moto $\boldsymbol{X}$.
a Il moto in genere non coincide con quello che si avrebbe con vincolo liscio.
b Il moto coincide con quello che si avrebbe con vincolo liscio perché la forza applicata è tangente.
c Nessuna delle precedenti.
06 Il vincolo sia liscio. Allora:
a Per tutti i moti $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$.
b Esistono infiniti moti per cui $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_3 \neq 0$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti l'equazione di moto è $m\ddot{s} = \alpha$. *Inoltre*

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = |\boldsymbol{\Psi}'(\varphi)| = \sqrt{2R^2e^{2\varphi}} = \sqrt{2}Re^{\varphi}\,.$$

Quindi

$$\dot{s} = \sqrt{2}Re^{\varphi}\dot{\varphi}\,, \qquad \ddot{s} = \sqrt{2}Re^{\varphi}(\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi})\,.$$

Sostituendo i valori al tempo iniziale si ottiene $\ddot{\varphi}(0) = e^{-\varphi(0)}\alpha/(m\sqrt{2}R) > 0$.
II: a
Si sa che $k \neq 0$; *comunque dai calcoli si ha*

$$k(s(\varphi)) = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}(s(\varphi))\right| = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\boldsymbol{T}(s(\varphi))\right| \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi)\right|^{-1} \neq 0\,,$$

quindi

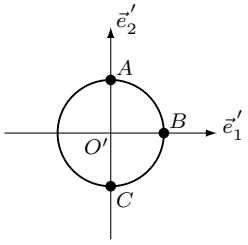
$$\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} = mk\dot{s}^2 \neq 0\,.$$

Perciò anche $\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}} \neq 0$.
III: a
Infatti si ha dalle equazioni di moto

$$0 = \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B} = \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B}\,,$$

con $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_3$.

I.3 Un corpo rigido piano di massa $4M$ è stato ottenuto saldando a un disco omogeneo di raggio R e massa M tre elementi, ciascuno di massa M, nei punti A, B, e C riportati in figura. In figura sono rappresentati il corpo e il riferimento solidale $\{O', \vec{e}_i'\}$.



Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ con O' vincolato a scorrere sull'asse fisso 1 e l'asse tre solidale vincolato a mantenersi costantemente parallelo all'omologo asse tre fisso.

07 Quanto vale il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse 1 del riferimento solidale?

a $\frac{9}{4}MR^2$

b $\frac{1}{6}MR^2$

c Nessuna delle precedenti.

08 Quanto vale il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse solidale parallelo all'asse 3 e passante per il centro di massa?

a $\frac{13}{4}MR^2$

b $\frac{15}{4}MR^2$

c Nessuna delle precedenti.

09 Posto $\overrightarrow{OO'} = q\vec{e}_1$ e detta φ l'anomalia associata all'angolo di primo lato l'asse 1 fisso, secondo lato l'asse 1 solidale e vertice O', si determinino le coordinate c'_i del centro di istantanea rotazione rispetto al riferimento solidale:

a $c'_1 = (\dot{q}/\dot{\varphi})\cos\varphi$, $c'_2 = -(\dot{q}/\dot{\varphi})\sin\varphi$, $c'_3 = 0$

b $c'_1 = (\dot{q}/\dot{\varphi})\sin\varphi$, $c'_2 = (\dot{q}/\dot{\varphi})\cos\varphi$, $c'_3 = 0$

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: a

Il contributo del disco è $MR^2/4$. Gli elementi in A e C contribuiscono MR^2.

II: a

Il centro di massa G è tale che $\overrightarrow{O'G} = (R/4)\vec{e}'_1$. Al momento d'inerzia relativo all'asse 3 solidale il disco contribuisce con $MR^2/2$ e i tre elementi con MR^2, quindi si ha $I'_{O',33} = 7MR^2/2$. Dal teorema di Huygens $I'_{G,33} = I'_{O',33} - 4M(R^2/16)$.

III: b

Si cerca il punto C tale che $0 = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'C}$, con $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}'_3$, e quindi

$$0 = \dot{q}\vec{e}_1 + \dot{\varphi}\vec{e}'_3 \times (c'_1\vec{e}'_1 + c'_2\vec{e}'_2) = \dot{q}(\cos\varphi\vec{e}'_1 - \sin\varphi\vec{e}'_2) + \dot{\varphi}c'_1\vec{e}'_2 - \dot{\varphi}c'_2\vec{e}'_1.$$

I.4 Dire quali dei seguenti vincoli per due punti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{u}_1 + z_2\boldsymbol{u}_2 + z_3\boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{u}_1 + z_5\boldsymbol{u}_2 + z_6\boldsymbol{u}_3\,,$$

sono olonomi regolari nell'aperto $A \subset \boldsymbol{R}^6$ indicato.

10 Qui $A = \boldsymbol{R}^6$.

a

$$z_3 + (z_1^2 + z_2^2)^2 = 0\,, \quad z_6 + (z_4^2 + z_5^2)^4 = 0\,.$$

b

$$z_1^4 - 3z_3^2 = 0\,, \quad (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 - R^2 = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

11 Qui $A = \boldsymbol{R}^6$.

a

$$z_1 + z_5 = 0\,, \quad z_2 - 2\sqrt{|z_4|} = 0\,, \quad z_3 - 2z_6 = 0\,.$$

b

$$z_1 - 2z_4 = 0\,, \quad e^{(2z_4 - z_1)^3} \operatorname{arctg} z_3 - \pi = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

12 Qui $A = \{z_2 > z_3\}$.

a

$$z_1 - \sqrt[4]{z_2 - z_3} = 0\,, \quad z_4 - \cos(z_2) = 0\,.$$

b

$$z_1^2 + z_2^2 - (z_4^2 + z_5^2 + z_6^2) = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: a

Nel caso b il gradiente del primo vincolo si annulla se $z_1 = z_4 = 0$. Nel caso a invece i due gradienti sono sempre linearmente indipendenti.

II: c

In a il secondo vincolo non è derivabile; in b non esistono configurazioni compatibili.

III: a

Nel caso a i due gradienti sono sempre linearmente indipendenti. Nel caso b il gradiente del vincolo si annulla ove

$$z_1 = z_2 = z_4 = z_5 = z_6 = 0\,.$$

I.5 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie regolare S. Il vincolo sia liscio.

Sul punto agisce la forza direttamente applicata conservativa $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, di potenziale $U(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$.

Denotiamo con $\boldsymbol{\nu}$ la normale alla superficie.

13 L'energia meccanica $T - U$:

a Se S è un compatto deve mantenersi limitata su ciascun moto.

b Esistono sia casi in cui si conserva che casi in cui non si conserva.

c Nessuna delle precedenti.

14 Supponiamo che

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \quad \text{sia parallela a} \quad \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})\,, \quad \text{per ogni } \boldsymbol{x} \in S.$$

Allora:

a Tutti i punti di S sono di equilibrio.

b È impossibile che questo si verifichi.

c Nessuna delle precedenti.

15 Supponiamo che la traiettoria di $\boldsymbol{X}$ sia data da una curva regolare

$$\{\boldsymbol{\psi}(s) \mid s \in I\} \subset S\,,$$

con s ascissa curvilinea e terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ (assumiamo che la curvatura k sia positiva). Allora:
a Si deve avere necessariamente $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{\nu}$.
b La velocità soddisfa $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Certamente l'energia si conserva. Inoltre U è limitato su S perché è continuo su un compatto. Infine

$$0 \leq T \leq E + U \leq \textit{costante}\,.$$

II: a
Infatti in questo caso S è una superficie di livello per U e tutti i suoi punti sono critici per il potenziale lagrangiano.
III: b
La a non vale, basta considerare il caso di una circonferenza inclusa nel piano. Tuttavia vale b perché la velocità $\boldsymbol{v}$ è parallela a $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{T}$ è tangente a S.

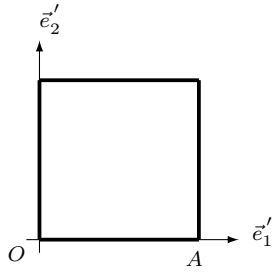
I.6 Un corpo rigido di massa M a simmetria giroscopica è soggetto al solo peso ed è vincolato in modo ideale a muoversi mantenendo fisso rispetto all'osservatore terrestre un punto del suo asse diverso dal centro di massa. Si considera un riferimento fisso con asse tre verticale ascendente e origine nel punto fisso e un riferimento solidale con medesima origine e asse tre coincidente con l'asse di simmetria del giroscopio.
16 Si individui un integrale primo del moto.
a L'energia meccanica totale.
b L'energia cinetica.
c Nessuna delle precedenti.
17 Cosa si può dire del moto qualunque sia il dato iniziale?
a È rotatorio.
b È una precessione.
c Nessuna delle precedenti.
18 Il momento angolare è una costante del moto?
a Sì.
b No, ma lo sono le sue proiezioni sugli assi 3 fisso e solidale.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Segue dal fatto che il vincolo è perfetto e il peso è conservativo.
II: c
In generale il moto della trottola non è n'é rotatorio n'é una precessione.
III: b
Si dimostra calcolando le derivate temporali di $\vec{L}_O \cdot \vec{e}_3$ e $\vec{L}_O \cdot \vec{e}_3'$.

Prova scritta del 00/12/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 00/12/2022

I.1 Un sistema olonomo a vincoli regolari e lisci è costituito da una lamina quadrata omogenea di massa M e lato $2L$ e da un elemento di massa M. In figura è rappresentata la lamina e il riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i'\}$. Si nota che $\overrightarrow{OA} = 2L\vec{e}_1'$.



Il riferimento terrestre $\{O, \vec{e}_i\}$ ha asse 3 verticale ascendente. La lamina si muove mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso. L'elemento, la cui posizione è indicata con X, è vincolato a muoversi sull'asse 1 fisso.
La sollecitazione attiva è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante k agente tra i punti X e A.
Per descrivere il moto del sistema rispetto al riferimento terrestre si usino come coordinate lagrangiane l'anomalia φ di primo e secondo lato gli assi 1 fisso e solidale orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3 e l'ascissa q definita dalla relazione $\overrightarrow{OX} = q\vec{e}_1$.

01 Detto C il centro di massa della lamina quadrata, si ha
a $\overrightarrow{OC} = L(\cos\varphi - \sin\varphi)\vec{e}_1 + L(\cos\varphi + \sin\varphi)\vec{e}_2$.
b $\overrightarrow{OC} = \frac{L}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi)\vec{e}_1 + \frac{L}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi)\vec{e}_2$.
c Nessuna delle precedenti.

02 Quanto vale il momento d'inerzia della lamina quadrata rispetto all'asse coordinato 1 del riferimento solidale in figura?
a $\frac{1}{6}ML^2$.
b $\frac{4}{3}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.

03 Quanto vale il prodotto d'inerzia della lamina quadrata relativo agli assi solidali 1 e 2?
a $-ML^2$.
b $-\frac{1}{4}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.

04 Quanto vale il momento angolare $\vec{L}_O$?
a $\frac{4}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3$.
b $\frac{8}{3}ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_3 - ML^2\dot{\varphi}\vec{e}_1$.
c Nessuna delle precedenti.
05 Cosa si può dire a proposito della sollecitazione esplicata dal vincolo sulla lamina quadrata in corrispondenza di un qualsiasi moto del sistema?
a $f_3^{\mathrm{v}} = 0$.
b $M_{O,3}^{\mathrm{v}} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
06 Quanto vale l'energia cinetica del sistema?
a $\frac{4}{3}ML^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}^2$.
b $\frac{8}{3}ML^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}\dot{\varphi}$.
c Nessuna delle precedenti.
07 Quanto vale l'energia potenziale della sollecitazione conservativa agente sul sistema?
a $\frac{1}{2}kq^2 - 2kLq\cos\varphi$.
b $\frac{1}{2}kq^2 - 2kL^2\cos\varphi$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Quante sono le configurazioni di equilibrio distinte a meno di ripetizioni periodiche?
a 3.
b 2.
c Nessuna delle precedenti.
09 La configurazione $q = 0$ e $\varphi = \pi/2$ è
a di equilibrio stabile.
b di equilibrio instabile.
c Nessuna delle precedenti.
10 Se il sistema viene posto con atto di moto nullo nella configurazione $q = -2L$ e $\varphi = \pi$, il momento totale della sollecitazione agente sulla lamina risulta costantemente uguale a
a $+MgL\vec{e}_1 + MgL\vec{e}_2$.
b $-MgL\vec{e}_1 + MgL\vec{e}_2$.
c Nessuna delle precedenti.
11 Si consideri il sistema costituito dalla sola lamina. Si scelgano come coordinate locali

$$x_{1O}\,, x_{2O}\,, x_{3O}\,, x_{1Z}\,, x_{2Z}\,, x_{1A}\,,$$

ove Z è il punto solidale di coordinate solidali $(0{,}0{,}R)$ nel sistema solidale assegnato (ossia un punto sull'asse ortogonale in O al piano della lamina). Allora i vincoli regolari sulla lamina sono esprimibili da:
a

$$x_{1O} = 0\,, \quad x_{2O} = 0\,, \quad x_{3O} = 0\,, \quad x_{1O} - x_{1Z} = 0\,, \quad x_{2O} - x_{2Z} = 0\,.$$

b

$$x_{1O} = 0\,, \quad x_{2O} = 0\,, \quad x_{3O} = 0\,, \quad x_{1O} - x_{1Z} = 0\,, \quad x_{3A} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
II: b
III: a
IV: c
V: b
VI: a
VII: a
VIII: c
IX: b
X: b
XI: a

Prova scritta del 00/12/2022

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 00/12/2022

I.1 Una circonferenza materiale γ di raggio R, centro G e massa m è vincolata a muoversi giacendo sul piano verticale $x_3 = 0$, ove $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ è il sistema di riferimento fisso con coordinate x_h. Inoltre il punto medio Q del raggio $\overrightarrow{GA}$ ove A è un punto di γ (solidale con essa) è fisso e coincidente con $\boldsymbol{X}_O$. Si noti che Q è solidale con la circonferenza, la quale perciò ruota intorno all'asse x_3. Denotiamo con $(\boldsymbol{X}_Q, (\boldsymbol{u}_h))$ il sistema di riferimento solidale a γ con $\boldsymbol{u}_1 = 2\overrightarrow{QG}/R$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$, I momenti I_{hk} sono quelli relativi a questo sistema di riferimento solidale.
Un punto materiale $(\boldsymbol{X}_P, M)$ è vincolato a muoversi su γ.
Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_1$; nel punto A è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{GA}\,,$$

con $k > 0$ costante assegnata.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi/2{,}3\pi/2) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G^{\text{L}}(\theta) = \frac{R}{2}(\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2)\,,$$
$$\boldsymbol{X}_P^{\text{L}}(\varphi, \theta) = \frac{R}{2}(\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2) + R(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2)\,.$$

01 I momenti d'inerzia principali della circonferenza γ in Q sono:
a

$$\frac{mR^2}{2}\,, \quad \frac{mR^2}{2}\,, \quad mR^2\,.$$

b

$$\frac{7mR^2}{4}\,, \quad \frac{3mR^2}{4}\,, \quad mR^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
02 Il momento d'inerzia della circonferenza rispetto all'asse x_1 è:
a $I_{11}(\cos\theta)^2 + I_{22}(\sin\theta)^2$.
b $I_{11}(\sin\theta)^2 + I_{22}(\cos\theta)^2$.
c Nessuna delle precedenti.
03 L'energia cinetica della circonferenza è:
a

$$\frac{I_{33}}{2}\dot\theta^2 + \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2\,.$$

b

$$\frac{I_{33}}{2}\dot\theta^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
04 L'energia cinetica del punto materiale è:
a

$$MR^2\Big(\frac{\dot\theta^2}{8} + \frac{\dot\varphi^2}{2}\Big)\,.$$

b

$$MR^2\Big(\frac{\dot\theta^2}{8} + \frac{\dot\varphi^2}{2} + \frac{\dot\theta\dot\varphi}{2}\cos(\varphi-\theta)\Big)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
05 Le componenti lagrangiane della forza peso sono:
a

$$Q_\varphi^{\text{peso}} = MgR\sin\varphi\,, \qquad Q_\theta^{\text{peso}} = (m+M)g\frac{R}{2}\sin\theta\,.$$

b

$$Q_\varphi^{\text{peso}} = mgR\sin\varphi\,, \qquad Q_\theta^{\text{peso}} = (m+M)gR\sin\theta\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
06 Le componenti lagrangiane della forza $\boldsymbol{F}_A$ sono:
a

$$Q_\varphi^A = -\frac{kR^2}{2}\,, \qquad Q_\theta^A = \frac{kR^2}{2}\,.$$

b

$$Q_\varphi^A = 0\,, \qquad Q_\theta^A = \frac{kR^2}{2}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

07 Il momento angolare $\boldsymbol{L}_G^\gamma$ della circonferenza, rispetto al suo centro G, vale:

a

$$I_{33}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_3\,.$$

b

$$I_{33}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_3 + m\boldsymbol{X}_G \times \boldsymbol{v}_G\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

08 Si assuma $kR = (m+M)g$. Le posizioni di equilibrio del sistema (a meno di ripetizioni periodiche) sono in numero di

a 1.

b 2.

c Nessuna delle precedenti.

09 La terza equazione di Eulero (nel polo Q) della circonferenza materiale si scrive come

$$I_{33}\ddot{\theta} = M_3\,.$$

Il momento delle forze esterne M_3

a Contiene solo il momento di $\boldsymbol{F}_A$ e del peso.

b Contiene anche il momento (non nullo) di alcune forze vincolari.

c Nessuna delle precedenti.

10 Si consideri il sistema costituito dalla sola circonferenza γ. Si scelgano come coordinate locali

$$x_{1Q}\,, x_{2Q}\,, x_{3Q}\,, x_{1Z}\,, x_{2Z}\,, x_{1A}\,,$$

ove Z è il punto solidale di coordinate solidali $(0{,}0{,}R)$ nel sistema solidale assegnato (ossia un punto sull'asse ortogonale in Q al piano della circonferenza). Allora i vincoli regolari sulla circonferenza sono esprimibili da:

a

$$x_{1Q} = 0\,, \quad x_{2Q} = 0\,, \quad x_{3Q} = 0\,, \quad x_{1Q} - x_{1Z} = 0\,, \quad x_{2Q} - x_{2Z} = 0\,.$$

b

$$x_{1Q} = 0\,, \quad x_{2Q} = 0\,, \quad x_{3Q} = 0\,, \quad x_{1Q} - x_{1Z} = 0\,, \quad x_{3A} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

11 Nel sistema assegnato di circonferenza e punto i vincoli sono fissi o mobili?

a Sono mobili, ma solo nel sistema fisso.

b Sono fissi.

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: c

Il sistema di riferimento solidale dato è principale e

$$I_{11} = \frac{mR^2}{2}\,, \qquad I_{22} = \frac{3mR^2}{4}\,, \qquad I_{33} = \frac{5mR^2}{4}\,.$$

II: a
Il sistema di riferimento solidale dato è principale e $\boldsymbol{e}_1 = \cos\theta \boldsymbol{u}_1 - \sin\theta \boldsymbol{u}_2$.
III: b
Segue dalla teoria, in un moto polare.
IV: b
Segue da

$$\boldsymbol{v}_P = R\Big(-\frac{\dot\theta}{2}\cos\theta - \dot\varphi\cos\varphi\Big)\boldsymbol{e}_1 + R\Big(\frac{\dot\theta}{2}\sin\theta + \dot\varphi\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2\,.$$

V: a
Segue da

$$U^{\text{L}}_{\text{peso}} = -mgx_{1G} - Mgx_{1P} = -mg\frac{R}{2}\cos\theta - Mg\Big(\frac{R}{2}\cos\theta + R\cos\varphi\Big)\,.$$

VI: b
Infatti

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_A = -\boldsymbol{X}^{\text{L}}_G = -\frac{R}{2}(\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2)\,, \quad \boldsymbol{F}_A = -kR\boldsymbol{u}_2\,.$$

VII: c
Infatti essendo G *il centro di massa*

$$\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega} = \text{diag}(I^G_{hh})(0,0,\dot\theta)^{\text{t}} = I^G_{33}\dot\theta\boldsymbol{u}_3\,,$$

ma $I^G_{33} = I_{33} - m(R/2)^2$. *Quindi a non vale. Inoltre*

$$m\boldsymbol{X}_G \times \boldsymbol{v}_G = m\frac{R^2}{4}\dot\theta\boldsymbol{u}_3\,,$$

Perciò

$$I_{33}\dot\theta\boldsymbol{u}_3 + m\boldsymbol{X}_G\times\boldsymbol{v}_G = \Big(I_{33} + m\frac{R^2}{4}\Big)\dot\theta\boldsymbol{u}_3 \neq I^G_{33}\dot\theta\boldsymbol{u}_3\,.$$

Quindi non vale neanche b.
VIII: b
Infatti annullando le componenti lagrangiane delle forze si ha

$$Q_\varphi = MgR\sin\varphi = 0\,,$$
$$Q_\theta = (m+M)g\frac{R}{2}\sin\theta + \frac{kR^2}{2} = 0\,,$$

da cui $\varphi \in \{0,\pi\}$ *e* $\theta = -\pi/2$.
IX: b
Contiene anche il momento della forza vincolare del punto materiale sulla circonferenza.
X: a
Infatti per imporre che tutta la circonferenza sia sul piano $x_3 = 0$ *è necessario e sufficiente che l'asse solidale* $\boldsymbol{u}_3$ *sia ortogonale a tale piano, ossia i vincoli 4 e 5 di a. In b sarebbe possibile alla circonferenza ruotare intorno al diametro per AQ, se viene posizionato parallelo a* $\boldsymbol{e}_2$. *A parte questo,* x_{3A} *non fa parte dell'insieme scelto di coordinate locali.*

XI: b
Sono fissi perché non c'è alcuna esplicita dipendenza dal tempo; il punto P è vincolato da (usando le coordinate locali per la circonferenza del punto precedente)

$$x_{3P} = 0\,, \qquad (x_{1P} + x_{1A})^2 + (x_{2P} - \sqrt{(R/2)^2 - x_{1A}^2})^2 - R^2 = 0\,,$$

ove $x_{2A} < 0$, per esempio. Infatti $\boldsymbol{X}_G = -\boldsymbol{X}_A$.

Prova scritta del 26/01/2023

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 26/01/2023

I.1 Un sistema olonomo a vincoli regolari e lisci è costituito da un corpo rigido C e un elemento materiale P dato da $(\boldsymbol{X}_P, m)$. Il corpo rigido C è costituito da una lamina quadrata $EFHK$ omogenea, con lato L e massa M, cui è fissato rigidamente un elemento materiale di massa M nel vertice E.
Il corpo C è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$ (le x_i indicano le coordinate nel sistema di riferimento fisso). Inoltre il vertice H, che è opposto a E, è vincolato nell'origine O del sistema di riferimento fisso.
L'elemento P è vincolato ad appartenere all'asse fisso x_2.
La sollecitazione direttamente applicata è costituita dal peso diretto come $-\boldsymbol{e}_2$ e dalle forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_P = -k(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_E)\,, \qquad \text{applicata in } P,$$
$$\boldsymbol{F}_E = -k(\boldsymbol{X}_E - \boldsymbol{X}_P)\,, \qquad \text{applicata a } C \text{ nel vertice } E.$$

Qui $k > 0$ è una costante assegnata.
Si usi il sistema di riferimento solidale a C dato da $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, con

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{HE}}{\sqrt{2}L}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

In questo sistema le coordinate dei vertici della lamina quadrata sono

$$E : (\sqrt{2}L,0,0)\,; \quad F : \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}L, -\frac{\sqrt{2}}{2}L, 0\Big)\,;$$
$$H : (0,0,0)\,; \quad K : \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}L, \frac{\sqrt{2}}{2}L, 0\Big)\,.$$

Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, y) \in (-\pi, \pi) \times \boldsymbol{R}$ in modo che

$$\boldsymbol{u}_1 = \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(y) = y\boldsymbol{e}_2 \,.$$

01 Quali sono le coordinate del centro di massa del corpo C rispetto al riferimento solidale?
a $(0, L, 0)$.
b $(\frac{3}{4}\sqrt{2}L, 0, 0)$.
c Nessuna delle precedenti.
02 Quanto vale il momento d'inerzia del corpo C rispetto all'asse 3 solidale?
a $\frac{8}{3}ML^2$.
b $-\frac{31}{12}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
03 Quanto vale il prodotto d'inerzia del corpo C relativo agli assi solidali 1 e 2?
a $\frac{7}{12}ML^2$.
b $-\frac{7}{12}ML^2$.
c Nessuna delle precedenti.
04 Quanto vale il momento angolare del corpo C usando come polo di riduzione l'origine O?
a $\frac{8}{3}ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$.
b $\frac{8}{3}ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 - \frac{7}{12}ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_1$.
c Nessuna delle precedenti.
05 Quanto vale la componente lungo $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare agente sul corpo C in corrispondenza di un generico moto del sistema?
a $\frac{8}{3}ML^2\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$.
b $\frac{8}{3}ML^2\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 + 2MgL\boldsymbol{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.
06 Quanto vale il potenziale lagrangiano delle forze direttamente applicate a C?
a

$$U_C^{\mathrm{L}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}MgL\sin\varphi - \frac{k}{2}[2L^2 + y^2 - 2\sqrt{2}Ly\sin\varphi] \,.$$

b Non esiste.
c Nessuna delle precedenti.
07 Le equazioni di Lagrange del sistema sono

$$I_{33}^O\ddot{\varphi} + \frac{3\sqrt{2}}{2}MgL\cos\varphi - k\sqrt{2}Ly\cos\varphi = 0 \,,$$
$$m\ddot{y} + ky - k\sqrt{2}L\sin\varphi + mg = 0 \,.$$

Sono possibili moti diversi dalla quiete in cui
a y è costante, ma φ non lo è.
b φ è costante, ma y non lo è.

c Nessuna delle precedenti.

08 Quanto vale la forza vincolare agente sull'elemento P per un generico moto del sistema?

a $-\sqrt{2}kL\cos\varphi\boldsymbol{e}_1$.

b 0.

c Nessuna delle precedenti.

09 Quale delle seguenti quantità si conserva lungo ciascun moto?

a L'energia meccanica.

b Il momento angolare di C di polo O.

c Nessuna delle precedenti.

10 Quale delle segenti affermazioni è vera?

a Ciascun moto $\boldsymbol{X}_P^{\text{L}}$ è limitato, ma non esiste una limitazione che valga per tutti i moti.

b Esiste una costante che limita tutti i moti $\boldsymbol{X}_P^{\text{L}}$.

c Nessuna delle precedenti.

11 Il numero delle posizioni di equilibrio varia secondo la scelta dei parametri. Al massimo esse sono

a 2.

b Un numero finito maggiore di 2.

c Nessuna delle precedenti.

12 La posizione di equilibrio con $\varphi = -\pi/2$, $y = -\sqrt{2}L - mg/k$ è

a stabile per ogni scelta dei parametri.

b instabile per ogni scelta dei parametri.

c Nessuna delle precedenti.

13 La posizione di equilibrio con $\varphi = \pi/2$, $y = \sqrt{2}L - mg/k$ è

a stabile per ogni scelta dei parametri.

b instabile per ogni scelta dei parametri.

c Nessuna delle precedenti.

14 È vero che se $(\varphi(t), y(t))$, $t \in \boldsymbol{R}$, è una soluzione delle equazioni di Lagrange, allora anche $(\varphi(t+T), y(t+T))$, $t \in \boldsymbol{R}$, lo è? (Qui $T > 0$ è una costante fissata.)

a Se e solo se la soluzione è periodica e T è un periodo.

b Sì, per ogni soluzione e per ogni $T > 0$.

c Nessuna delle precedenti.

15 Si assumano come coordinate locali del sistema

$$x_{1H}\,, x_{2H}\,, x_{3H}\,, x_{1E}\,, x_{3E}\,, x_{3F}\,, x_{1P}\,, x_{2P}\,, x_{3P}\,.$$

Allora i vincoli olonomi regolari assegnati sul sistema in termini delle coordinate locali sono dati da

a

$$x_{1H}^2 + x_{2H}^2 + x_{3H}^2 = 0\,, x_{1E} - \sqrt{2}L\cos\varphi = 0\,, x_{3E} = 0\,,$$
$$x_{3F} = 0\,, x_{1P} = 0\,, x_{2P} - y = 0\,, x_{3P} = 0\,.$$

b

$$x_{1H} = 0\,, x_{2H} = 0\,, x_{3H} = 0\,, x_{3E} = 0\,, x_{3F} = 0\,, x_{1P} = 0\,, x_{3P} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Si ha infatti

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2M}\Big(\frac{\sqrt{2}L}{2}M\boldsymbol{u}_1 + \sqrt{2}LM\boldsymbol{u}_1\Big) = \frac{3\sqrt{2}}{4}L\boldsymbol{u}_1\,.$$

II: a
Calcoliamo prima il momento della lamina quadrata omogenea rispetto all'asse ad essa ortogonale nel centro di massa (ossia geometrico) Z. Per motivi di simmetria materiale ortogonale $I_{11}^{\mathrm{lam},Z} = I_{22}^{\mathrm{lam},Z}$ e quindi tutti i versori del piano della lamina sono principali in Z. Dunque possiamo equivalentemente calcolare il momento I rispetto all'asse comune a due lati opposti che vale

$$I = \int_{-L/2}^{L/2}\int_{-L/2}^{L/2} \frac{M}{L^2}x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{M}{L}\frac{2L^3}{24} = \frac{ML^2}{12}\,.$$

Dunque per il teorema di Huygens

$$I_{11}^O = I_{11}^{\mathrm{lam},O} = I\,. \qquad I_{22}^O = I_{22}^{\mathrm{lam},O} + M(\sqrt{2}L)^2 = I + M\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}L\Big)^2 + M(\sqrt{2}L)^2\,,$$

e infine

$$I_{33}^O = I_{11}^O + I_{22}^O = \frac{8}{3}ML^2\,.$$

III: c
In O gli assi di $\mathcal{S}$ sono principali, per considerazione di simmetria materiale ortogonale. Quindi il prodotto d'inerzia richiesto è nullo.
IV: a
Il moto di C è polare, quindi

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\sigma}_O(\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3) = \dot{\varphi}I_{33}^O\boldsymbol{u}_3\,.$$

V: c
I vincoli sono perfetti, dunque la componente indicata è nulla.
VI: a
Il potenziale delle sollecitazioni direttamente applicate è

$$U_C = -2Mgx_{2G} - \frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_E|^2\,.$$

Dunque per trovare il potenziale lagrangiano occorre calcolare

$$x_{2G}^{\mathrm{L}} = \boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}}\cdot\boldsymbol{e}_2 = \frac{3\sqrt{2}}{4}L\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 = \frac{3\sqrt{2}}{4}L\sin\varphi\,,$$

e

$$|\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_E|^2 = (\sqrt{2}L\cos\varphi)^2 + (y - \sqrt{2}L\sin\varphi)^2 = 2L^2 + y^2 - 2\sqrt{2}Ly\sin\varphi\,.$$

Dunque si ha infine

$$U_C^{\text{L}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} MgL \sin\varphi - \frac{k}{2}[2L^2 + y^2 - 2\sqrt{2}Ly \sin\varphi] \,.$$

VII: b
[Premessa: ricaviamo le equazioni di Lagrange] L'energia cinetica di C è

$$T_C^{\text{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} I_{33}^O \dot{\varphi}^2 = \frac{4}{3} ML^2\dot{\varphi}^2 \,,$$

e quella del punto vale $m\dot{y}^2/2$. Poiché il potenziale lagrangiano completo vale

$$U^{\text{L}} = U_C^{\text{L}} - mgy \,,$$

la lagrangiana vale

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_{33}^O \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} MgL\sin\varphi - \frac{k}{2}[2L^2 + y^2 - 2\sqrt{2}Ly\sin\varphi] - mgy \,.$$

Da qui si trovano le equazioni di Lagrange.
Se y è costante, la seconda equazione di Lagrange implica che anche φ lo è. Se invece φ è costante, la prima equazione di Lagrange (se y non è costante) implica che $\varphi = \pm\pi/2$, quindi la seconda equazione diviene una delle due

$$m\ddot{y} + ky \mp k\sqrt{2}L + mg = 0 \,,$$

che determina univocamente y date le condizioni iniziali.
VIII: a
Si calcola, usando per esempio le equazioni di Lagrange,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{vin}}{}^P &= m\ddot{y}\boldsymbol{e}_2 + mg\boldsymbol{e}_2 + k(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_E) \\ &= m\ddot{y}\boldsymbol{e}_2 + mg\boldsymbol{e}_2 + k[-\sqrt{2}L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + (y - \sqrt{2}L\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2] \\ &= -k\sqrt{2}L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 \,. \end{aligned}$$

IX: a
Infatti le sollecitazioni direttamente applicate sono conservative e i vincoli sono lisci e fissi. Il momento angolare di C non si conserva, come è chiaro dall'espressione trovata sopra.
X: a
La b certamente non è vera, perché si possono prendere $y(0)$ grandi a piacere in valore assoluto. Dalla conservazione dell'energia si ha

$$-U^{\text{L}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} MgL\sin\varphi + \frac{k}{2}[2L^2 + y^2 - 2\sqrt{2}Ly\sin\varphi] + mgy \le E \,.$$

Quindi

$$y^2 \le \frac{2E}{k} - 2L^2 + \frac{3\sqrt{2}}{k} MgL + \Big(2\sqrt{2}L + \frac{2mg}{k}\Big)|y| \,,$$

che evidentemente vale solo in un intervallo limitato di y.

XI:
Le posizioni di equilibrio si determinano mediante il sistema del gradiente:

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} MgL\cos\varphi + k\sqrt{2}Ly\cos\varphi = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial y} = -ky + k\sqrt{2}L\sin\varphi - mg = 0\,.$$

La prima equazione è risolta in entrambi i casi seguenti:

$$\cos\varphi = 0\,, \qquad y = \frac{3}{2k}Mg\,.$$

Dunque, usando anche la seconda equazione, si hanno le seguenti posizioni di equilibrio (nel dominio indicato di variazione delle coordinate lagrangiane):

$$\Big(\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}L - \frac{mg}{k}\Big)\,, \qquad \Big(-\frac{\pi}{2}, -\sqrt{2}L - \frac{mg}{k}\Big)\,, \qquad \Big(\varphi_0, \frac{3}{2k}Mg\Big)\,, \qquad \Big(\pi - \varphi_0, \frac{3}{2k}Mg\Big)\,,$$

ove le ultime due posizioni esistono solo se è definito

$$\varphi_0 = \arcsin\Big(\frac{mg + \frac{3}{2}Mg}{k\sqrt{2}L}\Big)\,.$$

Dunque si possono avere 2 o 4 posizioni di equilibrio. In realtà, con l'informazione data dalla domanda, e dato che le due posizioni con $\varphi = \pm\pi/2$ sono intuitivamente evidenti, si vede subito che a non vale.
XII: a
Calcoliamo la matrice hessiana del potenziale lagrangiano:

$$D^2U^{\text{L}}(\varphi, y) = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2}MgL\sin\varphi - k\sqrt{2}Ly\sin\varphi & k\sqrt{2}L\cos\varphi \\ k\sqrt{2}L\cos\varphi & -k \end{pmatrix}\,.$$

La posizione indicata dà

$$D^2U^{\text{L}} = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2}MgL - 2kL^2 - \sqrt{2}mgL & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

che è definita negativa per ogni scelta dei parametri. Quindi la posizione è di massimo isolato e quindi stabile.
XIII: c
La posizione indicata dà

$$D^2U^{\text{L}} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2}MgL - 2kL^2 + \sqrt{2}mgL & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

che è definita negativa solo se

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}MgL + \sqrt{2}mgL < 2kL^2\,,$$

ed è indefinita se vale la disuguaglianza stretta opposta. Quindi vale c.

XIV: b
Il sistema di equazioni di Lagrange è autonomo, quindi la proprietà di traslabilità nel tempo delle soluzioni vale sempre.
XV: b
Tutte le equazioni di a sono soddisfatte, ma la prima impedisce che il vincolo sia regolare e inoltre non si possono avere le coordinate lagrangiane nelle equazioni scritte nelle coordinate locali. Invece la b è la scelta corretta.

Prova scritta del 20/02/2023

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 20/02/2023

I.1 Un sistema olonomo a vincoli regolari e lisci è costituito da un corpo rigido C e un elemento materiale P dato da $(\boldsymbol{X}_P, m)$. Il corpo rigido C è costituito da un disco omogeneo, con raggio R e massa M.
Il corpo C è vincolato a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1 (le x_i indicano le coordinate nel sistema di riferimento fisso). Inoltre il punto A è vincolato nell'origine O del sistema di riferimento fisso.
L'elemento P è vincolato ad appartenere alla circonferenza fissa

$$x_2^2 + x_3^2 = R^2\,, \qquad x_1 = 0\,.$$

Nel sistema di riferimento solidale a C, $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_H, (\boldsymbol{u}_h))$, ove H è il centro di C, si ha

$$C = \{y \in \boldsymbol{R}^3 \mid y_1^2 + y_2^2 \leq R^2\,, y_3 = 0\}\,.$$

ossia $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale a C. In particolare per un D opportuno solidale a C, appartenente alla circonferenza bordo del disco,

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{HB}}{R}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{HD}}{R}\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2\,.$$

Le coordinate di D in $\mathcal{S}$ sono quindi $(0, R, 0)$.
La sollecitazione direttamente applicata è costituita dal peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$, dalle forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_P = -k(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_D)\,, \qquad \text{applicata in } P,$$
$$\boldsymbol{F}_D = -k(\boldsymbol{X}_D - \boldsymbol{X}_P)\,, \qquad \text{applicata a } C \text{ nel punto } D,$$

e da

$$\boldsymbol{F}_D^2 = \mu \boldsymbol{u}_3\,, \qquad \text{applicata a } C \text{ nel punto } D.$$

Qui $k > 0$, $\mu \in \boldsymbol{R}$ sono costanti assegnate.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ in modo che

$$\boldsymbol{X}_D^{\text{L}}(\theta) = R\boldsymbol{e}_1 + R\cos\theta \boldsymbol{e}_2 + R\sin\theta \boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{X}_P^{\text{L}}(\varphi) = R\cos\varphi \boldsymbol{e}_2 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_3\,.$$

01 Qual è il momento d'inerzia del corpo C rispetto all'asse solidale 1?
a $\frac{MR^2}{4}$.
b $\frac{MR^2}{8}$.
c Nessuna delle precedenti.
02 Quanto vale il momento d'inerzia del corpo C rispetto all'asse solidale passante per A e parallelo all'asse 3 solidale?
a $\frac{3}{2}MR^2$.
b $\frac{2}{3}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
03 Quanto vale il prodotto d'inerzia del corpo C relativo agli assi solidali 1 e 3?
a $\frac{2}{5}MR^2$.
b $-\frac{2}{5}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
04 Quanto vale il momento angolare del corpo C usando come polo di riduzione l'origine O?
a $\frac{5}{4}MR^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1$.
b $\frac{MR^2}{4}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1$.
c Nessuna delle precedenti.
05 Quali sono le componenti lagrangiane della forza $\boldsymbol{F}_D^2$?
a

$$Q_\varphi^2 = 0\,, \qquad Q_\theta^2 = \mu R\,.$$

b

$$Q_\varphi^2 = 0\,, \qquad Q_\theta^2 = \mu R + \theta\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
06 Quale è il potenziale lagrangiano complessivo delle sollecitazioni peso e elastica?
a

$$U^{\text{L}}(\varphi, \theta) = -mgR\sin\varphi - \frac{kR^2}{2}[3 - 2\sin(\varphi - \theta)]\,.$$

b

$$U^{\text{L}}(\varphi, \theta) = -mgR\sin\varphi - \frac{kR^2}{2}[3 - 2\cos(\varphi - \theta)]\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

07 Quale delle seguenti quantità si conserva lungo ciascun moto, comunque siano scelti i parametri del problema?
a L'energia cinetica dell'elemento materiale P.
b Il momento angolare di C di polo O.
c Nessuna delle precedenti.
08 Quanto vale l'energia cinetica del sistema?
a

$$\frac{MR^2}{8}\dot\theta^2 + \frac{mR^2}{2}\dot\varphi^2\,.$$

b

$$\frac{MR^2}{8}\dot\theta^2 + \frac{mR^2}{2}\dot\varphi^2 + 2\Big(\frac{MR^2}{8} + \frac{mR^2}{2}\Big)\dot\varphi\dot\theta\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
09 Sia $\mu > 0$. Allora
a Sicuramente non esistono posizioni di equilibrio.
b Esistono posizioni di equilibrio per opportuni valori di μ.
c Nessuna delle precedenti.
10 Sia $\mu = 0$, ossia in sostanza la $\boldsymbol{F}_D^2$ sia assente. Allora
a Il numero delle posizioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane è indipendente dalla scelta dei restanti parametri.
b Le posizioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane sono in numero infinito.
c Nessuna delle precedenti.
11 Sia $\mu = 0$, ossia in sostanza la $\boldsymbol{F}_D^2$ sia assente. La posizione di equilibrio con $\varphi = -\pi/2$, $\theta = -\pi/2$ è
a stabile per ogni scelta dei parametri.
b instabile per ogni scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
12 Sia $\mu = 0$, ossia in sostanza la $\boldsymbol{F}_D^2$ sia assente. La posizione di equilibrio con $\varphi = -\pi/2$, $\theta = \pi/2$ è
a stabile per ogni scelta dei parametri.
b instabile per ogni scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
13 Quale delle seguenti parametrizzazioni lagrangiane alternative per il sistema è ammissibile?
a Per $(z, s) \in (-\sqrt[3]{R}, \sqrt[3]{R}) \times (-\sqrt[3]{R}, \sqrt[3]{R})$:

$$\boldsymbol{X}_P^{\text{L}}(z) = z^3\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{R^2 - z^6}\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_D^{\text{L}}(s) = R\boldsymbol{e}_1 + s^3\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{R^2 - s^6}\boldsymbol{e}_3\,.$$

b Per $(z, s) \in (-R, R) \times (-R, R)$:

$$\boldsymbol{X}_P^{\text{L}}(z) = z\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{R^2 - z^2}\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_D^{\text{L}}(s) = R\boldsymbol{e}_1 + s\boldsymbol{e}_2 - \sqrt{R^2 - s^2}\boldsymbol{e}_3\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

14 Sia $\mu = 0$, ossia in sostanza la $\boldsymbol{F}_D^2$ sia assente. Quanto vale la forza vincolare agente sull'elemento in $\boldsymbol{X}_P$ se il sistema viene posto nella configurazione di equilibrio $\varphi = \pi/2$ e $\theta = \pi/2$ con atto di moto nullo?
a $mg\boldsymbol{e}_3 - kR\boldsymbol{e}_1$.
b 0.
c Nessuna delle precedenti.

15 Sia $\mu = 0$, ossia in sostanza la $\boldsymbol{F}_D^2$ sia assente. Quanto vale la componente relativa all'asse 1 del riferimento fisso del momento totale della sollecitazione vincolare agente sul corpo C calcolato usando come polo O se il sistema viene posto nella configurazione di equilibrio $\varphi = \pi/2$ e $\theta = \pi/2$ con atto di moto nullo?
a $mgR\boldsymbol{e}_3 - kR^2\boldsymbol{e}_1$.
b 0.
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: a
Si ha infatti passando a coordinate polari solidali

$$I_{11} = \iint_C y_2^2 \frac{M}{\pi R^2}\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}(\sin\psi)^2\,\mathrm{d}\psi\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{M}{\pi R^2}\pi\frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{4}\,.$$

II: a
Calcoliamo prima il momento I_{33} della lamina rispetto all'asse ad essa ortogonale nel centro di massa (ossia geometrico) H. Per motivi di simmetria materiale ortogonale $I_{33} = 2I_{11}$; il momento cercato I è per il teorema di Huygens

$$I = I_{33} + MR^2 = 2I_{11} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2\,.$$

III: c
In O gli assi di $\mathcal{S}$ sono principali, per considerazione di simmetria materiale ortogonale. Quindi il prodotto d'inerzia richiesto è nullo.
IV: b
Il moto di C è polare, quindi

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\sigma}_O(\dot\theta\boldsymbol{u}_1) = \dot\theta I_{11}^O\boldsymbol{u}_1\,.$$

V: a
Si ha con i calcoli

$$Q_\varphi^2 = \boldsymbol{F}_D^2\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}_D^{\mathrm{L}}}{\partial\varphi} = 0\,,$$

e

$$Q_\theta^2 = \boldsymbol{F}_D^2\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}_D^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} = \mu\boldsymbol{u}_3\cdot(R\boldsymbol{u}_3) = \mu R\,.$$

VI: b
Entrambe le sollecitazioni sono conservative; sostituendo la parametrizzazione lagrangiana nel potenziale si ha

$$U_{\mathrm{peso}}^{\mathrm{L}} = -mgx_{3P}^{\mathrm{L}} - Mgx_{3H}^{\mathrm{L}} = -mgR\sin\varphi\,.$$

Inoltre

$$U^{\text{L}}_{\text{el}} = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}^{\text{L}}_P - \boldsymbol{X}^{\text{L}}_D|^2 = -\frac{kR^2}{2}[3 - 2\cos(\varphi - \theta)]\,.$$

VII: c
Infatti su P agiscono forze che fanno lavoro non nullo. Il momento angolare di C non si conserva, come è chiaro dall'espressione trovata sopra.
VIII: a
L'energia cinetica di C è quella caratteristica delle rotazioni

$$\frac{I_{11}}{2}\dot\theta^2\,,$$

e quella di P si trova subito da

$$\boldsymbol{v}^{\text{L}}_P = R\dot\varphi(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_3)\,.$$

IX: b
Le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} mR^2\ddot\varphi &= -mgR\cos\varphi - kR^2\sin(\varphi - \theta)\,,\\ \frac{MR^2}{4}\ddot\theta &= \mu R + kR^2\sin(\varphi - \theta)\,. \end{aligned}$$

I membri di destra si annullano per qualche (φ, θ), rendendo possibile l'equilibrio, se

$$\frac{\mu}{kR} < 1\,, \qquad \frac{\mu}{mg} < 1\,.$$

X: a
Le posizioni di equilibrio si determinano mediante il sistema del gradiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial\varphi} &= -mgR\cos\varphi - kR^2\sin(\varphi - \theta) = 0\,,\\ \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial\theta} &= kR^2\sin(\varphi - \theta) = 0\,. \end{aligned}$$

Combinando le due equazioni si ottiene $\cos\varphi = 0$ ossia $\varphi \in \{-\pi/2, \pi/2\}$. Poiché la seconda equazione dà $\varphi - \theta = n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$, si hanno esattamente le posizioni di equilibrio

$$\Big(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)\,, \quad \Big(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\Big)\,, \quad \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)\,, \quad \Big(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\Big)\,.$$

XI: a
Calcoliamo la matrice hessiana del potenziale lagrangiano

$$D^2U^{\text{L}}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} mgR\sin\varphi - kR^2\cos(\varphi - \theta) & kR^2\cos(\varphi - \theta)\\ kR^2\cos(\varphi - \theta) & -kR^2\cos(\varphi - \theta) \end{pmatrix}\,.$$

Nella posizione indicata si ha

$$D^2U^{\text{L}}\Big(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} -mgR - kR^2 & kR^2\\ kR^2 & -kR^2 \end{pmatrix}\,,$$

con determinante $mgkR^3 > 0$ e $a_{11} < 0$. Quindi è definita negativa, la posizione è di massimo isolato e quindi di equilibrio stabile.

XII: b
Per il calcolo del punto precedente, nella posizione indicata si ha

$$D^2U^{\text{L}}\Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)=\begin{pmatrix}-mgR+kR^2 & -kR^2\\ -kR^2 & kR^2\end{pmatrix},$$

con determinante $-mgkR^3<0$. *Quindi l'hessiana è indefinita, la posizione è di punto sella e quindi di equilibrio instabile.*
XIII: b
La a per $z=0$, $s=0$, *dà una iacobiana tutta nulla. La b è ammissibile (anche se non suriettiva).*
XIV: a
Infatti

$$\mathbf{f}_{\text{vin}}=m\ddot{\boldsymbol{X}}_P+mg\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{F}_P\,,$$

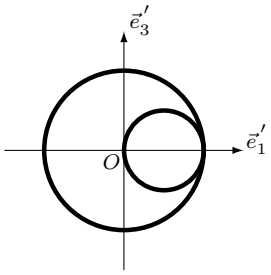
da cui la risposta a, quando si usi l'informazione $\dot\varphi(0)=0$ *anche la* $\ddot\varphi(0)=0$ *che segue dalle equazioni di Lagrange trovate sopra.*
XV: b
Segue dall'ipotesi di vincolo perfetto.

Prova scritta del 24/03/2023

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 24/03/2023

I.1 Un sistema olonomo a vincoli perfetti è costituito da un elemento materiale $(\boldsymbol{X},M)$, e da una lamina rigida omogenea di uguale massa M ottenuta praticando un foro circolare di raggio $R/2$ a un disco di raggio R in modo che la distanza tra il centro del foro e quello del disco sia $R/2$. Il riferimento solidale $\{O,\vec e_i'\}$ viene scelto con O nel centro del disco, il semiasse positivo dell'asse 1 passante per il centro del foro e l'asse 2 ortogonale al disco.



Il riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ ha asse 3 verticale ascendente.
La lamina si muove rispetto al riferimento fisso $\{O, \vec{e}_i\}$ mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 3 mediante un vincolo di cerniera ideale. L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a muoversi sulla circonferenza di raggio R che costituisce il bordo del disco.
La sollecitazione attiva agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica agente sull'elemento $\boldsymbol{X}$ di centro il punto fisso A tale che

$$\overrightarrow{OA} = R\vec{e}_2 \,.$$

Come coordinate lagrangiane si usino l'anomalia φ individuata dagli assi 1 fisso e solidale orientata in verso antiorario rispetto all'asse 3 e l'anomalia θ tale che

$$\overrightarrow{O\boldsymbol{X}} = R\cos\theta\vec{e}_1' + R\sin\theta\vec{e}_3' \,,$$

ovvero l'anomalia di primo lato il semiasse positivo solidale 1, secondo lato il vettore $\overrightarrow{O\boldsymbol{X}}$ e orientata in verso antiorario rispetto a $-\vec{e}_2'$. Si assuma $(\varphi, \theta) \in (-\pi/4{,}7\pi/4) \times (0{,}2\pi)$.

01 Quanto valgono le coordinate del centro di massa della lamina rispetto al riferimento solidale $\{O, \vec{e}_i'\}$?
a $\big(-\frac{1}{6}R{,}0{,}0\big)$.
b $\big(-\frac{1}{6}R{,}0{,}+\frac{1}{6}R\big)$.
c Nessuna delle precedenti.
02 Quanto vale il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse coordinato 1 del riferimento solidale?
a $\frac{15}{48}MR^2$.
b $\frac{1}{6}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
03 Quanto vale il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse coordinato 2 del riferimento solidale?
a $\frac{11}{48}MR^2$.
b $\frac{15}{48}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
04 Quanto vale il prodotto d'inerzia della lamina rispetto agli assi coordinati 1 e 3 del riferimento solidale?
a $-\frac{1}{48}MR^2$.
b $\frac{1}{48}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
05 Quanto vale il momento angolare della lamina calcolato usando come polo O?
a

$$\frac{1}{6}MR^2\dot{\varphi}\vec{e}_1' + \frac{11}{48}MR^2\dot{\varphi}\vec{e}_3' \,.$$

b

$$\frac{11}{48}MR^2\dot{\varphi}\vec{e}_3' \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

06 Quali sono le componenti del vettore $\overrightarrow{OX}$ rispetto al riferimento fisso?

a
$$(R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)\,.$$

b
$$(R\cos\theta, R\sin\theta,0)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

07 Quanto vale l'energia cinetica in forma lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$?

a
$$\frac{1}{2}MR^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\cos^2\theta)\,.$$

b
$$\frac{1}{2}MR^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

08 Quanto vale il potenziale lagrangiano della forza elastica?

a
$$\frac{1}{2}kR^2\sin\varphi - kR^2\sin\theta\,.$$

b
$$kR^2\cos\theta\sin\varphi\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

09 Quanto vale la funzione lagrangiana del sistema?

a
$$\frac{1}{2}MR^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\cos^2\theta)+\frac{11}{96}MR^2\dot\varphi^2+kR^2\cos\theta\sin\varphi\,.$$

b
$$\frac{1}{2}MR^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\cos^2\theta)+\frac{11}{96}MR^2\dot\varphi^2+kR^2\cos\theta\sin\varphi-MgR\sin\theta\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

10 Si dica quali delle seguenti quantità è una costante del moto:

a L'energia cinetica dell'elemento materiale.

b L'energia cinetica complessiva del sistema.

c Nessuna delle precedenti.

11 Quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio della parametrizzazione lagrangiana?

a 4.

b 8.

c Nessuna delle precedenti.

12 Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri del sistema (M, R, k)?

a $(\varphi,\theta)=(0,\pi/2)$.

b $(\varphi, \theta) = (\pi/2, \pi/2)$.
c Nessuna delle precedenti.

13 Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio stabile per qualunque valore dei parametri del sistema (M, R, k)?
a $(\varphi, \theta) = (0{,}3\pi/2)$.
b $(\varphi, \theta) = (\pi/2, \pi/2)$.
c Nessuna delle precedenti.

14 Dire quale delle seguenti parametrizzazioni lagrangiane alternative per l'elemento materiale è ammissibile.
a

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}(\varphi, s) = s^2 \vec{e}_1' + \sqrt[4]{R^2 - s^4}\vec{e}_3' \,, \qquad s \in (0, \sqrt{R}) \,.$$

b

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}(\varphi, s) = s\vec{e}_1' + \sqrt{R^2 - s^2}\vec{e}_3' \,, \qquad s \in (-R, R) \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

15 Quanto vale la componente 3 relativa al riferimento fisso del momento totale $\vec{M}_O^{\text{v}}$ della sollecitazione vincolare agente sulla lamina per un generico moto del sistema?
a

$$-\frac{1}{12} M R^2 (\ddot{\varphi} \cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) \,.$$

b 0.
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE
I: a
La lamina ha densità costante

$$\frac{4M}{3\pi R^2} \,.$$

Usando l'additività del centro di massa, se λ_{1G_1}, λ_{1G_2} denotano rispettivamente le coordinate dei centri di massa della lamina e del disco rimosso

$$M\lambda_{1G_1} + \frac{\pi R^2}{4}\frac{4M}{3\pi R^2}\lambda_{1G_2} = 0 \,,$$

perché il centro di massa del disco di raggio R è nel centro, da cui la risposta.
II: a
Si usa l'additività del momento d'inerzia, sottraendo dal momento del disco di raggio R completo quello del disco rimosso di raggio $R/2$, usando la densità ottenuta sopra.
III: c
Il momento richiesto è la somma dei due momenti rispetto agli assi nel piano della lamina (come per tutte le lamine piane), quindi non può essere nessuno dei due dati, in vista della risposta precedente.
IV: c
I due assi sono principali, quindi il prodotto vale zero.
V: b
Evidentemente $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_3'$, quindi $\boldsymbol{L}_O = I\dot{\varphi}\vec{e}_3'$, con I momento della lamina rispetto all'asse 3 solidale. Questo di nuovo viene calcolato usando l'additività, e il teorema

di Huygens per ottenere il momento del disco rimosso rispetto a una retta tangente conoscendo quello rispetto a un diametro.
VI: a
Quelle in b sono le componenti nel sistema di riferimento solidale (a parte lo scambio della seconda con la terza). Quelle in a si ottengono componendo la parametrizzazione data per $\boldsymbol{X}$ con quella dei versori solidali.
VII: a
Segue dal calcolo diretto, derivando la parametrizzazione ottenuta nella risposta precedente.
VIII: b
Segue dal calcolo diretto, usando la parametrizzazione ottenuta nella risposta sopra, ricordando che il potenziale lagrangiano si trova in questo caso sostituendo la parametrizzazione lagrangiana nel potenziale conservativo.
IX: b
Va aggiunta all'energia cinetica dell'elemento $\boldsymbol{X}$ quella rotazionale della lamina e al potenziale lagrangiano della forza elastica quello gravitazionale, dell'elemento in pratica perché quello della lamina è costante.
X: c
Vale invece la conservazione dell'energia meccanica $T^{\text{L}} - U^{\text{L}}$.
XI: b
Il sistema del gradiente è

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} = kR^2 \cos\theta \cos\varphi = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \theta} = -kR^2 \sin\theta \sin\varphi - MgR\cos\theta = 0\,.$$

Le soluzioni sono

$$(\pi/2, \theta_0)\,, \qquad (\pi/2, \theta_0 + \pi)\,, \qquad (3\pi/2, \theta_1)\,, \quad (3\pi/2, \theta_1 + \pi)\,,$$
$$(0, \pi/2)\,, \quad (\pi, \pi/2)\,, \quad (0, -\pi/2)\,, \quad (\pi, -\pi/2)\,.$$

Qui

$$\theta_0 = -\operatorname{arctg}\frac{Mg}{kR} + \pi\,, \qquad \theta_1 = \operatorname{arctg}\frac{Mg}{kR}\,.$$

XII: a
La b non è di equilibrio. Per rispondere alla domanda si può usare la matrice hessiana

$$D^2 U^{\text{L}} = \begin{pmatrix} -kR^2\cos\theta\sin\varphi & -kR^2\sin\theta\cos\varphi \\ -kR^2\sin\theta\cos\varphi & -kR^2\cos\theta\sin\varphi + MgR\sin\theta \end{pmatrix}\,.$$

Nel punto indicato è indefinita.
XIII: c
Nella configurazione in a, l'hessiana è indefinita.
XIV: b
La a non rispetta il vincolo di appartenenza di $\boldsymbol{X}$ alla circonferenza solidale di raggio R.
XV: b
Per l'ipotesi di vincoli lisci.

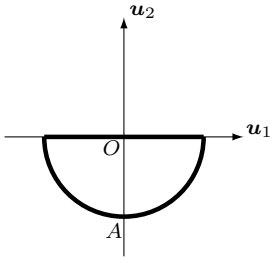
Prova scritta del 22/06/2023

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 22/06/2023

I.1

Un sistema olonomo è costituito da un elemento materiale P, $(\boldsymbol{X}_P, M)$, e da una lamina rigida omogenea della stessa massa M a forma di semidisco di raggio R. Il riferimento solidale alla lamina $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ viene scelto come illustrato in figura. Il punto solidale A è tale che $\overrightarrow{OA} = -R\boldsymbol{u}_2$.



Il riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 2 verticale ascendente.
La lamina si muove rispetto al riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 3 mediante un vincolo di cerniera ideale. L'elemento $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a muoversi sull'asse 2 fisso.
La sollecitazione attiva agente sul sistema è costituita dal peso (diretto come $-\boldsymbol{e}_2$) e dalla forza elastica agente tra l'elemento $\boldsymbol{X}_P$ e il punto A solidale alla lamina, data da

$$\boldsymbol{F}_P = -k(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_A)\,, \qquad \boldsymbol{F}_A = -k(\boldsymbol{X}_A - \boldsymbol{X}_P)\,,$$

ove $k > 0$ è una costante.
Come coordinate lagrangiane si usino la coordinata $q \in \boldsymbol{R}$ e l'anomalia $\varphi \in (-\pi/4{,}7\pi/4)$ tali che in coordinate lagrangiane $\boldsymbol{X}_P$ sia dato da $\boldsymbol{X}^{\text{L}}(q) = q\boldsymbol{e}_2$, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

01 Quanto valgono le coordinate del centro di massa della lamina rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$?
a $\big(0, -\frac{4}{3\pi}R, 0\big)$.
b $\big(0, -R, 0\big)$.
c Nessuna delle precedenti.
02 Quanto vale il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse coordinato 2 del sistema di riferimento solidale?
a $\frac{1}{3}MR^2$.
b $\frac{1}{4}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
03 Quanto vale il prodotto d'inerzia della lamina rispetto agli assi coordinati 1 e 2 del riferimento solidale?
a $-\frac{1}{8}MR^2$.
b $\frac{1}{8}MR^2$.
c Nessuna delle precedenti.
04 Quanto vale il momento angolare della lamina calcolato usando come polo O?
a

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3\,.$$

b

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{12}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
05 Quanto vale l'energia cinetica in forma lagrangiana della lamina?
a

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2\,.$$

b

$$\frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
06 Quanto vale il potenziale lagrangiano della forza elastica?
a

$$-\frac{k}{2}[q^2 + 2Rq\cos\varphi]\,.$$

b

$$-\frac{k}{2}[q^2 - 2Rq\cos\varphi]\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
07 Le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}MR^2\ddot{\varphi} + \frac{4}{3\pi}MRg\sin\varphi - kRq\sin\varphi = 0\,,\\ M\ddot{q} + Mg + kq + kR\cos\varphi = 0\,.\end{aligned}$$

Esistono moti in cui q è costante, ma φ non lo è?
a Sì, per qualsiasi scelta dei parametri.
b No, per qualsiasi scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
08 Esistono moti in cui φ è costante, ma q non lo è?
a Sì, per qualsiasi scelta dei parametri.
b No, per qualsiasi scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
09 Il numero delle configurazioni di equilibrio nel campo di variabilità indicato per le coordinate lagrangiane è
a Minore o uguale a 2 per ogni scelta dei parametri.
b Può essere maggiore di 2, ma solo per alcune scelte dei parametri e non per tutte.
c Nessuna delle precedenti.
10 Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio stabile per qualunque scelta dei parametri del sistema?
a

$$(\varphi, q) = \left(0, -\frac{Mg}{k} - R\right).$$

b

$$(\varphi, q) = \left(\pi, -\frac{Mg}{k} + R\right).$$

c Nessuna delle precedenti.
11 Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio instabile almeno per alcune scelte dei parametri del sistema?
a

$$(\varphi, q) = \left(0, -\frac{Mg}{k} - R\right).$$

b

$$(\varphi, q) = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{Mg}{k} + R\right).$$

c Nessuna delle precedenti.
12 Quanto vale il momento $\boldsymbol{M}_{\text{vin}}$ rispetto a O della reazione vincolare che agisce sulla lamina durante il generico moto del sistema?
a $MgR\sin\varphi\boldsymbol{e}_3 + kRq\sin\varphi\boldsymbol{e}_2$.
b 0.
c Nessuna delle precedenti.
13 Esistono moti del sistema tali che per $t \to +\infty$
a L'energia meccanica del sistema diviene illimitata.
b La coordinata q diviene illimitata.
c Nessuna delle precedenti.
14 Dire quale delle seguenti parametrizzazioni lagrangiane alternative per l'elemento materiale è ammissibile.
a

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}(s) = s^2\boldsymbol{e}_2\,, \qquad s \in (0, +\infty)\,.$$

b

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}(s) = s^3 \boldsymbol{e}_2 \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

15 Indichiamo con x_i le coordinate nel sistema fisso. Si usino come coordinate locali della lamina le seguenti coordinate cartesiane:

$$x_{1V} \,, x_{2V} \,, x_{3V} \,, x_{1A} \,, x_{3A} \,, x_{3B} \,,$$

ove V è il centro del disco da cui è ritagliata la lamina, e B è uno dei due punti angolosi del bordo della lamina.
Quali dei seguenti vincoli è un vincolo regolare coincidente con quelli assegnati nel problema per la lamina?

a

$$x_{1V} = 0 \,, \quad x_{2V} = 0 \,, \quad x_{3V} = 0 \,, \quad x_{3A} = 0 \,, \quad x_{3B} = 0 \,.$$

b

$$x_{1V}^2 + x_{2V}^2 + x_{3V}^2 = 0 \,, \quad x_{3A} = 0 \,, \quad x_{3B} = 0 \,.$$

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: a

La lamina ha densità costante

$$\frac{2M}{\pi R^2} \,.$$

Usando la definizione di centro di massa e le proprietà di simmetria della lamina C, resta solo da calcolare la seconda coordinata solidale data da

$$\lambda_{2G} = \frac{1}{M} \iint\limits_C \lambda_2 \frac{2M}{\pi R^2} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \frac{2}{\pi R^2} \int\limits_0^R \int\limits_{-\pi}^0 r \sin\theta r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{2}{\pi R^2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \left[-\cos\theta \right]_{-\pi}^0 = -\frac{4R}{3\pi} \,.$$

II: b

Calcoliamo con la definizione

$$I_{22} = \iint\limits_C \lambda_1^2 \frac{2M}{\pi R^2} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \frac{2M}{\pi R^2} \int\limits_0^R \int\limits_{-\pi}^0 r^2 (\cos\theta)^2 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{2M}{\pi R^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \left[\frac{2\theta - \sin(2\theta)}{4} \right]_{-\pi}^0 = \frac{1}{4} M R^2 \,.$$

III: c

Infatti il riferimento solidale assegnato è principale d'inerzia, per argomenti di simmetria materiale ortogonale.

IV: a

Dato che il moto è una rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_3$ si ha $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \boldsymbol{u}_3$. Inoltre il sistema solidale assegnato è principale, quindi

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega} = I_{33} \boldsymbol{\omega} \,.$$

Inoltre per le proprietà delle lamine $I_{33} = I_{11} + I_{22}$; I_{22} è stato calcolato sopra, e per motivi di simmetria $I_{11} = I_{22}$ (per vedere questo, si può considerare la lamina come composta da 2 quarti di disco).
V: c
L'energia cinetica in un moto di rotazione è

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2} I_{33} \dot{\varphi}^2 \,.$$

Nel punto precedente abbiamo calcolato $I_{33} = MR^2/2$.
VI: a
Calcoliamo

$$\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_A = q\boldsymbol{e}_2 + R(-\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2) \,,$$

e quindi

$$U^{\text{L}}_{\text{el}} = -\frac{k}{2}[(q + R\cos\varphi)^2 + (R\sin\varphi)^2] = -\frac{k}{2}[q^2 + R^2 + 2Rq\cos\varphi] \,.$$

VII: b
Se q è costante, dalla seconda equazione di Lagrange segue che anche φ lo è.
VIII: a
Se $\varphi(t) = 0$ per ogni t, la prima equazione di Lagrange è soddisfatta qualunque sia $q(t)$, che è determinato dalla seconda che diviene

$$M\ddot{q} + kq = -Mg - kR \,.$$

IX: b
Il potenziale lagrangiano è

$$U^{\text{L}} = -Mgq + \frac{4}{3\pi} MRg\cos\varphi - \frac{k}{2}(q^2 + 2Rq\cos\varphi) \,.$$

Il sistema del gradiente del potenziale lagrangiano è

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} &= -\frac{4}{3\pi} MRg\sin\varphi + kRq\sin\varphi = 0 \,, \\ \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial q} &= -Mg - kq - kR\cos\varphi = 0 \,. \end{aligned}$$

La prima equazione dà $\sin\varphi = 0$, cioè $\varphi \in \{0, \pi\}$, o $q = q_0 := (4Mg)/(3\pi k) > 0$.
Dalla seconda equazione, se $\varphi \in \{0, \pi\}$ si ottengono le soluzioni

$$\Big(0, -\frac{Mg}{k} - R\Big) \,, \qquad \Big(\pi, -\frac{Mg}{k} + R\Big) \,.$$

Se invece $q = q_0$, si ottiene

$$\cos\varphi = -\frac{Mg}{kR}\Big(1 + \frac{4}{3\pi}\Big) =: c_0 < 0 \,,$$

che ha unica soluzione $\varphi = \pi$ se $c_0 = -1$, già trovata (i valori di q coincidono), e due soluzioni in $(\pi/2{,}3\pi/2)$ se $c_0 \in (-1{,}0)$; se $c_0 < -1$ non esistono soluzioni.
Quindi i punti di equilibrio sono 2 o 4 in dipendenza dei valori relativi dei parametri.

X: a
L'hessiana del potenziale è

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3\pi}MgR\cos\varphi + kqR\cos\varphi & kR\sin\varphi \\ kR\sin\varphi & -k \end{pmatrix}.$$

Si vede che nella posizione a è definita negativa per ogni scelta dei parametri, mentre nella b il segno della forma hessiana dipende appunto dai parametri (è indefinita se k è piccolo).
XI: c
La b non è di equilibrio. La a è sempre stabile, come visto nel punto precedente.
XII: b
Vale per la seconda equazione cardinale

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F}_A + \overrightarrow{OG} \times (-Mg\boldsymbol{e}_2) + \boldsymbol{M}_{\text{vin}}\,.$$

Si osservi che il membro di sinistra e i primi due termini a destra sono tutti paralleli a $\boldsymbol{e}_3$ cioè all'asse di rotazione. Quindi anche $\boldsymbol{M}_{\text{vin}}$ lo è. Per l'ipotesi di vincoli lisci, questo significa che è nullo.
XIII: c
Scriviamo l'energia meccanica del sistema:

$$T^{\text{L}} - U^{\text{L}} = \frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}^2 + Mgq - \frac{4}{3\pi}MRg\cos\varphi + \frac{k}{2}(q^2 + 2Rq\cos\varphi)\,.$$

Per la conservazione dell'energia, la a non vale. Inoltre se E denota l'energia,

$$E \geq \frac{k}{2}q^2 - (kR + Mg)|q| - \frac{4}{3\pi}MRg\,.$$

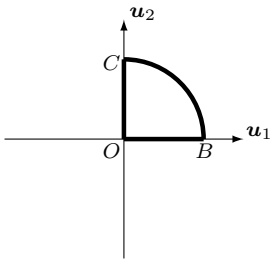
Poiché il membro di destra diviene illimitato con q, non vale neanche b.
XIV: a
La a non è suriettiva, ma è una parametrizzazione regolare. La b non è regolare perché per $s = 0$ si annulla la colonna corrispondente alla s della matrice iacobiana delle coordinate lagrangiane.
XV: a
Il vincolo in a è regolare e impone che V sia in O e che la lamina giaccia sul piano $x_3 = 0$, come richiesto. Il vincolo in b impone le stesse condizioni, ma non è regolare, come noto, perché la matrice iacobiana del vincolo non ha rango massimo.

Prova scritta del 24/07/2023

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 24/07/2023

I.1
Un sistema olonomo è costituito da un elemento materiale P, $(\boldsymbol{X}_P, M)$, e da una lamina rigida omogenea della stessa massa M a forma di quarto di disco di raggio $R > 0$. Il riferimento solidale alla lamina $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ viene scelto come illustrato in figura. I punti solidali B e C sono tali che $\overrightarrow{OB} = R\boldsymbol{u}_1$, $\overrightarrow{OC} = R\boldsymbol{u}_2$.



Il riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 2 verticale ascendente.
La lamina si muove rispetto al riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ mantenendo l'asse 2 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 2 mediante un vincolo di cerniera ideale. L'elemento $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a muoversi sull'asse 2 fisso.
La sollecitazione attiva agente sul sistema è costituita dal peso (diretto come $-\boldsymbol{e}_2$), dalla forza elastica agente tra l'elemento $\boldsymbol{X}_P$ e il punto C solidale alla lamina, data da

$$\boldsymbol{F}_P = -k(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_C)\,, \qquad \boldsymbol{F}_C = -k(\boldsymbol{X}_C - \boldsymbol{X}_P)\,,$$

e dalla forza elastica agente tra il punto fisso $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1$ e il punto B solidale alla lamina, data da

$$\boldsymbol{F}_B = -k(\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A)\,.$$

Qui $k > 0$ è una costante.
Come coordinate lagrangiane si usino la coordinata $q \in \boldsymbol{R}$ e l'anomalia $\varphi \in (-\pi/4{,}7\pi/4)$ tali che in coordinate lagrangiane $\boldsymbol{X}_P$ sia dato da $\boldsymbol{X}_P^{\text{L}}(q) = q\boldsymbol{e}_2$, e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi\boldsymbol{e}_3\,.\\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

01 Quanto valgono le coordinate del centro di massa della lamina rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$?
a $\left(\frac{4}{3\pi}R, \frac{4}{3\pi}R, 0\right)$.
b $\left(0, \frac{4}{3\pi}R, 0\right)$.
c Nessuna delle precedenti.

02 Il momento d'inerzia I della lamina rispetto all'asse solidale parallelo all'asse coordinato 3 del sistema di riferimento solidale e passante per il centro di massa, soddisfa:

a
$$I < \frac{MR^2}{2}\,.$$

b
$$I > \frac{MR^2}{2}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

03 Quanto vale il prodotto d'inerzia della lamina rispetto agli assi coordinati 1 e 2 del riferimento solidale?

a $\frac{1}{4\pi}MR^2$.

b $-\frac{1}{2\pi}MR^2$.

c Nessuna delle precedenti.

04 Quanto vale il momento angolare della lamina calcolato usando come polo O?

a
$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3\,.$$

b
$$-\frac{1}{2\pi}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

05 Quanto vale l'energia cinetica in forma lagrangiana della lamina?

a
$$\frac{1}{8}MR^2\dot{\varphi}^2\,.$$

b
$$\frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2\pi}MR^2\dot{\varphi}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

06 Quanto vale il potenziale lagrangiano di entrambe le forze elastiche?

a
$$-\frac{k}{2}[q^2 - 2qR - 2R^2\cos\varphi]\,.$$

b
$$-\frac{k}{2}[q^2 - 2Rq\sin\varphi + 3R^2]\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

07 Le equazioni di Lagrange sono

$$\ddot{\varphi} + \frac{4k}{M}\sin\varphi = 0\,,$$
$$\ddot{q} + g + \frac{k}{M}q - \frac{kR}{M} = 0\,.$$

Esistono moti non di quiete per il sistema per cui $\boldsymbol{X}_P$ sia solidale alla lamina?
a Sì, per qualsiasi scelta dei parametri.
b No, per qualsiasi scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.

08 Esistono moti in cui né φ né q sono costanti, e $\boldsymbol{X}_P$ non tocca mai la lamina?
a Sì, per qualsiasi scelta dei parametri.
b No, per qualsiasi scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.

09 Il numero delle configurazioni di equilibrio nel campo di variabilità indicato per le coordinate lagrangiane è
a Minore o uguale a 2 per ogni scelta dei parametri.
b Può essere maggiore di 2, ma solo per alcune scelte dei parametri e non per tutte.
c Nessuna delle precedenti.

10 Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio stabile per qualunque scelta dei parametri del sistema?
a

$$(\varphi, q) = \left(0, -\frac{Mg}{k} - R\right).$$

b

$$(\varphi, q) = \left(\pi, -\frac{Mg}{k} + R\right).$$

c Nessuna delle precedenti.

11 Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio instabile almeno per alcune scelte dei parametri del sistema?
a

$$(\varphi, q) = \left(0, -\frac{Mg}{k} + R\right).$$

b

$$(\varphi, q) = \left(\pi, -\frac{Mg}{k} + R\right).$$

c Nessuna delle precedenti.

12 Quanto vale la forza vincolare esercitata sull'elemento materiale $\boldsymbol{X}_P$ dal vincolo durante il generico moto del sistema?
a $-k(q - R)$.
b 0.
c Nessuna delle precedenti.

13 Esistono integrali primi del moto?
a Non per il moto generico.
b Sì, per esempio il seguente:

$$\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + Mgq + \frac{1}{8}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{k}{2}[q^2 - 2Rq - 2R^2\cos\varphi].$$

c Nessuna delle precedenti.

14 Nell'unica posizione di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni, le loro frequenze normali sono date da:

a

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M}}\,.$$

b Se E e U indicano i valori dell'energia e del potenziale lungo il moto

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{2}{M}(E+U)}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2}{M}(E+U)}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

15 Indichiamo con x_i le coordinate nel sistema fisso. Si usino come coordinate locali della lamina le seguenti coordinate cartesiane:

$$x_{1V}\,, x_{2V}\,, x_{3V}\,, x_{1C}\,, x_{3C}\,, x_{3B}\,,$$

ove V è il centro del disco da cui è ritagliata la lamina.
Quali dei seguenti vincoli è un vincolo regolare coincidente con quelli assegnati nel problema per la lamina?

a

$$x_{1V} = 0\,, \quad x_{2V} = 0\,, \quad x_{3V} = 0\,, \quad x_{3C} = 0\,.$$

b

$$x_{1V}^2 + x_{2V}^2 + x_{3V}^2 = 0\,, \quad x_{3C} = 0\,, \quad x_{1C} = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: a

La lamina ha densità costante

$$\frac{4M}{\pi R^2}\,.$$

Usando la definizione di centro di massa e le proprietà di simmetria della lamina C, resta solo da calcolare per esempio la seconda coordinata solidale data da

$$\lambda_{2G} = \frac{1}{M}\iint\limits_C \lambda_2 \frac{4M}{\pi R^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \frac{4}{\pi R^2}\int\limits_0^R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{4}{\pi R^2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R\,[-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi}\,.$$

II: a

Calcoliamo con la definizione (I_{hh} è relativo al sistema di riferimento solidale introdotto sopra)

$$I_{22} = \iint\limits_C \lambda_1^2 \frac{4M}{\pi R^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \frac{4M}{\pi R^2}\int\limits_0^R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\cos\theta)^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{4M}{\pi R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R\left[\frac{2\theta - \sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}MR^2\,.$$

Dunque $I_{33} = I_{11} + I_{22} = 2I_{22} = MR^2/2$. Per il teorema di Huygens, segue la a.
III: b
Calcoliamo con la definizione (I_{hk} è relativo al sistema di riferimento solidale introdotto sopra)

$$I_{12} = -\iint_C \lambda_1\lambda_2 \frac{4M}{\pi R^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = -\frac{4M}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\sin\theta\cos\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{4M}{\pi R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R\left[\frac{(\cos\theta)^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2\pi}MR^2\,.$$

IV: b
Dato che il moto è una rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_2$ si ha $\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\boldsymbol{u}_2$, per la scelta di φ. Quindi per la formula di rappresentazione di $\boldsymbol{L}_O$

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega} = I_{12}\dot\varphi\boldsymbol{u}_1 + I_{22}\dot\varphi\boldsymbol{u}_2 = -\frac{1}{2\pi}MR^2\dot\varphi\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{4}MR^2\dot\varphi\boldsymbol{u}_2\,.$$

V: a
L'energia cinetica in un moto di rotazione è

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2}I_{22}\dot\varphi^2\,.$$

Sopra abbiamo calcolato $I_{22} = MR^2/4$.
VI: a
Calcoliamo

$$\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_C = q\boldsymbol{e}_2 - R\boldsymbol{u}_2 = (q-R)\boldsymbol{e}_2\,,$$

e

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{u}_1 - R\boldsymbol{e}_1 = R(\cos\varphi - 1)\boldsymbol{e}_1 - R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,.$$

Quindi

$$U^{\text{L}}_{\text{el}} = -\frac{k}{2}[(q-R)^2 + R^2(\cos\varphi-1)^2 + (R\sin\varphi)^2] = -\frac{k}{2}[q^2 - 2qR - 2R^2\cos\varphi + 3R^2]\,.$$

VII: a
Il moto $\boldsymbol{X}_P$ è solidale alla lamina se e solo se q è costante. Dalla seconda equazione di Lagrange si ha che q può in effetti assumere valore costante $R - Mg/k$, per le opportune condizioni inziali, sotto le quali invece φ non è costante (perché risolve la prima equazione di Lagrange).
VIII: c
Dalla seconda equazione di Lagrange si ottiene l'integrale generale

$$q(t) = \left(q(0) - R + \frac{Mg}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) + \dot q(0)\sqrt{\frac{M}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) + R - \frac{Mg}{k}\,.$$

Se $R - Mg/k < 0$, prendendo per esempio $q(0) = R - Mg/k$ e $|\dot q(0)|$ abbastanza piccolo, si ha $q(t) < 0$ per ogni t, mentre la lamina giace sempre nel semispazio $x_2 \geq 0$. Se invece $R - Mg/k = 0$ il moto di q si riduce al classico moto armonico intorno a $q = 0$ che necessariamente ha punti nell'intervallo $[0, R]$ dell'asse x_2 che appartiene alla lamina.

IX: a
Il potenziale lagrangiano è

$$U^{\text{L}} = -Mgq - \frac{k}{2}[q^2 - 2Rq - 2R^2\cos\varphi]\,.$$

Il sistema del gradiente del potenziale lagrangiano è

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} = -kR^2\sin\varphi = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial q} = -Mg - kq + kR = 0\,.$$

La prima equazione dà $\sin\varphi = 0$*, cioè* $\varphi \in \{0, \pi\}$*, e la seconda* $q = R - Mg/k$*; dunque si hanno esattamente due posizioni di equilibrio per ogni scelta dei parametri.*
X: c
La posizione a non è di equilibrio. L'hessiana del potenziale è

$$\begin{pmatrix} -kR^2\cos\varphi & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}.$$

Si vede che nella posizione b è indefinita per ogni scelta dei parametri.
XI: b
Vedi il punto precedente. La a è stabile per ogni scelta dei parametri.
XII: b
Vale

$$\boldsymbol{F}_P + \mathbf{f}_{\text{vin}\,P} = M\boldsymbol{a}_P = M\ddot{q}\boldsymbol{e}_2\,.$$

Dunque

$$\mathbf{f}_{\text{vin}\,P} = -\boldsymbol{F}_P + M\ddot{q}\boldsymbol{e}_2 = [k(q-R) + M\ddot{q}]\boldsymbol{e}_2\,.$$

Ma per l'ipotesi di vincolo liscio, $\mathbf{f}_{\text{vin}\,P}\cdot\boldsymbol{e}_2 = 0$*.*
XIII: b
I vincoli sono fissi e lisci, le forze conservative, quindi si conserva l'energia meccanica del sistema:

$$T^{\text{L}} - U^{\text{L}} = \frac{1}{8}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}^2 + Mgq + \frac{k}{2}[q^2 - 2Rq - 2R^2\cos\varphi]\,.$$

Quindi vale la b.
XIV: a
Nella posizione di equilibrio $(\varphi, q) = (0, R - Mg/k)$ *l'hessiana del potenziale è* $\mathcal{U} = \operatorname{diag}(-kR^2, -k)$*. Poiché la matrice dell'energia cinetica è la costante* $\mathcal{A} = \operatorname{diag}(MR^2/4, M)$ *si ottiene la a risolvendo l'equazione* $\det(\omega^2\mathcal{A} + \mathcal{U}) = 0$*, dalla teoria. La b è insensata.*
XV: c
Il vincolo in a è regolare, ma impone solo che V sia in O e che C giaccia sul piano $x_3 = 0$*, ma non sull'asse* x_2 *come richiesto. Il vincolo in b impone le condizioni richieste, ma non è regolare, come noto, perché la matrice iacobiana del vincolo non ha rango massimo.*

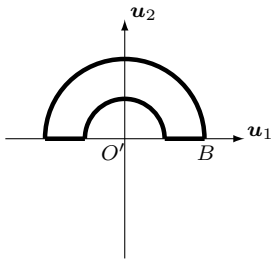
Prova scritta del 21/09/2023

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 21/09/2023

I.1

Un sistema olonomo a vincoli perfetti è costituito da un corpo rigido pesante omogeneo C di massa $M > 0$ a forma di semicorona circolare di raggio esterno $R > 0$ e raggio interno $R/2$. Il riferimento solidale al corpo $(O', (\boldsymbol{u}_i))$ viene scelto come illustrato in figura. Il punto solidale B è tale che $\overrightarrow{O'B} = R\boldsymbol{u}_1$.



Il riferimento fisso terrestre $(O, (\boldsymbol{e}_i))$ ha asse 2 verticale ascendente.
Il corpo si muove rispetto al riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_i))$ mantenendo l'asse 2 solidale costantemente sovrapposto all'omologo asse fisso 2 mediante un vincolo di collare cilindrico ideale (nota: quindi O' scorre lungo l'asse 2 fisso).
La sollecitazione attiva agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica di richiamo di centro il punto A tale che $\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_1$ e agente sul punto B solidale al corpo. La forza elastica ha costante $k > 0$.
Come coordinate lagrangiane si usino la coordinata q tale che $\overrightarrow{OO'} = q\boldsymbol{e}_2$ e l'anomalia $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_3\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= -\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

01 Quanto valgono le coordinate del centro di massa G della lamina rispetto al riferimento solidale $(O', (\boldsymbol{u}_i))$?

a

$$\left(0, \frac{4}{9\pi}R, 0\right).$$

b

$$\left(0, \frac{14}{9\pi}R, 0\right).$$

c Nessuna delle precedenti.

02 Quanto vale il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse coordinato solidale 3?

a

$$\frac{5MR^2}{8}.$$

b

$$\frac{3MR^2}{8}.$$

c Nessuna delle precedenti.

03 Quanto vale il momento angolare della lamina calcolato usando come polo il centro di massa G?

a

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 + \frac{5}{8}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2\,.$$

b

$$\frac{5}{16}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

04 Quanto vale il potenziale lagrangiano U^{L}_{el} delle forze elastiche?

a

$$-kq^2 + kR^2\cos\varphi\,.$$

b

$$-\frac{1}{2}kq^2 + kR^2\sin\varphi - kqR\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

05 Quanto vale l'energia cinetica in forma lagrangiana della lamina?

a

$$\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{5}{32}MR^2\dot{\varphi}^2\,.$$

b

$$\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{5}{32}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2\pi}MR^2\dot{q}\dot{\varphi}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

06 Quali sono le equazioni di Lagrange?

a

$$M\ddot{q} + kq + Mg = 0\,; \quad \frac{5}{16}MR^2\ddot{\varphi} - kR^2\cos\varphi = 0\,.$$

b

$$M\ddot{q} + kq\cos\varphi + Mg = 0\,; \quad \frac{5}{16}MR^2\ddot{\varphi} - kR^2\sin\varphi = 0\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

07 Esistono moti non di quiete per cui l'origine del sistema fisso O è solidale al corpo rigido?
a Sì, per qualsiasi scelta dei parametri.
b No, per qualsiasi scelta dei parametri.
c Nessuna delle precedenti.
08 Si consideri il moto con dato iniziale $q(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Si ha $q(t) = -Mgt^2/2k$ per ogni $t > 0$.
b Si ha $\varphi(\bar{t}) \in (-\pi/2,0)$ per qualche $\bar{t} > 0$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio stabile per qualunque valore dei parametri M, R, k del sistema?
a

$$(q, \varphi) = \Big(-\frac{Mg}{k}, \frac{\pi}{2} \Big) .$$

b

$$(q, \varphi) = \Big(-\frac{Mg}{k}, 0 \Big) .$$

c Nessuna delle precedenti.
10 Quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio instabile per qualunque valore dei parametri M, R, k del sistema?
a

$$(q, \varphi) = \Big(-\frac{Mg}{k}, -\frac{\pi}{2} \Big) .$$

b

$$(q, \varphi) = \Big(-\frac{Mg}{k} + R, \frac{\pi}{2} \Big) .$$

c Nessuna delle precedenti.
11 Quanto vale la forza vincolare esercitata sul corpo rigido dal vincolo durante il generico moto del sistema?
a

$$kR(1 + \sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 .$$

b

$$k[R(\sin\varphi - 1)\boldsymbol{e}_1 + R\cos\varphi\boldsymbol{e}_3] .$$

c Nessuna delle precedenti.
12 Quale delle seguenti affermazioni è vera per il momento della reazione vincolare rispetto a G?
a Ha sempre componente nulla lungo $\boldsymbol{e}_1$.
b Ha sempre componente nulla lungo $\boldsymbol{e}_3$.
c Nessuna delle precedenti.
13 Nell'unica posizione di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni, le loro frequenze normali sono date da:

a

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}\,, \qquad \omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{5M}}\,.$$

b

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{16k}{5M}}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

14 Quale dei seguenti è un sistema di coordinate lagrangiane (alternativo a quello dato) ammissibile?

a Le coordinate $(q_1, q_2) \in (0,\pi) \times (0,\pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_O(\boldsymbol{q}) = q_1^2 \boldsymbol{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{X}^{\text{L}}_B(\boldsymbol{q}) = R\cos q_2 \boldsymbol{e}_1 + q_1^2 \boldsymbol{e}_2 + R\sin q_2 \boldsymbol{e}_3\,.$$

b Le coordinate $(q_1, q_2) \in \boldsymbol{R} \times (0,\pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}_O(\boldsymbol{q}) = \operatorname{arctg} q_1 \boldsymbol{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{X}^{\text{L}}_B(\boldsymbol{q}) = R\cos q_2 \boldsymbol{e}_1 + R\sin q_2 \boldsymbol{e}_3\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

15 Indichiamo con x_i le coordinate nel sistema fisso. Si consideri il seguente insieme di coordinate:

$$x_{1O'}\,, x_{2O'}\,, x_{3O'}\,, x_{1B}\,, x_{2B}\,, x_{3B}\,.$$

Si possono esprimere in tali coordinate i vincoli assegnati nel problema per la lamina nella forma di un vincolo olonomo regolare?

a No, per nessun valore dei parametri del problema.

b Sì, ma solo se il peso è assente.

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: b

La lamina ha densità costante

$$\frac{4M}{\frac{\pi}{2}\left(R^2 - \frac{R^2}{4}\right)} = \frac{8M}{3\pi R^2}\,.$$

Usando la definizione di centro di massa e le proprietà di simmetria della lamina C, resta solo da calcolare la seconda coordinata solidale data da

$$\lambda_{2G} = \frac{1}{M}\iint\limits_C \lambda_2 \frac{8M}{3\pi R^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \frac{8}{3\pi R^2}\int\limits_{\frac{R}{2}}^{R}\int\limits_0^{\pi} r\sin\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{8}{3\pi R^2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{\frac{R}{2}}^{R}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{14R}{9\pi}\,.$$

II: a
Calcoliamo con la definizione (I_{33} è relativo al sistema di riferimento solidale introdotto sopra)

$$I_{33} = \iint_C (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \frac{8M}{3\pi R^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \frac{8M}{3\pi R^2} \int_{\frac{R}{2}}^{R} \int_0^{\pi} r^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{8M}{3\pi R^2}\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_{\frac{R}{2}}^{R} = \frac{5}{8}MR^2\,.$$

III: b
Dato che il moto è una rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_2$ si ha $\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi \boldsymbol{u}_2$, per la scelta di φ. Si noti che la terna $(\boldsymbol{u}_h)$ è principale anche in G, per simmetria. Quindi per la formula di rappresentazione di $\boldsymbol{L}_G$

$$\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega} = I_{22}^G\dot\varphi\boldsymbol{u}_2 = \frac{5}{16}MR^2\dot\varphi\boldsymbol{u}_2\,.$$

Infatti per simmetria $I_{11} = I_{22} = I_{33}/2$ e $I_{22}^G = I_{22}$.
IV: c
Si calcola

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}|\overrightarrow{AB}|^2\,.$$

Ma in rappresentazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{L}}(q,\varphi) = R\boldsymbol{u}_1(\varphi) + q\boldsymbol{e}_2\,.$$

Dunque

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = q^2 + R^2[(\sin\varphi - 1)^2 + (\cos\varphi)^2] = q^2 + R^2[2 - 2\sin\varphi]\,.$$

Quindi si può prendere

$$U_{\mathrm{el}}^{\mathrm{L}}(\varphi) = -\frac{k}{2}q^2 + kR^2\sin\varphi\,.$$

V: a
Ricordiamo che $\boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}} = (q + \lambda_2^G)\boldsymbol{e}_2$ con λ_2^G costante, e $\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\boldsymbol{u}_2$. L'energia cinetica è quindi, usando il teorema di König,

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}M\dot q^2 + \frac{1}{2}I_{22}\dot\varphi^2\,.$$

Sopra abbiamo calcolato $I_{22} = 5MR^2/16$.
VI: a
Abbiamo calcolato sopra l'energia cinetica e il potenziale lagrangiano della forza elastica. Quindi la lagrangiana completa, tenendo conto anche della forza peso, è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot q^2 + \frac{1}{2}I_{22}^G\dot\varphi^2 - \frac{k}{2}q^2 + kR^2\sin\varphi - Mgq\,.$$

Infatti $x_{2G} = x_{2O} +$ costante. Ne segue la a.

VII: a
Le coordinate di O nel sistema solidale a C sono $(0,-q,0)$. Dunque il moto $\boldsymbol{X}_O$ è solidale alla lamina se e solo se q è costante. Dalla prima equazione di Lagrange, per esempio, si ha che q può in effetti assumere valore costante $-Mg/k$, per le opportune condizioni inziali, sotto le quali invece φ non è costante (perché risolve la seconda equazione di Lagrange).
VIII: c
La prima equazione di Lagrange mostra che la a non è vera, per sostituzione.
Dalla seconda equazione di Lagrange si ottiene l'integrale primo

$$\frac{I_{22}}{2}\dot{\varphi}^2 - kR^2\sin\varphi = 0\,.$$

Quindi è impossibile che φ assuma valori in $(-\pi/2,0)$ ove $\sin\varphi < 0$.
IX: a
Il potenziale lagrangiano è

$$U^{\text{L}} = -\frac{k}{2}q^2 + kR^2\sin\varphi - Mgq\,.$$

Il sistema del gradiente del potenziale lagrangiano è

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial q} = -Mg - kq = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} = kR^2\cos\varphi = 0\,.$$

La seconda equazione dà $\cos\varphi = 0$, cioè $\varphi \in \{-\pi/2, \pi/2\}$, e la prima $q = -Mg/k$.
L'hessiana del potenziale vale

$$D^2U^{\text{L}}(q,\varphi) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -kR^2\sin\varphi \end{pmatrix}\,.$$

Quindi si ha per ogni valore dei parametri che $(-Mg/k, \pi/2)$ è stabile (A e B coincidono), e $(-Mg/k, -\pi/2)$ è instabile.
X: a
Si veda la soluzione della IX domanda.
XI: b
Dalla prima equazione cardinale si ha

$$M\boldsymbol{a}_G = -k\overrightarrow{AB} - Mg\boldsymbol{e}_2 + \mathbf{f}_{\text{vin}}\,.$$

Quindi usando la prima equazione di Lagrange

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\text{vin}} = M(\ddot{q}+g)\boldsymbol{e}_2 + k[R(\sin\varphi - 1)\boldsymbol{e}_1 + q\boldsymbol{e}_2 + R\cos\varphi\boldsymbol{e}_3] \\ = k[R(\sin\varphi - 1)\boldsymbol{e}_1 + R\cos\varphi\boldsymbol{e}_3]\,.\end{aligned}$$

XII: c
Vale per la seconda equazione cardinale

$$\dot{\boldsymbol{L}}_G = \overrightarrow{GB}\times(-k\overrightarrow{AB}) + \boldsymbol{M}_G^{\text{vin}}\,,$$

quindi

$$\boldsymbol{M}_G^{\text{vin}} = I_{22}\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_2 + \overrightarrow{GB}\times(k\overrightarrow{AB})\,.$$

In generale quindi sia le componenti lungo $\boldsymbol{e}_1$ che $\boldsymbol{e}_3$ sono diverse da zero. Quella lungo $\boldsymbol{e}_2$ ovviamente si annulla con i calcoli, secondo quanto prescritto dall'ipotesi dei lavori virtuali.
XIII: b
Nella posizione di equilibrio $(q, \varphi) = (-Mg/k, \pi/2)$ l'hessiana del potenziale è $\mathcal{U} = \operatorname{diag}(-k, -kR^2)$. Poiché la matrice dell'energia cinetica è la costante $\mathcal{A} = \operatorname{diag}(M, I_{22})$ si ottiene la b risolvendo l'equazione $\det(\omega^2\mathcal{A} + \mathcal{U}) = 0$, dalla teoria.
XIV: a
La a è una parametrizzazione ammissibile nel campo di variazione di $\boldsymbol{q}$ indicato. La b non soddisfa il vincolo che O e B abbiano la stessa coordinata x_2.
XV: a
Usando come coordinate quelle assegnate, al massimo si possono fissare le posizioni di O' e B. A quel punto però la lamina può ancora ruotare intorno all'asse $\overrightarrow{O'B}$. Quindi vale a. La b è insensata.

Prova scritta del 18/10/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 18/10/2022

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 x_2 \,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,.$$

Il punto è soggetto alla forza costante

$$\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{e}_1 \,.$$

Qui α, $\beta > 0$ sono costanti.
01 Consideriamo il caso di attrito statico $|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}| \le \mu_s |\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|$, $\mu_s > 0$ costante. Allora l'insieme delle posizioni di equilibrio:
a Per ogni α fissato, può essere reso grande ad arbitrio prendendo β opportuno.
b Comprende in ogni caso almeno un asse.
c Nessuna delle precedenti.
02 Consideriamo il caso di attrito dinamico $|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}| = \mu |\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|$, $\mu > 0$ costante, ove si suppone $\boldsymbol{v} \neq 0$. Allora:
a Sono possibili moti rettilinei su cui si conserva l'energia meccanica.
b Si ha nelle equazioni di moto $|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}| = |\boldsymbol{F}^{\text{nor}}|$.
c Nessuna delle precedenti.

03 Consideriamo il caso di vincolo liscio. Allora:
a Tutti i moti sono limitati.
b Esistono moti per cui l'energia meccanica non si conserva.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Si calcola con l'usuale rappresentazione cartesiana della normale alla superficie

$$|\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}| = \left| \beta \boldsymbol{e}_1 \cdot \frac{\alpha x_2 \boldsymbol{e}_1 + \alpha x_1 \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{1+\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}} \right| = \frac{\alpha\beta |x_2|}{\sqrt{1+\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}} \,.$$

Quindi la condizione è

$$|\boldsymbol{F}^{\tan}|^2 = \beta^2 - |\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}|^2 \leq \mu_s^2 |\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}|^2 \,,$$

ossia

$$1 + \alpha^2 x_1^2 \leq \mu_s^2 \alpha^2 x_2^2 \,.$$

II: a
Se $x_2 = 0$, ossia sull'asse x_1, si ha $x_3 = 0$ e $\boldsymbol{v} = \dot{x}_1 \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{a} = \ddot{x}_1 \boldsymbol{e}_1$. L'equazione di moto diviene $m\ddot{x}_1 = \beta$.
III: c
Vale la conservazione dell'energia perché il vincolo è fisso e liscio, e la forza conservativa.
I moti rettilinei con $x_2 = 0$ del punto precedente sono senz'altro illimitati.

I.2 Una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato $2L$ è vincolata a mantenere il lato AB parallelo all'asse x_1 del sistema di riferimento fisso, ossia più precisamente

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Sulla lamina agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_C = \alpha \overrightarrow{AC} \times \boldsymbol{e}_1 \,,$$

applicata nel vertice C opposto a A; qui $\alpha > 0$ è costante.
04 Quale è il numero m di vincoli scalari necessario a rappresentare il vincolo sopra descritto per la lamina?
a $m = 1$.
b $m = 2$.
c Nessuna delle precedenti.
05 La forza $\boldsymbol{F}_C$:
a È costante.
b È solidale alla lamina.
c Nessuna delle precedenti.
06 Nel sistema di riferimento fisso vale la conservazione dell'energia?
a Sì se assumiamo l'ipotesi dei lavori virtuali.
b No.

c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Il vincolo fissa la direzione di un asse solidale, e quindi richiede 2 vincoli scalari.
II: b
Infatti è il prodotto vettoriale di vettori solidali e quindi è costante nel sistema di riferimento solidale.
III: b
La forza non è conservativa.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla circonferenza mobile di raggio $R > 0$

$$\boldsymbol{\psi}(s,t) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3(t)\,, \qquad s \in (0{,}2\pi R)\,,$$

ove

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante.
Sul punto non sono applicate sollecitazioni dirette. Si usi s come coordinata lagrangiana; $\boldsymbol{X}_O$ indica l'origine del sistema di riferimento fisso, centro della circonferenza e introduciamo il sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$.
07 Sotto quali condizioni la forza di Coriolis può essere trascurata nelle equazioni di moto scritte in $\mathcal{S}$?
a Vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
b Il vincolo è scabro e il coefficiente d'attrito è molto grande.
c Nessuna delle precedenti.
08 Il vincolo sia liscio. Allora il potenziale lagrangiano nel sistema mobile $\mathcal{S}$:
a È dato da

$$U^{\text{L}} = m\alpha^2\frac{R^2}{2}\Big(\cos\frac{s}{R}\Big)^2\,.$$

b Non è definito.
c Nessuna delle precedenti.
09 Il vincolo soddisfi la legge di attrito statico di Coulomb-Morin con coefficiente di attrito $\mu_s > 0$. Allora:
a Se μ_s è troppo piccolo non esistono posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$.
b L'insieme delle posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ dipende da α.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Segue da un risultato teorico che in questo caso la componente lagrangiana della

forza di Coriolis è nulla, perché il moto si svolge su un piano ruotante intorno a un suo asse.
II: a
Dato che $\boldsymbol{\omega} = \alpha \boldsymbol{u}_3$, si ha per la forza di trascinamento, che risulta l'unica presente in $\mathcal{S}$,

$$\boldsymbol{F}_{T} = m\alpha^2 \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 = m\alpha^2 R \cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1 \,,$$

cosicché

$$U^{\text{L}} = m\alpha^2 \frac{\lambda_1^2}{2} = m\alpha^2 \frac{R^2}{2}\Big(\cos\frac{s}{R}\Big)^2 .$$

III: c
La condizione di equilibrio relativo è

$$|\boldsymbol{F}_{T}\cdot\boldsymbol{T}| \le \mu_s \sqrt{(\boldsymbol{F}_{T}\cdot\boldsymbol{N})^2 + (\boldsymbol{F}_{T}\cdot\boldsymbol{B})^2} = \mu_s |\boldsymbol{F}_{T}\cdot\boldsymbol{N}| \,,$$

ossia

$$\cos\frac{s}{R} = 0 \quad \textit{oppure} \quad \Big|\sin\frac{s}{R}\Big| \le \mu_s \Big|\cos\frac{s}{R}\Big| \,.$$

I.4 Si consideri un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ che si muove vincolato alla curva regolare γ intersezione delle due superfici

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \,.$$

Si assuma che su γ i due vettori ∇f_1 e ∇f_2 siano sempre linearmente indipendenti, in modo che per ogni $\boldsymbol{x} \in \gamma$ risulti ben definito il piano

$$\mathit{\Pi}(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla f_1(\boldsymbol{x}), \nabla f_2(\boldsymbol{x}) \rangle \,.$$

Si assuma che $\boldsymbol{v} \neq 0$ e che la curva abbia curvatura $k > 0$.
10 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ soddisfa
a $\boldsymbol{a}(t)$ ha una componente non nulla parallela a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
b $\boldsymbol{a}(t)$ è ortogonale a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
c Nessuna delle precedenti.
11 Sul punto materiale vincolato a γ agisce la forza $\boldsymbol{F} = \lambda \nabla f_1$, con $\lambda > 0$ costante.
a Allora il vincolo non può essere liscio.
b La $\boldsymbol{F}$ compie lavoro nullo sul moto del punto.
c Nessuna delle precedenti.
12 Se sul punto agisce la forza generica $\boldsymbol{F}$ allora:
a Le componenti di $\boldsymbol{F}$ che giacciono su $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$ sono irrilevanti per il moto.
b La reazione vincolare appartiene a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$ nel caso di vincolo liscio, qualunque sia $\boldsymbol{F}$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Il piano $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$ è il piano normale alla curva in $\boldsymbol{X}(t)$ e l'accelerazione in genere non è né tangente né normale alla curva; tuttavia ha componente $\dot{s}\boldsymbol{N}$ parallela al piano.

II: b
Infatti $\boldsymbol{v}$ è tangente alla curva e ∇f_1 le è perpendicolare.
III: b
Se il vincolo è liscio la reazione ha componente ortogonale a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$ nulla, quindi vale b. La a vale solo se il vincolo è liscio, perché se il vincolo è scabro, la reazione invece ha in genere componente ortogonale a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$ non nulla e questa componente è determinata da quella su $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$.

I.5 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$, e il suo diagramma di fase con orbite $(x(t), p(t))$.
13 Supponiamo che per un $t_0 \in \boldsymbol{R}$

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0 \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \lim_{t\to t_0} p(t) = 0\,.$$

Allora:
a Si ha che x_0 è di equilibrio.
b I due limiti dati sono incompatibili.
c Nessuna delle precedenti.
14 Quale delle seguenti ipotesi implica che esistano orbite limitate?
a Esiste un punto di equilibrio.
b Il potenziale è limitato.
c Nessuna delle precedenti.
15 Supponiamo che il potenziale sia

$$U(x) = \alpha e^{-\beta^2 x^2}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti. Allora:
a Il punto $x = 0$ è di equilibrio stabile.
b Il punto $x = 0$ è di equilibrio instabile.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: c
Il punto x_0 è di inversione; non si può tendere all'equilibrio in un tempo finito.
II: a
Se vale a esiste almeno l'orbita limitata degenere data dal punto di equilibrio stesso. Il caso $U(x) = \operatorname{arctg} x$ è un controesempio a b.
III: a
Infatti $x = 0$ è di massimo isolato per U.

I.6 Un corpo rigido è vincolato a muoversi di moto polare di polo $\boldsymbol{X}_O$. Il vincolo è liscio.
16 Cosa si può dire della reazione vincolare?
a Ha momento nullo rispetto a $\boldsymbol{X}_O$.
b È parallela a $\boldsymbol{X}_O$.

c Nessuna delle precedenti.
17 Se le forze direttamente applicate sono nulle, il moto è sempre periodico.
a Dipende dalla geometria delle masse del corpo rigido.
b Non è mai vero a parte il caso del moto di quiete.
c Nessuna delle precedenti.
18 Supponiamo che il corpo parta da fermo e sia soggetto a sollecitazioni di momento $\boldsymbol{M}_O = \alpha \boldsymbol{u}$, con $\alpha > 0$ e $\boldsymbol{u}$ versore solidale.
a Allora il moto è sempre di rotazione intorno a $\boldsymbol{u}$.
b Allora il moto non è mai di rotazione intorno a $\boldsymbol{u}$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
È in pratica la definizione di vincolo liscio in questo caso. La b non ha senso.
II: a
Il moto è per inerzia. L'asserto è vero se l'ellissoide d'inerzia è di rotazione.
III: c
Il moto è di rotazione se e solo se $\boldsymbol{u}$ è principale in O.

Prova del 00/12/2022

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova del 00/12/2022

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 x_2 \,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,.$$

Il punto è soggetto alla forza costante

$$\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{e}_1 \,.$$

Qui α, $\beta > 0$ sono costanti.
01 Consideriamo il caso di attrito statico $|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}| \le \mu_s |\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|$, $\mu_s > 0$ costante. Allora l'insieme delle posizioni di equilibrio:
a Per ogni α fissato, può essere reso grande ad arbitrio prendendo β opportuno.
b Comprende in ogni caso almeno un asse.
c Nessuna delle precedenti.
02 Consideriamo il caso di attrito dinamico $|\mathbf{f}^{\tan}_{\text{vin}}| = \mu |\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}|$, $\mu > 0$ costante, ove si suppone $\boldsymbol{v} \neq 0$. Allora:

a Sono possibili moti rettilinei su cui si conserva l'energia meccanica.
b Si ha nelle equazioni di moto $|\mathbf{f}^{\text{nor}}_{\text{vin}}| = |\boldsymbol{F}^{\text{nor}}|$.
c Nessuna delle precedenti.
03 Consideriamo il caso di vincolo liscio. Allora:
a Tutti i moti sono limitati.
b Esistono moti per cui l'energia meccanica non si conserva.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Si calcola con l'usuale rappresentazione cartesiana della normale alla superficie

$$|\boldsymbol{F}^{\text{nor}}| = \left| \beta \boldsymbol{e}_1 \cdot \frac{\alpha x_2 \boldsymbol{e}_1 + \alpha x_1 \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{1 + \alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}} \right| = \frac{\alpha\beta |x_2|}{\sqrt{1 + \alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}} \,.$$

Quindi la condizione è

$$|\boldsymbol{F}^{\tan}|^2 = \beta^2 - |\boldsymbol{F}^{\text{nor}}|^2 \leq \mu_s^2 |\boldsymbol{F}^{\text{nor}}|^2 \,,$$

ossia

$$1 + \alpha^2 x_1^2 \leq \mu_s^2 \alpha^2 x_2^2 \,.$$

II: a
Se $x_2 = 0$, ossia sull'asse x_1, si ha $x_3 = 0$ e $\boldsymbol{v} = \dot{x}_1 \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{a} = \ddot{x}_1 \boldsymbol{e}_1$. L'equazione di moto diviene $m\ddot{x}_1 = \beta$.
III: c
Vale la conservazione dell'energia perché il vincolo è fisso e liscio, e la forza conservativa.
I moti rettilinei con $x_2 = 0$ del punto precedente sono senz'altro illimitati.

I.2 Una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato $2L$ è vincolata a mantenere il lato AB parallelo all'asse x_1 del sistema di riferimento fisso, ossia più precisamente

$$\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A = 2L\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Sulla lamina agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_C = \alpha \overrightarrow{AC} \times \boldsymbol{e}_1 \,,$$

applicata nel vertice C opposto a A; qui $\alpha > 0$ è costante.
04 Quale è il numero m di vincoli scalari necessario a rappresentare il vincolo sopra descritto per la lamina?
a $m = 1$.
b $m = 2$.
c Nessuna delle precedenti.
05 La forza $\boldsymbol{F}_C$:
a È costante.
b È solidale alla lamina.
c Nessuna delle precedenti.

06 Nel sistema di riferimento fisso vale la conservazione dell'energia?
a Sì se assumiamo l'ipotesi dei lavori virtuali.
b No.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Il vincolo fissa la direzione di un asse solidale, e quindi richiede 2 vincoli scalari.
II: b
Infatti è il prodotto vettoriale di vettori solidali e quindi è costante nel sistema di riferimento solidale.
III: b
La forza non è conservativa.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla circonferenza mobile di raggio $R > 0$

$$\boldsymbol{\psi}(s,t) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3(t)\,, \qquad s \in (0,2\pi R)\,,$$

ove

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante.
Sul punto non sono applicate sollecitazioni dirette. Si usi s come coordinata lagrangiana; $\boldsymbol{X}_O$ indica l'origine del sistema di riferimento fisso, centro della circonferenza e introduciamo il sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$.
07 Sotto quali condizioni la forza di Coriolis può essere trascurata nelle equazioni di moto scritte in $\mathcal{S}$?
a Vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
b Il vincolo è scabro e il coefficiente d'attrito è molto grande.
c Nessuna delle precedenti.
08 Il vincolo sia liscio. Allora il potenziale lagrangiano nel sistema mobile $\mathcal{S}$:
a È dato da

$$U^{\text{L}} = m\alpha^2\frac{R^2}{2}\Big(\cos\frac{s}{R}\Big)^2\,.$$

b Non è definito.
c Nessuna delle precedenti.
09 Il vincolo soddisfi la legge di attrito statico di Coulomb-Morin con coefficiente di attrito $\mu_s > 0$. Allora:
a Se μ_s è troppo piccolo non esistono posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$.
b L'insieme delle posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ dipende da α.
c Nessuna delle precedenti.

Soluzione
I: a
Segue da un risultato teorico che in questo caso la componente lagrangiana della forza di Coriolis è nulla, perché il moto si svolge su un piano ruotante intorno a un suo asse.
II: a
Dato che $\boldsymbol{\omega} = \alpha \boldsymbol{u}_3$*, si ha per la forza di trascinamento, che risulta l'unica presente in* $\mathcal{S}$*,*

$$\boldsymbol{F}_{\text{T}} = m\alpha^2 \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 = m\alpha^2 R \cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1\,,$$

cosicché

$$U^{\text{L}} = m\alpha^2 \frac{\lambda_1^2}{2} = m\alpha^2 \frac{R^2}{2}\Big(\cos\frac{s}{R}\Big)^2\,.$$

III: c
La condizione di equilibrio relativo è

$$|\boldsymbol{F}_{\text{T}} \cdot \boldsymbol{T}| \le \mu_s \sqrt{(\boldsymbol{F}_{\text{T}} \cdot \boldsymbol{N})^2 + (\boldsymbol{F}_{\text{T}} \cdot \boldsymbol{B})^2} = \mu_s |\boldsymbol{F}_{\text{T}} \cdot \boldsymbol{N}|\,,$$

ossia

$$\cos\frac{s}{R} = 0 \quad \textit{oppure} \quad \Big|\sin\frac{s}{R}\Big| \le \mu_s \Big|\cos\frac{s}{R}\Big|\,.$$

I.4 Si consideri un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ che si muove vincolato alla curva regolare γ intersezione delle due superfici

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0\,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0\,.$$

Si assuma che su γ i due vettori ∇f_1 e ∇f_2 siano sempre linearmente indipendenti, in modo che per ogni $\boldsymbol{x} \in \gamma$ risulti ben definito il piano

$$\mathit{\Pi}(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla f_1(\boldsymbol{x}), \nabla f_2(\boldsymbol{x}) \rangle\,.$$

Si assuma che $\boldsymbol{v} \neq 0$ e che la curva abbia curvatura $k > 0$.
10 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ soddisfa
a $\boldsymbol{a}(t)$ ha una componente non nulla parallela a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
b $\boldsymbol{a}(t)$ è ortogonale a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
c Nessuna delle precedenti.
11 Sul punto materiale vincolato a γ agisce la forza $\boldsymbol{F} = \lambda \nabla f_1$, con $\lambda > 0$ costante.
a Allora il vincolo non può essere liscio.
b La $\boldsymbol{F}$ compie lavoro nullo sul moto del punto.
c Nessuna delle precedenti.
12 Se sul punto agisce la forza generica $\boldsymbol{F}$ allora:
a Le componenti di $\boldsymbol{F}$ che giacciono su $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$ sono irrilevanti per il moto.
b La reazione vincolare appartiene a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$ nel caso di vincolo liscio, qualunque sia $\boldsymbol{F}$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione

I: a
Il piano $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$ è il piano normale alla curva in $\boldsymbol{X}(t)$ e l'accelerazione in genere non è né tangente né normale alla curva; tuttavia ha componente $\dot{s}\boldsymbol{N}$ parallela al piano.
II: b
Infatti $\boldsymbol{v}$ è tangente alla curva e ∇f_1 le è perpendicolare.
III: b
Se il vincolo è liscio la reazione ha componente ortogonale a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$ nulla, quindi vale b. La a vale solo se il vincolo è liscio, perché se il vincolo è scabro, la reazione invece ha in genere componente ortogonale a $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$ non nulla e questa componente è determinata da quella su $\Pi(\boldsymbol{X}(t))$.

I.5 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$, e il suo diagramma di fase con orbite $(x(t), p(t))$.
13 Supponiamo che per un $t_0 \in \boldsymbol{R}$

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0 \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \lim_{t\to t_0} p(t) = 0\,.$$

Allora:
a Si ha che x_0 è di equilibrio.
b I due limiti dati sono incompatibili.
c Nessuna delle precedenti.
14 Quale delle seguenti ipotesi implica che esistano orbite limitate?
a Esiste un punto di equilibrio.
b Il potenziale è limitato.
c Nessuna delle precedenti.
15 Supponiamo che il potenziale sia

$$U(x) = \alpha e^{-\beta^2 x^2}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti. Allora:
a Il punto $x = 0$ è di equilibrio stabile.
b Il punto $x = 0$ è di equilibrio instabile.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: c
Il punto x_0 è di inversione; non si può tendere all'equilibrio in un tempo finito.
II: a
Se vale a esiste almeno l'orbita limitata degenere data dal punto di equilibrio stesso. Il caso $U(x) = \operatorname{arctg} x$ è un controesempio a b.
III: a
Infatti $x = 0$ è di massimo isolato per U.

Prova scritta del 19/01/2023

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 19/01/2023

I.1 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$, con s ascissa curvilinea. Si assuma $k(s) > 0$ per ogni s. Si rappresenta il moto come $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Sul punto agisce una forza $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$, $\boldsymbol{F} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$.
01 Si assuma che il vincolo sia liscio e che $\dot{s} \neq 0$.
a La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ è sempre non nulla.
b La reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ è sempre nulla.
c Nessuna delle precedenti.
02 Si assuma che il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin di attrito dinamico con coefficiente di attrito $\mu > 0$, e che $\dot{s} \neq 0$.
a Si ha sempre che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} \leq 0$.
b Anche se $\boldsymbol{F}$ è conservativa di potenziale U, l'energia meccanica $T - U$ in genere non si conserva lungo il moto.
c Nessuna delle precedenti.
03 Si assuma che il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin di attrito statico.
a A parità di altre condizioni, se $\boldsymbol{F}$ è ammissibile per l'equilibrio con coefficiente di attrito $\mu_{\text{s}} > 0$, lo è anche con coefficiente $2\mu_{\text{s}}$.
b A parità di altre condizioni, se $\boldsymbol{F}$ è ammissibile per l'equilibrio con coefficiente di attrito $\mu_{\text{s}} > 0$, lo è anche con coefficiente $\mu_{\text{s}}/2$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Per esempio nel caso del moto circolare in cui

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2\,,$$

con forza $\boldsymbol{F} = -c\boldsymbol{X}$, $c > 0$ *costante, possono presentarsi sia i casi a che b in dipendenza dei valori di c,* R, m *e* $\dot{s}(0)$.
II: b
La a non vale, perché si ha $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{v} \leq 0$, *ma* $\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{T}$ *e si può avere* $\dot{s} < 0$. *Invece la b è vera, ogni volta che* $\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}} \neq 0$, *perché allora compare un termine di attrito diverso da* 0 *nell'equazione di moto.*
III: a
Infatti se vale $|\boldsymbol{F}^{\text{tan}}| \leq \mu_{\text{s}}|\boldsymbol{F}^{\text{nor}}|$, *vale anche* $|\boldsymbol{F}^{\text{tan}}| \leq 2\mu_{\text{s}}|\boldsymbol{F}^{\text{nor}}|$, *mentre non vale ovviamente l'analoga implicazione che darebbe b.*

I.2 Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.

04 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.
a L'ellissoide d'inerzia in O può essere di rotazione, ma non una sfera.
b L'ellissoide d'inerzia in O può essere di rotazione, ma il corpo non può essere omogeneo.
c Nessuna delle precedenti.
05 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:
a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
06 Denotiamo con $I_{11} \le I_{22} \le I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:
a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \le 2I_{33}T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Infatti se l'ellissoide d'inerzia è una sfera tutti i moti polari per inerzia sono rotazioni. Inoltre l'ellissoide può o meno essere una sfera indipendentemente dal fatto che il corpo sia omogeneo o no.
II: c
Infatti

$$2T(t) = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(t) = 2T(0) > 0\,,$$

e

$$|\boldsymbol{\omega}(t)|^2 \max_h I_{hh} \ge \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(t) \ge |\boldsymbol{\omega}(t)|^2 \min_h I_{hh}\,.$$

III: a
Infatti

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = \sum_{h=1}^{3} I_{hh}^2\boldsymbol{\omega}_h(t)^2 \le I_{33}\sum_{h=1}^{3} I_{hh}\boldsymbol{\omega}_h(t)^2 = 2I_{33}T(t) = 2I_{33}T(0)\,.$$

I.3 Un sistema di corpi rigidi è vincolato da vincoli olonomi regolari. Le coordinate lagrangiane sono indicate da $\boldsymbol{q} \in Q \subset \boldsymbol{R}^\ell$, e indichiamo con $Q_h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ le componenti lagrangiane delle forze. Valga l'ipotesi dei lavori virtuali.
07 I vincoli siano fissi.
a La lagrangiana è indipendente dal tempo.

b Se la funzione costante $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0$, $t \in \boldsymbol{R}$, risolve le equazioni di Lagrange, allora

$$Q_h(\boldsymbol{q}_0,0,t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t \in \boldsymbol{R}.$$

c Nessuna delle precedenti.

08 Le forze direttamente applicate siano conservative.

a Sicuramente si può definire la funzione lagrangiana.

b Sicuramente le Q_h sono indipendenti dal tempo, ossia $Q_h = Q_h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$.

c Nessuna delle precedenti.

09 Supponiamo che esista il potenziale lagrangiano U^{L} e che esso sia indipendente dal tempo, ossia $U^{\text{L}} = U^{\text{L}}(\boldsymbol{q})$.

a Vale la conservazione dell'energia.

b I vincoli sono fissi.

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: b

Infatti se i vincoli sono fissi T^{L} è una forma quadratica nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$ e quindi essa e le sue derivate rispetto alle $\dot{q}_h$ si annullano identicamente nel moto costante. La funzione lagrangiana non è necessariamente definita in questo caso.

II: a

Infatti il potenziale lagrangiano esiste e si può calcolare componendo quello tradizionale con la parametrizzazione lagrangiana. Tuttavia, per esempio se i vincoli sono mobili, non necessariamente vale b.

III: c

Un controesempio sia ad a che a b è dato da un punto materiale vincolato a un piano che si muove di moto accelerato normalmente a sé stesso, nel sistema fisso, in assenza di forze direttamente applicate.

I.4 In ciascuno dei casi seguenti determinare ove i vincoli olonomi fissi presentati siano regolari, all'interno di $A \cap Z_{\boldsymbol{f}}$, ove A è il dominio di definizione del vincolo.

In ciascun caso $n_c = 5$ e le coordinate locali sono $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_5)$.

10 Il vincolo definito in $A = \boldsymbol{R}^5$ è dato da:

$$f_1(\boldsymbol{z}) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\,,$$
$$f_2(\boldsymbol{z}) = z_4 - \frac{\pi}{4} = 0\,.$$

a Il vincolo è regolare in ogni $\boldsymbol{z} \in A \cap Z_{\boldsymbol{f}}$.

b Il vincolo non è regolare per nessun $\boldsymbol{z} \in A \cap Z_{\boldsymbol{f}}$.

c Nessuna delle precedenti.

11 Il vincolo definito in

$$A = \{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^5 \mid z_5 \in (0, \pi)\}\,,$$

è dato da:

$$f_1(\boldsymbol{z}) = z_3 = 0\,,$$
$$f_2(\boldsymbol{z}) = (\sin z_4)(\cos z_5) = 0\,.$$

a Il vincolo è regolare in ogni $\boldsymbol{z} \in A \cap Z_{\boldsymbol{f}}$.
b Il vincolo non è regolare per nessun $\boldsymbol{z} \in A \cap Z_{\boldsymbol{f}}$.
c Nessuna delle precedenti.
12 Il vincolo definito in

$$A = \{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^5 \mid z_3 > 0\}\,,$$

è dato da

$$f_1(\boldsymbol{z}) = z_3 - a z_1 z_2 = 0\,,$$
$$f_2(\boldsymbol{z}) = z_3 - b(z_1^2 + z_2^2) = 0\,,$$

con $a > 0$, $b > 0$ costanti. Si assuma a e b siano tali che $A \cap Z_{\boldsymbol{f}} \neq \varnothing$, e che $a \neq 2b$.
a Il vincolo è regolare in ogni $\boldsymbol{z} \in A \cap Z_{\boldsymbol{f}}$.
b Il vincolo non è regolare per nessun $\boldsymbol{z} \in A \cap Z_{\boldsymbol{f}}$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Infatti la matrice iacobiana è

$$\begin{pmatrix} 2z_1 & 2z_2 & 2z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

in cui la prima riga si annulla identicamente se $z_h = 0$ $h = 1, 2, 3$, come richiesto dal vincolo.
II: c
Infatti la matrice iacobiana è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\cos z_4)(\cos z_5) & -(\sin z_4)(\sin z_5) \end{pmatrix},$$

in cui la seconda riga si annulla per esempio nelle posizioni compatibili con $z_4 = \pi$, $z_5 = \pi/2$, ma non in quelle con $z_4 = \pi/2$, $z_5 = \pi/2$.
III: a
Infatti la matrice iacobiana è

$$\begin{pmatrix} -az_2 & -az_1 & 1 & 0 & 0 \\ -2bz_1 & -2bz_2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I determinanti dei 3 minori significativi sono

$$2ab(z_2^2 - z_1^2)\,, \qquad -az_2 + 2bz_1\,, \qquad -az_1 + 2bz_2\,.$$

Si noti che per i vincoli si deve avere $z_1 z_2 > 0$. Dunque se i 3 determinanti si annullano tutti, si ha $z_1 = z_2$ e quindi $a = 2b$.

I.5 Sia C un corpo rigido non degenere; sia $\boldsymbol{X}_Z$ un moto solidale al rigido.
13 La matrice d'inerzia in $\boldsymbol{X}_Z$, rispetto a una qualunque terna ortonormale positiva solidale, è:

a Diagonale.
b Costante nel tempo.
c Nessuna delle precedenti.
14 Supponiamo che la matrice d'inerzia nel centro di massa abbia i 3 momenti principali uguali.
a Il corpo C non può essere una lamina (cioè essere contenuto in un piano).
b Il corpo C deve avere densità costante, cioè essere omogeneo.
c Nessuna delle precedenti.
15 Supponiamo che il corpo si muova di moto polare e che l'energia cinetica del corpo si mantenga costante durante il moto.
a $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ si mantiene costante.
b Il moto è una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Infatti i momenti d'inerzia e deviatori sono dati da integrali indipendenti dal tempo. La a vale solo se la terna è principale.
II: a
Infatti se fosse una lamina il centro di massa apparterrebbe al suo piano, e si sa che in ogni punto del suo piano, uno dei momenti d'inerzia principali di una lamina è somma degli altri due.
Una sfera non omogenea ma con densità dipendente solo dalla distanza dal centro ha i 3 momenti principali nel centro (che è anche il centro di massa) uguali.
III: c
I moti polari per inerzia non rotatori sono controesempi sia ad a che a b.

Prova scritta del 03/02/2023

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 03/02/2023

I.1 Si consideri il moto del punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ soggetto alla forza a direzione radiale

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\}\,,$$

con $F \in C^1(\boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\})$.
01 L'energia meccanica si conserva lungo tutti i moti?
a Esistono scelte di $\boldsymbol{F}$ per cui è vero e altre per cui non lo è.

b Vale sempre nelle ipotesi dette.
c Nessuna delle precedenti.
02 Il moto del punto materiale
a In generale non è piano, ma può esserlo per particolari condizioni iniziali.
b È sempre rettilineo.
c Nessuna delle precedenti.
03 Supponiamo che il moto avvenga sul piano $x_3 = 0$ (le x_i sono le coordinate del sistema di riferimento fisso), e che il moto sia periodico. Per un'opportuna scelta di F:
a L'orbita può essere la circonferenza $(x_1 - 5)^2 + x_2^2 = 1$.
b L'orbita può essere la circonferenza $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
La teoria mostra che la forza è conservativa se e solo se $F(\boldsymbol{x}) = g(|\boldsymbol{x}|)$.
II: c
La teoria mostra che il moto è sempre piano, e rettilineo se e solo se $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) = 0$.
III: b
Poiché la velocità areolare è costante, $\dot{\varphi}$ *non può mai cambiare segno, come dovrebbe invece avvenire nel caso a. Il caso b si verifica se per esempio* $F(\boldsymbol{x}) = -k\boldsymbol{x}$ *con* $k > 0$ *e condizioni iniziali opportune.*

I.2 Consideriamo il moto del punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ vincolato alla circonferenza γ data da

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2\,, \qquad s \in (-\pi R, \pi R)\,.$$

Denotiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva. Il punto materiale è soggetto alla forza direttamente applicata posizionale $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^3)$.
04 Supponiamo che il vincolo sia liscio. Allora $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N}$
a Può assumere valori in un sottoinsieme inferiormente limitato di $\boldsymbol{R}$, indipendente dal particolare moto.
b Può assumere qualunque valore in $\boldsymbol{R}$.
c Nessuna delle precedenti.
05 Supponiamo che il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico con coefficiente di attrito $\mu > 0$, e che $\dot{s} \neq 0$. La forza $\boldsymbol{F}$ sia conservativa. Allora:
a Se $|\dot{s}(0)|$ è abbastanza piccolo, si conserva l'energia meccanica.
b Qualunque sia $\boldsymbol{F}$ conservativa, esistono moti su cui non si conserva l'energia meccanica.
c Nessuna delle precedenti.
06 Supponiamo che il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico, con coefficiente di attrito $\mu_{\text{s}} > 0$, e che la forza direttamente applicata sia la costante $\boldsymbol{F} = \alpha(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$, $\alpha > 0$.

a Se μ_s è abbastanza grande, tutti i punti di γ sono di equilibrio.
b Esistono sempre infiniti punti di equilibrio, per ogni $\mu_\mathrm{s} > 0$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Infatti

$$\mathbf{f}_\mathrm{vin} \cdot \boldsymbol{N} = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} + m\frac{\dot{s}^2}{R} \geq -\max_\gamma |\boldsymbol{F}| > -\infty\,.$$

II: b
Poiché l'equazione di moto contiene il termine dissipativo $-\operatorname{sign}(\dot{s})\mu|\mathbf{f}^\mathrm{nor}_\mathrm{vin}|$, *l'energia si conserva se e solo se* $\mathbf{f}^\mathrm{nor}_\mathrm{vin} = 0$. *Questo non è implicato da a. Vale però b, perché*

$$\mathbf{f}_\mathrm{vin} \cdot \boldsymbol{N} = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} + m\frac{\dot{s}^2}{R} \neq 0\,,$$

all'istante iniziale se scegliamo $\dot{s}(0) \neq 0$ *in modo opportuno.*
III: b
La a non vale perché nei punti ove $\boldsymbol{F}$ *è tangente alla circonferenza, ossia* $s = 3\pi/4$, $s = -\pi/4$, *non può valere* $|\boldsymbol{F}^\mathrm{tan}| \leq \mu_\mathrm{s}|\boldsymbol{F}^\mathrm{nor}|$. *La b vale invece, perché questa disuguaglianza certo vale in intervalli di lunghezza positiva intorno alle due posizioni ove la forza è normale alla circonferenza, ossia* $s = \pi/4$, $s = -3\pi/4$.

I.3 In ciascuno dei seguenti casi si dica quali siano le coordinate lagrangiane ammissibili. In ciascun caso il sistema è formato da due moti $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$. Le x_i denotano le coordinate del sistema di riferimento fisso e le q_h le coordinate lagrangiane.
07 Il moto $\boldsymbol{X}_1$ è vincolato all'asse x_1, e si ha $|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2| = L > 0$.
a

$$\boldsymbol{X}^\mathrm{L}_1(\boldsymbol{q}) = q_1\boldsymbol{e}_1\,,$$
$$\boldsymbol{X}^\mathrm{L}_2(\boldsymbol{q}) = (q_1 + L\cos q_2 \sin q_3)\boldsymbol{e}_1 + L\sin q_2 \sin q_3 \boldsymbol{e}_2 + L\cos q_3 \boldsymbol{e}_3\,,$$

con $\boldsymbol{q} \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$.
b

$$\boldsymbol{X}^\mathrm{L}_1(\boldsymbol{q}) = q_1^2\boldsymbol{e}_1\,,$$
$$\boldsymbol{X}^\mathrm{L}_2(\boldsymbol{q}) = (q_1^2 + L\cos q_2 \sin q_3)\boldsymbol{e}_1 + L\sin q_2 \sin q_3 \boldsymbol{e}_2 + L\cos q_3 \boldsymbol{e}_3\,,$$

con $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R} \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Il punto $\boldsymbol{X}_1$ sia vincolato al cilindro $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, $R > 0$, e si abbia inoltre $\boldsymbol{X}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3$, ossia i due punti abbiano la stessa quota.
a

$$\boldsymbol{X}^\mathrm{L}_1(\boldsymbol{q}) = R\cos q_1 \boldsymbol{e}_1 + R\sin q_1 \boldsymbol{e}_2 + q_2\boldsymbol{e}_3\,,$$
$$\boldsymbol{X}^\mathrm{L}_2(\boldsymbol{q}) = q_3\boldsymbol{e}_1 + q_4\boldsymbol{e}_2 + q_2\boldsymbol{e}_3\,,$$

con $\boldsymbol{q} \in (-\pi, \pi) \times \boldsymbol{R}^3$.
b

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}}(\boldsymbol{q}) = R\cos q_1 \boldsymbol{e}_1 + R\sin q_1 \boldsymbol{e}_2 + q_2 \boldsymbol{e}_3\,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\text{L}}(\boldsymbol{q}) = q_3 \boldsymbol{e}_1 + q_4 \boldsymbol{e}_2 + q_2 \boldsymbol{e}_3\,,$$

con $\boldsymbol{q} \in [-\pi, \pi) \times \boldsymbol{R}^2 \times (0, +\infty)$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Deve valere $(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$.
a

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}}(\boldsymbol{q}) = q_1 \boldsymbol{e}_1 + q_2 \boldsymbol{e}_2 + q_3 \boldsymbol{e}_3\,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\text{L}}(\boldsymbol{q}) = q_4 \boldsymbol{e}_1 + q_5 \boldsymbol{e}_2 + (q_3 + q_6) \boldsymbol{e}_3\,,$$

con $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^6$.
b

$$\boldsymbol{X}_1^{\text{L}}(\boldsymbol{q}) = q_1 \cos q_2 \boldsymbol{e}_1 + q_1 \sin q_2 \boldsymbol{e}_2 + q_3 \boldsymbol{e}_3\,,$$
$$\boldsymbol{X}_2^{\text{L}}(\boldsymbol{q}) = q_4 \boldsymbol{e}_1 + q_5 \boldsymbol{e}_2 + q_3 \boldsymbol{e}_3\,,$$

con $\boldsymbol{q} \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times \boldsymbol{R}^3$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Non copre tutte le posizioni compatibili, ma è una parametrizzazione ammissibile. La b non va bene perché la colonna della iacobiana $\frac{\partial \boldsymbol{z}^{\text{L}}}{\partial q_1} = 0$ *se* $q_1 = 0$.
II: a
Non copre tutte le posizioni compatibili, ma è una parametrizzazione ammissibile. La b non va bene perché l'insieme di definizione non è un aperto.
III: b
Non copre tutte le posizioni compatibili, ma è una parametrizzazione ammissibile. La a non va bene perché il numero dei gradi di libertà è sbagliato (e non soddisfa il vincolo).

I.4 Consideriamo il sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \ldots, n$, soggetto a vincoli olonomi; si assume l'ipotesi dei lavori virtuali.
10 La reazione vincolare ${\mathbf{f}_{\text{vin}}}^1$ sul punto $\boldsymbol{X}_1$
a Fa lavoro nullo se i vincoli sono fissi.
b Fa lavoro nullo se le forze direttamente applicate al sistema sono tutte nulle.
c Nessuna delle precedenti.
11 Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ è
a Indipendente dalla scelta delle coordinate lagrangiane.
b Definito solo nel caso dei vincoli fissi.
c Nessuna delle precedenti.

12 Sia $n = 2$ e il vincolo sia che i due punti sono a uguale distanza dall'origine del sistema di riferimento fisso (con cui non possono coincidere). Si noti che questa distanza non è prescritta dal vincolo.
a Ciascuna delle 2 reazioni vincolari ha direzione radiale.
b Le 2 reazioni vincolari sono ortogonali tra di loro.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
La a non vale, basta pensare al caso di due punti vincolati dal vincolo di rigidità, con una forza applicata solo a uno dei due. Non vale neanche la b, per esempio nel caso di un punto vincolato a una circonferenza.
II: a
Come segue dalla teoria.
III: a
Infatti il vincolo è per esempio

$$\sum_{i=1}^{3}(z_i^2 - z_{i+3}^2) = 0\,,$$

con iacobiana

$$2\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z_4 & -z_5 & -z_6 \end{pmatrix};$$

dunque per l'ipotesi dei lavori virtuali ciascuna delle reazioni è radiale.

I.5 Consideriamo un corpo rigido C non degenere, vincolato a muoversi di moto polare di polo O.
13 Supponiamo che il vincolo sia liscio.
a Il momento della reazione vincolare rispetto a O è nullo.
b Il momento della reazione vincolare rispetto a O non è nullo in genere, ma ha sempre componente nulla lungo $\boldsymbol{\omega}$.
c Nessuna delle precedenti.
14 Supponiamo che durante il moto $\boldsymbol{\omega}$ non si annulli mai e mantenga direzione costante. Allora il momento delle forze esterne con polo O soddisfa:
a Se $\boldsymbol{\omega}$ è diretto come un asse principale, può valere $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = 0$.
b Se $\boldsymbol{\omega}$ è diretto come un asse non principale, può valere $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
15 Il corpo C sia un rettangolo omogeneo di lati $a > b > 0$. Il moto sia una rotazione intorno alla diagonale del rettangolo (con $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per ogni t).
a Il vincolo non può essere liscio.
b L'energia cinetica può mantenersi costante durante il moto.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Segue dalla teoria e dalla definizione di vincolo lisico.
II: a
Questo per esempio è il caso delle rotazioni per inerzia. Il caso b non può verificarsi,

perché se l'asse di rotazione non è principale, il momento delle forze esterne non può essere nullo.
III: b
La a non ha senso. La b è vera se per esempio $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ *è normale all'asse di rotazione.*

Prova scritta del 24/03/2023

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 24/03/2023

I.1 Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = f(x)\,,$$

con $f \in C^1(\boldsymbol{R})$, e il suo diagramma di fase con orbite $(x(t), p(t))$.
01 Supponiamo che

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0 \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} p(t) = p_0 \in \boldsymbol{R}\,.$$

Allora:
a Si ha $p_0 = 0$ e x_0 è di equilibrio.
b I due limiti dati sono incompatibili.
c Nessuna delle precedenti.
02 Supponiamo che esista un solo punto di equilibrio e che questo sia stabile. Allora:
a Tutte le orbite sono limitate.
b Esistono sempre orbite illimitate.
c Nessuna delle precedenti.
03 Supponiamo che

$$f(x) = \alpha x e^{-\alpha^2 x^2}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $\alpha \neq 0$ costante. Allora:
a Il punto $x = 0$ è di equilibrio stabile.
b Esistono orbite illimitate.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
Segue dalla teoria.

II: c
Se $f(x) = -x$ si ha un controesempio a b; invece se $f = U'$ con

$$U(x) = -\frac{x^2}{1+x^2}\,,$$

si ha un controesempio a a.
III: b
La a è vera solo se $\alpha < 0$. Invece si ha che

$$U(x) = -\frac{e^{-\alpha^2 x^2}}{2\alpha}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

pertanto se $E > 1/(2|\alpha|)$ le corrispondenti orbite sono illimitate, non avvicinandosi mai all'asse x.

I.2 Si consideri un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ che si muove vincolato alla curva regolare γ intersezione delle due superfici

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0\,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0\,.$$

Si assuma che su γ i due vettori ∇f_1 e ∇f_2 siano sempre linearmente indipendenti, in modo che per ogni $\boldsymbol{x} \in \gamma$ risulti ben definito il piano

$$\mathit{\Pi}(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla f_1(\boldsymbol{x}), \nabla f_2(\boldsymbol{x}) \rangle\,.$$

04 L'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ soddisfa
a $\boldsymbol{a}(t) \in \mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
b $\boldsymbol{a}(t)$ è normale a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
c Nessuna delle precedenti.
05 La velocità $\boldsymbol{v}(t)$ soddisfa:
a $\boldsymbol{v}(t) \in \mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
b $\boldsymbol{v}(t)$ è normale a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$.
c Nessuna delle precedenti.
06 Se sul punto agisce la forza $\boldsymbol{F}$ allora:
a Se il vincolo è liscio, le componenti di $\boldsymbol{F}$ che giacciono su $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{x})$ sono irrilevanti per il moto.
b La reazione vincolare appartiene a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{x})$ sia nel caso di vincolo liscio che scabro.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: c
Il piano $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{X}(t))$ è il piano normale alla curva in $\boldsymbol{X}(t)$ e l'accelerazione in genere non è né tangente né normale alla curva.
II: b
Segue dal punto precedente perché $\boldsymbol{v}$ è tangente alla curva.
III: a
Se il vincolo è liscio la reazione ha componente ortogonale a $\mathit{\Pi}(\boldsymbol{x})$ nulla, e quindi solo tale componente di $\boldsymbol{F}$ determina il moto lungo γ.

Se il vincolo è scabro, la reazione invece ha in genere componente ortogonale a $\Pi(\boldsymbol{x})$ non nulla.

I.3 Il corpo rigido non degenere C si muova di moto polare per inerzia di polo O. Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(0) \neq 0$.
07 Supponiamo che il moto non sia una rotazione.
a L'ellissoide d'inerzia in O può essere di rotazione, ma non una sfera.
b L'ellissoide d'inerzia in O può essere di rotazione, ma il corpo non può essere omogeneo.
c Nessuna delle precedenti.
08 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può soddisfare:
a

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = 0\,.$$

b

$$\lim_{t\to+\infty} |\boldsymbol{\omega}(t)| = +\infty\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
09 Denotiamo con $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ i momenti principali d'inerzia in O. Allora per ogni $t > 0$:
a

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 \leq 2I_{33}T(0)\,.$$

b

$$|\boldsymbol{L}_O(0)|^2 = (2T(t))^2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
Infatti se l'ellissoide d'inerzia è una sfera tutti i moti polari per inerzia sono rotazioni. Inoltre l'ellissoide può o meno essere una sfera indipendentemente dal fatto che il corpo sia omogeneo o no.
II: c
Infatti

$$2T(t) = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(t) = 2T(0) > 0\,,$$

e

$$|\boldsymbol{\omega}(t)|^2 \max_h I_{hh} \geq \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(t) \geq |\boldsymbol{\omega}(t)|^2 \min_h I_{hh}\,.$$

III: a
Infatti

$$|\boldsymbol{L}_O(t)|^2 = \sum_{h=1}^{3} I_{hh}^2\boldsymbol{\omega}_h(t)^2 \leq I_{33}\sum_{h=1}^{3} I_{hh}\boldsymbol{\omega}_h(t)^2 = 2I_{33}T(t) = 2I_{33}T(0)\,.$$

I.4 Si considerino i seguenti vincoli per il moto

$$\boldsymbol{X} = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \boldsymbol{R}^3\,.$$

10 Il vincolo è

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t) = \begin{pmatrix} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - \alpha t^2 \\ z_3 - \beta t \end{pmatrix} = 0\,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti. Qui $t > 0$.
a Esiste sempre almeno un intervallo $t \in (0, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$ in cui il vincolo è olonomo regolare.
b Fissato $\beta > 0$, esistono $\alpha > 0$ per cui il vincolo non è regolare.
c Nessuna delle precedenti.
11 Il vincolo è

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t) = \begin{pmatrix} z_1 - 3 \\ z_2 - 2t \end{pmatrix} = 0\,,$$

con $t > 0$.
a Il vincolo è equivalente a un vincolo fisso.
b Il sistema vincolato ha 2 gradi di libertà.
c Nessuna delle precedenti.
12 Il vincolo è

$$f(\boldsymbol{z},t) = z_1 - \alpha z_2 z_3 - \beta t = 0\,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ costanti.
a L'insieme delle configurazioni ammissibili è una superficie regolare (eventualmente mobile) di $\boldsymbol{R}^3$, per qualunque scelta di α, $\beta \in \boldsymbol{R}$.
b Per vincoli di questo tipo non si può porre l'ipotesi dei lavori virtuali.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Poiché $\boldsymbol{f} \in C^\infty$; la iacobiana è

$$\begin{pmatrix} 2z_1 & 2z_2 & 2z_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che è non singolare se $(z_1, z_2) \neq (0,0)$ nelle configurazioni ammissibili. Questo è vero se

$$z_3 = \beta t < \sqrt{\alpha t^2}\,,$$

ossia $\beta < \sqrt{\alpha}$. Viceversa se $\beta \geq \sqrt{\alpha}$ il vincolo è degenere o non ha soluzioni.
II: c
Il vincolo consiste nella retta mobile

$$\boldsymbol{\psi}(s,t) = 3\boldsymbol{e}_1 + 2t\boldsymbol{e}_2 + s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$

Il moto ha $\ell = 1$.
III: a
Infatti lo spazio delle configurazioni ammissibili ha la rappresentazione

$$\boldsymbol{r}(\varphi,\theta) = (\alpha\varphi\theta + \beta t, \varphi, \theta)\,, \qquad (\varphi,\theta) \in \boldsymbol{R}^2\,,$$

con

$$\boldsymbol{r}_\varphi = (\alpha\theta,1,0)\,, \qquad \boldsymbol{r}_\theta = (\alpha\varphi,0,1)\,, \qquad \boldsymbol{r}_\varphi \times \boldsymbol{r}_\theta \neq 0\,.$$

I.5 Sia C un corpo rigido non degenere; sia $\boldsymbol{X}_Z$ un moto solidale al rigido.
13 La matrice d'inerzia in $\boldsymbol{X}_Z$, rispetto a una qualunque terna ortonormale positiva solidale, può essere:
a Diagonale.
b Non costante nel tempo.
c Nessuna delle precedenti.
14 Supponiamo che la matrice d'inerzia nel centro di massa abbia i 3 momenti principali uguali.
a Il corpo C può essere una lamina (cioè essere contenuto in un piano).
b Il corpo C deve avere densità costante, cioè essere omogeneo.
c Nessuna delle precedenti.
15 Supponiamo che il corpo si muova di moto polare e che l'energia cinetica del corpo si mantenga costante durante il moto.
a $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ si mantiene costante.
b Il moto è una rotazione.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
La b non vale, infatti i momenti d'inerzia e deviatori sono dati da integrali indipendenti dal tempo. La a vale se la terna è principale.
II: c
Infatti se fosse una lamina il centro di massa apparterrebbe al suo piano, e si sa che in ogni punto del suo piano, uno dei momenti d'inerzia principali di una lamina è somma degli altri due.
Una sfera non omogenea ma con densità dipendente solo dalla distanza dal centro ha i 3 momenti principali nel centro (che è anche il centro di massa) uguali.
III: c
I moti polari per inerzia non rotatori sono controesempi sia ad a che a b.

Prova scritta del 09/06/2023

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 09/06/2023

I.1 Sia C un corpo rigido non degenere.
01 Nel centro di massa del corpo è possibile trovare una terna ortonormale $\mathcal{M}$ solidale rispetto a cui la matrice d'inerzia sia

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

con $I > 0$ opportuno.
a È sempre vero.
b È vero per i corpi omogenei, ma non in generale.
c Nessuna delle precedenti.
02 Se C si muove di moto polare, si ha che per ogni t

$$T(t) = \frac{1}{2} I(t) |\boldsymbol{\omega}(t)|^2 \,,$$

con $I(t) > 0$ momento d'inerzia rispetto a un asse opportuno.
a È sempre vero.
b È vero solo se il corpo ha speciali simmetrie, non in generale.
c Nessuna delle precedenti.
03 Supponiamo che l'ellissoide d'inerzia di C nel centro di massa sia una sfera.
a Esistono infiniti altri punti ove l'ellissoide d'inerzia è di rotazione.
b Possono non esistere altri punti ove l'ellissoide d'inerzia sia di rotazione.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Neppure in un corpo omogeneo l'ellissoide d'inerzia centrale è necessariamente sferico; basti pensare al caso delle lamine.
II: a
Segue dalla formula per i moti polari di polo O

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} I |\boldsymbol{\omega}|^2 \,,$$

ove I è il momento nella direzione di $\boldsymbol{\omega}$.
III: a
Per esempio C sia una sfera. Per il teorema di Huygens, su tutti i punti di un asse principale centrale, i momenti principali si ottengono così: quello relativo all'asse stesso è invariato, gli altri due si ottengono sommando md^2 al momento centrale corrispondente (d è la distanza del punto dal centro di massa). Ma tutti i momenti centrali sono uguali per ipotesi, quindi segue a.

I.2 Un sistema di n punti materiali è soggetto a vincoli olonomi regolari. Indichiamo con $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ lo spazio degli spostamenti virtuali e con $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ lo spazio normale.
04 Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali, assegnata una configurazione $(\boldsymbol{z}, t)$ la direzione della reazione vincolare totale $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ in $\boldsymbol{R}^{3n}$ risulta fissata.
a Sì, sempre.
b No, mai.
c Nessuna delle precedenti.
05 Lo spazio $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ dipende dalla scelta delle coordinate lagrangiane.
a Solo se i vincoli sono mobili.
b No, mai.
c Nessuna delle precedenti.

06 Se si conosce lo spazio $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ come sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$, si può determinare
a Se valga l'ipotesi dei lavori virtuali.
b Lo spazio $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Infatti $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ *e questo determina la direzione solo se questo spazio ha dimensione* 1*, ossia se c'è un solo vincolo scalare.*
II: b
Dalla teoria.
III: b
Infatti i due spazi sono uno l'ortogonale dell'altro. L'ipotesi dei lavori virtuali è un'ipotesi dinamica che non può essere determinata dalla geometria.

I.3 Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$ un sistema di riferimento mobile. Si consideri anche un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi regolari.
07 Le equazioni di Lagrange relative al sistema $\mathcal{S}$ si possono scrivere solo se vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
a Sì.
b Non è necessaria se i vincoli sono fissi e $\mathcal{S}$ si muove di moto rotatorio uniforme.
c Nessuna delle precedenti.
08 In $\mathcal{S}$ la forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle.
a Se e solo se il moto è di quiete relativa a $\mathcal{S}$.
b In alcuni casi anche per moti che non sono di quiete relativa a $\mathcal{S}$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Può essere che il numero delle equazioni di Lagrange scritte in $\mathcal{S}$ sia inferiore a quello delle equazioni di Lagrange scritte nel sistema di riferimento fisso.
a Sì.
b No, mai.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Le equazioni di Lagrange (in qualunque sistema di riferimento) discendono dall'equazione di moto e dall'ipotesi dei lavori virtuali.
II: b
Sono nulle per esempio se i vincoli sono fissi in $\mathcal{S}$ *e* $\ell = 1$ *(dalla teoria).*
III: b
Il numero delle equazioni di Lagrange coincide con il numero dei gradi di libertà, che non varia cambiando sistema di riferimento.

I.4 Un punto materiale è vincolato a una superficie regolare $S \subset \boldsymbol{R}^3$, di normale $\boldsymbol{\nu}$. Il punto è fermo all'istante iniziale, e su di esso agisce la forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$.

10 Il vincolo sia scabro, secondo la legge di attrito statico di Coulomb-Morin con coefficiente di attrito $\mu_s > 0$.
a Esistono forze $\boldsymbol{F} \neq 0$ tali che il punto resta in quiete qualunque sia $\mu_s > 0$.
b Esistono $\mu_s > 0$ tali che il punto resta in quiete qualunque sia $\boldsymbol{F}$.
c Nessuna delle precedenti.
11 Il vincolo sia liscio. Allora all'istante iniziale $\boldsymbol{F}$ e l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ sono parallele.
a In generale no.
b È vero se S è una sfera.
c Nessuna delle precedenti.
12 Il vincolo sia scabro, secondo la legge di attrito statico di Coulomb-Morin con coefficiente di attrito $\mu_s > 0$. Si assuma che S abbia una simmetria di rotazione.
a Se $\boldsymbol{F}$ è parallela all'asse di rotazione, il moto è di quiete.
b Se $\boldsymbol{F}$ è ortogonale all'asse di rotazione, il moto è di quiete.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Basta prendere $\boldsymbol{F}$ parallela alla normale.
II: a
Infatti anche all'istante iniziale

$$m\boldsymbol{a} - \boldsymbol{F} = \mathbf{f}_{\text{vin}} = (\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}\,.$$

Perciò se $\boldsymbol{F}$ è per esempio tangente, in genere $\boldsymbol{a}$ non lo è.
III: c
Infatti in entrambi i casi a e b, non è detto che $\boldsymbol{F}$ sia normale, perciò la quiete dipende dalla usuale disuguaglianza di ammissibilità.

I.5 Si consideri un sistema di punti materiali soggetto a vincoli olonomi regolari. Si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia ℓ il numero dei gradi di libertà. I vincoli siano fissi e le forze direttamente applicate conservative. Denotiamo con $\boldsymbol{q}$ le coordinate lagrangiane.
13 Se $\boldsymbol{q}_0$ è una posizione di equilibrio stabile, in essa si possono definire le piccole oscillazioni.
a Sì.
b Non sempre.
c Nessuna delle precedenti.
14 Se in $\boldsymbol{q}_0$ si possono definire le piccole oscillazioni, allora i moti delle piccole oscillazioni sono
a Periodici.
b Limitati.
c Nessuna delle precedenti.
15 Se $\ell = 1$ e in q_0 si possono definire le piccole oscillazioni, i moti delle piccole oscillazioni
a Sono armonici.

b Convergono a q_0 per $t \to +\infty$.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Occorre che il potenziale abbia hessiana definita negativa in $\boldsymbol{q}_0$.
II: b
I moti sono composizione di moti armonici, ma non necessariamente periodici. Tuttavia sono limitati.
III: a
Se $\ell = 1$ *l'equazione delle piccole oscillazioni è quella del moto armonico.*

Prova scritta del 07/07/2023

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 07/07/2023

I.1 Sia C un corpo rigido non degenere formato da 3 elementi materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, 2, 3$.
01 L'ellissoide d'inerzia nel centro di massa di C è una sfera.
a È sempre vero.
b Non è mai vero.
c Nessuna delle precedenti.
02 Esistono piani di simmetria materiale ortogonale per C?
a Possono non essercene, al massimo ne esiste uno solo.
b Certamente almeno uno.
c Nessuna delle precedenti.
03 Se si aggiunge un quarto punto materiale al corpo rigido (che rimane un corpo rigido), di posizione non coincidente con i precedenti, allora
a Il numero dei gradi di libertà resta invariato.
b Il numero dei gradi di libertà aumenta di 2.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Il corpo è una lamina. Quindi nel centro di massa il momento d'inerzia relativo all'asse ortogonale al piano del corpo è la somma degli altri due, perciò è impossibile che i 3 *momenti siano uguali.*
II: b
Almeno il piano cui appartiene il corpo è di simmetria materiale ortogonale. Possono essercene altri (si pensi al caso di 3 *punti di uguale massa ai vertici di un triangolo equilatero).*

III: a
Il numero dei gradi di libertà di un corpo rigido non degenere (quale rimane il corpo aggiungendo un punto) è sempre 6.

I.2 Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)=0\,,\qquad \boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^{3n+1}\to\boldsymbol{R}^{m}\,,$$

con $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{t}}$. Indichiamo con $\ell=3n-m$ il numero dei gradi di libertà e con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane.
04 Gli atti di moto del sistema nell'istante $\bar t$ fissato formano
a Un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^{\ell}$.
b Lo spazio delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.
c Nessuna delle precedenti.
05 L'energia cinetica del sistema in forma lagrangiana $T^{\text{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$
a Soddisfa $T^{\text{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)>0$ per ogni $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$.
b È un polinomio di secondo grado nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.
c Nessuna delle precedenti.
06 Gli spostamenti virtuali formano un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ che è
a Indipendente dal tempo.
b Indipendente dalla scelta delle coordinate lagrangiane.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: c
Gli atti di moto sono i vettori $\dot{\boldsymbol{z}}(\bar t)\in\boldsymbol{R}^{3n}$ ammissibili, quindi non possono appartenere a $\boldsymbol{R}^{\ell}$. Inoltre sono vettori e non funzioni, perciò non vale b.
II: b
Dalla teoria.
III: b
Dalla teoria. Lo spazio $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ è indipendente dal tempo se i vincoli sono fissi.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X},m)$ è vincolato all'elica circolare

$$\boldsymbol{\psi}(s)=R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1+R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2+h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,,\qquad s\in\boldsymbol{R}\,,$$

con R, $h>0$ e $\alpha=(R^2+h^2)^{-1/2}$. Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata costante $\boldsymbol{F}$.
Indichiamo il moto con $\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{\psi}(s(t))$; s è l'ascissa curvilinea.
Ricordiamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(s)&=-R\alpha\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1+R\alpha\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2+h\alpha\boldsymbol{e}_3\,,\\ \boldsymbol{N}(s)&=-\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1-\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{B}(s)&=\alpha h\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1-\alpha h\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2+\alpha R\boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

07 Supponiamo che $\boldsymbol{F}=0$, $s(0)=0$, $\dot s(t)\neq 0$ per ogni t. Il vincolo sia scabro secondo la legge di attrito dinamico di Coulomb-Morin. Allora

a $\ddot{s}(0) = 0$.
b $\mathbf{f}_{\text{vin}}(0) = 0$.
c Nessuna delle precedenti.
08 Il vettore accelerazione $\boldsymbol{a}(\bar{t})$ per un $\bar{t} \in \boldsymbol{R}$
a Se $\dot{s}(\bar{t}) \neq 0$ allora soddisfa $\boldsymbol{a}(\bar{t}) \cdot \boldsymbol{e}_3 \neq 0$.
b Se $\ddot{s}(\bar{t}) \neq 0$ allora soddisfa $\boldsymbol{a}(\bar{t}) \cdot \boldsymbol{e}_3 \neq 0$.
c Nessuna delle precedenti.
09 Il vincolo sia liscio con $\boldsymbol{F} = \lambda \boldsymbol{e}_1$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$. Allora dato un moto s (per una c costante opportuna)
a Vale per ogni t

$$\frac{m}{2}\dot{s}(t)^2 - \lambda s(t) = c\,.$$

b Vale per ogni t

$$\frac{m}{2}\dot{s}(t)^2 + \lambda R\cos(\alpha s(t)) = c\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: c
Le equazioni di moto sono

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T} + \mathbf{f}_{\text{vin}}\cdot\boldsymbol{T}\,,\\ m\dot{s}^2 k(s) &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N} + \mathbf{f}_{\text{vin}}\cdot\boldsymbol{N}\,,\\ 0 &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{B} + \mathbf{f}_{\text{vin}}\cdot\boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Poiché il vincolo è scabro, in assenza di forze si ha $\ddot{s} = 0$ se e solo se $\mathbf{f}_{\text{vin}} = 0$. Ma nelle ipotesi fatte questo è escluso dalla seconda equazione.
II: b
Si ha $\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{T} + k\dot{s}^2\boldsymbol{N}$. Se $\dot{s} \neq 0$ ma $\ddot{s} = 0$, $\boldsymbol{a}$ ha componente nulla lungo $\boldsymbol{e}_3$ (si veda la scomposizione di $\boldsymbol{N}$), quindi a non vale. Però se $\ddot{s} \neq 0$ la componente di $\boldsymbol{a}$ lungo $\boldsymbol{e}_3$ è esattamente $h\alpha\ddot{s}$.
III: c
La conservazione dell'energia dà

$$\frac{m}{2}\dot{s}^2 - \lambda R\cos(\alpha s) = c\,.$$

Quindi a e b non valgono.

I.4 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ si muove di moto centrale soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = k\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\}\,,$$

con $k \in \boldsymbol{R}$ costante.
Si sa che il moto avviene sul piano $x_3 = 0$ in cui usiamo le coordinate polari r, φ.
10 Assegnato un moto, esiste una costante $c \in \boldsymbol{R}$ tale che per ogni t
a

$$\ddot{r} = \frac{k}{m} + \frac{c^2}{r^3}\,.$$

b

$$r\dot{\varphi}^2 = c\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

11 Supponiamo che lungo un moto $\boldsymbol{X}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, si abbia $r(t) = r_0 > 0$, $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$.

a Allora deve essere $k < 0$.

b Allora deve essere $\dot{\varphi}(t) > 0$.

c Nessuna delle precedenti.

12 Supponiamo che

$$r(0) = r_0 > 0\,, \quad \dot{r}(0) = 0\,, \quad \varphi(0) = 0\,, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 > 0\,.$$

Assumendo che il moto sia definito per ogni $t > 0$

a È possibile che

$$\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^3\,, \quad \lim_{t\to+\infty} \dot{\boldsymbol{X}}(t) = 0\,.$$

b È possibile che $r(t) = r_0$ per ogni $t > 0$.

c Nessuna delle precedenti.

Soluzione

I: a

Le due equazioni di moto in coordinate polari sono

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = k\,,$$
$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0\,.$$

Come noto la seconda dà $r^2\dot{\varphi} = c$; quindi la prima diviene proprio la a, sostituendo la $\dot{\varphi} = c/r^2$.

II: a

Dalla prima delle due equazioni di moto, se r è costante si ha

$$-mr\dot{\varphi}^2 = k\,.$$

III: b

La a non può valere, perché nelle ipotesi di a, si avrebbe

$$r(t)^2\dot{\varphi}(t) \to 0\,, \qquad t \to +\infty\,,$$

contro l'integrale del moto trovato anche qui sopra. La b vale perché r si mantiene costante se

$$-mr_0\dot{\varphi}_0^2 = k\,.$$

I.5 Un cono circolare retto omogeneo C ha vertice V, altezza $H > 0$ e raggio di base $R > 0$. Indichiamo con A il centro della base, con B un punto solidale a C della circonferenza di base e con G il centro di massa.

13 Se C è soggetto al vincolo

$$\overrightarrow{AV} = H\boldsymbol{e}_3\,,$$

allora i gradi di libertà di C sono
a 4.
b 3.
c Nessuna delle precedenti.

14 Quale dei seguenti insiemi di coordinate locali per C è ammissibile (almeno in certe posizioni)? Qui (x_i) indicano le coordinate nel sistema di riferimento fisso.
a

$$x_{1V}\,, \quad x_{2V}\,, \quad x_{3V}\,, \quad x_{1A}\,, \quad x_{2A}\,, \quad x_{1B}\,.$$

b

$$x_{1V}\,, \quad x_{2V}\,, \quad x_{3V}\,, \quad x_{1A}\,, \quad x_{2A}\,, \quad x_{3A}\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

15 Se conosciamo all'istante $\bar{t}$ le posizioni $\boldsymbol{X}_V(\bar{t})$, $\boldsymbol{X}_B(\bar{t})$, allora conosciamo anche la posizione
a $\boldsymbol{X}_A(\bar{t})$.
b $\boldsymbol{X}_G(\bar{t})$.
c Nessuna delle precedenti.

Soluzione
I: a
Fissare un asse solidale sottrae due gradi di libertà.
II: a
La b non vale perché anche fissate le coordinate il corpo resta libero di ruotare intorno a $\overrightarrow{AV}$*. La a va bene perché le* 6 *coordinate fissano la posizione del corpo.*
III: c
Se conosco $\boldsymbol{X}_V$*,* $\boldsymbol{X}_B$ *il corpo è ancora libero di ruotare intorno a* $\overrightarrow{VB}$*, quindi non valgono né a né b. È vero che se conosco inoltre* $\boldsymbol{X}_A$ *conosco anche* $\boldsymbol{X}_G$ *e viceversa.*

Prova scritta del 08/09/2023

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 08/09/2023

I.1 Si considerino le due lagrangiane

$$\mathcal{L}_1(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \alpha(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \beta \cos q_1 + \gamma \dot{q}_2 \sin q_2\,,$$
$$\mathcal{L}_2(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \alpha(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \beta \cos q_1\,.$$

Entrambe sono definite per $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \in \boldsymbol{R}^4$. Qui α, β, γ sono costanti positive assegnate.

01 Le due lagrangiane $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ conducono a equazioni di Lagrange che hanno le stesse soluzioni (a parità di dati iniziali)?
a Sì.
b No, salvo che per alcuni valori di α, β, γ.
c Nessuna delle precedenti.
02 Si consideri qui

$$\mathcal{L}_2(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = T_2^{\text{L}} + U_2^{\text{L}}\,, \quad T_2^{\text{L}} = \alpha(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\,, \quad U_2^{\text{L}} = \beta \cos q_1\,.$$

Esistono punti dove siano definite le piccole oscillazioni?
a No, per nessun valore di α, $\beta > 0$.
b Certamente almeno uno.
c Nessuna delle precedenti.
03 Si consideri la lagrangiana $\mathcal{L}_1$; si dica se valga per i moti corrispondenti la conservazione dell'energia

$$W(q_1, q_2) = \alpha(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \beta \cos q_1\,.$$

a Solo per $\beta < 1$.
b Sì.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: a
Segue dalla teoria (perché $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = dF(\boldsymbol{q})/dt$) o direttamente dai calcoli.
II: a
Infatti l'hessiana

$$D^2 U_2^{\text{L}} = \begin{pmatrix} -\beta \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

non è mai definita negativa.
III: b
Le equazioni di Lagrange sono (dai calcoli)

$$2\alpha \ddot{q}_1 + \beta \sin q_1 = 0\,, \qquad 2\alpha \ddot{q}_2 = 0\,.$$

Moltiplicando la prima per $\dot{q}_1$ e la seconda per $\dot{q}_2$, e poi sommando si ottiene $dW/dt = 0$.

I.2 Un corpo rigido C si muove di moto polare intorno al polo O. I vincoli sono lisci. Sul corpo agisce la distribuzione di forze $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$.
Indichiamo con $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale, con $(\boldsymbol{u}_h)$ principale d'inerzia in O.
04 Fissiamo un asse r solidale a C, passante per O. Supponiamo che il corpo parta da fermo.
Qualunque sia la geometria delle masse di C esiste sempre una distribuzione $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ tale che il moto sia una rotazione (non la quiete) intorno a r.
a No.
b Sì, ma solo se O è il centro di massa.

c Nessuna delle precedenti.

05 Supponiamo che $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ si riduca alla sola forza

$$\boldsymbol{F}_A = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2 \,,$$

applicata in A tale che $\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_3$. Qui α, β, R sono costanti positive assegnate. Supponiamo anche

$$\boldsymbol{\omega}(0) = -\beta \boldsymbol{u}_1(0) + \alpha \boldsymbol{u}_2(0) \,.$$

È possibile che il moto sia di rotazione?

a No, mai.

b Dipende solo dalla geometria delle masse di C.

c Nessuna delle precedenti.

06 Supponiamo che il moto sia polare per inerzia. Sia

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \boldsymbol{u}_1(0) + \beta \boldsymbol{u}_2(0) \,.$$

Qui α, β sono costanti positive assegnate.

Il moto è di rotazione?

a Sì se $I^O_{11} = I^O_{33}$.

b Sì se $I^O_{11} > I^O_{22}$.

c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE

I: c

La risposta è sì, quindi c; infatti basta definire la distribuzione di forze in modo che il momento sia quello richiesto dalle equazioni di Eulero ove $\boldsymbol{\omega}$ è quella di rotazione assegnata.

II: b

Si ha $\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}}_O = R(\alpha \boldsymbol{u}_2 - \beta \boldsymbol{u}_1)$. Quindi all'istante iniziale $\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}}_O$ è diretto come $\boldsymbol{\omega}$. Dalla teoria segue che il moto è di rotazione se e solo se $\boldsymbol{\omega}$ è diretto lungo un asse principale, ossia se e solo se il piano solidale $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ è composto di assi principali.

III: c

Dalla teoria si ha che il moto è di rotazione se e solo se $\boldsymbol{\omega}(0)$ è principale, cioè se e solo se $I^O_{11} = I^O_{22}$.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$ con curvatura $k > 0$. Il punto è soggetto alla forza $\boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t)$, nelle solite ipotesi di regolarità. Indichiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva.

07 Supponiamo che $\dot{s}(0) \neq 0$ e che $\boldsymbol{F} = \lambda(s, \dot{s}, t)\boldsymbol{T}(s)$ con $\lambda \in C^1(\boldsymbol{R}^3)$. Allora

a Di fatto il moto è lo stesso sia nel caso di vincolo liscio che scabro alla Coulomb-Morin.

b Di fatto il moto non è lo stesso nel caso di vincolo liscio e nel caso di vincolo scabro alla Coulomb-Morin.

c Nessuna delle precedenti.

08 Siano $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0 \neq 0$ assegnate condizioni iniziali. Denotiamo con s_1 il moto corrispondente al caso di vincolo liscio e forza

$$\boldsymbol{F}_1 = \lambda_1(t)\boldsymbol{N}(s)\,,$$

con $\lambda_1 \in C(\boldsymbol{R})$ assegnata.
a Esiste una forza $\boldsymbol{F}_2 = \lambda_2(t)\boldsymbol{N}(s)$, con $\lambda_2 \in C(\boldsymbol{R})$ opportuna, tale che il moto s_2 corrispondente alla forza $\boldsymbol{F}_2$ e a vincolo scabro alla Coulomb-Morin, coincida con s_1.
b Se il vincolo è scabro, il moto è sempre diverso da s_1, qualunque sia la forza $\boldsymbol{F}_2$ direttamente applicata.
c Nessuna delle precedenti.
09 Il punto parta da fermo e il vincolo sia scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico. Assumiamo anche che $\boldsymbol{F}$ coincida con un vettore assegnato di $\boldsymbol{R}^3$ (ossia sia costante).
a Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono forze $\boldsymbol{F}$ con $|\boldsymbol{F}| < \varepsilon$ tali che il punto si muove.
b Esiste $c > 0$ tale che se $|\boldsymbol{F}| > c$ allora il punto si muove.
c Nessuna delle precedenti.
SOLUZIONE
I: b
Le equazioni di moto sono

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T} + \mathbf{f}_{\text{vin}}\cdot\boldsymbol{T}\,,\\ m\dot{s}^2k(s) &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N} + \mathbf{f}_{\text{vin}}\cdot\boldsymbol{N}\,,\\ 0 &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{B} + \mathbf{f}_{\text{vin}}\cdot\boldsymbol{B}\,. \end{aligned}$$

Quindi nel caso di vincolo scabro la componente tangente della reazione vincolare, se $\boldsymbol{F}$ è tangente, è

$$\mathbf{f}_{\text{vin}}\cdot\boldsymbol{T} = -\operatorname{sign}(\dot{s})\mu m\dot{s}^2k(s) \neq 0\,.$$

II: a
Si ha $\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{T} = 0$, quindi nel caso di vincolo liscio $m\ddot{s}_1 = 0$ e $s_1(t) = \dot{s}_0t$. Se il vincolo è scabro con forza $\boldsymbol{F}_2 = \lambda_2\boldsymbol{N}$, si ha

$$\mathbf{f}_{\text{vin}}\cdot\boldsymbol{T} = -\operatorname{sign}(\dot{s}_2)\mu|m\dot{s}_2^2k(s_2) - \lambda_2|\,.$$

I due moti s_1 e s_2 coincidono se e solo se $\mathbf{f}_{\text{vin}}\cdot\boldsymbol{T} = 0$ in entrambi i casi, ossia se e solo se si sceglie

$$\lambda_2(t) = m\dot{s}_0^2k(\dot{s}_0t)\,.$$

III: a
Il moto è di quiete se e solo se

$$|\boldsymbol{F}^{\text{tan}}| \leq \mu_s|\boldsymbol{F}^{\text{nor}}|\,.$$

Quindi è vero a, se per esempio $\boldsymbol{F}^{\text{nor}} = 0$ e $\boldsymbol{F}^{\text{tan}} \neq 0$, mentre b non è vero, se per esempio $\boldsymbol{F}^{\text{tan}} = 0$.

I.4 In ciascuno dei seguenti casi un sistema di corpi rigidi vincolato da vincoli olonomi soddisfa le altre ipotesi delle piccole oscillazioni in $\boldsymbol{q} = 0$,

salvo che il potenziale lagrangiano è come indicato.
Dire se in $\boldsymbol{q} = 0$ sono effettivamente definite le piccole oscillazioni del sistema.
Le costanti α, β, γ sono positive, $\ell = 2$ e $Q = \boldsymbol{R}^2$ in ogni caso.
10 Si ha

$$U^{\text{L}}(q_1, q_2) = -\alpha q_1^2 - \beta q_2^4 + \gamma \cos q_2 \,.$$

a Sì, per ogni valore dei parametri.
b No, per ogni valore dei parametri
c Nessuna delle precedenti.
11 Si ha

$$U^{\text{L}}(q_1, q_2) = -\alpha q_1^2 - \beta q_2^2 - \gamma q_1 q_2 + \gamma q_1^8 + \beta q_2^8 \,.$$

a Sì, per ogni valore dei parametri.
b No, per ogni valore dei parametri
c Nessuna delle precedenti.
12 Si ha

$$U^{\text{L}}(q_1, q_2) = \alpha(\cos q_1)^2 + \beta(1 - q_2^4) \,.$$

a Sì, per ogni valore dei parametri.
b No, per ogni valore dei parametri
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: a
Infatti $\nabla U^{\text{L}}(0) = 0$ *e*

$$D^2 U^{\text{L}}(0) = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

è definita negativa.
II: c
Infatti $\nabla U^{\text{L}}(0) = 0$ *e*

$$D^2 U^{\text{L}}(0) = \begin{pmatrix} -2\alpha & -\gamma \\ -\gamma & -2\beta \end{pmatrix}$$

è definita negativa se e solo se $4\alpha\beta > \gamma^2$.
III: b
Infatti $\nabla U^{\text{L}}(0) = 0$ *e*

$$D^2 U^{\text{L}}(0) = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non è mai definita negativa.

I.5 Due punti $\boldsymbol{X}_A$, $\boldsymbol{X}_B$ sono vincolati come descritto di seguito. Dire in quali casi il vincolo è olonomo regolare.
Si usano come coordinate locali

$$\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_6) = (x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, x_{1B}, x_{2B}, x_{3B}) \in \boldsymbol{R}^6 \,,$$

con x_i coordinate cartesiane nel sistema di riferimento fisso.

13 I vincoli sono

$$\begin{aligned} z_3 &= 0\,, \\ (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_5)^2 + (z_3 - z_6)^2 - L^2 &= 0\,, \\ z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 - L^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Qui la costante L è positiva.
a Il vincolo è regolare in ogni posizione compatibile.
b Esistono posizioni compatibili in cui il vincolo è regolare, e altre in cui non lo è.
c Nessuna delle precedenti.
14 I vincoli sono

$$\begin{aligned} z_3 - z_1^2 - z_2^2 &= 0\,, \\ z_6 - z_4^2 - z_5^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

a Il vincolo è regolare in ogni posizione compatibile.
b Esistono posizioni compatibili in cui il vincolo è regolare, e altre in cui non lo è.
c Nessuna delle precedenti.
15 I vincoli sono

$$\begin{aligned} z_3 - z_1^2 - z_2^2 &= 0\,, \\ z_3 - z_4^2 - z_5^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

a Il vincolo è regolare in ogni posizione compatibile.
b Esistono posizioni compatibili in cui il vincolo è regolare, e altre in cui non lo è.
c Nessuna delle precedenti.
Soluzione
I: b
Si tratta di un'asta rigida (secondo vincolo) con l'estremo A vincolato al piano $x_3 = 0$ e quello B alla sfera di raggio L e centro l'origine. La iacobiana è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2(z_1 - z_4) & 2(z_2 - z_5) & 2(z_3 - z_6) & 2(z_4 - z_1) & 2(z_5 - z_2) & 2(z_6 - z_3) \\ 0 & 0 & 0 & 2z_4 & 2z_5 & 2z_6 \end{pmatrix}$$

che nella posizione compatibile $(0,0,0,0,0,L)$ *non ha rango massimo.*
II: a
Si tratta di due punti vincolati al medesimo paraboloide. La iacobiana è

$$\begin{pmatrix} -2z_1 & -2z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2z_4 & -2z_5 & 1 \end{pmatrix}$$

che è sempre di rango massimo.

III: b
Il punto A è vincolato a un paraboloide, e quello B ad avere distanza dall'asse x_3 pari a $\sqrt{x_{3A}}$. La iacobiana è

$$\begin{pmatrix} -2z_1 & -2z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2z_4 & -2z_5 & 0 \end{pmatrix}$$

che non ha rango massimo nella posizione compatibile (0,0,0,0,0,0).

Prova scritta del 25/01/2024

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 25/01/2024

I.1 Una lamina rigida è costituita da 4 elementi materiali, ciascuno di massa M, vincolati ai 4 vertici di un rettangolo $ABCD$ di lati a, b con $a > b > 0$, e centro G. Si assuma

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = a\,, \qquad |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| = b\,.$$

Si usi come sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_G, \mathcal{M})$, con $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ data da

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{a}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{BC}}{b}\,.$$

Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$ con coordinate (y_h), ove $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ è data da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= \cos(\gamma t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\gamma t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{w}_2 &= -\sin(\gamma t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\gamma t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

con $\gamma > 0$ costante.
La lamina è vincolata a giacere sul piano mobile $y_2 = 0$, ossia sul piano di equazione, in coordinate del sistema fisso,

$$\Pi(t): \quad -x_1 \sin(\gamma t) + x_2 \sin(\gamma t) = 0\,.$$

Il centro G della lamina è vincolato alla retta mobile

$$y_2 = 0\,, \qquad y_1 = y_3\,.$$

Sulla lamina agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.
Si usino come coordinate lagrangiane $(x, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi/4{,}7\pi/4)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}}(x,t) = x\boldsymbol{w}_1(t) + x\boldsymbol{w}_3(t)\,,$$

e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\boldsymbol{w}_1 - \sin\varphi\boldsymbol{w}_3\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{w}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \sin\varphi\boldsymbol{w}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{w}_3\,.\end{aligned}$$

01 La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ della lamina (rispetto al sistema di riferimento fisso) è
a

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\boldsymbol{u}_2 + \gamma\boldsymbol{u}_1\,.$$

b

$$\boldsymbol{\omega} = -\gamma\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \gamma\cos\varphi\boldsymbol{u}_3 + \dot\varphi\boldsymbol{u}_2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
02 Quanto vale il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse coordinato 2 del riferimento solidale?
a $M(a+b)^2$.
b $M(a^2+b^2)$.
c Nessuna delle precedenti.
03 La base positiva ortonormale solidale $(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3)$ con

$$\boldsymbol{z}_1 = \frac{\overrightarrow{AC}}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,\qquad \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{u}_2\,,\qquad \boldsymbol{z}_3 = \boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{z}_2\,,$$

è principale in G?
a Lo è per certi valori di $a > b$, non lo è per altri.
b No, per nessun valore di $a > b$.
c Nessuna delle precedenti.
04 Quanto vale il momento angolare $\boldsymbol{L}_G$ della lamina (rispetto al sistema di riferimento fisso) usando come polo G, in funzione di x, φ, $\dot x$, $\dot\varphi$, espresso nella base $\mathcal{M}$?
a

$$\boldsymbol{L}_G = -\gamma M b^2\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \dot\varphi M(a^2+b^2)\boldsymbol{u}_2 + \gamma M a^2\cos\varphi\boldsymbol{u}_3\,.$$

b

$$\boldsymbol{L}_G = -\gamma M b^2\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \dot\varphi M(a+b)^2\boldsymbol{u}_2 + \gamma M a^2\cos\varphi\boldsymbol{u}_3\,.$$

c Nessuna delle precedenti.
05 Quanto vale l'energia cinetica in forma lagrangiana della lamina (rispetto al sistema di riferimento fisso)?

a

$$T^{\mathrm{L}} = 2M(2\dot{x}^2 + \gamma^2 x^2) + \frac{M}{2}[b^2\gamma^2(\sin\varphi)^2 + a^2\gamma^2(\cos\varphi)^2 + (a^2+b^2)\dot{\varphi}^2]\,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}[b^2\gamma^2(\cos\varphi)^2 + a^2\gamma^2(\sin\varphi)^2 + (a^2+b^2)\dot{\varphi}^2]\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

06 La risultante delle forze di trascinamento che agiscono sulla lamina nel sistema $\mathcal{S}_1$ è

a

$$4M\gamma^2(x + a\cos\varphi)\boldsymbol{w}_1\,.$$

b

$$4M\gamma^2 x\boldsymbol{w}_1\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

07 Il potenziale lagrangiano del sistema, quando si scrivano le equazioni di Lagrange rispetto al sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}_1$, vale

a

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}_1} = \frac{M}{2}\gamma^2[4x^2 + a^2(\cos\varphi)^2 + b^2(\sin\varphi)^2] - 4Mgx\,.$$

b Il potenziale lagrangiano non può essere definito in questo caso.

c Nessuna delle precedenti.

08 Le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}_1$ (appartenenti al dominio di definizione della parametrizzazione lagrangiana)

a Sono infinite.

b Ne esiste una sola.

c Nessuna delle precedenti.

09 Quale delle seguenti posizioni è di equilibrio relativo a $\mathcal{S}_1$ stabile?

a

$$(x,\varphi) = \Big(\frac{g}{\gamma^2}, 0\Big)\,.$$

b

$$(x,\varphi) = \Big(\frac{g}{\gamma^2}, \pi\Big)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

10 Quale delle seguenti posizioni è di equilibrio relativo a $\mathcal{S}_1$ instabile?

a

$$(x,\varphi) = \Big(\frac{g}{\gamma^2}, 0\Big)\,.$$

b

$$(x,\varphi) = \Big(\frac{g}{2\gamma^2}, \pi\Big)\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

11 Le equazioni di Lagrange per il moto relativo al riferimento $\mathcal{S}_1$ sono

$$2\ddot{x} - \gamma^2 x + g = 0\,,$$
$$2(a^2+b^2)\ddot{\varphi} + \gamma^2(a^2-b^2)\sin(2\varphi) = 0\,.$$

(Questa informazione può essere usata anche nelle domande successive.)
Esistono moti in cui una sola delle due coordinate x e φ si mantiene costante?
a Sì, per ogni valore dei parametri M, γ, a, b.
b No, per nessun valore dei parametri M, γ, a, b.
c Nessuna delle precedenti.

12 Esistono moti in cui la derivata $\dot{x}(t)$ cambia di segno (da positiva a negativa) infinite volte?
a Sì, tutti a parte quelli di quiete relativa a $\mathcal{S}_1$.
b No, nessuno.
c Nessuna delle precedenti.

13 Quale è la risultante delle forze vincolari applicate alla lamina?
a

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = 4Mg\boldsymbol{w}_3\,.$$

b

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = 2M(\gamma^2 x + g)(\boldsymbol{w}_3 - \boldsymbol{w}_1) + 8M\gamma\dot{x}\boldsymbol{w}_2\,.$$

c Nessuna delle precedenti.

14 Il vettore $\boldsymbol{L}_G$ è solidale alla lamina?
a Sì per alcuni moti, anche non di quiete relativa a $\mathcal{S}_1$.
b No, per nessun moto.
c Nessuna delle precedenti.

15 Esistono moti per cui la risultante della reazione vincolare si annulla in ogni istante?
a Ne esistono, ma solo per opportuni valori di M.
b Esistono in ogni caso.
c Nessuna delle precedenti.

SOLUZIONE
I: b
Si calcola per esempio se $\mathcal{P}$ denota la terna fissa

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} = \gamma\boldsymbol{w}_3 + \omega_2\boldsymbol{u}_2\,,$$

con

$$\omega_2 = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_3}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} \cdot \boldsymbol{u}_1 = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \dot{\varphi}\,.$$

II: b
Si sa dalla teoria $I_{22} = I_{11} + I_{33}$, ma

$$I_{11} = 4M\left(\frac{b}{2}\right)^2 = Mb^2\,, \qquad I_{33} = 4M\left(\frac{a}{2}\right)^2 = Ma^2\,.$$

III: b
Se lo fosse, in detta base si avrebbe $I_{13} = 0$, ma chiaramente nelle coordinate solidali $\boldsymbol{\lambda}$ corrispondenti si ha $\lambda_{1B} > 0$, $\lambda_{3B} < 0$, $\lambda_{1D} < 0$, $\lambda_{3D} > 0$, quindi

$$I_{13} = -M(\lambda_{1B}\lambda_{3B} + \lambda_{1D}\lambda_{3D}) > 0\,.$$

IV: a
La teoria garantisce che $\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}$. Ma

$$\boldsymbol{\sigma}_G^{\mathcal{M}} = \operatorname{diag}(I_{11}^G, I_{22}^G, I_{33}^G) = M\operatorname{diag}(b^2, a^2+b^2, a^2)\,,$$

come calcolato nella soluzione alla domanda 2. D'altra parte in considerazione dell'espressione di $\boldsymbol{\omega}$ trovata nella risposta alla domanda 1 si ha

$$\boldsymbol{L}_G = -\gamma I_{11}^G \sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \dot\varphi I_{22}^G\boldsymbol{u}_2 + \gamma I_{33}^G\cos\varphi\boldsymbol{u}_3\,.$$

In alternativa si può usare la definizione di $\boldsymbol{L}_G$.
V: a
Per il teorema di König si ha

$$T = \frac{1}{2}(4M)|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{v}_G = \dot x\boldsymbol{w}_1 + \dot x\boldsymbol{w}_3 + x\dot{\boldsymbol{w}}_1 = \dot x\boldsymbol{w}_1 + \gamma x\boldsymbol{w}_2 + \dot x\boldsymbol{w}_3\,.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = [-\gamma Mb^2\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \dot\varphi M(a^2+b^2)\boldsymbol{u}_2 + \gamma Ma^2\cos\varphi\boldsymbol{u}_3]\\ &\cdot[-\gamma\sin\varphi\boldsymbol{u}_1 + \gamma\cos\varphi\boldsymbol{u}_3 + \dot\varphi\boldsymbol{u}_2] = M[b^2\gamma^2(\sin\varphi)^2 + a^2\gamma^2(\cos\varphi)^2 + (a^2+b^2)\dot\varphi^2]\,.\end{aligned}$$

VI: b
La forza di trascinamento su ciascun elemento è

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = M\gamma^2 y_1\boldsymbol{w}_1\,.$$

Ma

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_A^{\text{L}} &= \boldsymbol{X}_G^{\text{L}} - \frac{a}{2}\boldsymbol{u}_1 - \frac{b}{2}\boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_B^{\text{L}} = \boldsymbol{X}_G^{\text{L}} + \frac{a}{2}\boldsymbol{u}_1 - \frac{b}{2}\boldsymbol{u}_3\,,\\ \boldsymbol{X}_C^{\text{L}} &= \boldsymbol{X}_G^{\text{L}} + \frac{a}{2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{b}{2}\boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_D^{\text{L}} = \boldsymbol{X}_G^{\text{L}} - \frac{a}{2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{b}{2}\boldsymbol{u}_3\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}y_{1A}^{\text{L}} &= \boldsymbol{X}_A^{\text{L}}\cdot\boldsymbol{w}_1 = x - \frac{a}{2}\cos\varphi - \frac{b}{2}\sin\varphi\,,\\ y_{1B}^{\text{L}} &= \boldsymbol{X}_B^{\text{L}}\cdot\boldsymbol{w}_1 = x + \frac{a}{2}\cos\varphi - \frac{b}{2}\sin\varphi\,,\\ y_{1C}^{\text{L}} &= \boldsymbol{X}_C^{\text{L}}\cdot\boldsymbol{w}_1 = x + \frac{a}{2}\cos\varphi + \frac{b}{2}\sin\varphi\,,\\ y_{1D}^{\text{L}} &= \boldsymbol{X}_D^{\text{L}}\cdot\boldsymbol{w}_1 = x - \frac{a}{2}\cos\varphi + \frac{b}{2}\sin\varphi\,.\end{aligned}$$

VII: a
Sappiamo dalla teoria che in $\mathcal{S}_1$ vanno considerate anche le forze apparenti $\boldsymbol{F}_{T}$ e $\boldsymbol{F}_{C}$, e che $\boldsymbol{F}_{C}$ ha componenti lagrangiane nulle in questo caso.
La forza di trascinamento su ciascun elemento ha potenziale

$$\mathrm{d}U_{\mathrm{T}} = \frac{M}{2}\gamma^2 y_1^2 \,.$$

Quindi il potenziale totale è

$$U_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}} = \frac{M}{2}\gamma^2[(y_{1A}^{\mathrm{L}})^2 + (y_{1B}^{\mathrm{L}})^2 + (y_{1C}^{\mathrm{L}})^2 + (y_{1D}^{\mathrm{L}})^2] \,.$$

Per il calcolo fatto nella soluzione della domanda precedente

$$(y_{1A}^{\mathrm{L}})^2 + (y_{1B}^{\mathrm{L}})^2 + (y_{1C}^{\mathrm{L}})^2 + (y_{1D}^{\mathrm{L}})^2 = 4x^2 + a^2(\cos\varphi)^2 + b^2(\sin\varphi)^2 \,.$$

Infine il peso ha potenziale

$$U_{\mathrm{peso}}^{\mathrm{L}} = -4Mgy_{3G}^{\mathrm{L}} = -4Mgx \,.$$

VIII: c
Dalla domanda precedente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{\mathcal{S}_1}^{\mathrm{L}}}{\partial x} &= 4M\gamma^2 x - 4Mg \,, \\
\frac{\partial U_{\mathcal{S}_1}^{\mathrm{L}}}{\partial \varphi} &= \frac{M}{2}\gamma^2(b^2 - a^2)\sin(2\varphi) \,.
\end{aligned}$$

Quindi le posizioni (x, φ) di equilibrio relativo sono

$$\left(\frac{g}{\gamma^2}, 0\right), \quad \left(\frac{g}{\gamma^2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{g}{\gamma^2}, \pi\right), \quad \left(\frac{g}{\gamma^2}, \frac{3}{2}\pi\right).$$

IX: c
Calcoliamo l'hessiana

$$D^2 U_{\mathcal{S}_1}^{\mathrm{L}}(x, \varphi) = \begin{pmatrix} 4M\gamma^2 & 0 \\ 0 & M\gamma^2(b^2 - a^2)\cos(2\varphi) \end{pmatrix} .$$

Dunque l'hessiana è indefinita o definita positiva in ogni punto di equilibrio relativo e nessuno di essi è stabile.
X: a
Vedi soluzione della domanda precedente. La posizione in b non è di equilibrio.
XI: a
Per esempio se $x(0) = g/\gamma^2$, $\dot{x}(0) = 0$, $x(t)$ si mantiene costante, e φ può non esserlo. Esistono anche soluzioni in cui viceversa x non è costante e invece φ lo è.
XII: b
L'integrale generale della prima equazione di Lagrange è

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{\sqrt{2}}t} + c_2 e^{\frac{\gamma}{\sqrt{2}}t} + \frac{g}{\gamma^2} \,,$$

con

$$\dot{x}(t) = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(c_2 - c_1 e^{-\sqrt{2}\gamma t})e^{\frac{\gamma}{\sqrt{2}}t} \,,$$

che può cambiare segno al più una volta.
XIII: b
Si ha per la prima equazione cardinale della dinamica (nel sistema fisso)

$$4M\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{F}^{\text{ext}} + \mathbf{f}_{\text{vin}}\,,$$

ma $\boldsymbol{F}^{\text{ext}} = -4Mg\boldsymbol{w}_3$ *e*

$$\boldsymbol{a}_G^{\text{L}} = \ddot{x}\boldsymbol{w}_1 + 2\gamma\dot{x}\boldsymbol{w}_2 - \gamma^2 x\boldsymbol{w}_1 + \ddot{x}\boldsymbol{w}_3\,.$$

Quindi

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = 4M(\ddot{x} - \gamma^2 x)\boldsymbol{w}_1 + 8M\gamma\dot{x}\boldsymbol{w}_2 + 4M\ddot{x}\boldsymbol{w}_3 + 4Mg\boldsymbol{w}_3\,.$$

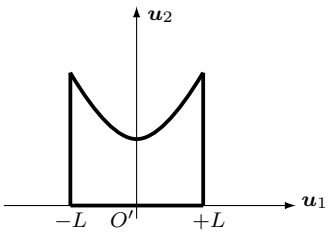
Applicando la prima equazione di Lagrange si ha $\ddot{x} = \gamma^2 x/2 - g/2$ *e sostituendo sopra si ha b.*
XIV: a
Le componenti del vettore $\boldsymbol{L}_G$ *in* $\mathcal{M}$ *dipendono da* φ *(e sue derivate) ma non da* x*. Quindi nei moti (anche non di quiete relativa) in cui* φ *è costante il vettore è solidale.*
XV: c
Se esistessero moti con $\mathbf{f}_{\text{vin}} = 0$ *identicamente, il moto del centro di massa nel sistema di riferimento fisso dovrebbe essere quello di caduta libera di un grave, che è impossibile per i vincoli.*

Prova scritta del 19/02/2024

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 19/02/2024

I.1 Un sistema olonomo a vincoli perfetti è costituito da una lamina rigida pesante omogenea di massa $M > 0$. In figura è rappresentata la lamina assieme al riferimento solidale $(O', (\boldsymbol{u}_h))$, di coordinate $\boldsymbol{\lambda}$. I tre lati rettilinei hanno lunghezza $2L > 0$. Il bordo superiore ha il profilo parabolico $\lambda_2 = (\lambda_1)^2/L + L$.



Il riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 2 verticale ascendente. Le coordinate nel sistema di riferimento fisso sono denotate da (x_h).
La lamina si muove rispetto al riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$ mantenendo il piano solidale 1–2 costantemente coincidente con l'omologo piano fisso, in modo che O' sia vincolato ad appartenere alla parabola di equazione $x_2 = \alpha(x_1)^2$, con $\alpha > 0$ costante assegnata.
La sollecitazione attiva agente sulla lamina è costituita dal solo peso, diretto come $-\boldsymbol{e}_2$.
Come coordinate lagrangiane si usino la coordinata cartesiana 1 di O' relativa al riferimento fisso, indicata con $q \in \boldsymbol{R}$, e l'anomalia $\varphi \in (-\pi/2,3\pi/2)$ tale che

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

01 Le coordinate del centro di massa G della lamina rispetto al riferimento solidale $(O', (\boldsymbol{u}_h))$ sono

a
$$\Big(0, \frac{7}{10}L, 0\Big)\,.$$

b
$$\Big(0, \frac{11}{10}L, 0\Big)\,.$$

c Nessuna delle altre.

02 Quale delle seguenti è la terza riga della matrice d'inerzia relativa al riferimento solidale $(O', (\boldsymbol{u}_h))$?

a
$$(I_{13}, I_{23}, I_{33}) = \Big(0, ML^2, \frac{19}{35}ML^2\Big)\,.$$

b
$$(I_{13}, I_{23}, I_{33}) = \Big(0, 0, \frac{38}{35}ML^2\Big)\,.$$

c Nessuna delle altre.

03 Quanto vale il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse parallelo all'asse 3 solidale e passante per il centro di massa?

a
$$\frac{313}{700}ML^2\,.$$

b
$$\frac{417}{700}ML^2\,.$$

c Nessuna delle altre.

04 Quanto vale il momento angolare della lamina rispetto al centro di massa $\boldsymbol{L}_G$?

a
$$-ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_2 + \frac{417}{700}ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3\,.$$

b
$$\frac{417}{700}ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3\,.$$

c Nessuna delle altre.

05 Quanto vale l'energia cinetica della lamina?

a
$$\frac{M}{2}\Big(\dot{q} - \frac{7}{10}L\dot{\varphi}\cos\varphi\Big)^2 + \frac{M}{2}\Big(2\alpha q\dot{q} - \frac{7}{10}L\dot{\varphi}\sin\varphi\Big)^2 + \frac{417}{1400}ML^2\dot{\varphi}^2\,.$$

b
$$\frac{M}{2}\Big(\frac{7}{10}L\dot{\varphi}\cos\varphi\Big)^2 + \frac{M}{2}\Big(\frac{7}{10}L\dot{\varphi}\cos\varphi\Big)^2 + \frac{417}{1400}ML^2\dot{\varphi}^2\,.$$

c Nessuna delle altre.

06 Quanto vale il potenziale lagrangiano delle forze direttamente applicate?

a
$$U^{\text{L}}(q,\varphi) = -Mg\Big(\alpha q^2 + \frac{7}{10}L\cos\varphi - \frac{7}{10}L\sin\varphi\Big)\,.$$

b
$$U^{\text{L}}(q,\varphi) = -Mg\Big(\alpha q^2 + \frac{7}{10}L\cos\varphi\Big)\,.$$

c Nessuna delle altre.

07 Le configurazioni di equilibrio nel campo indicato di definizione della parametrizzazione lagrangiana sono

a Almeno 3.

b Dipende dal valore di M, L.

c Nessuna delle altre.

08 Si indichi quale delle seguenti configurazioni è di equilibrio stabile.

a
$$(q,\varphi) = (0,\pi)\,.$$

b
$$(q,\varphi) = (0,0)\,.$$

c Nessuna delle altre.

09 Si scriva la lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$ per i moti delle piccole oscillazioni, intorno all'unica posizione di equilibrio in cui essi possono essere definiti.

a
$$\mathcal{L}^* = \frac{M}{2}\Big(\dot{q} + \frac{7}{10}L\dot{\varphi}\Big)^2 + \frac{417}{1400}ML^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}Mg\Big(\alpha q^2 + \frac{7}{10}L\varphi^2\Big)\,.$$

b
$$\mathcal{L}^* = \frac{M}{2}\Big(\dot{q} + \frac{7}{10}L\dot{\varphi}\Big)^2 + \frac{417}{1400}ML^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}Mg\Big(\alpha q^2 + \frac{7}{10}L(\varphi-\pi)^2\Big)\,.$$

c Nessuna delle altre.

10 Quale delle seguenti affermazioni è vera per i moti delle piccole oscillazioni?

a Ne esiste solo uno che sia di quiete (ossia esiste per essi un unico punto di equilibrio).

b Ne esistono di illimitati.

c Nessuna delle altre.

11 Si determini la componenente 2 rispetto al riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$ della sollecitazione vincolare totale $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ agente sulla lamina in corrispondenza di un generico moto del sistema.

a

$$Mg + 2\alpha\dot{q}^2 + 2\alpha q\ddot{q} - \frac{7}{10}L\ddot{\varphi}\sin\varphi - \frac{7}{10}L\dot{\varphi}^2\cos\varphi\,.$$

b

$$Mg + \ddot{q} - \frac{7}{10}L\ddot{\varphi}\cos\varphi + \frac{7}{10}L\dot{\varphi}^2\sin\varphi\,.$$

c Nessuna delle altre.

12 Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a La coordinata q resta limitata lungo ciascun moto (in modo dipendente dalle condizioni iniziali).

b La coordinata q diviene illimitata lungo ciascun moto (a parte quelli di quiete).

c Nessuna delle altre.

13 Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a La derivata $\dot{\varphi}$ resta limitata lungo ciascun moto (in modo dipendente dalle condizioni iniziali).

b La derivata $\dot{\varphi}$ diviene illimitata lungo ciascun moto (a parte quelli di quiete).

c Nessuna delle altre.

14 Si sa che all'istante $t = 0$ valgono $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$. Allora

a Esistono direzioni nel piano $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ lungo le quali $\boldsymbol{v}_G(0)$ non può essere diretta, qualunque sia la scelta di $\varphi(0)$ e $\dot{\varphi}(0)$.

b Esiste un valore massimo per $|\boldsymbol{v}_G|$, indipendente dalla scelta di $\varphi(0)$ e $\dot{\varphi}(0)$.

c Nessuna delle altre.

15 Il lavoro totale fatto dalle reazioni vincolari che agiscono sulla lamina è

a Diverso da 0 lungo ogni moto.

b Nullo lungo ogni moto.

c Nessuna delle altre.

Soluzione

I: a

Per simmetria $\lambda_{1G} = \lambda_{3G} = 0$. Si calcola l'area A della lamina

$$A = \int_{-L}^{L} \int_{0}^{L+\frac{\lambda_1^2}{L}} \mathrm{d}\lambda_2\,\mathrm{d}\lambda_1 = \frac{8}{3}L^2\,.$$

Perciò la densità è

$$\rho = \frac{3M}{8L^2}\,,$$

e la coordinata λ_{2G} è data da

$$\lambda_{2G} = \frac{1}{M}\int_{-L}^{L}\int_{0}^{L+\frac{\lambda_1^2}{L}} \lambda_2 \frac{3M}{8L^2}\,\mathrm{d}\lambda_2\,\mathrm{d}\lambda_1 = \frac{3}{8L^2}\int_{-L}^{L}\frac{1}{2}\Big(L+\frac{\lambda_1^2}{L}\Big)^2\,\mathrm{d}\lambda_1$$
$$= \frac{3}{16L^2}\int_{-L}^{L}\Big[L^2+2\lambda_1^2+\frac{\lambda_1^4}{L^2}\Big]\,\mathrm{d}\lambda_1 = \frac{7}{10}L\,.$$

II: b
Il sistema solidale è principale d'inerzia in O', per simmetria, quindi $I_{23} = I_{13} = 0$. Resta da calcolare $I_{33} = I_{11} + I_{22}$, con

$$I_{11} = \int_{-L}^{L}\int_{0}^{L+\frac{\lambda_1^2}{L}} \lambda_2^2 \frac{3M}{8L^2}\,\mathrm{d}\lambda_2\,\mathrm{d}\lambda_1 = \frac{M}{4L^2}\int_{0}^{L}\Big(L+\frac{\lambda_1^2}{L}\Big)^3\,\mathrm{d}\lambda_1$$
$$= \frac{M}{4L^2}\int_{0}^{L}\Big[L^3+3L^2\frac{\lambda_1^2}{L}+3L\frac{\lambda_1^4}{L^2}+\frac{\lambda_1^6}{L^3}\Big]\,\mathrm{d}\lambda_1 = \frac{24}{35}ML^2\,.$$

Inoltre

$$I_{22} = \int_{-L}^{L}\int_{0}^{L+\frac{\lambda_1^2}{L}} \lambda_1^2 \frac{3M}{8L^2}\,\mathrm{d}\lambda_2\,\mathrm{d}\lambda_1 = \frac{3M}{4L^2}\int_{0}^{L}\Big(L+\frac{\lambda_1^2}{L}\Big)\lambda_1^2\,\mathrm{d}\lambda_1$$
$$= \frac{3M}{4L^2}\int_{0}^{L}\Big[L\lambda_1^2+\frac{\lambda_1^4}{L}\Big]\,\mathrm{d}\lambda_1 = \frac{2}{5}ML^2\,.$$

III: b
Per Huygens

$$I_{33}^G = I_{33} - M\lambda_{2G}^2 = \Big(\frac{38}{35}-\frac{49}{100}\Big)ML^2 = \frac{417}{700}ML^2\,.$$

IV: b
Si sa dalla teoria

$$\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega} = I_{33}\dot\varphi\boldsymbol{e}_3\,,$$

perché $\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\boldsymbol{u}_3$.
V: a
Si usi il teorema di König. Si calcola

$$\boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}} = \boldsymbol{X}_{O'}^{\mathrm{L}} + \overrightarrow{O'G} = q\boldsymbol{e}_1 + \alpha q^2\boldsymbol{e}_2 + \frac{7}{10}L\boldsymbol{u}_2$$
$$= \Big(q-\frac{7}{10}L\sin\varphi\Big)\boldsymbol{e}_1 + \Big(\alpha q^2+\frac{7}{10}L\cos\varphi\Big)\boldsymbol{e}_2\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{v}_G = \Big(\dot{q} - \frac{7}{10}L\dot{\varphi}\cos\varphi\Big)\boldsymbol{e}_1 + \Big(2\alpha q\dot{q} - \frac{7}{10}L\dot{\varphi}\sin\varphi\Big)\boldsymbol{e}_2\,,$$

e

$$|\boldsymbol{v}_G|^2 = \Big(\dot{q} - \frac{7}{10}L\dot{\varphi}\cos\varphi\Big)^2 + \Big(2\alpha q\dot{q} - \frac{7}{10}L\dot{\varphi}\sin\varphi\Big)^2\,.$$

Inoltre

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}I_{33}^G\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3\cdot(\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{2}I_{33}^G\dot{\varphi}^2\,.$$

VI: b
Si ha che la sollecitazione è conservativa con potenziale conservativo

$$U = -Mgx_{2G}\,.$$

Quindi sostituendo la parametrizzazione lagrangiana

$$U^{\text{L}}(q,\varphi) = -Mg\Big(\alpha q^2 + \frac{7}{10}L\cos\varphi\Big)\,.$$

VII: c
Infatti le configurazioni di equilibrio sono i punti critici del potenziale lagrangiano, ossia sono date dal sistema

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial q} = -2Mg\alpha q = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} = \frac{7}{10}MgL\sin\varphi = 0\,.$$

Si ottengono per ogni valore dei parametri le 2 soluzioni

$$(0{,}0)\,,\qquad (0,\pi)\,.$$

VIII: a
Calcoliamo l'hessiana del potenziale lagrangiano

$$D^2U^{\text{L}}(q,\varphi) = \begin{pmatrix} -2Mg\alpha & 0 \\ 0 & \frac{7}{10}MgL\cos\varphi \end{pmatrix}\,.$$

Quindi l'hessiana è indefinita in $(0{,}0)$ *(equilibrio instabile) e definita negativa in* $(0,\pi)$ *(equilibrio stabile).*
IX: c
In $(0,\pi)$ *si ha (dai conti precedenti)*

$$T^*(\dot{q},\dot{\varphi}) = T^{\text{L}}(0,\pi,\dot{q},\dot{\varphi}) = \frac{M}{2}\Big(\dot{q} + \frac{7}{10}L\dot{\varphi}\Big)^2 + \frac{417}{1400}ML^2\dot{\varphi}^2\,.$$

Inoltre dall'hessiana di U^{L}

$$U^*(q,\varphi) = \frac{1}{2}[-2Mg\alpha q^2 - \frac{7}{10}MgL(\varphi-\pi)^2]\,.$$

X: a
Infatti il potenziale ridotto è costruito in modo tale da avere l'unico punto critico $(0,\pi)$*. I moti delle piccole oscillazioni nelle opportune coordinate sono composizioni di moti armonici, quindi non possono essere illimitati.*

XI: c
Si usi la prima equazione cardinale della dinamica

$$M\boldsymbol{a}_G = -Mg\boldsymbol{e}_2 + \mathbf{f}_{\text{vin}}\,.$$

Quindi

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_2 = Mg + M\boldsymbol{a}_G \cdot \boldsymbol{e}_2\,.$$

D'altra parte

$$\boldsymbol{a}_G = \Big(\ddot{q} - \frac{7}{10}L\ddot{\varphi}\cos\varphi + \frac{7}{10}L\dot{\varphi}^2\sin\varphi\Big)\boldsymbol{e}_1 + \Big(2\alpha\dot{q}^2 + 2\alpha q\ddot{q} - \frac{7}{10}L\ddot{\varphi}\sin\varphi - \frac{7}{10}L\dot{\varphi}^2\cos\varphi\Big)\boldsymbol{e}_2\,.$$

XII: a
Poiché le forze sono conservative e i vincoli fissi e lisci, vale la conservazione dell'energia, ossia si ha

$$T^{\text{L}} - U^{\text{L}} = \frac{M}{2}\Big(\dot{q} - \frac{7}{10}L\dot{\varphi}\cos\varphi\Big)^2 + \frac{M}{2}\Big(2\alpha q\dot{q} - \frac{7}{10}L\dot{\varphi}\sin\varphi\Big)^2 + \frac{417}{1400}ML^2\dot{\varphi}^2 + Mg\Big(\alpha q^2 + \frac{7}{10}L\cos\varphi\Big) = E\,.$$

In particolare, eliminando i primi due termini che sono nonnegativi, si ha

$$\frac{417}{1400}ML^2\dot{\varphi}^2 + Mg\alpha q^2 \le -\frac{7}{10}MgL\cos\varphi + E \le \frac{7}{10}MgL + E\,.$$

Quindi sia $\dot{\varphi}$ che q restano limitati per ogni scelta dei parametri M, L.
XIII: a
Vedi la soluzione della domanda precedente.
XIV: c
In realtà $\boldsymbol{v}_G(0)$ può assumere qualunque valore nel piano.
Dai conti precedenti risulta nelle presenti condizioni

$$\boldsymbol{v}_G = \Big(-\frac{7}{10}L\dot{\varphi}\cos\varphi\Big)\boldsymbol{e}_1 + \Big(-\frac{7}{10}L\dot{\varphi}\sin\varphi\Big)\boldsymbol{e}_2\,.$$

Perciò qualunque sia $\boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{R}^2$, si sceglie prima $\dot{\varphi}(0)$ in modo che

$$\frac{7}{10}L\dot{\varphi}(0) = |\boldsymbol{v}_0|\,,$$

e poi, se $\boldsymbol{v}_0 \neq 0$, $\varphi(0)$ in modo tale che

$$\cos\varphi(0)\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(0)\boldsymbol{e}_2 = -\frac{\boldsymbol{v}_0}{|\boldsymbol{v}_0|}\,;$$

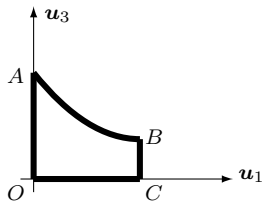
se $\boldsymbol{v}_0 = 0$, $\varphi(0)$ può essere scelto ad arbitrio. Risulta $\boldsymbol{v}_G(0) = \boldsymbol{v}_0$.
XV: b
L'ipotesi di vincoli lisci (ipotesi dei lavori virtuali) implica che il lavoro virtuale totale sia nullo, ma i vincoli sono fissi e il lavoro virtuale coincide con quello effettivo.

Prova scritta del 20/06/2024

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 20/06/2024

I.1 Un sistema olonomo a vincoli perfetti è costituito da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$, e da una lamina rigida omogenea D di uguale massa M. La lamina ha la forma illustrata in figura, dove il bordo superiore ha equazione $\lambda_3 = Re^{-\lambda_1/R}$ e i punti A, B e C sono tali che $\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_3$, $\overrightarrow{OB} = R\boldsymbol{u}_1 + (R/e)\boldsymbol{u}_3$ e $\overrightarrow{OC} = R\boldsymbol{u}_1$. Qui $(O, (\boldsymbol{u}_h))$ indica il sistema di riferimento solidale con la lamina e $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate in tale sistema.



Il sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_i))$ ha asse 1 verticale ascendente. La lamina rigida è vincolata a muoversi mantenendo l'asse solidale 1 coincidente con l'omologo asse fisso 1. Il punto $\boldsymbol{X}$ è vincolato all'asse fisso 3.
La sollecitazione attiva agente sul sistema è costituita: i) dal peso; ii) dalla sollecitazione elastica di costante $k > 0$, che si scambiano i punti $\boldsymbol{X}$ e A; iii) dalla forza costante $\boldsymbol{F} = \beta \boldsymbol{e}_3$, con $\beta > 0$, agente sull'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino la coordinata cartesiana $q \in \boldsymbol{R}$ tale che $\boldsymbol{X} = q\boldsymbol{e}_3$ e l'anomalia $\varphi \in (-\pi/2{,}3\pi/2)$ tale che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3\,, \\ \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1\,. \end{aligned}$$

01 Quali sono le coordinate del centro di massa della lamina rispetto al riferimento solidale?

a
$$\Big(\frac{1-\frac{2}{e}}{1-\frac{1}{e}}\,R, 0, \frac{1-\frac{1}{e^2}}{4-\frac{4}{e}}\,R\Big)\,.$$

b
$$\Big(\frac{1-\frac{3}{e}}{1+\frac{1}{e}}\,R, 0, \frac{1+\frac{1}{e^2}}{4+\frac{4}{e}}\,R\Big)\,.$$

c Nessuna delle altre.

02 Quanto valgono i momenti d'inerzia della lamina relativi ai due assi solidali 1 e 3?

a

$$I_{11} = MR^2 \frac{1 - e^{-3}}{9 - 9e^{-1}}\,, \qquad I_{33} = MR^2 \frac{2 - 5e^{-1}}{1 - e^{-1}}\,.$$

b

$$I_{11} = MR^2 \frac{1 - e^{-3}}{9 - 9e^{-2}}\,, \qquad I_{33} = MR^2 \frac{2 - 3e^{-1}}{1 - 2e^{-1}}\,.$$

c Nessuna delle altre.

03 Quanto vale il prodotto d'inerzia della lamina relativo agli assi solidali 1 e 3?

a

$$I_{13} = 0\,.$$

b

$$I_{13} = MR^2 \frac{3e^2 - 1}{1 - e^{-1}}\,.$$

c Nessuna delle altre.

04 Quanto vale il momento angolare $\boldsymbol{L}_O$ della lamina?

a

$$MR^2 \frac{1 - e^{-3}}{9 - 9e^{-1}} \dot{\varphi} \boldsymbol{u}_1\,.$$

b

$$MR^2 \frac{2 - 5e^{-1}}{1 - e^{-1}} \dot{\varphi} \boldsymbol{u}_3\,.$$

c Nessuna delle altre.

05 Quanto vale l'energia cinetica in forma lagrangiana del sistema?

a

$$\frac{M}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2} MR^2 \frac{1 - e^{-3}}{9 - 9e^{-1}} \dot{\varphi}^2 + MR^2 \frac{3e^2 - 1}{1 - e^{-1}} \dot{q}\dot{\varphi}\,.$$

b

$$\frac{M}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2} MR^2 \frac{2 - 5e^{-1}}{1 - e^{-1}} \dot{\varphi}^2\,.$$

c Nessuna delle altre.

06 Quanto vale la componente lagrangiana della sollecitazione elastica relativa alla coordinata lagrangiana φ?

a

$$-kRq \sin\varphi\,.$$

b

$$-kRq \sin^2\varphi\,.$$

c Nessuna delle altre.

07 Quanto vale il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema?

a

$$U^{\text{L}} = \beta q - \frac{k}{2}[q^2 - 2Rq\cos\varphi]\,.$$

b

$$U^{\text{L}} = \beta q - \frac{k}{2}[q^2 - 2Rq\cos\varphi] - Mg\frac{1-\frac{2}{e}}{1-\frac{1}{e}}\,R\cos\varphi\,.$$

c Nessuna delle altre.

08 Quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio di definizione della parametrizzazione lagrangiana?

a Sempre due.

b Dipende dal valore dei parametri β, k, R.

c Nessuna delle altre.

09 Si supponga $\beta > kR$ e si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta.

a $(q,\varphi) = (R+\beta/k,0)$ è una configurazione di equilibrio stabile.

b $(q,\varphi) = (-R+\beta/k,0)$ è una configurazione di equilibrio.

c Nessuna delle altre.

10 Si supponga $\beta > kR$ e si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta.

a $(q,\varphi) = (-R+\beta/k,\pi)$ è una configurazione di equilibrio stabile.

b $(q,\varphi) = (R+\beta/k,\pi)$ è una configurazione di equilibrio.

c Nessuna delle altre.

11 Quali sono le equazioni di Lagrange?

a

$$\begin{aligned} M\ddot{q} - kq + \beta - kR\sin\varphi &= 0\,,\\ \frac{1-e^{-3}}{9-9e^{-1}}\,MR^2\ddot{\varphi} - kRq\sin\varphi &= 0\,. \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} M\ddot{q} + kq - \beta - kR\cos\varphi &= 0\,,\\ \frac{1-e^{-3}}{9-9e^{-1}}\,MR^2\ddot{\varphi} + kRq\sin\varphi &= 0\,. \end{aligned}$$

c Nessuna delle altre.

12 Si determini la forza vincolare agente sull'elemento $\boldsymbol{X}$ in corrispondenza di un generico moto del sistema.

a $Mg\boldsymbol{e}_1 + kR\sin\varphi\boldsymbol{e}_2$.

b 0.

c Nessuna delle altre.

13 Sono possibili moti in cui l'elemento $\boldsymbol{X}$ è in movimento (non in quiete) e la lamina è in quiete?

a Sì, per ogni valore dei parametri k, M, R, β.

b No, per nessun valore dei parametri k, M, R, β.

c Nessuna delle altre.

14 Sono possibili moti in cui l'elemento $\boldsymbol{X}$ è in quiete e la lamina è in movimento (non in quiete)?
a Sì, per ogni valore dei parametri k, M, R, β.
b No, per nessun valore dei parametri k, M, R, β.
c Nessuna delle altre.

15 Supponiamo che $\beta = kR$. Allora il punto $(q, \varphi) = (R + \beta/k, 0)$ è di equilibrio e si possono definire in esso le piccole oscillazioni. Le frequenze normali sono date da $\omega_h/(2\pi)$ con:
a

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}\,, \qquad \omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}\,.$$

b

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{9 - 9e^{-1}}{1 - e^{-3}}\,\frac{2k}{M}}\,, \qquad \omega_2 = 2\sqrt{\frac{9 - 9e^{-1}}{1 - e^{-3}}\,\frac{2k}{M}}\,.$$

c Nessuna delle altre.

SOLUZIONE
I: a
Calcoliamo l'area della lamina

$$\begin{aligned} a(D) &= \iint_D \mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_3 = \int_0^R \int_0^{Re^{-\frac{\lambda_1}{R}}} \mathrm{d}\lambda_3\,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_0^R Re^{-\frac{\lambda_1}{R}}\,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \left[-R^2 e^{-\frac{\lambda_1}{R}}\right]_0^R = R^2(1 - e^{-1})\,. \end{aligned}$$

Dunque calcoliamo, procedendo in modo simile e integrando per parti

$$\begin{aligned} a(D)\lambda_{1G} &= \iint_D \lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_3 = \int_0^R \lambda_1 R e^{-\frac{\lambda_1}{R}}\,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \left[-R^2\lambda_1 e^{-\frac{\lambda_1}{R}}\right]_0^R + \int_0^R R^2 e^{-\frac{\lambda_1}{R}}\,\mathrm{d}\lambda_1 = -R^3 e^{-1} + \left[-R^3 e^{-\frac{\lambda_1}{R}}\right]_0^R \\ &= R^3(-e^{-1} + 1 - e^{-1})\,. \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} a(D)\lambda_{3G} &= \iint_D \lambda_3\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_3 = \frac{1}{2}\int_0^R R^2 e^{-2\frac{\lambda_1}{R}}\,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{R^3}{2}e^{-2\frac{\lambda_1}{R}}\right]_0^R = \frac{R^3}{4}(1 - e^{-2})\,. \end{aligned}$$

II: a
Calcoliamo

$$\frac{a(D)}{M} I_{11} = \iint_D \lambda_3^2 \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_3 = \frac{1}{3} \int_0^R R^3 e^{-3\frac{\lambda_1}{R}} \,\mathrm{d}\lambda_1$$
$$= \left[-\frac{R^4}{9} e^{-3\frac{\lambda_1}{R}} \right]_0^R = \frac{R^4}{9}(1 - e^{-3}) \,.$$

Inoltre, ricordando anche l'integrale già calcolato per la domanda precedente,

$$\frac{a(D)}{M} I_{33} = \iint_D \lambda_1^2 \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_0^R \lambda_1^2 R e^{-\frac{\lambda_1}{R}} \,\mathrm{d}\lambda_1$$
$$= \left[-R^2 \lambda_1^2 e^{-\frac{\lambda_1}{R}} \right]_0^R + 2R^2 \int_0^R \lambda_1 e^{-\frac{\lambda_1}{R}} \,\mathrm{d}\lambda_1 = -R^4 e^{-1} + 2R^4(1 - 2e^{-1}) \,.$$

III: c
Per definizione

$$I_{13} = -\frac{M}{a(D)} \iint_D \lambda_1 \lambda_3 \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_3 \,.$$

Quindi $I_{13} < 0$, essendo λ_i e λ_3 positive su D. Invece anche la risposta b dà un valore positivo per il momento.
In realtà

$$\frac{a(D)}{M} I_{13} = -\iint_D \lambda_1 \lambda_3 \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_3 = -\frac{R^2}{2} \int_0^R \lambda_1 e^{-2\frac{\lambda_1}{R}} \,\mathrm{d}\lambda_1$$
$$= \left[\frac{R^3}{4} \lambda_1 e^{-2\frac{\lambda_1}{R}} \right]_0^R - \frac{R^3}{4} \int_0^R e^{-2\frac{\lambda_1}{R}} \,\mathrm{d}\lambda_1 = \frac{R^4}{4} e^{-2} + \left[\frac{R^4}{8} e^{-2\frac{\lambda_1}{R}} \right]_0^R$$
$$= 3\frac{R^4}{8} e^{-2} - \frac{R^4}{8} = \frac{R^4}{8}(3e^{-2} - 1) < 0 \,.$$

Quindi

$$I_{13} = \frac{3e^{-2} - 1}{1 - e^{-1}} \frac{MR^2}{8} \,.$$

IV: c
Infatti $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega}$, ma

$$\boldsymbol{\sigma}_O = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & I_{13} \\ 0 & I_{22} & 0 \\ I_{13} & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \,,$$

e, visto che il moto è di rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_1$,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Perciò

$$\boldsymbol{L}_O = I_{11} \dot{\varphi} \boldsymbol{u}_1 + I_{13} \dot{\varphi} \boldsymbol{u}_3 \,.$$

V: c
Infatti l'energia cinetica è

$$\begin{aligned} T^{\text{L}} &= \frac{M}{2}\dot{q}^2 + \frac{I_{11}}{2}\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{M}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}MR^2\frac{1-e^{-3}}{9-9e^{-1}}\dot{\varphi}^2\,. \end{aligned}$$

VI: a
Il potenziale della sollecitazione elastica è

$$U_{el} = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_A|^2\,.$$

Sostituendo la parametrizzazione lagrangiana si ottiene

$$\begin{aligned} U^{\text{L}}_{el} &= -\frac{k}{2}|q\boldsymbol{e}_3 - R(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_3)|^2 \\ &= -\frac{k}{2}[q^2 - 2Rq\cos\varphi + R^2]\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$Q_{\varphi,el} = \frac{\partial U^{\text{L}}_{el}}{\partial\varphi} = -kRq\sin\varphi\,.$$

VII: a
Basta aggiungere al potenziale della forza elastica quello della forza costante, che è

$$U_\beta(\boldsymbol{X}) = \beta x_3\,, \qquad U^{\text{L}}_\beta(q) = \beta q\,.$$

Il potenziale della forza peso è costante.
VIII: b
Il sistema del gradiente per il potenziale lagrangiano dà

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial q} &= \beta - kq + kR\cos\varphi = 0\,, \\ \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial\varphi} &= -kRq\sin\varphi = 0\,. \end{aligned}$$

La seconda equazione dà una tra: i) $q = 0$; ii) $\varphi \in \{0, \pi\}$. Nel caso i) dalla prima equazione si ha

$$\cos\varphi = -\frac{\beta}{kR}\,,$$

che può avere 1, 2 o nessuna soluzione in dipendenza del valore relativo di β e kR. Nel caso ii), si ha dalla prima equazione

$$q = \frac{\beta \pm kR}{k}\,,$$

con segno $+$ se $\varphi = 0$, e segno $-$ se $\varphi = \pi$. Dunque le seguenti posizioni di equilibrio esistono sempre:

$$\Big(R + \frac{\beta}{k}, 0\Big)\,, \qquad \Big(-R + \frac{\beta}{k}, \pi\Big)\,.$$

Quindi il numero dei punti critici varia da 2 a 4.

IX: a
La b non è vera come si è visto sopra. Anche la posizione data nella a è di equilibrio. Calcoliamo la matrice hessiana del potenziale

$$D^2U^{\text{L}}(q,\varphi) = \begin{pmatrix} -k & -kR\sin\varphi \\ -kR\sin\varphi & -kRq\cos\varphi \end{pmatrix} .$$

Quindi

$$D^2U^{\text{L}}(R+\beta/k,0) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -kR^2 - R\beta \end{pmatrix} ,$$

che è definita negativa.
X: c
La b non è vera come si è visto sopra. Anche la posizione data nella a è di equilibrio. Calcoliamo la matrice hessiana del potenziale

$$D^2U^{\text{L}}(-R+\beta/k,\pi) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -kR^2 + R\beta \end{pmatrix} ,$$

che è indefinita se $\beta > kR$.
XI: b
Si ha l'equazione rispetto a q:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M\dot{q}] = \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial q} = \beta - kq + kR\cos\varphi ,$$

e poi quella rispetto a φ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I_{11}\dot{\varphi}] = \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} = -kRq\sin\varphi .$$

XII: a
Si ha l'equazione di moto per l'elemento materiale

$$M\boldsymbol{a} = M\ddot{q}\boldsymbol{e}_3 = \beta\boldsymbol{e}_3 - k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_A) - Mg\boldsymbol{e}_1 + \mathbf{f}_{\text{vin}} .$$

Quindi

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = [M\ddot{q} - \beta + k(q - R\cos\varphi)]\boldsymbol{e}_3 + kR\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + Mg\boldsymbol{e}_1 .$$

Quindi usando anche l'equazione di Lagrange si arriva a

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = Mg\boldsymbol{e}_1 + kR\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 .$$

XIII: a
Infatti è possibile il moto

$$(q(t),0) ,$$

ove q risolve l'equazione di Lagrange con $\varphi = 0$, ossia

$$M\ddot{q} + kq - \beta - kR = 0 .$$

XIV: b
Infatti dalla prima equazione di Lagrange segue che se q è costante anche φ lo è.

XV: c
Infatti nel punto di equilibrio, nell'ipotesi indicata, l'hessiana del potenziale lagrangiano vale

$$\begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -2kR^2 \end{pmatrix},$$

e la matrice di T^* *vale*

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_{11} \end{pmatrix}.$$

Quindi risolvendo l'equazione per gli ω_h *si ha*

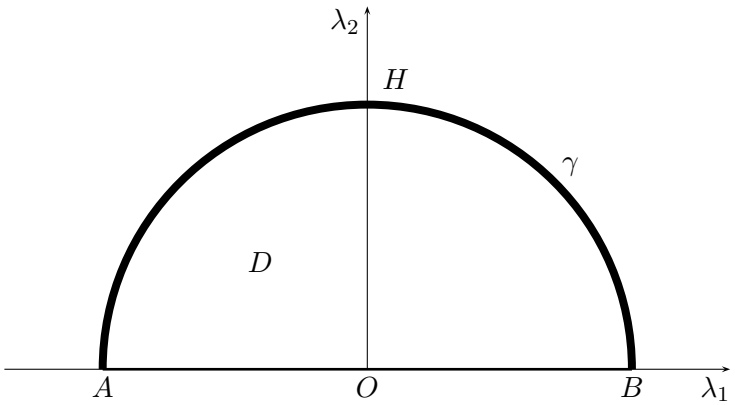
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2kR^2}{I_{11}}}.$$

Prova scritta del 22/07/2024

MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
ING. AEROSPAZIALE

Prova scritta del 22/07/2024

I.1 Una lamina C è formata da un semicerchio omogeneo D di massa M e raggio R, cui è fissata rigidamente una semicirconferenza materiale γ, sovrapposta alla semicirconferenza che fa parte del bordo di D. Anche γ ha massa M (e ovviamento raggio R).
Siano A, B gli estremi del diametro che delimita D, sia O il punto medio del diametro AB e sia infine H il secondo estremo del raggio $\overrightarrow{OH}$ di D ortogonale a $\overrightarrow{AB}$ (quindi H divide γ in due parti uguali).



C è vincolato a giacere sul piano fisso $x_3 = 0$ (qui le (x_h) denotano le coordinate nel sistema fisso). Inoltre O è vincolato a appartenere alla circonferenza fissa

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

con $L > 0$. I vincoli sono lisci.
Consideriamo il sistema di riferimento solidale a C dato da $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2R}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{OH}}{R}\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2\,.$$

Sul corpo agiscono solo le forze

$$\boldsymbol{F}_H = -k\boldsymbol{X}_H\,, \qquad \boldsymbol{F}_O = \mu \boldsymbol{e}_1\,,$$

applicate nei punti indicati. Qui k, $\mu > 0$ sono costanti.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-3\pi/4{,}5\pi/4) \times (-3\pi/4{,}5\pi/4)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_O^{\mathrm{L}}(\varphi) = L\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi \boldsymbol{e}_2\,,$$

e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\theta\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\theta\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Indichiamo con $(\lambda_{1G}, \lambda_{2G}, \lambda_{3G})$ le coordinate del centro di massa G di C nel sistema solidale $\mathcal{S}$ e con I_{hk} gli elementi della matrice di inerzia in O relativa alla base $(\boldsymbol{u}_h)$.

01 Si determini la seconda coordinata λ_{2G} del centro di massa di C in $\mathcal{S}$.

a
$$\frac{2R}{3\pi} + \frac{R}{\pi}\,.$$

b
$$\frac{2R}{3\pi} + R\,.$$

c Nessuna delle altre.

02 Si determini I_{11}, cioè il momento d'inerzia di C rispetto all'asse 1 del sistema di riferimento solidale $\mathcal{S}$.

a
$$\frac{MR^2}{10}\,.$$

b
$$\frac{3MR^2}{4}\,.$$

c Nessuna delle altre.

03 Si determini il prodotto d'inerzia I_{12} di C rispetto agli assi 1 e 2 del riferimento solidale $\mathcal{S}$.
a 0.
b $-MR^2$.
c Nessuna delle altre.
04 Indicato con I^G_{33} il momento d'inerzia del corpo C rispetto all'asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse 3 del riferimento solidale $\mathcal{S}$, scrivere l'energia cinetica di C in forma lagrangiana.
a

$$T^{\text{L}} = M\big(L^2\dot{\varphi}^2 + \lambda_{2G}^2\dot{\theta}^2 + 2L\lambda_{2G}\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(\varphi-\theta)\big) + \frac{I^G_{33}}{2}\dot{\theta}^2\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{M}{2}\big(L^2\dot{\varphi}^2 + \lambda_{2G}^2\dot{\theta}^2\big) + \frac{I^G_{33}}{2}\dot{\theta}^2\,.$$

c Nessuna delle altre.
05 Scrivere il potenziale lagrangiano della sollecitazione direttamente applicata a C.
a

$$U^{\text{L}} = -kLR\,\text{arctg}(\varphi-\theta) - \mu L\sin\varphi\,.$$

b

$$U^{\text{L}} = -kLR\sin(\varphi-\theta) + \mu L\cos\varphi\,.$$

c Nessuna delle altre.
06 Le posizioni di equilibrio nel dominio assegnato per (φ,θ)
a Possono essere sia 3 che 5, in dipendenza dei parametri L, R, M, k, μ.
b Sono in numero fisso pari a 8.
c Nessuna delle altre.
07 La posizione $(\varphi,\theta) = (\pi,\pi/2)$
a È di equilibrio stabile.
b È di equilibrio instabile.
c Nessuna delle altre.
08 La posizione $(\varphi,\theta) = (0,0)$
a È di equilibrio stabile.
b È di equilibrio instabile.
c Nessuna delle altre.
09 La posizione $(\varphi,\theta) = (0,\pi/2)$
a È di equilibrio stabile.
b È di equilibrio instabile.
c Nessuna delle altre.
10 Esiste almeno una posizione di equilibrio dove si possono definire le piccole oscillazioni?
a No, mai.
b Ne esiste sempre almeno una.
c Nessuna delle altre.

11 Il momento angolare di C rispetto al suo centro di massa è (usando la notazione introdotta nel testo)
a

$$I_{33}\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3 + I_{22}\dot{\theta}\boldsymbol{u}_2\,.$$

b

$$(I_{33} - 2M\lambda_{2G}^2)\dot{\theta}\boldsymbol{u}_3\,.$$

c Nessuna delle altre.
12 Il momento relativo al polo O delle forze attive applicate al corpo è
a

$$kRL\cos(\varphi - \theta)\boldsymbol{e}_3\,.$$

b

$$0\,.$$

c Nessuna delle altre.
13 Vale la conservazione dell'energia $T^{\text{L}} - U^{\text{L}}$?
a Sì.
b Solo negli eventuali moti periodici.
c Nessuna delle altre.
14 L'ellissoide d'inerzia di C in O
a Può essere sferico per opportuni valori di M e R.
b Non è definito perché il moto non è polare.
c Nessuna delle altre.
15 Le forze vincolari fanno complessivamente lavoro
a Strettamente negativo (se il moto non è la quiete).
b Nullo.
c Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: a
Calcoliamo separatamente le coordinate dei centri di massa di D e di γ. Si ha vista l'omogeneità dei due corpi

$$\lambda_{2D} = \frac{1}{\text{area}\,(D)}\iint_D \lambda_2\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^\pi (r\sin\alpha)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha$$
$$= \frac{2}{\pi R^2}\,\frac{R^3}{3}\,2 = \frac{4R}{3\pi}\,.$$

Poi

$$\lambda_{2\gamma} = \frac{1}{\text{lunghezza}\,(\gamma)}\int_\gamma \lambda_2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi R} R\sin\frac{s}{R}\,\mathrm{d}s = \frac{2R}{\pi}\,.$$

Quindi per l'additività del centro di massa

$$\lambda_{2G} = \frac{M}{2M}\lambda_{2D} + \frac{M}{2M}\lambda_{2\gamma} = \frac{2R}{3\pi} + \frac{R}{\pi}\,.$$

II: b
Calcoliamo separatamente i contributi di D e di γ. Si ha

$$I_{11}^D = \iint_D \lambda_2^2 \frac{2M}{\pi R^2}\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = \frac{2M}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^\pi r^2(\sin\alpha)^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha$$
$$= \frac{2M}{\pi R^2}\,\frac{R^4}{4}\,\frac{\pi}{2} = \frac{MR^2}{4}\,,$$

e

$$I_{11}^\gamma = \int_\gamma \lambda_2^2 \frac{M}{\pi R}\,\mathrm{d}s = \frac{M}{\pi R}\int_0^{\pi R} R^2\Big(\sin\frac{s}{R}\Big)^2\,\mathrm{d}s = \frac{MR}{\pi}\,\frac{\pi R}{2} = \frac{MR^2}{2}\,.$$

III: a
Il sistema di riferimento dato è principale d'inerzia perché il piano ortogonale a $\overrightarrow{AB}$ e al piano della lamina è di simmetria materiale ortogonale, quindi $\boldsymbol{u}_1$ è principale. Infine $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale alla lamina è principale nei punti del piano della lamina come al solito.
IV: a
Usiamo il teorema di König scrivendo

$$T^{\text{L}} = \frac{2M}{2}|\boldsymbol{v}_G^{\text{L}}|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Vale $\boldsymbol{\omega} = \dot\theta\boldsymbol{u}_3$ dunque

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{I_{33}^G}{2}\dot\theta^2\,.$$

Inoltre

$$\boldsymbol{X}_G^{\text{L}} = \boldsymbol{X}_O^{\text{L}}(\varphi) + \lambda_{2G}\boldsymbol{u}_2(\theta) = (L\cos\varphi - \lambda_{2G}\sin\theta)\boldsymbol{e}_1 + (L\sin\varphi + \lambda_{2G}\cos\theta)\boldsymbol{e}_2\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{v}_G^{\text{L}} = (-L\dot\varphi\sin\varphi - \lambda_{2G}\dot\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (L\dot\varphi\cos\varphi - \lambda_{2G}\dot\theta\sin\theta)\boldsymbol{e}_2\,,$$

e

$$|\boldsymbol{v}_G^{\text{L}}|^2 = L^2\dot\varphi^2 + \lambda_{2G}^2\dot\theta^2 + 2L\lambda_{2G}\dot\varphi\dot\theta\sin(\varphi-\theta)\,.$$

V: b
Il potenziale conservativo di $\boldsymbol{F}_H$ è

$$U_H = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_H|^2\,.$$

Poiché

$$\boldsymbol{X}_H^{\text{L}} = \boldsymbol{X}_O^{\text{L}}(\varphi) + R\boldsymbol{u}_2(\theta) = (L\cos\varphi - R\sin\theta)\boldsymbol{e}_1 + (L\sin\varphi + R\cos\theta)\boldsymbol{e}_2\,,$$

si ha a meno di costanti additive

$$U_H^{\text{L}} = -\frac{k}{2}\big(L^2 + R^2 + 2LR\sin(\varphi-\theta)\big)\,.$$

Invece il potenziale conservativo di $\boldsymbol{F}_O$ *è*

$$U_O = \mu x_{1O}\,,$$

quindi

$$U_O^{\text{L}} = \mu L\cos\varphi\,.$$

VI: c
Il sistema del gradiente per l'equilibrio è

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial\varphi} &= -kLR\cos(\varphi-\theta) - \mu L\sin\varphi = 0\,,\\ \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial\theta} &= kLR\cos(\varphi-\theta) = 0\,.\end{aligned}$$

Si ha quindi sommando le due equazioni

$$\sin\varphi = 0\,, \qquad \textit{cioè } \varphi\in\{0,\pi\}.$$

Dunque se $\varphi = 0$ *si ha* $\cos\theta = 0$*, ossia* $\theta\in\{-\pi/2,\pi/2\}$*. Se* $\varphi=\pi$ *si ha*

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta = 0$$

e si ritrova $\theta\in\{-\pi/2,\pi/2\}$*. Perciò le posizioni di equilibrio sono*

$$\left(0,-\frac{\pi}{2}\right),\quad \left(0,\frac{\pi}{2}\right),\quad \left(\pi,-\frac{\pi}{2}\right),\quad \left(\pi,\frac{\pi}{2}\right).$$

VII: b
Studiamo l'hessiana

$$D^2U^{\text{L}}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} kLR\sin(\varphi-\theta)-\mu L\cos\varphi & -kLR\sin(\varphi-\theta)\\ -kLR\sin(\varphi-\theta) & kLR\sin(\varphi-\theta)\end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}D^2U^{\text{L}}(0,-\pi/2) &= \begin{pmatrix} kLR-\mu L & -kLR\\ -kLR & kLR\end{pmatrix}, \quad \textit{indefinita, instabile.}\\ D^2U^{\text{L}}(0,\pi/2) &= \begin{pmatrix} -kLR-\mu L & kLR\\ kLR & -kLR\end{pmatrix}, \quad \textit{definita negativa, stabile.}\\ D^2U^{\text{L}}(\pi,-\pi/2) &= \begin{pmatrix} -kLR+\mu L & kLR\\ kLR & -kLR\end{pmatrix}, \quad \textit{indefinita, instabile.}\\ D^2U^{\text{L}}(\pi,\pi/2) &= \begin{pmatrix} kLR+\mu L & -kLR\\ -kLR & kLR\end{pmatrix}, \quad \textit{definita positiva, instabile.}\end{aligned}$$

VIII: c
Infatti (0,0) *non è di equilibrio (si veda la soluzione VI).*
IX: a
Si veda la soluzione VII.
X: b
Infatti ne esiste sempre esattamente una: $(0,\pi/2)$ *ove tutte le ipotesi sono rispettate.*

XI: b
È noto che

$$\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{\sigma}_G \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\sigma}_G(\dot{\theta}\boldsymbol{u}_3)\,.$$

Si noti che $(\boldsymbol{u}_h)$ *è principale d'inerzia anche in* G *per i soliti motivi di simmetria materiale ortogonale, per i quali risulta anche* $(\lambda_{1G}, \lambda_{2G}, \lambda_{3G}) = (0, \lambda_{2G}, 0)$.
Quindi possiamo scrivere la matrice d'inerzia relativamente a questa base solidale, ottenendo

$$\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{\sigma}_G(\dot{\theta}\boldsymbol{u}_3) = I^G_{33}\dot{\theta}\boldsymbol{u}_3\,.$$

Infine per Huygens

$$I^G_{33} = I_{33} - 2M\lambda^2_{2G}\,.$$

XII: a
Con un calcolo diretto

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_O &= (\boldsymbol{X}_H - \boldsymbol{X}_O) \times \boldsymbol{F}_H + (\boldsymbol{X}_O - \boldsymbol{X}_O) \times \boldsymbol{F}_O = (\boldsymbol{X}_H - \boldsymbol{X}_O) \times (-k\boldsymbol{X}_H) \\ &= k\boldsymbol{X}_O \times \boldsymbol{X}_H = k\boldsymbol{X}_O \times (\boldsymbol{X}_O + R\boldsymbol{u}_2) = kR\boldsymbol{X}_O \times \boldsymbol{u}_2 \\ &= kR(L\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + L\sin\varphi\boldsymbol{e}_2) \times (-\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_2) = kRL\cos(\varphi-\theta)\boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

XIII: a
Segue dalla teoria perché le forze sono conservative e i vincoli lisci e fissi.
XIV: c
La b è insensata. La a non vale, perché $I_{33} = I_{11} + I_{22}$ *come in tutte le lamine.*
XV: b
Nel caso dei vincoli fissi il lavoro complessivo virtuale coincide con il lavoro complessivo effettivo, e b segue dall'ipotesi dei lavori virtuali.

Prova scritta del 18/01/2024

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 18/01/2024

I.1 Un sistema di punti materiali con coordinate locali $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^{n_c}$ è soggetto a vincoli olonomi regolari nella forma

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{n_c} \to \boldsymbol{R}^m\,.$$

01 Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali allora
a Il lavoro compiuto dalla reazione vincolare sul primo moto $\boldsymbol{X}_1$ è nullo.
b Vale la conservazione dell'energia.
c Nessuna delle altre.

02 Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ e quello normale $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ soddisfano
a $\dim V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} > \dim N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$.
b $\dim V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ è indipendente da $(\boldsymbol{z}, t)$.
c Nessuna delle altre.
03 Consideriamo il caso del sistema con un solo punto materiale $(\boldsymbol{X}_1, m)$. Allora
a La funzione $\boldsymbol{f}$ determina se il vincolo è scabro o liscio.
b L'ipotesi di vincolo scabro e quella dei lavori virtuali sono incompatibili.
c Nessuna delle altre.
Soluzione
I: c
Il lavoro compiuto dalla singola reazione non è nullo in genere neanche per vincoli fissi. La conservazione dell'energia non vale in genere se le forze direttamente applicate non sono conservative.
II: b
Infatti $\dim V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ *è il numero dei gradi di libertà del sistema.*
III: b
Il vincolo fisso per un solo moto si riduce a quello a una superficie o a una curva. In entrambi i casi l'ipotesi dei lavori virtuali coincide con quella di vincolo liscio (elementare) che è incompatibile con quella di vincolo scabro.

I.2 Si consideri una lamina rettangolare C di centro O e lati a, b con $a > b$, vincolata con vincolo liscio a muoversi di moto polare di polo O.
04 Supponiamo che non vi siano forze direttamente applicate. Allora
a Esistono assi solidali per O che non possono essere di rotazione con $\boldsymbol{\omega} \neq 0$.
b L'unico moto possibile è quello di quiete.
c Nessuna delle altre.
05 Supponiamo che il momento delle forze esterne soddisfi

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = M\boldsymbol{u}\,,$$

ove M è una funzione regolare degli angoli di Eulero e delle loro derivate prime, e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale normale al piano della lamina.
a Il moto può essere di rotazione con asse parallelo a un lato della lamina.
b Il moto può essere di rotazione con asse ortogonale al piano della lamina.
c Nessuna delle altre.
06 Supponiamo che il moto sia polare per inerzia.
a Il vettore $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ ha componenti costanti in qualunque base fissa.
b Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ ha componenti costanti nella base solidale.
c Nessuna delle altre.
Soluzione
I: a
Infatti un asse non principale (come per esempio quello della diagonale) può essere di rotazione solo in presenza di un momento delle forze non nullo.
II: b
Infatti sia le direzioni dei lati che quella ortogonale alla lamina sono principali in

O e quindi è noto dalla teoria che il moto può essere di rotazione con tali assi solo se il momento delle forze è parallelo all'asse.
III: a
Infatti $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ è un integrale primo del moto. Se $\boldsymbol{\omega}$ è solidale, allora è costante, il che in genere non è vero.

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a una superficie regolare $S \subset \boldsymbol{R}^3$, parametrizzata da $\boldsymbol{r}(\varphi, \theta)$ con $(\varphi, \theta) \in D \subset \boldsymbol{R}^2$.
07 La componente dell'accelerazione che contiene $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\theta}$ è
a Sempre normale a S.
b Sempre tangente a S.
c Nessuna delle altre.
08 Supponiamo che il vincolo sia scabro con legge di attrito statico secondo Coulomb-Morin, e coefficiente di attrito statico $\mu > 0$. Il punto materiale sia fermo all'istante iniziale nella posizione $\boldsymbol{x}_0 \in S$, ove la normale a S è $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{e}_1$. Il punto sia soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3$ con α, β, γ costanti assegnate.
Allora il moto permane di quiete oppure no, in dipendenza da
a I valori di μ e α, ma non quelli di β e γ.
b I valori di μ, β e γ, ma non quello di α.
c Nessuna delle altre.
09 Supponiamo che l'elemento materiale sia soggetto alla forza posizionale direttamente applicata $\boldsymbol{F}(\varphi, \theta)$. Il vincolo sia liscio.
a La velocità iniziale del moto può essere prescritta ad arbitrio, purché tangente a S nella posizione iniziale.
b Le equazioni di moto si possono scrivere nella forma

$$\ddot{\varphi} = h_1(\varphi, \theta)\,, \qquad \ddot{\theta} = h_2(\varphi, \theta)\,,$$

per opportune funzioni h_1, $h_2 : D \to \boldsymbol{R}$.
c Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: b
Infatti la componente menzionata è $\boldsymbol{r}_\varphi\ddot{\varphi} + \boldsymbol{r}_\theta\ddot{\theta}$.
II: c
Infatti la quiete dipende dalla direzione di $\boldsymbol{F}$ (e da μ), che è determinata dalle 3 componenti.
III: a
La velocità iniziale è arbitraria purché compatibile con il vincolo, dato che non è ristretta dalla forza (che ne è indipendente). La b non vale perché nelle equazioni del moto entrano anche le derivate prime $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, che sono contenute nell'accelerazione in genere.

I.4 Sia C un corpo rigido non degenere. Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C.
10 Consideriamo il minimo valore I_m assunto dai momenti d'inerzia di C rispetto a tutte le direzioni e tutti i poli possibili.

a In realtà il minimo potrebbe non esistere come tale, ossia essere un estremo inferiore e valere 0.
b Il minimo I_m è raggiunto nel polo dato dal centro di massa, ma non necessariamente solo in tale polo.
c Nessuna delle altre.
11 Fissato $\boldsymbol{X}_O$, esiste una sola terna ortonormale principale d'inerzia in $\boldsymbol{X}_O$.
a Esistono corpi per cui non è vero in nessun punto, ossia in ogni polo esistono più terne principali.
b È sempre così se $\boldsymbol{X}_O$ non è il centro di massa.
c Nessuna delle altre.
12 La matrice del tensore d'inerzia in $\boldsymbol{X}_O$ relativa alla base $(\boldsymbol{u}_h)$
a Può avere un autovalore nullo.
b Deve essere costante nel tempo.
c Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: b
Per il teorema di Huygens; è raggiunto anche su tutto l'asse principale centrale corrispondente. La a non vale ancora per il teorema di Huygens.
II: a
Per esempio la sfera o il cubo omogenei, per la proprietà di traslazione della terna principale centrale. La b non vale, basta pensare al caso dei solidi di rotazione in cui esistono infinite terne principali in tutti i punti dell'asse di simmetria.
III: b
La a non vale, perché la matrice è definita positiva. La b vale perché la base $(\boldsymbol{u}_h)$ e $\boldsymbol{X}_O$ sono solidali per ipotesi.

I.5 Si consideri un moto unidimensionale soggetto a forza posizionale di potenziale

$$U(x) = -ae^{(x^2-1)^2}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove $a > 0$ è una costante assegnata. Nel seguito ci si riferisce al diagramma di fase del moto.
13 Esistono orbite illimitate?
a Sì, indipendentemente dal valore di a.
b No, indipendentemente dal valore di a.
c Nessuna delle altre.
14 Esistono orbite relative a moti periodici?
a Sì, indipendentemente dal valore di a.
b No, indipendentemente dal valore di a.
c Nessuna delle altre.
15 Esistono sia punti di equilibrio stabile che di equilibrio instabile?
a Sì, indipendentemente dal valore di a.
b No, indipendentemente dal valore di a.
c Nessuna delle altre.
SOLUZIONE

I: b
Infatti le orbite giacciono sulle curve

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - ae^{(x^2-1)^2})}\,,$$

che sono tutte limitate (perché la radice sia definita).
II: a
Per esempio quelle vicine ai punti di equilibrio stabile. Questi si trovano risolvendo

$$U'(x) = -4ax(x^2-1)e^{(x^2-1)^2} = 0\,,$$
$$U''(x) = -[4a(x^2-1) + 8ax^2 + (4ax(x^2-1))^2]e^{(x^2-1)^2} < 0\,.$$

Si ottiene che -1, 1 *sono di equilibrio stabile e* 0 *di equilibrio instabile.*
III: a
Vedi la soluzione alla domanda precedente.

Prova scritta del 02/02/2024

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 02/02/2024

I.1 Sia C un corpo rigido non degenere, soggetto a forze esterne di momento $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$. Qui $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è un sistema di riferimento solidale al corpo rigido, con $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ principale d'inerzia in O. Inoltre $\boldsymbol{X}_O$ è fisso, ossia il moto è polare di polo O.
I momenti I_{hh} sono relativi al sistema $\mathcal{S}$ e denotiamo la velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \sum_{h=1}^{3} \omega_h(t)\boldsymbol{u}_h(t)\,.$$

01 Se $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = 0$ per ogni t allora
a L'energia cinetica T è costante.
b Il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_O$ è solidale.
c Nessuna delle altre.
02 Sia $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \alpha\boldsymbol{u}_3$, con $\alpha > 0$ costante, e sia $I_{11} = I_{22} \neq I_{33}$.
a Se $\omega_3(0) = 0$, allora $\omega_3(t) = 0$ per ogni $t > 0$.
b Se $(\omega_1(0), \omega_2(0)) = (0,0)$, allora $(\omega_1(t), \omega_2(t)) = (0,0)$ per ogni $t > 0$.
c Nessuna delle altre.

03 Quale delle seguenti condizioni garantisce da sola che tutti i moti siano rotazioni?
a $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = 0$ per ogni t.
b $I_{11} = I_{22} = I_{33}$.
c Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: a
È uno degli integrali primi ottenuti dalla teoria; $\boldsymbol{L}_O$ è costante, ma non necessariamente solidale.
II: b
Le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3\,, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3\,, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= \alpha\,. \end{aligned}$$

Dunque

$$\omega_3(t) = \omega_3(0) + \alpha I_{33}^{-1} t\,,$$

e $\omega_3(0) = 0$ non implica $\omega_3(t) = 0$; perciò a non vale. Invece vale b perché dalle prime due equazioni si ha

$$I_{11}(\dot{\omega}_1\omega_1 + \dot{\omega}_2\omega_2) = 0\,,$$

e perciò

$$\omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2 = \omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2\,.$$

III: c
La a dice che il moto è polare per inerzia, ma non tutti i moti polari per inerzia sono rotazioni. La b non dice niente sul momento delle forze, quindi non può garantire che i moti siano rotazioni. La a e la b insieme in effetti lo garantiscono.

I.2 Si consideri un sistema $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$ di n elementi materiali soggetto a vincoli olonomi regolari fissi, con $\ell < 3n$ gradi di libertà.
04 La funzione

$$\frac{\partial T^{\text{L}}}{\partial \dot{q}_1}$$

a Dipende certamente da qualche $\dot{q}_h$.
b Dipende certamente da qualche q_h.
c Nessuna delle altre.
05 Supponiamo che $\ell = 3$ e $\boldsymbol{q} \in Q = \boldsymbol{R}^3$. Dire quale delle seguenti può essere l'energia cinetica (per ogni valore di $\boldsymbol{q}$):
a

$$T^{\text{L}} = (q_1^2 + 1)\dot{q}_1^2 + (\operatorname{arctg} q_2)^2\dot{q}_2^2 + e^{q_3}\dot{q}_3^2\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \dot{q}_1^2 + \frac{\dot{q}_2^2}{1 + q_2^2} + e^{q_3}\dot{q}_3^2 + e^t\dot{q}_1\,.$$

c Nessuna delle altre.

06 Supponiamo che $\ell = 2$, $\boldsymbol{q} \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e le componenti lagrangiane delle forze siano

$$Q_1 = \alpha t q_1 q_2^2 \,, \qquad Q_2 = \alpha t q_1^2 q_2 + 1 \,,$$

ove $\alpha \in \boldsymbol{R}$ è una costante assegnata.

a Il potenziale lagrangiano non esiste, salvo il caso $\alpha = 0$.

b Il potenziale lagrangiano esiste, per ogni assegnato $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

c Nessuna delle altre.

Soluzione

I: a

Infatti T^{L} è una forma quadratica definita positiva nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$ e perciò la sua derivata rispetto a una di esse deve contenerle tutte.

II: c

La a non è definita positiva se $q_2 = 0$, la b contiene un termine di grado 1 nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$, il che è impossibile se i vincoli sono fissi.

III: b

Infatti è soddisfatta la condizione di chiusura

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} = 2\alpha t q_1 q_2 = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} \,.$$

Quindi per integrazione

$$U^{\text{L}} = \frac{\alpha}{2} t q_1^2 q_2^2 + q_2 \,.$$

I.3 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2^2 \,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,.$$

Qui le (x_i) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso, e α, β sono costanti positive assegnate. Il punto è soggetto alla forza peso $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3$.

07 Il vincolo sia scabro secondo la legge di attrito statico di Coulomb-Morin con coefficiente di attrito $\mu > 0$. Allora l'insieme delle posizioni ove è possibile l'equilibrio, in dipendenza dei valori dei parametri α, β, μ,

a Può essere vuoto.

b In ogni caso è limitato.

c Nessuna delle altre.

08 Il vincolo sia liscio. Allora l'insieme delle possibili posizioni di equilibrio

a Può essere vuoto.

b Può essere illimitato.

c Nessuna delle altre.

09 Il vincolo sia liscio. Allora

a La reazione vincolare su $\boldsymbol{X}$ fa lavoro nullo.

b L'energia meccanica in genere non si conserva.

c Nessuna delle altre.

Soluzione

I: a
La normale è

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{(\alpha, 2\beta x_2, -1)}{\sqrt{1 + \alpha^2 + 4\beta^2 x_2^2}} .$$

La condizione di Coulomb-Morin, usando

$$|\boldsymbol{F}^{\tan}|^2 + |\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}|^2 = |\boldsymbol{F}|^2 ,$$

si trasforma in

$$m^2 g^2 = |\boldsymbol{F}|^2 \leq (\mu^2 + 1)|\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}|^2 = \frac{(\mu^2 + 1) m^2 g^2}{1 + \alpha^2 + 4\beta^2 x_2^2} ,$$

ossia in

$$\alpha^2 + 4\beta^2 x_2^2 \leq \mu^2 .$$

Quindi se $\alpha > \mu$ non esistono posizioni di equilibrio, ma se $\alpha \leq \mu$ il loro insieme è indipendente da x_1 e pertanto illimitato.
II: a
Usiamo il potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(x_1, x_2) = -mg(\alpha x_1 + \beta x_2^2) .$$

Si vede che il gradiente

$$-mg\alpha \boldsymbol{e}_1 - 2mg\beta x_2 \boldsymbol{e}_2$$

non si annulla mai. Quindi non esistono posizioni di equilibrio.
III: a
Infatti la reazione vincolare è ortogonale alla velocità. Quindi l'energia meccanica si conserva.

I.4 Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi regolari fissi, con numero dei gradi di libertà $\ell = 2$. Il sistema è soggetto a forze direttamente applicate conservative. Vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
10 Sia dato il potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}} = \alpha q_1^2 + 2\gamma q_1 q_2 + \beta q_2^2 ,$$

con α, β, $\gamma \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ costanti assegnate. In dipendenza della scelta di α, β, γ
a Esiste sempre una posizione dove sono definite le piccole oscillazioni.
b Non esiste mai una posizione dove sono definite le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
11 Sia dato il potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}} = \alpha q_1^4 + 2\gamma q_1^2 q_2^2 + \beta q_2^4 ,$$

con α, β, γ costanti negative assegnate. In dipendenza della scelta di α, β, γ
a In $(q_1, q_2) = (0,0)$ sono sempre definite le piccole oscillazioni.

b In $(q_1, q_2) = (0,0)$ non sono mai definite le piccole oscillazioni.
c Nessuna delle altre.
12 Supponiamo che in $(q_1, q_2) = (0,0)$ siano definite le piccole oscillazioni. Allora l'energia cinetica ridotta T^* in tale posizione
a È una forma quadratica definita positiva nelle $(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$, a coefficienti indipendenti dalle (q_1, q_2), ma in generale dipendenti da t.
b Dipende sia da $\dot{q}_1$ che da $\dot{q}_2$, ma non dipende mai da (q_1, q_2).
c Nessuna delle altre.
Soluzione
I: c
In ogni caso, l'hessiana è

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & 2\gamma \\ 2\gamma & 2\beta \end{pmatrix},$$

che può essere o no definita negativa in dipendenza della scelta dei parametri.
II: b
Infatti si verifica che sia il gradiente che l'hessiana del potenziale si annullano in (0,0).
III: b
Segue dalla teoria, perché i vincoli sono fissi e la T^* ha coefficienti calcolati nella posizione di equilibrio.

I.5 Un moto unidimensionale $m\ddot{x} = U'(x)$ ha potenziale

$$U(x) = x(x-a)^2\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

con $a > 0$ costante assegnata.
Nel seguito ci riferiamo al diagramma di fase del moto.
13 I punti di equilibrio sono
a Almeno uno stabile e uno instabile.
b Tutti instabili.
c Nessuna delle altre.
14 Le orbite nel piano delle fasi
a Sono tutte illimitate, a parte quelle corrispondenti agli eventuali punti di equilibrio.
b Ne esistono sia di limitate che di illimitate, a prescindere da quelle corrispondenti agli eventuali punti di equilibrio.
c Nessuna delle altre.
15 Assegnato ad arbitrio $(\bar{x}, \bar{p})$ nel piano delle fasi
a Esiste una unica orbita che passa per $(\bar{x},\bar{p})$.
b Se $\bar{p} = 0$ possono esistere più orbite diverse che passano per $(\bar{x},\bar{p})$.
c Nessuna delle altre.
Soluzione
I: a
Dallo studio della funzione U si ottiene

$$U'(x) = (x-a)(3x-a)\,, \quad U''(x) = 6x - 4a\,.$$

Quindi i punti di equilibrio sono

$$x_1 = a\,, \qquad x_2 = \frac{a}{3}\,,$$

ma

$$U''(x_1) > 0\,, \qquad U''(x_2) < 0\,,$$

quindi x_1 è instabile e x_2 stabile.
II: b
Infatti le orbite sono definite sugli insiemi

$$E \geq -U(x) = -x(x-a)^2\,.$$

Si vede che per livelli energetici $-4a^3/27 < E < 0$ esistono sia orbite limitate (chiuse) che illimitate (con x illimitato).
III: a
Per un noto teorema, se due orbite si intersecano allora coincidono. È vero che le curve

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))}$$

possono sconnettersi in più orbite (non intersecantisi) nei punti con $p = 0$.

Prova scritta del 12/06/2024

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 12/06/2024

I.1 Un corpo rigido non degenere C è vincolato a muoversi di moto polare con polo O.
Indichiamo con $\boldsymbol{\sigma}_O$ il tensore d'inerzia di C in O e con $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ il momento delle forze esterne in O (comprese quindi le reazioni vincolari).
01 Si ha $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(\bar{t}) = 0$ se nell'istante $\bar{t}$ vale
a $\boldsymbol{\omega}(\bar{t}) = 0$.
b Il vincolo è liscio.
c Nessuna delle altre.
02 Sia $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) = 0$ per ogni t. Allora tutti i moti sono periodici nel caso:
a È sempre vero.
b Se il corpo C ha geometria delle masse speciale.
c Nessuna delle altre.
03 Siano $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{R}^3$. Allora vale sempre
a $\boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 \geq 0$.

b $\boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1$.
c Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: a
È noto che nel caso del moto polare di polo O

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega} \,.$$

II: b
Questo è il caso del moto polare per inerzia. Se per esempio l'ellissoide d'inerza in O è sferico, tutti moti sono rotazioni uniformi e quindi periodici.
III: b
Infatti l'operatore $\boldsymbol{\sigma}_O$ è simmetrico. La a non può valere (basta cambiare il segno di $\boldsymbol{v}_2$).

I.2 Consideriamo il vincolo olonomo

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0 \,,$$

con $\boldsymbol{f} : A \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^m$, $A \subset \boldsymbol{R}^6$ aperto,

$$\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_6) \,.$$

Nel seguito si dia per nota l'esistenza di configurazioni compatibili con il vincolo.
Inoltre denotiamo

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{i=1}^{3} z_i \boldsymbol{e}_i \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = \sum_{i=1}^{3} z_{i+3} \boldsymbol{e}_i \,.$$

04 Il vincolo sia

$$\begin{aligned} z_1 - z_4^2 &= 0 \,, \\ z_2 - z_5 &= 0 \,, \\ z_1^2 + z_2^2 - a(t^2+1) &= 0 \,, \end{aligned}$$

ove $a > 0$ è una costante; qui $A = \boldsymbol{R}^6$.
a Il vincolo è olonomo regolare in ogni configurazione compatibile.
b Il vincolo è olonomo regolare solo in alcune delle configurazioni compatibili, ma non in tutte.
c Nessuna delle altre.
05 Si considerino due moti $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ come sopra, vincolati come segue:

- $\boldsymbol{X}_1$ e $\boldsymbol{X}_2$ sono allineati con l'origine (0,0,0).
- La proiezione ortogonale di $\boldsymbol{X}_1$ sul piano $x_3 = 0$ ha modulo $R > 0$ costante.

I vincoli sono espressi come segue, almeno in qualche aperto $A \subset \boldsymbol{R}^6$.
a

$$\begin{aligned} z_2 z_6 - z_3 z_5 &= 0\,, \\ z_1 z_5 - z_2 z_4 &= 0\,, \\ z_1^2 + z_2^2 - R^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} z_1 z_5 - z_2 z_4 &= 0\,, \\ z_3 &= 0\,, \\ z_1^2 + z_2^2 - R^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

c Nessuna delle altre.
06 Se $\boldsymbol{f}$ è olonomo regolare, allora lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ soddisfa in genere
a $\dim V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} > m$.
b $\dim V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} = m$.
c Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: a
Calcoliamo la iacobiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2z_4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2z_1 & 2z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le prime due righe sono sempre linearmente indipendenti. Se $z_2 \neq 0$ la terza riga è linearmente indipendente dalle altre due. Se $z_2 = 0$ allora per il vincolo $z_1 \neq 0$; quindi $z_4 \neq 0$ e di nuovo la terza riga è linearmente indipendente dalle altre due.
II: a
I primi due vincoli danno $\boldsymbol{X}_1 \times \boldsymbol{X}_2 = 0$ ove $z_2 \neq 0$. Il terzo esprime la condizione sulla proiezione di $\boldsymbol{X}_1$. La iacobiana è

$$\begin{pmatrix} 0 & z_6 & -z_5 & 0 & -z_3 & z_2 \\ z_5 & -z_4 & 0 & -z_2 & z_1 & 0 \\ 2z_1 & 2z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il minore formato dalle colonne 246 ha determinante non nullo ove $z_2 \neq 0$.
III: c
Si ha $\dim V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} = \ell = 6 - m$ che può essere maggiore, minore o uguale a m.

I.3 Consideriamo un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Su ciascun punto è applicata la forza $\boldsymbol{F}_i$. Non sono applicati vincoli.
07 Supponiamo che $n = 2$ e

$$\boldsymbol{F}_1 = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2)\,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = k(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1)\,,$$

con $k > 0$ costante. Allora
a Il sistema di forze è sempre conservativo.
b Il sistema di forze non è mai conservativo.
c Nessuna delle altre.
08 Sia $n = 2$. Le equazioni globali della dinamica determinano il moto del sistema, assegnate le condizioni iniziali?
a Sì se le forze $\boldsymbol{F}_i$ sono posizionali.
b Sì se il moto è piano.
c Nessuna delle altre.
09 Supponiamo che le forze direttamente applicate siano date da

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^1 + \boldsymbol{F}_i^2 \,,$$

con $(\boldsymbol{F}_i^1)$ sistema di forze conservativo con potenziale U, e

$$\boldsymbol{F}_i^2 = b_i \dot{\boldsymbol{X}}_i \times \boldsymbol{e}_3 \,,$$

ove i $b_i \in \boldsymbol{R}$ sono costanti. Allora:
a L'energia meccanica $T - U$ si conserva lungo ciascun moto.
b L'energia meccanica $T - U$ non si conserva lungo ciascun moto, salvo il caso $b_i = 0$ per ogni i.
c Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: b
Scriviamo in modo globale il sistema di forze, usando le coordinate

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{i=1}^{3} z_i \boldsymbol{e}_i \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = \sum_{i=1}^{3} z_{i+3} \boldsymbol{e}_i \,.$$

Si ha

$$\boldsymbol{F} = \big(-k(z_1 - z_4), -k(z_2 - z_5), -k(z_3 - z_6), k(z_4 - z_1), k(z_5 - z_2), k(z_6 - z_1) \big) \,.$$

Poichè $\boldsymbol{R}^6$ è semplicemente connesso, $\boldsymbol{F}$ è conservativo se e solo se valgono le condizioni

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_h} = \frac{\partial F_h}{\partial z_i} \,, \qquad i \neq h \,.$$

Ma per esempio

$$\frac{\partial F_1}{\partial z_4} = k \,, \qquad \frac{\partial F_4}{\partial z_1} = -k \,.$$

II: c
Come controesempio si può considerare il caso

$$\boldsymbol{F}_1 = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) \,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = -k(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1) \,,$$

con $k > 0$ costante, ove si ha $\boldsymbol{F}^{\text{ext}} = 0$ e $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = 0$, ma il moto dipende da k.
III: a
Dalla teoria; infatti

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^2 \cdot \dot{\boldsymbol{X}}_i = 0 \,.$$

I.4 Consideriamo un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ vincolato al piano $x_3 = 0$ con vincolo liscio (non ci sono altri vincoli). Denotiamo con $\boldsymbol{\psi}(s)$ la sua traiettoria e con $s(t)$ la sua legge oraria. Si supponga che $\boldsymbol{\psi}(s)$ sia una curva regolare con terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e curvatura $k > 0$.
Supponiamo sempre $\boldsymbol{X}(0) = 0$ e $s(0) = 0$.
Il punto è soggetto a una forza direttamente applicata posizionale $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$.
10 Supponiamo che $\dot{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{v}_0 \neq 0$. Allora
a $\boldsymbol{T}(0) = \boldsymbol{v}_0$.
b $\boldsymbol{N}(0) \cdot \boldsymbol{v}_0 = 0$.
c Nessuna delle altre.
11 Supponiamo che $\dot{\boldsymbol{X}}(0) = c\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{F}(0) = \lambda \boldsymbol{e}_1$, con $c > 0$, $\lambda > 0$ costanti. Allora
a $\boldsymbol{N}(0) \cdot \boldsymbol{e}_1 > 0$.
b $\boldsymbol{N}(0) \cdot \boldsymbol{e}_1 < 0$.
c Nessuna delle altre.
12 Supponiamo che $\dot{\boldsymbol{X}}(0) = c\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{F}(0) = \lambda \boldsymbol{e}_1$, con $c > 0$, $\lambda > 0$ costanti. Allora l'accelerazione all'istante iniziale $\boldsymbol{a}(0)$ soddisfa
a $\boldsymbol{a}(0) = \ddot{s}(0)\boldsymbol{T}(0)$.
b $\boldsymbol{a}(0) = 0$.
c Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: b
La a non vale perché per esempio $\boldsymbol{v}_0$ può non essere un versore. Comunque $\boldsymbol{T}(0)$ e $\boldsymbol{v}_0$ sono paralleli, da cui segue b.
II: a
Infatti dalle equazioni di moto e dalla condizione di vincolo liscio

$$0 < mc^2 k(0) = m\dot{s}(0)^2 k(0) = \boldsymbol{F}(0) \cdot \boldsymbol{N}(0) = \lambda \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{N}(0)\,.$$

III: c
Infatti si sa

$$\boldsymbol{a}(0) = \ddot{s}(0)\boldsymbol{T}(0) + k(0)\dot{s}(0)^2 \boldsymbol{N}(0)\,.$$

Ma dalle equazioni di moto

$$m\ddot{s}(0) = \boldsymbol{F}(0) \cdot \boldsymbol{T}(0) = 0\,,$$

perché per $t = 0$ forza e velocità sono ortogonali. Inoltre

$$|\dot{s}(0)| = |\dot{\boldsymbol{X}}(0)| = c > 0\,.$$

Quindi

$$\boldsymbol{a}(0) = k(0)c^2 \boldsymbol{N}(0) \neq 0\,.$$

I.5 Un sistema di elementi materiali è vincolato da vincoli olonomi regolari. Sia ℓ il numero dei gradi di libertà. Indichiamo con $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_\ell) \in Q$ le coordinate lagrangiane.

13 Supponiamo che le forze espresse in coordinate lagrangiane risultino funzioni solo di $\boldsymbol{q}$ (e non di $\dot{\boldsymbol{q}}$ e di t). Si può scrivere la lagrangiana del sistema?
a Sì, sempre.
b In genere no, ma sì se $\ell \leq 6$.
c Nessuna delle altre.
14 Le equazioni di Lagrange
a Contengono sempre il potenziale lagrangiano.
b Sono sempre equazioni differenziali del secondo ordine.
c Nessuna delle altre.
15 È possibile che nelle equazioni di Lagrange non compaiano le seguenti quantità (intese qui come variabili indipendenti)?
a Può non comparire $\ddot{\boldsymbol{q}}$.
b Può non comparire $\boldsymbol{q}$.
c Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: c
L'ipotesi fatta conduce a componenti lagrangiane delle forze della forma

$$Q_h = Q_h(\boldsymbol{q}, t)\,.$$

Questo però garantisce l'esistenza del potenziale lagrangiano solo se $\ell = 1$.
II: b
Dalla teoria; il potenziale lagrangiano non esiste in tutti i casi.
III: b
Le equazioni di Lagrange si possono normalizzare nella forma

$$\ddot{q}_h = G_h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\,, \qquad h = 1 \ldots, \ell\,,$$

dunque $\ddot{\boldsymbol{q}}$ *deve apparire. Però può non apparire* $\boldsymbol{q}$*: si pensi al caso di un punto vincolato a una retta di versore* $\boldsymbol{u}$*, soggetto alla forza costante* $\boldsymbol{F}$*. L'equazione di Lagrange è*

$$m\ddot{q}_1 = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}\,,$$

ove q_1 *rappresenta l'ascissa sulla retta.*

Prova scritta del 05/07/2024

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 05/07/2024

I.1 Si consideri il moto unidimensionale di equazione

$$m\ddot{x} = f(x) = U'(x)\,,$$

con $U \in C^2(\boldsymbol{R})$.
01 Se $U'(0) = 0$, allora in $x = 0$ si possono definire le piccole oscillazioni sotto la seguente ipotesi:
a $U''(0) > 0$.
b I vincoli sono fissi.
c Nessuna delle altre.
02 Se esiste un punto x_0 di massimo isolato per U, allora nel piano delle fasi
a Esistono orbite limitate, diverse da quelle degeneri relative a punti di equilibrio.
b Esistono orbite illimitate.
c Nessuna delle altre.
03 Sia

$$U(x) = \frac{x^2}{1+x^2}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Allora il numero di orbite nel piano delle fasi corrispondenti al livello energetico $E = 0$ è
a 3.
b 5.
c Nessuna delle altre.
Soluzione
I: c
Infatti la a impone che U abbia un minimo isolato in 0, mentre deve avere un massimo; la b non è da sola sufficiente in genere e in questo caso è superflua, dato che conosciamo esplicitamente l'equazione di moto. La condizione corretta è $U''(0) < 0$.
II: a
Infatti esistono le orbite che rimangono vicine al punto di equilibrio stabile $(x_0,0)$. In genere non esistono orbite illimitate, basta considerare il potenziale elastico $U(x) = -x^2$.
III: b
Infatti esistono 4 orbite non degeneri, una per ciascun quadrante nel piano delle fasi, e quella del punto (0,0) stesso. Si noti che $x = 0$ è un punto di minimo isolato per U e quindi di equilibrio instabile.

I.2 Un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie S di equazione

$$x_3 = x_1^4 + x_2^2\,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2\,,$$

con vincolo scabro secondo la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico, con coefficiente di attrito $\mu_s > 0$.
04 La forza applicata a $\boldsymbol{X}$ è $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{e}_3$, $\alpha > 0$ costante. Allora l'insieme delle posizioni di equilibrio
a È vuoto.
b È limitato, ma non vuoto.
c Nessuna delle altre.

05 La forza applicata a $\boldsymbol{X}$ è $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{e}_1$, $\alpha > 0$ costante. Allora l'insieme delle posizioni di equilibrio
a È limitato ma non vuoto.
b È illimitato.
c Nessuna delle altre.
06 La forza applicata a $\boldsymbol{X}$ è $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{e}_2$, $\alpha > 0$ costante. Allora il punto (1,1,2) è di equilibrio
a Se $\mu_s > 0$ è abbastanza grande.
b Se $\alpha > 0$ è abbastanza piccolo.
c Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: b
Ricordiamo che

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{(4x_1^3, 2x_2, -1)}{\sqrt{1 + 16x_1^6 + 4x_2^2}} .$$

La condizione $|\boldsymbol{F}^{\tan}| \le \mu_s |\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}|$ *equivale a*

$$|\boldsymbol{F}|^2 \le (1 + \mu_s^2)|\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}|^2 \quad \textit{perché} \quad |\boldsymbol{F}^{\tan}|^2 = |\boldsymbol{F}|^2 - |\boldsymbol{F}^{\mathrm{nor}}|^2 .$$

Dunque l'insieme delle posizioni di equilibrio è quello ove risulta soddisfatta la

$$|\boldsymbol{F}|^2 \le (1 + \mu_s^2)(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu})^2 .$$

Nel nostro caso questa disuguaglianza diviene

$$\alpha^2(1 + 16x_1^6 + 4x_2^2) \le \alpha^2(1 + \mu_s^2) ,$$

che immediatamente implica b.
II: b
Ragionando come sopra si ottiene per l'equilibrio la condizione

$$\alpha^2(1 + 16x_1^6 + 4x_2^2) \le \alpha^2(1 + \mu_s^2)16x_1^6 ,$$

ossia

$$1 + 4x_2^2 \le \mu_s^2 16x_1^6 ,$$

che è soddisfatta per esempio se

$$x_2 = 0 , \qquad x_1^6 \ge \frac{1}{16\mu_s^2} .$$

III: a
La condizione di equilibrio in genere è

$$\alpha^2(1 + 16x_1^6 + 4x_2^2) \le \alpha^2(1 + \mu_s^2)4x_2^2 .$$

Sostituendo i valori delle coordinate del punto dato si ottiene

$$21 \le 4(1 + \mu_s^2)$$

ossia $\mu_s \ge \sqrt{17}/2$.

I.3 Si consideri un sistema di punti materiali soggetti a vincoli olonomi regolari. Le coordinate lagrangiane sono $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \boldsymbol{R}^3$.
07 L'energia cinetica T^{L} può essere data da

$$T^{\text{L}} = \alpha \dot{q}_1^2 + \beta q_2^2 \dot{q}_2^2 + \gamma \dot{q}_3^2 \,,$$

con α, β, $\gamma > 0$ costanti?
a No.
b Solo se i vincoli sono fissi.
c Nessuna delle altre.
08 L'energia cinetica T^{L} può essere data da

$$T^{\text{L}} = \alpha \dot{q}_1^2 + \beta \dot{q}_2^2 + \gamma e^{\delta q_2} \dot{q}_3^2 \,,$$

con α, β, $\gamma > 0$ e $\delta \in \boldsymbol{R}$ costanti?
a Solo se $\delta > 0$.
b Solo se vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
c Nessuna delle altre.
09 Se il potenziale lagrangiano esiste e la lagrangiana è, per assegnate costanti α, β, γ, $\delta > 0$:

$$\mathcal{L} = \alpha \dot{q}_1^2 + \beta \dot{q}_2^2 + \gamma \dot{q}_3^2 + e^{\delta t} q_1 \,,$$

allora, assumendo l'ipotesi dei lavori virtuali:
a La funzione

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)$$

si mantiene costante lungo i moti.
b $Q_1(\boldsymbol{q}, t) = 0$.
c Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: a
Infatti se $q_2 = 0$ la forma non è definita positiva.
II: c
La forma è comunque definita positiva, quindi la risposta è sì. L'ipotesi dei lavori virtuali non ha niente a che vedere con la domanda.
III: a
Infatti per le equazioni di Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\Big] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 0 \,.$$

I.4 Un corpo rigido non degenere C si muove liberamente soggetto a forze che soddisfano le usuali condizioni di regolarità.
Si denota il moto del centro di massa G con $\boldsymbol{X}_G = (x_{1G}, x_{2G}, x_{3G})$.
10 Le equazioni globali della dinamica determinano il moto del corpo:

a Per arbitrarie condizioni iniziali.
b Solo per particolari condizioni iniziali.
c Nessuna delle altre.

11 Supponiamo che la risultante delle forze esterne $\boldsymbol{F}^{\text{ext}}$ sia tale che

$$\boldsymbol{F}^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0\,, \qquad \text{sempre.}$$

Allora
a La componente $x_{1G}(t)$ del moto del centro di massa è un polinomio di primo grado in t.
b La componente $x_{2G}(t)$ del moto del centro di massa è un polinomio di primo grado in t.
c Nessuna delle altre.

12 Supponiamo che il momento delle forze esterne rispetto al centro di massa soddisfi

$$\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = 0\,, \qquad \text{sempre.}$$

Allora:
a L'energia cinetica del corpo rimane costante.
b La velocità angolare del corpo rimane costante.
c Nessuna delle altre.

SOLUZIONE
I: a
Dalla teoria.
II: a
Infatti dalla prima equazione globale si ha

$$m\ddot{x}_{1G} = m\boldsymbol{a}_G \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{F}^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0\,.$$

III: c
La a non vale perché per esempio se il corpo si muove soggetto solo alla forza peso e $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$, allora $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$ per ogni t dalla seconda equazione globale e

$$T = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2$$

che non è costante. La b non vale perché se per esempio $\boldsymbol{F}^{\text{ext}} = 0$, $\boldsymbol{v}_G(0) = 0$, allora G resta fermo e siamo nel caso del moto polare per inerzia, in cui non sempre $\boldsymbol{\omega}$ resta costante.

I.5 C è un corpo rigido non degenere.
Si denota il moto del centro di massa G con $\boldsymbol{X}_G = (x_{1G}, x_{2G}, x_{3G})$.

13 Sia C un cubo solido omogeneo. Allora:
a Esistono punti $P \neq G$ dello spazio ove i momenti principali di inerzia sono tutti diversi tra di loro, ma questi punti sono solo in numero finito.
b In ogni punto $P \neq G$ dello spazio due momenti principali di inerzia sono uguali tra di loro.
c Nessuna delle altre.

14 Sia C un disco (lamina a forma di cerchio). Allora:
a In qualunque punto di C la normale al piano di C è principale.
b Per opportuni valori del raggio di C, tutti i momenti principali in G sono uguali tra di loro.
c Nessuna delle altre.
15 C è l'unione di due sfere solide e omogenee C_1 e C_2, di raggio e massa diversi, tangenti ed esterne l'una all'altra (come due bilie che si toccano).
a Il centro di massa di C non appartiene a C.
b La matrice di inerzia di C in qualunque punto P solidale è la somma (componente per componente) delle due matrici di inerzia in P di C_1 e C_2.
c Nessuna delle altre.
Soluzione
I: b
Poiché in G ogni terna è principale, con tutti i momenti uguali, fissato $P \neq G$ consideriamo la terna principale centrale con $\boldsymbol{u}_1 = \overrightarrow{GP}/|\overrightarrow{GP}|$ e $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ arbitrari. Allora come noto dalla teoria $(\boldsymbol{u}_h)$ è principale anche in P e

$$I^P_{22} = I^P_{33} = I^G_{22} + m|\overrightarrow{GP}|^2 \,.$$

II: a
Dalla teoria, perché il piano di C è di simmetria materiale ortogonale. La b non vale, perché ancora dalla teoria il momento relativo all'asse ortogonale al piano di C è la somma degli altri due.
III: b
La a non vale, perché per le proprietà del centro di massa i centri di massa di C_1 e C_2 sono i loro centri geometrici, e il centro di massa di C è dato da

$$\boldsymbol{X}_G = \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{X}_{G,1} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{X}_{G,2}\,,$$

che appartiene quindi al segmento che unisce i due centri e che è contenuto in C (essendo dato dall'unione di due raggi).
La b vale perché per la loro definizione i momenti di inerzia e deviatori sono additivi.

Prova scritta del 06/09/2024

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 06/09/2024

I.1 Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia di polo O.

01 L'ellissoide d'inerzia mobile di C in O
a Rotola senza strisciare su un piano ortogonale a $\boldsymbol{\omega}$.
b È di fatto immobile nel sistema di riferimento fisso, per gli integrali primi del moto.
c Nessuna delle altre.
02 Sapendo $|\boldsymbol{\omega}(0)|$ è possibile dare una stima

$$c_1|\boldsymbol{\omega}(0)| \le |\boldsymbol{\omega}(t)| \le c_2|\boldsymbol{\omega}(0)|\,, \quad \text{per ogni } t.$$

a Sì, con c_1 e $c_2 > 0$ dipendenti solo dalla geometria delle masse del rigido.
b No, $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ può divenire illimitato.
c Nessuna delle altre.
03 Se il moto è una rotazione allora
a La rotazione è uniforme.
b La rotazione può non essere uniforme, ma solo se il suo asse è principale d'inerzia corrispondente al momento d'inerzia di valore intermedio.
c Nessuna delle altre.
Soluzione
I: c
L'ellissoide nei moti polari per inerzia rotola senza strisciare su un piano fisso perpendicolare a $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$. Ovviamente non è fisso, a meno che il moto sia la quiete.
II: a
Infatti per l'integrale primo

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(t) = T(0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}(0)\cdot\boldsymbol{\omega}(0)\,.$$

Ma la forma quadratica $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$ è definita positiva, per cui se λ_1 [rispettivamente λ_2 ne denota il minimo [rispettivamente il massimo] autovalore, si ha

$$\lambda_1|\boldsymbol{\omega}(t)|^2 \le \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}(0)\cdot\boldsymbol{\omega}(0) \le \lambda_2|\boldsymbol{\omega}(0)|^2\,,$$
$$\lambda_2|\boldsymbol{\omega}(t)|^2 \ge \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}(0)\cdot\boldsymbol{\omega}(0) \ge \lambda_1|\boldsymbol{\omega}(0)|^2\,.$$

III: a
Nei moti polari per inerzia le uniche rotazioni sono quelle che hanno per asse un asse principale d'inerzia, e sono uniformi.

I.2 Sia C un corpo rigido non degenere, sottoposto a una distribuzione di forze soggetta alle usuali ipotesi di regolarità.
Si scelgano come coordinate le 3 coordinate cartesiane (x_{1G}, x_{2G}, x_{3G}) del centro di massa e i 3 angoli di Eulero (θ, ϕ, ψ).
04 Le equazioni globali della dinamica sono in genere
a Un sistema 6×6 di equazioni differenziali del secondo ordine completamente accoppiato.
b Due sistemi 3×3 di equazioni differenziali del secondo ordine disaccoppiati l'uno dall'altro.
c Nessuna delle altre.

05 Volendo conoscere solo il moto del centro di massa, date le condizioni iniziali,
a La prima equazione globale è sufficiente.
b Occorrono entrambe le equazioni
c Nessuna delle altre.
06 Una scelta del sistema degli angoli di Eulero copre tutte le possibili posizioni del rigido?
a No, ne lascia fuori infinite.
b Sì.
c Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: a
Infatti in genere le forze dipendono dalle posizioni di tutti i punti del corpo, per esempio, e quindi dipendono da tutte le coordinate.
II: b
La motivazione è la stessa che per la domanda precedente.
III: a
Per esempio lascia fuori tutte quelle corrispondenti al caso in cui i due versori che individuano θ sono sovrapposti.

I.3 Sia $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \ldots, n$, un sistema di elementi materiali vincolati da vincoli olonomi regolari, con ℓ gradi di libertà. Denotiamo con $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_\ell) \in Q$ le coordinate lagrangiane.
07 L'energia cinetica lagrangiana può dipendere esplicitamente dal tempo?
a No, se le forze direttamente applicate sono conservative.
b No, se i vincoli sono fissi.
c Nessuna delle altre.
08 Quale delle seguenti può essere la rappresentazione lagrangiana della velocità di $\boldsymbol{X}_1$?
a $\boldsymbol{v}_1^{\text{L}} = (\dot{q}_1 + at)\boldsymbol{e}_1$, $a > 0$ costante.
b $\boldsymbol{v}_1^{\text{L}} = q_1 \dot{q}_1^2 \boldsymbol{e}_1$.
c Nessuna delle altre.
09 Se si assume l'ipotesi dei lavori virtuali
a Sicuramente si può scrivere la funzione lagrangiana del sistema.
b Sicuramente si conserva l'energia meccanica.
c Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: b
La natura delle forze non cambia l'energia cinetica che è una quantità cinematica. Invece vale la b, perché in questo caso la parametrizzazione lagrangiana viene scelta indipendente da t.
II: a
La a è nella classica forma predetta dalla teoria. La b è impossibile, perché non è lineare in $\dot{\boldsymbol{q}}$.
III: c
La conservazione dell'energia è legata alla natura conservativa delle forze; la lagran-

giana si può scrivere solo se le componenti lagrangiane delle forze sono conservative in senso lagrangiano.

I.4 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$ con $k(s) > 0$. Indichiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca della curva, con $\boldsymbol{F}$ la forza direttamente applicata e con $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ la reazione vincolare.
10 Il vincolo sia scabro e sul punto agisca forza direttamente applicata nulla.
a In genere l'accelerazione all'istante iniziale dipende dal coefficiente d'attrito.
b Il moto deve essere di quiete.
c Nessuna delle altre.
11 Il vincolo sia scabro. Allora
a La componente tangente della reazione vincolare all'istante iniziale è indipendente dal coefficiente d'attrito.
b La componente binormale della reazione vincolare all'istante iniziale è indipendente dal coefficiente d'attrito.
c Nessuna delle altre.
12 Il vincolo sia liscio e la forza direttamente applicata sia nulla. Si assuma $\dot{s}(t_0) \neq 0$. Allora
a $\dot{s}(t) = \dot{s}(t_0)$ per ogni t.
b La reazione vincolare è nulla.
c Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: a
Infatti l'accelerazione dipende da $\ddot{s}(0)$ *che a sua volta dipende dal coefficiente d'attrito attraverso* $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}$.
II: b
Infatti si ha in questo caso

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B} = 0\,.$$

III: a
Infatti dalle equazioni di moto $m\ddot{s}(t) = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} = 0$. *Quindi* $\dot{s}$ *si mantiene costante, ma* $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} = mk\dot{s}^2 \neq 0$.

I.5 Si considerino le due terne mobili $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, & \boldsymbol{w}_1 &= \boldsymbol{u}_1\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, & \boldsymbol{w}_2 &= \cos\theta \boldsymbol{u}_2 + \sin\theta \boldsymbol{u}_3\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{w}_3 &= -\sin\theta \boldsymbol{u}_2 + \cos\theta \boldsymbol{u}_3\,, \end{aligned}$$

con φ, θ opportune funzioni C^∞ del tempo. Indichiamo con $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$ la terna fissa.
13 Vale
a $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} = \dot{\theta}\boldsymbol{w}_1$.

b $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} = \dot\theta \boldsymbol{w}_1 + \dot\varphi(\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 - \sin\varphi \boldsymbol{u}_2)$.
c Nessuna delle altre.
14 Vale
a $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \dot\theta \boldsymbol{w}_1 + \dot\varphi(\sin\theta \boldsymbol{w}_2 + \cos\theta \boldsymbol{w}_3)$.
b $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \dot\varphi \boldsymbol{w}_1$.
c Nessuna delle altre.
15 Supponiamo che $\theta(t) = \alpha t + \theta_0$ con $\alpha > 0$ e $\theta_0 \in \boldsymbol{R}$ costanti. Allora
a Il moto di $\mathcal{N}$ rispetto a $\mathcal{M}$ è una rotazione uniforme.
b Il moto di $\mathcal{N}$ rispetto a $\mathcal{P}$ è una rotazione.
c Nessuna delle altre.
Soluzione
I: a
Infatti il moto di $\mathcal{N}$ rispetto a $\mathcal{M}$ è una rotazione di asse $\boldsymbol{w}_1$ e

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} \cdot \boldsymbol{w}_1 = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_2}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} \cdot \boldsymbol{w}_3 = \dot\theta\,.$$

II: a
Infatti ragionando come nella risposta precedente e componendo le due rotazioni si ottiene

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} = \dot\varphi \boldsymbol{u}_3 + \dot\theta \boldsymbol{w}_1 = \dot\theta \boldsymbol{w}_1 + \dot\varphi(\sin\theta \boldsymbol{w}_2 + \cos\theta \boldsymbol{w}_3)\,.$$

III: a
Infatti si ha che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}}$ è costante (in $\mathcal{M}$). La b non vale perché non si sa niente del moto di $\mathcal{M}$ rispetto a $\mathcal{P}$.

Prova scritta del 24/01/2025

Modelli Matematici per la Meccanica
Ing. Aerospaziale

Prova scritta del 24/01/2025

I.1 Si consideri il sistema dinamico non lineare

$$\begin{aligned}\dot x &= x(\alpha + y^2) - 4y,\\ \dot y &= y(\alpha - x^2) - y^3 + 4x.\end{aligned}$$

e si risponda alle seguenti domande.
01 Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Per $\alpha = 0$ l'origine è un centro (quindi l'equilibrio è stabile).
b Per $\alpha = 0$ l'origine è un fuoco repulsivo (quindi l'equilibrio è instabile).

c Per $\alpha = 0$ l'origine è un nodo repulsivo (quindi l'equilibrio è instabile).
d Nessuna delle altre.
02 Se il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine ha condizioni iniziali $x(0) = -y(0) = R$ allora
a $x^2(t) + y^2(t) = 2R^2$ è un integrale primo del moto.
b $x(t) = Re^t + 2Re^{-2t}$, $y(t) = Re^{-t} - 2Re^{-2t}$ è soluzione.
c La soluzione soddisfa $x(t) = -y(t)$.
d Nessuna delle altre.
03 L'integrale generale del sistema linearizzato nell'intorno dell'origine è
a $x(t) = e^{\alpha t}\big(c_1\cos(4t) + c_2\sin(4t)\big)$, $y(t) = e^{\alpha t}\big(c_1\sin(4t) - c_2\cos(4t)\big)$.
b $x(t) = e^{\alpha t}\big(c_1\sin(4t) + c_2\cos(4t)\big)$, $y(t) = e^{\alpha t}\big(c_1\sin(4t) + c_2\cos(4t)\big)$.
c

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\big(\cos((\alpha-4)t) + \sin((\alpha-4)t)\big) + c_2\big(\sin((\alpha+4)t) + \cos((\alpha+4)t)\big) \\ -c_1\big(\cos((\alpha+4)t) + \sin((\alpha+4)t)\big) - c_2\big(\sin((\alpha-4)t) + \cos((\alpha-4)t)\big) \end{pmatrix}.$$

d Nessuna delle altre.
04 La matrice esponenziale per il sistema linearizzato nell'origine è
a

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos(4t) & -e^{\alpha t}\sin(4t) \\ e^{\alpha t}\sin(4t) & e^{\alpha t}\cos(4t) \end{pmatrix}.$$

b

$$\begin{pmatrix} e^{-\alpha t}\cos(4t) & -e^{-\alpha t}\sin(4t) \\ e^{-\alpha t}\sin(4t) & e^{-\alpha t}\cos(4t) \end{pmatrix}.$$

c

$$\begin{pmatrix} \cos((\alpha+4)t) & \sin((\alpha-4)t) \\ -\sin((\alpha-4)t) & \cos((\alpha+4)t) \end{pmatrix}.$$

d Nessuna delle altre.
05 Si consideri l'equazione differenziale

$$\dot{y} = -y^3\,.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera per questa equazione?
a Il tempo di percorrenza $\Delta\tau$ tra $y = 2$ ed $y = 1$ è $\Delta\tau = 3/8$.
b Tutte le soluzioni cambiano di segno almeno una volta.
c Il tempo di percorrenza $\Delta\tau$ tra $y = -2$ ed $y = 0$ soddisfa $\Delta\tau < 3/8$.
d Nessuna delle altre.
Soluzione
I: a
Il sistema dinamico è

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\alpha + y^2) - 4y \equiv f_x(x,y), \\ \dot{y} &= y(\alpha - x^2) - y^3 + 4x \equiv f_y(x,y), \end{aligned}$$

e l'origine $P_1 := \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{pmatrix}$ *è punto fisso.*

La matrice del linearizzato è

$$A = \begin{pmatrix} \partial_x f_x(x,y) = \alpha + y^2 & \partial_y f_x(x,y) = 2xy - 4 \\ \partial_x f_y(x,y) = -2xy + 4 & \partial_y f_y(x,y) = (\alpha - x^2) - 3y^2 \end{pmatrix}$$

che calcolata in P_1 diventa la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & -4 \\ +4 & \alpha \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori di A_1 sono $\lambda_1 = \alpha + i4$ e $\lambda_2 = \alpha - i4$ e il sistema linearizzato nell'origine, per $\alpha \neq 0$ può essere studiato dal teorema di stabilità lineare. In particolare risulta i) per $\alpha > 0$ l'origine è un fuoco repulsivo; ii) per $\alpha < 0$ l'origine è un fuoco attrattivo.
Il sistema dinamico, descritto dalla matrice A_1, si legge

$$\dot{x} \sim \alpha x - 4y, \tag{1}$$
$$\dot{y} \sim 4x + \alpha y. \tag{2}$$

Quindi dalla teoria segue che per $\alpha = 0$ l'origine è un centro.
II: d
Gli autovettori di A_1 associati ai due autovalori sono

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

associato a λ_1, e

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

associato a λ_2.
Per scrivere l'integrale generale del linearizzato in P_1 usiamo parte reale e parte immaginaria di $\vec{U}$ e quindi

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\alpha t} \left(\cos(4t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(4t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + c_2 e^{\alpha t} \left(\sin(4t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(4t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) ,$$

che scritto esplicitamente risulta essere

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(4t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(4t),$$
$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \sin(4t) - c_2 e^{\alpha t} \cos(4t).$$

Il problema di Cauchy definito da $x(0) = -y(0) = R$ impone $c_1 = c_2 = R$ da cui

$$x^2(t) + y^2(t) = 2R^2 e^{2\alpha t} ,$$

e quindi solo per $\alpha = 0$ si ottiene l'integrale primo del moto dato in a.
III: a
Vedi la soluzione di II.
IV: a
Per scrivere la matrice esponenziale del linearizzato in P_1 intanto introduciamo le matrici Γ e Γ^{-1} per il cambiamento di base:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +i & -i \end{pmatrix} , \qquad \Gamma^{-1} = \frac{-1}{2i} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & +1 \end{pmatrix} .$$

Possiamo quindi scrivere

$$\Gamma^{-1}A_1\Gamma = \frac{-1}{2i}\begin{pmatrix}-i & -1\\ -i & +1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & -4\\ +4 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +i & -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha-4i & 0\\ 0 & \alpha+4i\end{pmatrix}.$$

Quindi

$$e^{t\Gamma^{-1}A_1\Gamma} = \begin{pmatrix}e^{(\alpha-i4)t} & 0\\ 0 & e^{(\alpha+i4)t}\end{pmatrix}.$$

Calcolando infine e^{tA_1} *come* $\Gamma e^{t\Gamma^{-1}A_1\Gamma}\Gamma^{-1}$ *si ottiene*

$$e^{tA_1} = \frac{-1}{2i}\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{(\alpha-i4)t} & 0\\ 0 & e^{(\alpha+i4)t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & -1\\ -i & +1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\alpha t}\cos(4t) & -e^{\alpha t}\sin(4t)\\ e^{\alpha t}\sin(4t) & e^{\alpha t}\cos(4t)\end{pmatrix}.$$

V: a
Integrando per parti si ha

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{2y^2}\Big|_2^1 = \int_2^1 \frac{dy}{-y^3} = \Delta\tau\,.$$

Il tempo di percorrenza tra -2 *e* 0 *è infinito, perché* 0 *è un punto di equilibrio. Nessuna soluzione può cambiare di segno, per lo stesso motivo e per il teorema di unicità.*
Extra: Completiamo lo studio della stabilità in P_1*, nel caso* $\alpha = 0$ *in cui gli autovalori hanno parte reale nulla e dobbiamo ricorrere al teorema di stabilità di Liapunov. Una possibile scelta per una funzione di Liapunov è*

$$W = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\,.$$

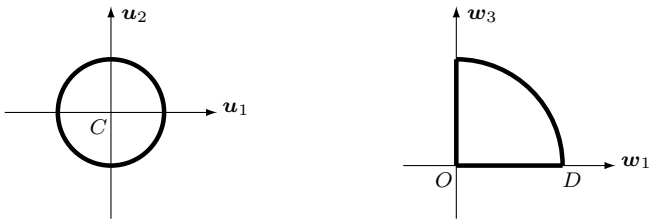
Infatti W *è nulla in* P_1*, positiva in un suo intorno e, siccome* $\partial_x W = x$ *e* $\partial_y W = y$ *risulta*

$$\dot{W} = x\dot{x} + y\dot{y} = \alpha(x^2+y^2) - y^4 \le 0\,,$$

per $\alpha \le 0$*. Poiché* W *è strettamente decrescente lungo le soluzioni diverse dall'equilibrio* P_1*, l'equilibrio è asintoticamente stabile anche per* $\alpha = 0$*. Si noti che il termine* $-y^4$ *in* $\dot{W}$ *non sarebbe presente per il sistema linearizzato, ma anche senza quel termine comunque per* $\alpha = 0$ *si avrebbe* $\dot{W} = 0$ *e quindi l'equilibrio nell'origine rimarrebbe stabile.*

I.2

Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un disco omogeneo H di centro C, massa $M > 0$ e raggio $R > 0$ e da una lamina omogenea K a forma di settore circolare di centro O, massa M, raggio R e angolo al centro $\pi/2$. In figura il sistema di riferimento $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_C, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al disco mentre il sistema di riferimento $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{w}_h))$ è solidale alla lamina K. Il punto D è tale che $\overrightarrow{OD} = R\boldsymbol{w}_1$.



Il riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 2 verticale ascendente. Il disco H è vincolato a muoversi nel piano fisso 1–2 rotolando senza strisciare sull'asse 1. La lamina K è vincolata a muoversi nel piano fisso 1–3 mantenendo l'asse solidale 2 costantemente sovrapposto all'omologo asse fisso 2 e il punto solidale O nell'origine del sistema di riferimento fisso.
La sollecitazione attiva agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica di costante $k > 0$ che si scambiano i punti D e C.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-3\pi/4{,}5\pi/4)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_C^{\text{L}}(q) = q\boldsymbol{e}_1 + R\boldsymbol{e}_2$$

e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos\varphi\boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi\boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= \sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Ovvero q è la coordinata 1 relativa al riferimento fisso del punto di contatto tra disco e retta d'appoggio, mentre φ è l'anomalia associata all'angolo di primo lato l'asse 1 del riferimento fisso, secondo lato l'asse 1 del riferimento $\mathcal{S}_2$ e orientata in verso antiorario rispetto all'asse 2 fisso. Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento fisso.

06
Quali sono le coordinate del centro di massa della lamina K rispetto al riferimento solidale $\mathcal{S}_2$?
a

$$\Big(\frac{4}{3\pi}R, 0, \frac{4}{3\pi}R\Big)\,.$$

b

$$\Big(\frac{1}{2}R, 0, \frac{1}{2}R\Big)\,.$$

c

$$\Big(\frac{2}{3\pi}R, 0, \frac{1}{2}R\Big)\,.$$

d nessuna delle altre

07
Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11}^O e I_{22}^O della lamina K relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato $\mathcal{S}_2$?

a
$$I_{11}^O = \frac{1}{4}MR^2\,, \qquad I_{22}^O = \frac{1}{2}MR^2\,.$$
b
$$I_{11}^O = \frac{1}{16}MR^2\,, \qquad I_{22}^O = \frac{1}{8}MR^2\,.$$
c
$$I_{11}^O = \frac{1}{2}MR^2\,, \qquad I_{22}^O = \frac{1}{2}MR^2\,.$$
d nessuna delle altre

08

Quanto vale il prodotto d'inerzia della lamina K relativo agli assi 1 e 3 del riferimento solidale considerato?
a $I_{13}^O = -\frac{1}{2\pi}MR^2$
b $I_{13}^O = 0$
c $I_{13}^O = \frac{2}{3}MR^2$
d nessuna delle altre

09

Dove si trova il centro di istantanea rotazione del disco H?
a nessuna delle altre
b nel suo centro di massa.
c nell'origine del riferimento fisso.
d nel punto di coordinate $(0, R,0)$ rispetto al riferimento fisso.

10

Quanto vale l'energia cinetica del disco H?
a $\frac{3}{4}M\dot{q}^2$
b $\frac{3}{2}M\dot{q}^2$
c $\frac{3}{2}MR^2\dot{\varphi}^2$
d nessuna delle altre

11

Si scrivano le equazioni di Lagrange del sistema.
a
$$\frac{3}{2}M\ddot{q} + kq - kR\cos\varphi = 0\,, \qquad \frac{1}{2}MR^2\ddot{\varphi} + kRq\sin\varphi = 0\,.$$
b
$$\frac{1}{2}M\ddot{q} + kq - kR\cos\varphi = 0\,, \qquad \frac{4}{3}MR^2\ddot{\varphi} + kRq\cos\varphi = 0\,.$$
c
$$\frac{3}{4}MR^2\ddot{\varphi} + kq - kR\cos\varphi = 0\,, \qquad \frac{1}{8}MR^2\ddot{q} + kRq\sin\varphi = 0\,.$$
d nessuna delle altre

12

Quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?
a nessuna delle altre

b A seconda del valore dei parametri M, R e k possono essere due o quattro.
c Due, qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Tre, qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

13

Si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = 0$ e $\varphi = \pi/2$.
a È di equilibrio instabile.
b Non è di equilibrio.
c È di equilibrio stabile.
d nessuna della altre

14

Determinare le frequenze normali di oscillazione $\omega_h/(2\pi)$ relative alla configurazione $q = R$ e $\varphi = 0$.
a $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{M}}$
b $\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{2M}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2M}}$
c $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$
d nessuna delle altre

15

Determinare il momento totale di polo O della sollecitazione vincolare agente sulla lamina K all'istante $t = 0$, in cui il sistema viene posto con atto di moto nullo nella configurazione di equilibrio $q = R$ e $\varphi = 0$.
a $-\frac{4}{3\pi}MgR\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{4}{3\pi}MgR - kR^2\right)\boldsymbol{e}_3$
b 0
c $-\frac{1}{4}MgR\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{3}{4}MgR - kR^2\right)\boldsymbol{e}_3$
d nessuna delle altre

SOLUZIONE

I: a

Denotiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate in $\mathcal{S}_2$. Per motivi di simmetria, $\lambda_{1G_K} = \lambda_{3G_K}$, $\lambda_{2G_K} = 0$. Quindi calcoliamo

$$\lambda_{1G_K} = \frac{1}{M}\iint_K \lambda_1 \frac{4M}{\pi R^2}\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_3 = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R r\cos\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{4}{\pi R^2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi}\,.$$

II: a

È noto che, per motivi di simmetria, $I^O_{22} = 2I^O_{11}$. Calcoliamo

$$I^O_{22} = \iint_K (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\frac{4M}{\pi R^2}\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_3 = \frac{4M}{\pi R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R r^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}MR^2\,.$$

III: a

Per definizione

$$I_{13}^O = -\iint_K \lambda_1\lambda_3 \frac{4M}{\pi R^2}\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_3 = -\frac{4M}{\pi R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R r^2\cos\theta\sin\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$
$$= -\frac{4M}{\pi R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R\left[\frac{1}{2}(\sin\theta)^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2\pi}MR^2\,.$$

IV: a
Per definizione di moto senza strisciamento, il moto solidale con H che occupa il punto di contatto tra disco e asse 1 è istantaneamente fermo. Quindi quello è il centro di istantanea rotazione.
V: a
Usiamo il teorema di König:

$$T_H^{\text{L}} = \frac{M}{2}|\boldsymbol{v}_C|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_C\boldsymbol{\omega}_H\cdot\boldsymbol{\omega}_H\,.$$

Si ha subito

$$\boldsymbol{v}_C = \dot{q}\boldsymbol{e}_1\,.$$

Quanto a $\boldsymbol{\omega}_H$ la si determina subito imponendo il non strisciamento; se P è il punto di contatto tra H e asse 1:

$$0 = \boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{X}_P,t) = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega}_H\times(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_C)$$
$$= \dot{q}\boldsymbol{e}_1 + \omega_{H3}\boldsymbol{e}_3\times(-R\boldsymbol{e}_2) = (\dot{q}+\omega_{H3}R)\boldsymbol{e}_1\,.$$

Quindi

$$T_H^{\text{L}} = \frac{M}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}I_{33}^C\frac{\dot{q}^2}{R^2}\,.$$

Infine per il disco H, indicando con (y_h) le coordinate nel sistema $\mathcal{S}_1$,

$$I_{33}^C = \iint_H (y_1^2+y_2^2)\frac{M}{\pi R^2}\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \frac{MR^2}{2}\,.$$

VI: a
L'energia cinetica del disco è già stata calcolata. Quella della lamina è

$$T_K^{\text{L}} = \frac{1}{2}I_{22}^O\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}^2\,;$$

infatti $\boldsymbol{\omega}_K = \dot{\varphi}\boldsymbol{w}_2$. Il peso ha potenziale

$$U_{\text{peso}} = -Mgx_{2C} - Mgx_{2G_K} = -MgR\,,$$

che quindi è costante e può essere ignorato. Osserviamo poi che

$$\boldsymbol{X}_D^{\text{L}} = R(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi\boldsymbol{e}_3)\,,$$

per cui la forza elastica ha potenziale lagrangiano

$$U_{\text{el}}^{\text{L}} = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_D^{\text{L}} - \boldsymbol{X}_C^{\text{L}}|^2 = -\frac{k}{2}[(R\cos\varphi - q)^2 + R^2 + (-R\sin\varphi)^2]$$
$$= -\frac{k}{2}[2R^2 + q^2 - 2Rq\cos\varphi]\,.$$

Quindi la lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}M\dot{q}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 - \frac{k}{2}[q^2 - 2Rq\cos\varphi]\,.$$

Segue la risposta a.
VII: a
Le configurazioni di equilibrio sono date dal sistema del gradiente per il potenziale lagrangiano:

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial q} = -kq + kR\cos\varphi = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} = -kRq\sin\varphi = 0\,.$$

La II equazione dà: i) $q = 0$ o ii) $\varphi \in \{0, \pi\}$. Nel caso i) la I equazione dà $\varphi \in \{-\pi/2, \pi/2\}$. Nel caso ii) la I equazione dà q in funzione di φ. Si sono ottenuti quindi i punti di equilibrio (q, φ)

$$\left(0, -\frac{\pi}{2}\right), \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (R, 0)\,, \quad (-R, \pi)\,.$$

VIII: a
Il punto è di equilibrio. Calcoliamo l'hessiana del potenziale lagrangiano:

$$D^2U^{\text{L}}(q,\varphi) = \begin{pmatrix} -k & -kR\sin\varphi \\ -kR\sin\varphi & -kRq\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$D^2U^{\text{L}}(0,\pi/2) = \begin{pmatrix} -k & -kR \\ -kR & 0 \end{pmatrix},$$

che è indefinita. Il punto quindi è di equilibrio instabile e vale a.
IX: a
Calcoliamo l'hessiana del potenziale lagrangiano:

$$D^2U^{\text{L}}(R,0) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -kR^2 \end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice dell'energia cinetica (trovata sopra) in $(R,0)$ *è*

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}M & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{pmatrix},$$

le ω_i sono date come soluzioni di

$$\det\begin{pmatrix} \frac{3}{2}M\omega^2 - k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}MR^2\omega^2 - kR^2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

e quindi vale a.
X: a
Come è noto vale per la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(q,\varphi,\dot{q},\dot{\varphi}) + \boldsymbol{M}_{\text{vin}}^O(t)\,,$$

distinguendo tra i momenti delle forze direttamente applicate e di quelle vincolari. Calcoliamo

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma\omega}_K = I^O_{22}\dot\varphi \boldsymbol{w}_2(\varphi) = I^O_{22}\dot\varphi \boldsymbol{e}_2\,.$$

Quindi

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = I^O_{22}\ddot\varphi \boldsymbol{e}_2\,.$$

D'altronde con le condizioni iniziali assegnate, grazie all'equazione di Lagrange per φ*,*

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot\varphi(0) = -kRq(0)\sin\varphi(0) = 0\,.$$

Perciò all'istante $t = 0$*, poiché* $q(0) = R$*,* $\varphi(0) = 0$*,* $\dot q(0) = 0$*,* $\dot\varphi(0) = 0$*, si ha*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}^O_{\text{vin}}(0) &= -\boldsymbol{M}^{\text{ext}}_O(R,0,0,0)\\
&= -\{\boldsymbol{X}^{\text{L}}_{G_K}(0)\times(-Mg\boldsymbol{e}_2) + \boldsymbol{X}^{\text{L}}_D(0)\times[-k(\boldsymbol{X}^{\text{L}}_D(0) - \boldsymbol{X}^{\text{L}}_C(R))]\}\\
&= Mg\lambda_{1G_K}(\boldsymbol{w}_1(0) + \boldsymbol{w}_3(0))\times\boldsymbol{e}_2 - kR^2\boldsymbol{w}_1(0)\times(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\\
&= Mg\lambda_{1G_K}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3)\times\boldsymbol{e}_2 - kR^2\boldsymbol{e}_1\times(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\\
&= -Mg\lambda_{1G_K}\boldsymbol{e}_1 + Mg\lambda_{1G_K}\boldsymbol{e}_3 - kR^2\boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Sostituendo il valore di λ_{1G_K} *trovato sopra si ha la a.*

Prova scritta del 18/02/2025

Modelli Matematici per la Meccanica
Ing. Aerospaziale

Prova scritta del 18/02/2025

I.1 Si consideri il sistema dinamico non lineare

$$\begin{aligned}
\dot x &= \alpha x + y\,,\\
\dot y &= -x + \frac{1}{6}x^4\,,
\end{aligned}$$

e si risponda alle seguenti domande:

01

Sia $\alpha = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a L'origine è un punto di equilibrio stabile.

b L'origine è un punto di equilibrio instabile.

c L'origine non è un punto di equilibrio.

d Nessuna delle altre.

02

Sia $\alpha = 0$. Un integrale primo del sistema dinamico è
a $W(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{30}x^5$.
b $W(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4$.
c $W(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}y^5$.
d Nessuna delle altre.

03

Sia $\alpha = 0$. Per qualunque dato di Cauchy $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, con $x_0 \in (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ e $y_0 \in (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$, allora
a L'orbita è chiusa.
b Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty\,.$$

c Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} (x(t), y(t)) = (0,0)\,.$$

d Nessuna delle altre.

04

Sia $\alpha = 2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera per il sistema linearizzato nell'origine?
a L'origine è un nodo repulsivo (quindi l'equilibrio è instabile).
b L'origine è un fuoco repulsivo (quindi l'equilibrio è instabile).
c L'origine è un centro (quindi l'equilibrio è stabile).
d Nessuna delle altre.

05

Sia $\alpha = 2$. La soluzione del sistema linearizzato nell'origine, con condizione di Cauchy $x_0 := x(t=0) = 2$ e $y_0 := y(t=0) = -1$, si legge
a $x(t) = e^t(2+t)$, $y(t) = -e^t(1+t)$.
b $x(t) = e^t + e^t(t^2+t^3)$, $y(t) = e^t(t+1)$.
c $x(t) = 2\sin(t) - \cos(t+1)$, $y(t) = -\cos(t+1) + 2\sin(t)$
d Nessuna delle altre.

Soluzione
I: a
Nel caso $\alpha = 0$ il sistema dinamico diventa

$$\dot{x} = y\,,$$
$$\dot{y} = -x + \frac{1}{6}x^4\,.$$

Perciò l'origine è evidentemente un punto di equilibrio. Si osserva che tale sistema dinamico corrisponde ad una EDO del II ordine, cioè

$$\ddot{x} + x - \frac{1}{6}x^4 = 0\,,$$

che descrive una massa unitaria puntiforme sottoposta alla forza $F(x) := -x + \frac{1}{6}x^4$. Si nota inoltre che, in un intorno dell'origine, tale sistema è sostanzialmente un oscillatore armonico.

La matrice del linearizzato nell'origine si legge

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

quindi il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ *che restituisce i due autovalori complessi e coniugati* $\lambda_{1,2} = \pm i$. *Il teorema di risposta lineare non si può quindi usare e serve ricorrere alla funzione di Liapunov.*
Candidiamo a funzione di Liapunov la funzione $W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{30}x^5$ *in un intorno dell'origine, per esempio nel dominio* $x \in (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$, $y \in (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$.
Infatti scopriamo che il sistema è conservativo (è un sistema dinamico monodimensionale sottoposto a forze posizionali) e quindi, scegliendo l'energia W *come funzione di Liapunov questa risulta essere una quantità conservata. Infatti*

$$\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial W}{\partial y}\dot{y} = -\dot{y}\dot{x} + \dot{x}\dot{y} = 0 ,$$

e, siccome inoltre $W(0{,}0) = 0$ *ed è positiva in un intorno di* $(0{,}0)$, *e.g., nel dominio* $x \in (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$, $y \in (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$, *allora l'origine è un punto di equilibrio stabile.*
II: a
Vedi la domanda precedente.
III: a
In particolare, possiamo riconoscere nell'energia un termine di energia cinetica $T(y) = \frac{1}{2}y^2$ *ed uno di energia potenziale* $V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{30}x^5$. *Guardando il grafico di* V *è anche immediato convenire che, se il livello energetico* E *del moto soddisfa* $0 < E < 1$, *le orbite sono chiuse: queste sono sostanzialmente vincolate dal contributo dell'oscillatore armonico essendo la presenza del termine non lineare una piccola perturbazione nell'intorno dell'origine. Ma, se* (x_0, y_0) *sono scelti come nel testo è immediato osservare*

$$\begin{aligned} 0 < x_0^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{240}\Big) < x_0^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{30}x_0^3\Big) \leq E = \frac{1}{2}y_0^2 + \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{30}x_0^5 \\ < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{960} < 1 . \end{aligned}$$

IV: a
Se $\alpha = 2$ *invece, il sistema dinamico diventa*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y =: f_1(x, y) , \\ \dot{y} &= -x + \frac{1}{6}x^4 =: f_2(x, y) . \end{aligned}$$

Per costruire il linearizzato nell'origine, che è soluzione a vista, calcolo $\partial_x f_1 = 2$, $\partial_y f_1 = 1$ *e* $\partial_x f_2 = -1 + \frac{2}{3}x^3$, $\partial_y f_2 = 0$, *da cui scrivo la matrice* $\mathbf{A}$ *del linearizzato in* $(x = 0, y = 0)$ *come*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Il polinomio caratteristico associato a questa matrice $P(\lambda)$ *si legge* $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ *che restituisce i due autovalori degeneri* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$: *l'equilibrio nell'origine è instabile poiché l'origine come punto di equilibrio è un nodo repulsivo.*

V: a
Vediamo come si arriva a determinare la soluzione. Procediamo all'identificazione dell'autovettore proprio $\vec{U}$ *mediante* $(A-I)\vec{U}=\vec{0}$ *cioè*

$$\begin{pmatrix}+1 & +1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_x\\ U_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Verificate le molteplicità algebrica (pari a 2) e geometrica (pari a 1) dell'autospazio associato all'autovettore $\vec{U}=(1,-1)^{\mathrm{t}}$*, procediamo a cercare un autovettore 2-generalizzato* $\vec{V}$ *risolvendo* $(A-I)\vec{V}=\vec{U}$ *da cui* $\vec{V}=(1{,}0)^{\mathrm{t}}$*. Pertanto l'integrale generale si scrive*

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}+1\\ -1\end{pmatrix}+C_2e^t\left[\begin{pmatrix}+1\\ -1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}+1\\ 0\end{pmatrix}\right].$$

Quindi separatamente

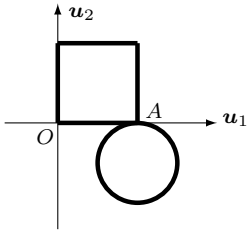
$$x(t)=C_1e^t+C_2te^t+C_2e^t\,,\qquad y(t)=-C_1e^t-C_2te^t\,.$$

Calcolate a $t=0$*, per* $x_0=2$ *ed* $y_0=-1$*, queste equazioni diventano*

$$+2=C_1+C_2\,,\qquad -1=-C_1\,,$$

da cui $C_1=1$ *e* $C_2=1$ *e quindi* $x(t)=e^t(2+t)$ *e* $y(t)=-e^t(1+t)$*.*

I.2
Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido omogeneo K di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X},M)$. Il corpo è stato ottenuto saldando, come illustrato in figura, una lamina quadrata omogenea Q di lato di lunghezza $2L$ a un disco omogeneo D di raggio L. Il riferimento $(\boldsymbol{X}_O,(\boldsymbol{u}_i))$ è solidale al corpo. Il punto di saldatura A e il centro C del disco sono tali che $\overrightarrow{OA}=2L\boldsymbol{u}_1$ e $\overrightarrow{OC}=2L\boldsymbol{u}_1-L\boldsymbol{u}_2$.



Il riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O,(\boldsymbol{e}_i))$ ha asse 2 verticale ascendente. Il corpo è vincolato a muoversi mantenendo l'asse solidale 2 costantemente coincidente con l'omologo asse fisso 2, e il punto solidale O coincidente con l'origine del sistema fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ si muove sull'asse 1 fisso.
La sollecitazione attiva agente sul sistema è costituita dal peso, dalla sollecitazione elastica di costante $k>0$ che si scambiano i punti A e $\boldsymbol{X}$ ossia

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{el},\boldsymbol{X}}=-k(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_A)=-\boldsymbol{F}_{\mathrm{el},A}\,,$$

e dalla forza costante $\boldsymbol{F}_{1,\boldsymbol{X}} = \lambda \boldsymbol{e}_1$, con $\lambda > 0$ costante, agente sull'elemento $\boldsymbol{X}$.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-\pi/2{,}3\pi/2)$ tali che $\boldsymbol{X}^{\text{L}}(q) = q\boldsymbol{e}_1$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_3 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1\,, \\ \boldsymbol{u}_1 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_2\,. \end{aligned}$$

Ovvero q è la coordinata 1 relativa al riferimento fisso del punto $\boldsymbol{X}$ e φ è l'anomalia associata all'angolo di primo lato l'asse 1 del riferimento fisso e secondo lato l'asse 1 del riferimento solidale.
Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento fisso.

06

Quali sono le coordinate del centro di massa G del corpo K rispetto al riferimento solidale $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_i))$?
a $\lambda_{1G} = \frac{4+2\pi}{4+\pi}L$, $\lambda_{2G} = \frac{4-\pi}{4+\pi}L$, $\lambda_{3G} = 0$
b $\lambda_{1G} = \frac{4\pi}{4+\pi}L$, $\lambda_{2G} = \frac{-4+\pi}{4+\pi}L$, $\lambda_{3G} = 0$
c $\lambda_{1G} = 2L$, $\lambda_{2G} = \frac{4-\pi}{4+\pi}L$, $\lambda_{3G} = 0$
d Nessuna delle altre.

07

Quanto valgono i momenti d'inerzia I_{11} e I_{22} del corpo K relativi agli assi 1 e 2 del riferimento solidale considerato?
a $I_{11} = \frac{1}{4+\pi}\left(\frac{16}{3} + \frac{5}{4}\pi\right)ML^2$, $I_{22} = \frac{1}{4+\pi}\left(\frac{16}{3} + \frac{17}{4}\pi\right)ML^2$.
b $I_{11} = \frac{1}{4-\pi}\left(\frac{7}{3} + \frac{3}{4}\pi\right)ML^2$, $I_{22} = \frac{1}{4-\pi}\left(\frac{7}{3} + \frac{9}{4}\pi\right)ML^2$.
c $I_{11} = \frac{1}{4+\pi}\left(\frac{7}{3} + \frac{3}{4}\pi\right)ML^2$, $I_{22} = \frac{1}{4+\pi}\left(\frac{7}{3} + \frac{9}{4}\pi\right)ML^2$.
d Nessuna delle altre.

08

Quanto vale il momento angolare $\boldsymbol{L}_O$ del corpo K?
a Nessuna delle altre.
b $\frac{1}{4+\pi}(-4+2\pi)ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{4+\pi}\left(\frac{16}{3} + \frac{17}{4}\pi\right)ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_3$.
c $\frac{1}{4+\pi}\left(\frac{7}{3} + \frac{9}{4}\pi\right)ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1$.
d $\frac{1}{4+\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\pi\right)ML^2\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2$.

09

Quanto vale l'energia cinetica del corpo?
a $\frac{1}{2}\frac{1}{4+\pi}\left(\frac{16}{3} + \frac{17}{4}\pi\right)ML^2\dot{\varphi}^2$.
b $\frac{1}{2}\frac{1}{4-\pi}\left(\frac{7}{3} + \frac{9}{4}\pi\right)ML^2\dot{\varphi}^2$.
c $\frac{1}{2}\frac{1}{4-\pi}\left(\frac{16}{3} + \frac{3}{4}\pi\right)ML^2\dot{\varphi}^2$.
d Nessuna delle altre.

10

Si scrivano le equazioni di Lagrange.
a $M\ddot{q} + kq - \lambda - 2kL\cos\varphi = 0$ e $\frac{1}{4+\pi}\left(\frac{16}{3} + \frac{17}{4}\pi\right)ML^2\ddot{\varphi} + 2kLq\sin\varphi = 0$.
b $\frac{1}{2}M\ddot{q} + kq + \lambda - kL\cos\varphi = 0$ e $\frac{1}{4+\pi}\left(\frac{16}{3} + \frac{17}{4}\pi\right)ML^2\ddot{\varphi} + 2kLq\sin\varphi = 0$.
c $M\ddot{q} + kq - \lambda - kL\cos\varphi = 0$ e $\frac{1}{4+\pi}\left(\frac{7}{3} + \frac{9}{4}\pi\right)ML^2\ddot{\varphi} + 2kLq\sin\varphi = 0$.
d Nessuna delle altre.

11

Quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane?
a A seconda del valore dei parametri M, L, λ e k possono essere due o quattro.
b Tre qualunque sia il valore dei parametri M, L, λ e k.
c A seconda del valore dei parametri M, L, λ e k possono essere tre o quattro.
d Nessuna delle altre.

12

Si assuma $\lambda/(2kL) < 1$ e si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $q = 0$ e $\varphi = 2\pi - \arccos[-\lambda/(2kL)]$. (Si ricordi che $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.)
a È di equilibrio instabile.
b È di equilibrio stabile.
c Non è di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

13

Determinare le frequenze normali di oscillazione $\omega_i/(2\pi)$ relative alla configurazione $q = 2L + \frac{\lambda}{k}$ e $\varphi = 0$.
a $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{24(4+\pi)(2kL+\lambda)}{(64+51\pi)ML}}$.
b $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{24(4-\pi)(2kL+\lambda)}{(64+51\pi)ML}}$.
c $\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{2M}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{24(4+\pi)(2kL+\lambda)}{(64+51\pi)ML}}$.
d Nessuna delle altre.

14

Determinare la reazione vincolare agente sull'elemento $\boldsymbol{X}$ in corrispondenza di un qualsiasi moto del sistema.
a Nessuna delle altre.
b $-Mg\boldsymbol{e}_2 + 2kL\sin\varphi\boldsymbol{e}_3$.
c $Mg\boldsymbol{e}_2 - 2kL\cos\varphi\boldsymbol{e}_3$.
d 0.

15

Esistono moti in cui φ è costante, ma q non lo è?
a Sì, per ogni valore dei parametri M, L, λ e k.
b No, per nessun valore dei parametri M, L, λ e k.
c Se e solo se $\lambda < 2Lk + \pi$.
d Nessuna delle altre.

Soluzione
I: a
Usiamo la proprietà di additività del centro di massa; calcoliamo la densità del corpo e le masse di Q e D:

$$\rho_0 = \frac{M}{4L^2 + \pi L^2}\,, \quad m_Q = \rho_0 4L^2\,, \quad m_D = \rho_0 \pi L^2\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}_G &= \frac{\rho_0 4L^2}{M}\boldsymbol{\lambda}_{G_Q} + \frac{\rho_0 \pi L^2}{M}\boldsymbol{\lambda}_{G_D} = \frac{4}{4+\pi}(L, L, 0) + \frac{\pi}{4+\pi}(2L, -L, 0) \\ &= \Big(\frac{4+2\pi}{4+\pi}L, \frac{4-\pi}{4+\pi}L, 0\Big)\,.\end{aligned}$$

II: a
Usiamo la proprietà additiva dei momenti d'inerzia, e il teorema di Huygens per I_{11}^D. Calcoliamo

$$I_{11}^Q = \int_Q \lambda_2^2 \rho_0 \,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = 2L\rho_0 \int_0^{2L} \lambda_2^2\,\mathrm{d}\lambda_2 = \frac{16}{3}\rho_0 L^4\,,$$

$$I_{11}^D = m_D L^2 + I_{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1}^{D,C} = \rho_0 \pi L^4 + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^L r^3 \rho_0 \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \rho_0 \pi L^4 + \frac{\pi}{4}\rho_0 L^4\,.$$

Per calcolare I_{22}, osserviamo che per motivi di simmetria $I_{22}^Q = I_{11}^Q$, mentre ancora per Huygens

$$I_{22}^D = m_D 4L^2 + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^L r^3 \rho_0 \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \rho_0 4\pi L^4 + \frac{\pi}{4}\rho_0 L^4\,.$$

III: a
Sappiamo dalla teoria che possiamo scrivere

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}_0 \boldsymbol{\omega}\,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_3}{\mathrm{d}t}\cdot \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2 = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2\,.$$

D'altronde $I_{13} = I_{23} = 0$ quindi

$$\boldsymbol{L}_O = I_{12}\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1 + I_{22}\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_2\,.$$

Nessuna delle risposte quindi va bene.
IV: a
Dalla teoria si ha

$$T = \frac{1}{2} I_{22}\dot{\varphi}^2\,.$$

V: a
Scriviamo il potenziale conservativo, tenendo conto che quello del peso è costante:

$$U = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}_A - \boldsymbol{X}|^2 + \lambda \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{e}_1\,,$$

da cui quello lagrangiano

$$\begin{aligned} U^{\text{L}}(q,\varphi) &= -\frac{k}{2}[(q-2L\cos\varphi)^2+(2L\sin\varphi)^2]+\lambda q \\ &= -\frac{k}{2}[q^2-4Lq\cos\varphi+4L^2]+\lambda q\,. \end{aligned}$$

L'energia cinetica totale, tenuto conto anche della domanda precedente, vale

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2}\frac{1}{4+\pi}\Big(\frac{16}{3}+\frac{17}{4}\pi\Big)ML^2\dot\varphi^2+\frac{1}{2}M\dot q^2\,.$$

Con semplici calcoli si ottiene la a.
VI: a
Consideriamo il sistema dell'equilibrio

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial q} &= -kq+2kL\cos\varphi+\lambda=0\,, \\ \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial \varphi} &= -2kLq\sin\varphi=0\,. \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ha i) $\sin\varphi=0$ *ossia* $\varphi\in\{0,\pi\}$*, oppure ii)* $q=0$*. Nel caso i) si ha subito dalla prima equazione*

$$\begin{aligned} &\varphi=0 \quad \textit{implica} \quad q=2L+\frac{\lambda}{k}\,, \\ &\varphi=\pi \quad \textit{implica} \quad q=-2L+\frac{\lambda}{k}\,. \end{aligned}$$

Nel caso ii), dalla prima equazione si ottiene

$$\cos\varphi=-\frac{\lambda}{2kL}\,,$$

che ovviamente ha soluzioni se e solo se

$$\frac{\lambda}{2kL}\le 1\,.$$

Se però $\lambda/(2kL)=1$*, si ottiene ancora il caso i) con* $\varphi=0$*. Se invece vale la disuguaglianza stretta si ottengono le due soluzioni*

$$\varphi_0=\arccos\Big(-\frac{\lambda}{2kL}\Big)\,,\qquad \varphi_1=2\pi-\varphi_0\,.$$

Quindi le soluzioni sono due se $\lambda/(2kL)\ge 1$*, e quattro se* $\lambda/(2kL)<1$*.*
VII: a
Calcoliamo l'hessiana

$$D^2U^{\text{L}}(q,\varphi)=\begin{pmatrix} -k & -2kL\sin\varphi \\ -2kL\sin\varphi & -2kLq\cos\varphi \end{pmatrix}\,,$$

da cui con la notazione della domanda precedente,

$$D^2U^{\text{L}}(0,\varphi_1)=\begin{pmatrix} -k & -2kL\sin\varphi_1 \\ -2kL\sin\varphi_1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

e

$$\det D^2U^{\text{L}}(0,\varphi_1) = -4k^2L^2(\sin\varphi_1)^2 < 0\,.$$

Quindi $(0,\varphi_1)$ *è di sella e perciò di equilibrio instabile.*
VIII: a
Ricordiamo che si ha dalla teoria e dalle espressioni trovate sopra per T^{L} *e* D^2U^{L}*, che le* ω_i *sono le soluzioni di*

$$\begin{aligned} 0 &= \det\left[\omega^2\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -2kL(2L+\lambda k^{-1})\end{pmatrix}\right] \\ &= \det\begin{pmatrix} M\omega^2 - k & 0 \\ 0 & I_{22}\omega^2 - 4kL^2 - 2\lambda L\end{pmatrix} = (M\omega^2-k)(I_{22}\omega^2 - 4kL^2 - 2\lambda L)\,. \end{aligned}$$

Si ha quindi $\omega_1 = \sqrt{k/M}$*, che esclude la c. Sostituendo il valore trovato sopra per* I_{22} *si vede che si ottiene la a.*
IX: a
Dall'equazione di moto

$$M\ddot{q}\boldsymbol{e}_1 = \lambda\boldsymbol{e}_1 - k(q\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{X}_A) - Mg\boldsymbol{e}_2 + \mathbf{f}_{\text{vin}}\,,$$

si ottiene

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = (M\ddot{q} - \lambda + kq)\boldsymbol{e}_1 - 2Lk(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi\boldsymbol{e}_3)) + Mg\boldsymbol{e}_2\,.$$

Usando anche le equazioni di Lagrange si ottiene

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = (M\ddot{q} - \lambda + kq)\boldsymbol{e}_1 - 2Lk(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi\boldsymbol{e}_3)) + Mg\boldsymbol{e}_2 = 2Lk\sin\varphi\boldsymbol{e}_3 + Mg\boldsymbol{e}_2\,.$$

X: a
Se φ *è costante, e* q *non lo è, dalla seconda equazione di Lagrange segue che* $\sin\varphi = 0$*. Quindi* $\varphi \in \{0,\pi\}$ *e la prima equazione diviene*

$$M\ddot{q} = -kq + \lambda \pm 2kL\,,$$

ove il segno dipende dalla scelta di φ*. È chiaro che il problema di Cauchy per questa equazione ha unica soluzione. Dunque in corrispondenza delle condizioni iniziali*

$$q(0) = q_0 \in \boldsymbol{R}\,, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \in \boldsymbol{R}\,, \quad \varphi(0) \in \{0,\pi\}\,, \quad \dot{\varphi}(0) = 0\,,$$

si hanno soluzioni del tipo cercato per ogni scelta dei parametri.

Prova scritta del 19/06/2025

Modelli Matematici per la Meccanica
Ing. Aerospaziale

Prova scritta del 19/06/2025

I.1
Si consideri una massa unitaria e puntiforme che si muove in $\boldsymbol{R}$ soggetta ad una forza $F(x)$ generata da un'energia potenziale

$$V(x) = 1 + x(x+1)(x-1)^2$$

(cosicché $F = -V'$) e si risponda alle seguenti domande, inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01
Se l'energia fornita al sistema è E, allora nel piano delle fasi, riferendosi alle orbite corrispondenti a tale energia E:
a Esistono E per cui il numero di orbite chiuse è 1, e altri E per cui è 2.
b Il numero di orbite chiuse è come minimo 2.
c Il numero di orbite chiuse è sempre 0.
d Nessuna delle altre.

02
Considerato il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?
a P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.
b P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono immaginari puri.
c P_1 è un nodo attrattivo perché gli autovalori del linearizzato in quel punto di equilibrio sono negativi.
d Nessuna delle altre.

03
Si assuma ora che il moto parta da $x_1(t=0) = 1$ ed $x_2(t=0) = v_0$. Quale delle seguenti è vera?
a Esiste un valore di v_0 tale che il moto rimane sempre nella regione $x_1 > 0$ e non è periodico.
b Esiste un valore di v_0 tale che il moto passa anche nella regione $x_1 < 0$ e non è periodico.
c Qualunque sia v_0 il moto non è periodico.
d Nessuna delle altre.

04 Si consideri il sistema linearizzato in P_1: chiamate C_1 e C_2 le costanti da definire tramite i dati di Cauchy, il suo integrale generale si scrive
a $x_1(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + 1$ e $x_2(t) = -2C_1\sin(2t) + 2C_2\cos(2t)$.
b $x_1(t) = C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t) + 1$ e $x_2(t) = -4C_1\sin(2t) + 4C_2\cos(2t)$.
c $x_1(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-4t} + 1$ e $x_2(t) = -2C_1e^{-2t} - 4C_2e^{-4t}$.
d Nessuna delle altre.

05

Si consideri il problema di Cauchy scalare

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 4\,, \qquad x(0) = 2\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0\,.$$

Quale dei seguenti comportamenti della soluzione su $t \geq 0$ è quello corretto?
a La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 1 per $t \to +\infty$.
b La soluzione cresce con limite $+\infty$ per $t \to +\infty$.
c La soluzione cresce fino a raggiungere un massimo assoluto e poi decresce con limite 0 per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: a
Studiamo l'energia potenziale. Si ha

$$V'(x) = (x-1)(4x^2 + x - 1)\,,$$

che si annulla nei punti di equilibrio

$$x^1_{\text{eq}} = \frac{-1-\sqrt{17}}{8}\,, \quad x^2_{\text{eq}} = \frac{-1+\sqrt{17}}{8}\,, \quad x^3_{\text{eq}} = 1\,.$$

Studiando il segno di V' (mediante il solito studio del segno del trinomio di secondo grado) si ottiene che x^1_{eq} e x^3_{eq} sono minimi isolati e x^2_{eq} è un massimo isolato. Infatti la V' risulta negativa in $(-\infty, x^1_{\text{eq}})$ e in $(x^2_{\text{eq}}, x^3_{\text{eq}})$, mentre è positiva in $(x^1_{\text{eq}}, x^2_{\text{eq}})$ e in $(x^3_{\text{eq}}, +\infty)$. Si ha inoltre

$$V(x^1_{\text{eq}}) < V(0) = 1 = V(x^3_{\text{eq}}) < V(x^2_{\text{eq}})\,.$$

Dunque si hanno 2 orbite chiuse se $E \in (1, V(x^2_{\text{eq}}))$ e 1 orbita se $E \in (V(x^1_{\text{eq}}),1)$.
II: a
Il sistema dinamico del primo ordine equivalente all'equazione differenziale

$$\ddot{x} = F(x) = -V'(x) = (1-x)(4x^2 + x - 1)$$

si legge

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 =: f_1(x_1, x_2)\,, \\ \dot{x}_2 &= (1-x_1)(4x_1^2 + x_1 - 1) =: f_2(x_1, x_2)\,, \end{aligned}$$

da cui subito si vede che il punto di equilibrio P_1 rappresenta un centro: questo perché $x_1 = 1$ corrisponde ad una posizione di minimo (locale) dell'energia potenziale, come dimostrato sopra. Quindi l'energia meccanica totale è un integrale primo e funge anche da funzione di Liapunov. Per rispettare i tre requisiti del teorema di Liapunov serve che la funzione di Liapunov valga zero in P_1: siccome l'energia potenziale $V(1) = 1$ mentre l'energia cinetica è nulla (i.e., $K(P_1) = 0$), basta riscalare l'energia meccanica $E \to \tilde{E} = K + V - 1$ in maniera tale che $\tilde{E}(P_1) = 0$ ed usare $\tilde{E}$ come funzione di Liapunov. Sarebbe sbagliato dire che P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato (che studiamo sotto) sono immaginari: il teorema di stabilità lineare in questo scenario non si può usare.

III: a
Se il sistema ha come dato iniziale $x_1 = 1$ ed $x_2 = v_0$ il sistema parte dal minimo locale $x_1 = 1 = x^3_{\text{eq}}$ dell'energia potenziale. A prescindere dalla direzione del vettore velocità (il sistema è conservativo), se $|v_0|$ è tale che l'energia cinetica soddisfi

$$K(t=0) = \left(V(x^2_{\text{eq}}) - V(x^3_{\text{eq}})\right) ,$$

ossia sia uguale alla differenza di potenziale tra il minimo x^3_{eq} ed il massimo x^2_{eq}, l'orbita raggiunge $x^2_{\text{eq}} > 0$ in un tempo infinito. Se invece il moto passa in $x_1 < 0$, corrisponde a un orbita chiusa quindi è periodico.
IV: a
La matrice A delle derivate parziali calcolate in P_1 è data da

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} f_1(1{,}0) = 0\,, \qquad \partial_{x_2} f_1(1{,}0) = 1\,, \\ \partial_{x_1} f_2(1{,}0) = -V''(1) = -4\,, \qquad \partial_{x_2} f_2(1{,}0) = 0\,, \end{aligned}$$

ossia da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} .$$

La usiamo per scrivere il sistema dinamico linearizzato esplicitamente: questo si legge in forma vettoriale come

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{|\boldsymbol{P_1}} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{P_1}) = A\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{P_1}) ,$$

cioè

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -4(x_1 - 1)\,. \end{aligned}$$

Le due equazioni qui sopra definiscono un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine accoppiate, con una forzante costante, il cui integrale generale si compone della somma della soluzione dell'omogenea associata e di una soluzione particolare che tenga conto della forzante.
Procediamo all'identificazione della soluzione dell'omogenea associata: si tratta di un oscillatore armonico. Diagonalizzando la matrice A, possiamo trovare gli autovettori relativi ai due autovalori (ne basterà uno solo perché saranno complessi e coniugati) $\lambda_1 = +i2$ e $\lambda_2 = -i2$. Scegliamo l'autovettore $\boldsymbol{Q} := (Q_x, Q_y)$ associato a λ_1. Risolvere $[A - \lambda_1 I]\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$ vuol dire, esplicitamente, risolvere

$$\begin{pmatrix} -i2 & 1 \\ -4 & -i2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} -i2Q_x + Q_y = 0\,, \\ -2Q_x - iQ_y = 0\,, \end{aligned}$$

e quindi

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ i2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}_1 + i\boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

dove abbiamo chiamato $\boldsymbol{Q}_1$ *e* $\boldsymbol{Q}_2$ *la parte reale e la parte immaginaria di* $\boldsymbol{Q}$*. Possiamo quindi scrivere una prima parte dell'integrale generale, cioè la soluzione dell'omogenea associata, come*

$$\begin{pmatrix} x_1^{OA}(t) \\ x_2^{OA}(t) \end{pmatrix} = C_1 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \sin(2t) \right] + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos(2t) \right] ,$$

che in termini di incognite scalari si legge

$$\begin{aligned} x_1^{OA}(t) &= C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) \,, \\ x_2^{OA}(t) &= -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t) \,, \end{aligned}$$

e dove l'apice OA *sta per* omogenea associata*. Essendo la forzante costante, una soluzione particolare va cercata nello spazio delle costanti, cioè, introdotte due costanti* α*,* $\beta \in \boldsymbol{R}$*, assumendo che*

$$\begin{aligned} x_1^{SP}(t) &= \alpha \,, \\ x_2^{SP}(t) &= \beta \,, \end{aligned}$$

dove l'apice SP *significa* soluzione particolare*, e imponendo che la soluzione rispetti il sistema, vale a dire*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^{SP}(t) &= 0 = x_2 \Rightarrow \beta = 0 \,, \\ \dot{x}_2^{SP}(t) &= 0 = -4(\alpha - 1) \Rightarrow \alpha = 1 \,, \end{aligned}$$

si trovano i valori numerici di α *e* β*. Quindi, unendo le due soluzioni, si ha*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 1 \,, \\ x_2(t) &= -2C_1 \sin(4t) + 2C_2 \cos(4t) \,, \end{aligned}$$

che è l'espressione esplicita dell'integrale generale.
V: a
Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è chiaramente $x^{SP}(t) = 1$*. Per trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea, risolviamo l'equazione caratteristica*

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \,,$$

che ha le due radici coincidenti $\lambda = -2$*. Dunque l'integrale generale dell'equazione completa non omogenea è*

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + 1 \,.$$

Imponendo i dati di Cauchy si ottiene il sistema

$$C_1 + 1 = 2 \,, \qquad -2C_1 + C_2 = v_0 \,,$$

da cui l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$x(t) = e^{-2t}[1 + (v_0 + 2)t] + 1 \,.$$

Derivando si ottiene

$$\dot{x}(t) = e^{-2t}[v_0 - 2(v_0 + 2)t] \,.$$

Dunque risulta: $\dot{x}(t) > 0$ *per* $t < t_0$; $\dot{x}(t_0) = 0$; $\dot{x}(t) < 0$ *per* $t > t_0$, *ove* $t_0 := v_0/(2v_0{+}4) > 0$. *Perciò vale a, anche perché dall'espressione esplicita della soluzione si ottiene* $x(t) \to 1$ *per* $t \to +\infty$.

I.2

Un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi è costituito da un corpo rigido omogeneo C di massa M e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo è stato ottenuto praticando un foro sferico di raggio R in un solido cubico di spigolo di lunghezza $2R$ in modo che il centro geometrico del foro coincida con quello del cubo. Il sistema di riferimento $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo e ha origine nel centro geometrico del foro sferico e assi perpendicolari alle facce del cubo.

Il sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi rispetto al sistema di riferimento fisso mantenendo l'asse 3 solidale costantemente coincidente con l'omologo asse 3 fisso.

L'elemento $\boldsymbol{X}$ è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza solidale al corpo ottenuta come intersezione del bordo sferico del foro e del piano solidale 2–3 relativo al sistema solidale sopra introdotto.

La sollecitazione direttamente applicata agente sul sistema è costituita dal peso e dalla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_B)$, con $k > 0$ costante, ove $\boldsymbol{X}_B = -2R\boldsymbol{e}_3$, applicata all'elemento $\boldsymbol{X}$.

Come coordinate lagrangiane si usino $(\varphi, \theta) \in (0{,}2\pi) \times (0{,}2\pi)$ tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_3(\varphi)\,.$$

Si consideri il moto rispetto al sistema di riferimento fisso e si risponda alle seguenti domande.

06

Si determini il momento d'inerzia I_{33} del corpo relativo all'asse 3 del riferimento solidale considerato.

a $I_{33} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

b $I_{33} = \frac{10-\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $I_{33} = \frac{2(10-3\pi)}{5(6-\pi)} MR^2$.

d Nessuna delle altre.

07

Si determini il momento d'inerzia del corpo C relativo all'asse passante per il suo centro di massa e per uno degli otto vertici del cubo.

a Nessuna delle altre.

b $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.

c $\frac{4(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.
d $\frac{3(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2$.

08

Si determini la velocità in rappresentazione lagrangiana dell'elemento $\boldsymbol{X}$.
a $\boldsymbol{v}^{\text{L}} = -R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
b $\boldsymbol{v}^{\text{L}} = +R\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_1 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_3$.
c $\boldsymbol{v}^{\text{L}} = -R\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

09

Si determini la componente relativa all'asse 3 del momento totale della quantità di moto (momento angolare) del sistema.
a $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
b $\frac{10-\pi}{5(6-\pi)}MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)}MR^2\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$.
d Nessuna delle altre.

10

Si determini il potenziale lagrangiano della sollecitazione conservativa agente sul sistema.
a Nessuna delle altre.
b $U^{\text{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta$.
c $U^{\text{L}} = -MgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta$.
d $U^{\text{L}} =$ una costante positiva.

11

Si scrivano le due equazioni di Lagrange.
a

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

b

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$
$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta = 0\,.$$

c

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta - 2kR^2\sin\theta = 0\,,$$
$$\frac{10-3\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

12

Si dica quale delle seguenti affermazioni sugli integrali primi è corretta.
a Esistono almeno due integrali primi, di cui uno è l'energia meccanica totale del sistema.
b L'energia meccanica totale del sistema è il solo integrale primo.
c La componente relativa a $\boldsymbol{u}_1$ del momento angolare del sistema è un integrale primo.
d Nessuna delle altre.

13

Si dica quante sono le configurazioni di equilibrio nel dominio delle coordinate lagrangiane.
a Nessuna delle altre.
b Due qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Tre qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Quattro qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.

14

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $\theta = 3\pi/2$ e $\varphi = \pi/3$.
a È di equilibrio instabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
b È di equilibrio stabile qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
c Non è di equilibrio qualunque sia il valore dei parametri M, R e k.
d Nessuna delle altre.

15

Calcolare la componente relativa a $\boldsymbol{e}_3$ del momento totale della sollecitazione vincolare esplicata dalla cerniera sul sistema se questo viene posto nella configurazione $\theta = \pi/3$ e $\varphi = \pi$ con atto di moto nullo.
a 0.
b $\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\cos^2\theta$.
c $\frac{10-3\pi}{5(6-\pi)} MR^2$.
d Nessuna delle altre.

SOLUZIONE

I: a

Il corpo occupa il volume $8R^3 - 4\pi R^3/3$ *e, pertanto ha densità* $\sigma = M/(8R^3 - 4\pi R^3/3)$. *Si considera il cubo pieno di massa* $\sigma 8R^3$ *e il corpo fittizio di forma sferica con massa negativa* $-\sigma 4\pi R^3/3$. *Allora, ricordando le espressioni del momento d'inerzia centrale di un corpo omogeneo cubico e di una sfera omogenea, si ha*

$$I_{33} = \frac{1}{6}\sigma 8R^3(2R)^2 + \frac{2}{5}(-\sigma)\frac{4}{3}\pi R^3 R^2 = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)} MR^2.$$

Infatti per un cubo K *di spigolo* $2R$ *e densità* $\sigma > 0$ *costante si ha*

$$I_{33}^K = \int_{-R}^{R} \int_{[-R,R]\times[-R,R]} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\sigma \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2 \,\mathrm{d}\lambda_3 = 2R\sigma\Big(2 \int_{[-R,R]\times[-R,R]} \lambda_1^2 \,\mathrm{d}\lambda_1\Big)$$
$$= 4R\sigma\Big(2R\frac{2}{3}R^3\Big) = \frac{16}{3}\sigma R^5\,,$$

e per una sfera S di raggio R, per simmetria,

$$I_{33}^S = \iiint_S (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\sigma \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \frac{2}{3}\sigma \iiint_S |\boldsymbol{\lambda}|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$$
$$= \frac{2}{3}\sigma\Big(2\pi \int_0^\pi \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^R r^4 \,\mathrm{d}r\Big) = \frac{8}{3}\pi\sigma\frac{R^5}{5}\,.$$

II: a
Il centro di massa coincide con il centro geometrico. Il corpo ha simmetria sferica rispetto al centro di massa, quindi tutti i momenti d'inerzia relativi a assi passanti per il centro di massa sono uguali.
III: a
Ricordando l'espressione di $\boldsymbol{X}^{\text{L}}(\varphi,\theta)$, le formule di Poisson, usando che $\boldsymbol{u}_3$ è costante e che la velocità angolare del corpo C vale $\dot\varphi\boldsymbol{u}_3$, si ha

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}^{\text{L}} &= -R\dot\theta\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\cos\theta\dot\varphi\boldsymbol{u}_3\times\boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta\cos\theta\boldsymbol{u}_3\\ &= -R\dot\varphi\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta\cos\theta\boldsymbol{u}_3\,.\end{aligned}$$

IV: a
Per quanto riguarda il corpo C: la matrice d'inerzia è diagonale (addirittura proporzionale all'identità) e la velocità angolare ha la sola componente 3 relativa al riferimento solidale non nulla e uguale a $\dot\varphi$. Allora il momento angolare del corpo vale $I_{33}\dot\varphi\boldsymbol{u}_3$. Per l'elemento $\boldsymbol{X}$ si ha

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}\times(M\boldsymbol{v}^{\text{L}}) &= (R\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3)\times M(-R\dot\varphi\cos\theta\boldsymbol{u}_1 - R\dot\theta\sin\theta\boldsymbol{u}_2 + R\dot\theta\cos\theta\boldsymbol{u}_3)\\ &= MR^2\dot\varphi\cos^2\theta\boldsymbol{u}_3 + MR^2\dot\theta\cos^2\theta\boldsymbol{u}_1 - MR^2\dot\varphi\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{u}_2\\ &\quad + MR^2\dot\theta\sin^2\theta\boldsymbol{u}_1\\ &= MR^2\dot\theta\boldsymbol{u}_1 - MR^2\dot\varphi\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + MR^2\dot\varphi\cos^2\theta\boldsymbol{u}_3\,.\end{aligned}$$

Sommando i due contributi si ottiene

$$\boldsymbol{L}_O\cdot\boldsymbol{u}_3 = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\dot\varphi + MR^2\dot\varphi\cos^2\theta\,.$$

V: a
Per quanto riguarda il peso: il centro di massa del corpo ha quota costante, mentre la coordinata 3 relativa al riferimento fisso dell'elemento è $R\sin\theta$. Pertanto il potenziale lagrangiano del peso è $-MgR\sin\theta$. Per quanto riguarda la forza elastica: il potenziale conservativo è $-k|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_B|^2/2$, pertanto si calcola

$$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_B = \boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_O+\boldsymbol{X}_O-\boldsymbol{X}_B = 2R\boldsymbol{u}_3 + R\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + R\sin\theta\boldsymbol{u}_3 = R\cos\theta\boldsymbol{u}_2 + (2R+R\sin\theta)\boldsymbol{u}_3\,,$$

e quindi $|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_B|^2 = R^2+4R^2+4R^2\sin\theta$. Da cui segue che $U^{\text{L}}(\varphi,\theta) = -MgR\sin\theta - 2kR^2\sin\theta$.
VI: a
Il moto del corpo rigido è rotatorio attorno all'asse 3, quindi l'energia cinetica del sistema si scrive

$$T^{\text{L}} = \frac{I_{33}}{2}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}^{\text{L}}|^2 = \frac{1}{2}\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}MR^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\cos^2\theta)\,.$$

La sollecitazione attiva è tutta conservativa, quindi si considera la funzione lagrangiana $\mathcal{L} = T^{\text{L}} + U^{\text{L}}$ *che vale*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}MR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta) - MgR\sin\theta - 2kR^2\sin\theta\,.$$

Si calcola, quindi,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = MR^2\dot{\theta}\,, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - MgR\cos\theta - 2kR^2\cos\theta\,,$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta\,, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0\,.$$

Derivando rispetto al tempo, si trovano le equazioni di Lagrange:

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + MgR\cos\theta + 2kR^2\cos\theta = 0\,,$$

e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}\dot{\varphi} + MR^2\dot{\varphi}\cos^2\theta\Big) = 0\,.$$

In modo più esplicito la seconda diventa

$$\frac{2(10-\pi)}{5(6-\pi)}MR^2\ddot{\varphi} + MR^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0\,.$$

VII: a
L'energia meccanica si conserva perché i vincoli sono fissi e perfetti e la sollecitazione è tutta conservativa. Dalla seconda equazione di Lagrange si ha che si conserva il momento coniugato relativo alla variabile φ*, che è ciclica; dal risultato della domanda IV, si ha che questo coincide con la terza componente del momento angolare.*
VIII: a
Si ha che il sistema

$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial\varphi} = 0 = 0\,,$$
$$\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial\theta} = -(MgR + 2kR^2)\cos\theta = 0\,,$$

ha le infinite soluzioni $(\bar{\varphi}, \pi/2)$ *e* $(\bar{\varphi}, 3\pi/2)$*, con* $\bar{\varphi}$ *arbitraria, che sono tutte configurazioni di equilibrio.*
IX: a
Per discutere la stabilità non si possono usare le condizioni sufficienti di Dirichlet e Liapunov, da momento che il determinate hessiano è identicamente nullo. D'altro canto, presa una qualsiasi configurazione di equilibrio $(\bar{\varphi}, \pi/2)$*, si considera il moto con dato iniziale* $\varphi(0) = \bar{\varphi}$*,* $\theta(0) = 3\pi/2$*,* $\dot{\varphi}(0) = \alpha$*,* $\dot{\theta}(0) = 0$*, con* $\alpha > 0$ *arbitrario. Dalle equazioni di Lagrange segue che il moto lagrangiano è* $(\varphi(t), \theta(t)) = (\alpha t + \bar{\varphi}, 3\pi/2)$ *per ogni* $t > 0$*, e quindi si ha che la configurazione di equilibrio è instabile.*
X: a
È immediato osservare che sia il peso sia la forza elastica hanno momento perpendicolare all'asse 3*. Inoltre, la componente* 3 *del momento angolare del sistema è costante, pertanto, dalla seconda equazione cardinale, segue che la terza componente del momento totale della sollecitazione vincolare è nulla.*

Prova scritta del 23/07/2025

Modelli Matematici per la Meccanica
Ing. Aerospaziale

Prova scritta del 23/07/2025

I.1

Si consideri una massa unitaria e puntiforme in $\boldsymbol{R}$, confinata a muoversi sul semiasse positivo $x > 0$. La particella è soggetta a una forza $F_1(x)$ generata da un potenziale

$$U(x) = -(x-2)(x-5)^2\,,$$

e a una forza dissipativa $F_2(\dot{x}) = -\beta\dot{x}$. Salvo diverso avviso si assuma $\beta = 1$. Si risponda alle seguenti domande inerenti l'equivalente sistema dinamico del primo ordine in $\boldsymbol{R}^2$.

01

Considerato il punto di equilibrio

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix}\,,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a P_1 è asintoticamente stabile.

b P_1 è un centro perché l'energia meccanica funge da funzione di Liapunov per quel punto di equilibrio.

c P_1 è un centro perché gli autovalori del linearizzato in P_1 sono immaginari puri.

d Nessuna delle altre.

02 Si trascuri la forza d'attrito, i.e., assumiamo $\beta = 0$ solo per questa domanda. Quale è il minimo valore di energia E_{min} tale che se il sistema ha energia $E > E_{min}$, l'orbita del moto corrispondente certamente non è periodica?

a $E_{min} = 4$.

b $E_{min} = 0$.

c $E_{min} = 9$.

d Nessuna delle altre.

03 L'integrale generale del sistema linearizzato in P_1 si legge

a

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) - C_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) + 5\,, \\ x_2(t) &= -\frac{1}{2} C_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) - C_1(\frac{\sqrt{23}}{2}) e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) \\ &\quad + \frac{1}{2} C_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) - C_2(\frac{\sqrt{23}}{2}) e^{-\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t)\,. \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) - C_2 \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) + 5\,, \\ x_2(t) &= -C_1(\frac{\sqrt{23}}{2}) \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) - C_2(\frac{\sqrt{23}}{2}) \cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t)\,. \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) + \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) \right)\,, \\ x_2(t) &= -\frac{1}{2} C_1 e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) + \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) \right) \\ &\quad + C_1 e^{-\frac{t}{2}} \frac{\sqrt{23}}{2} \left(\cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) - \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) \right)\,. \end{aligned}$$

d Nessuna delle altre.

04 Considerato il punto di equilibrio

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix}\,,$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a P_2 è una sella.

b P_2 è un fuoco instabile.

c P_2 è un nodo repulsivo.

d Nessuna delle altre.

05 Quale è l'espressione della matrice esponenziale per il sistema dinamico linearizzato in P_2?

a

$$\begin{pmatrix} (\frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}) & (\frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t}) \\ (\frac{6}{5}e^{2t} - \frac{6}{5}e^{-3t}) & (\frac{2}{5}e^{2t} + \frac{3}{5}e^{-3t}) \end{pmatrix}\,.$$

b

$$\begin{pmatrix} e^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) & e^{-t/2}\sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) \\ -e^{-t/2}\sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) & e^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) \end{pmatrix}\,.$$

c

$$\begin{pmatrix} +\frac{3}{5}\cos(3t) & -\frac{2}{5}\sin(2t) \\ +\frac{2}{5}\sin(2t) & +\frac{3}{5}\cos(3t) \end{pmatrix} .$$

d Nessuna delle altre.

SOLUZIONE

I: a

Studiamo il potenziale. Si ha

$$U'(x) = -3(x-5)(x-3)\,, \qquad U''(x) = -6x + 24\,.$$

Si hanno quindi i punti di equilibrio

$$x^1_{\text{eq}} = 5\,, \quad U''(x^1_{\text{eq}}) = -6\,; \qquad x^2_{\text{eq}} = 3\,, \quad U''(x^2_{\text{eq}}) = 6\,.$$

Per la teoria, x^1_{eq} è stabile e x^2_{eq} è instabile.
L'equazione di moto è

$$m\ddot{x} = (x-5)(9-3x) - \beta\dot{x}\,,$$

che si legge, ponendo $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$ e ricordando che $m = 1$, come segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 =: f_1(x_1, x_2)\,, \\ \dot{x}_2 &= (x_1 - 5)(9 - 3x_1) - x_2 =: f_2(x_1, x_2)\,. \end{aligned}$$

Si vede quindi che il sistema ammette due punti fissi, $P_1 = (x^1_{\text{eq}},0)$ e $P_2 = (x^2_{\text{eq}},0)$. Per studiare la stabilità del sistema dinamico nell'intorno di P_1 possiamo usare il teorema di stabilità lineare (perchè il sistema è dissipativo quindi non ci aspettiamo autovalori del linearizzato che siano immaginari puri), alternativamente possiamo sfruttare il fatto che questo sistema dinamico deriva da una ODE del II ordine e costruire un'opportuna funzione di Liapunov mediante l'energia meccanica ad esso associata. Linearizziamo il sistema intorno a P_1. Ci serve la matrice delle derivate parziali dei campi di velocità, le quali si leggono

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1\,, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -6x_1 + 24\,, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1\,. \end{aligned}$$

Quindi la matrice A_1 del linearizzato in P_1 è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori λ_1 e λ_2 associati ad A_1 risultano

$$\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{23}}{2}\,, \qquad \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{23}}{2}\,,$$

quindi, siccome entrambi gli autovalori hanno parte reale negativa e hanno parte immaginaria non nulla (dovuta alla linearizzazione che ha reso il potenziale armonico), P_1 è un fuoco attrattivo quindi è un punto di equilibrio asintoticamente stabile. Si sarebbe potuto comunque usare il Teorema di Liapunov per giungere alla stessa conclusione scegliendo l'energia meccanica come funzione di Liapunov

$W \equiv E = T + V$, dove con T intendiamo l'energia cinetica $T = x_2^2/2$ e con V l'energia potenziale $V = (x_1 - 2) \cdot (x_1 - 5)^2$. Infatti $E(x_1 = 5, x_2 = 0) = 0$, inoltre $E > 0$ in un intorno di P_1 e la variazione temporale dell'energia meccanica $\dot{E}$ si scrive

$$\dot{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}x_2^2 + V(x_1)\right) = x_2\left(\ddot{x}_1 - F_1(x_1)\right) = -x_2^2\,.$$

Notiamo come quindi E risulti strettamente decrescente lungo i moti nell'intorno di P_1, rendendo il punto di equilibrio asintoticamente stabile.
II. a
Dal grafico di $-U(x)$ si vede subito che, in assenza di dissipazione (i.e., se $F_2(x, \dot{x}) = 0$), fornendo al sistema una quantità di energia totale appena superiore a $E_{min} = 4 = -U(3)$ non è più possibile che il moto abbia un'orbita periodica, e quindi chiusa, nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
III: a
Procediamo al calcolo dell'integrale generale del sistema dinamico linearizzato in P_1 cioè di

$$\dot{\mathbf{x}} = A_1\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{P_1}\right)\,,$$

che esplicitamente si scrive

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(x_1 - 5)\\ x_2\end{pmatrix}\,,$$

cioè

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= +x_2\,,\\ \dot{x}_2 &= -6x_1 - x_2 + 30\,.\end{aligned}$$

Si tratta di un oscillatore smorzato e forzato il cui integrale generale si compone della somma dell'integrale generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare della non omogenea. Iniziamo dalla soluzione particolare: cerchiamola nello spazio delle costsanti ponendo $x_1 = \alpha_1$ e $x_2 = \alpha_2$. Sostituendo tali valori nelle equazioni troviamo $\alpha_1 = 5$ e $\alpha_2 = 0$ quindi $x_1^{SP} = 5$ mentre $x_2^{SP} = 0$ ovvero

$$\begin{pmatrix}x_1^{SP}(t)\\ x_2^{SP}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ 0\end{pmatrix}\,.$$

Procediamo ora a scrivere la soluzione dell'omogenea associata. Cerchiamo una base di autovettori. Siccome sono complessi ne basterà uno solo, $\mathbf{U} = (U_x, U_y)$: scegliamo arbitrariamente quello relativo a $\lambda_2 = (-1 - i\sqrt{23})/2$ e otteniamo l'equazione

$$\begin{pmatrix}\frac{1+i\sqrt{23}}{2} & 1\\ -6 & \frac{-1+i\sqrt{23}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_x\\ U_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\,.$$

Ponendo $U_x = 1$ troviamo $U_y = -\left(\frac{+1+i\sqrt{23}}{2}\right)$ ovvero

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix}1\\ \frac{-1-i\sqrt{23}}{2}\end{pmatrix}\,.$$

Riscrivendo ora $\mathbf{U} = \mathbf{Q}_1 + i\mathbf{Q}_2$ definiamo

$$Q_1 = \begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\,,\quad Q_2 = \begin{pmatrix}0\\ -\frac{\sqrt{23}}{2}\end{pmatrix}\,.$$

Otteniamo quindi l'espressione della soluzione generale

$$\begin{pmatrix} x_1^{OA}(t) \\ x_2^{OA}(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-\frac{t}{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cos(-\frac{\sqrt{23}}{2}t) - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{23}{2} \end{pmatrix} \sin(-\frac{\sqrt{23}}{2}t) \right] + C_2 e^{-\frac{t}{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sin(-\frac{\sqrt{23}}{2}t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{23}}{2} \end{pmatrix} \cos(-\frac{\sqrt{23}}{2}t) \right] .$$

Ricordando che il seno è dispari e il coseno pari, possiamo unire la soluzione particolare a quella generale e così ottenere l'espressione dell'integrale generale che esplicitamente si legge nella risposta a.
IV: a
Analogamente a quanto fatto per A_1, scriviamo A_2 come la matrice del linearizzato in P_2 che si legge

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +6 & -1 \end{pmatrix} .$$

Calcoliamo gli autovalori γ_1 e γ_2 associati a A_2, ottenendo

$$\gamma_1 = +2 , \qquad \gamma_2 = -3 ,$$

quindi P_2 è una sella poiché la matrice del linearizzato ha autovalori reali e discordi.
V: a
Procediamo al calcolo della matrice esponenziale in P_2: innanzitutto ci serve la base degli autovettori con cui costruire le matrici Γ e Γ^{-1} per la diagonalizzazione di A_2.
Chiamiamo $\mathbf{W} = (W_x, W_y)$ l'autovettore associato a $\gamma_1 = 2$ e $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ l'autovettore associato a $\gamma_2 = -3$. Procediamo con il calcolo di $\mathbf{W}$: dobbiamo risolvere

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ +6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

che implica le due equazioni ridondanti $-2W_x + W_y = 0$ e $6W_x - 3W_y = 0$, le quali definiscono

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Proseguiamo ora con il calcolo di $\mathbf{V}$: dobbiamo risolvere

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

che implica le due equazioni ridondanti $3V_x + V_y = 0$ e $6V_x + 2V_y = 0$, le quali definiscono

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Con gli autovettori $\mathbf{W}$ e $\mathbf{V}$ possiamo costruire la matrice Γ e la sua inversa Γ^{-1}, le quali si leggono

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} , \qquad \Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} .$$

È buona prassi verificare sia che $\Gamma\Gamma^{-1} = \mathrm{id}$ *sia che* $\Gamma^{-1}A_2\Gamma = D$*, dove con* id *intendiamo la matrice identità e con* D *la matrice diagonale che ha sulla diagonale principale gli autovalori, i.e.,*

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

A questo punto è possibile scrivere

$$e^{t\Gamma^{-1}A_2\Gamma} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} ,$$

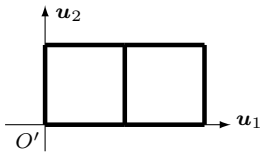
e tornare nella base originale applicando la formula $e^{A_2 t} = \Gamma e^{t\Gamma^{-1}A_2\Gamma}\Gamma^{-1}$*, cioè esplicitamente*

$$e^{A_2 t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}) & (\frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t}) \\ (\frac{6}{5}e^{2t} - \frac{6}{5}e^{-3t}) & (\frac{2}{5}e^{2t} + \frac{3}{5}e^{-3t}) \end{pmatrix} ,$$

che è proprio l'espressione della matrice esponenziale cercata, cioè quella in P_2*.*

I.2

Un sistema olonomo a vincoli lisci è costituito da un corpo rigido piano C di massa $M + m$, con M, $m > 0$, e da un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, M)$. Il corpo C è stato ottenuto saldando, come illustrato in figura, due lamine quadrate omogenee di lato di lunghezza $2L$ e masse rispettivamente uguali a M e m. Il riferimento $(O', (\boldsymbol{u}_h))$ è solidale al corpo ed è scelto in modo tale che la lamina quadrata di massa m abbia centro nel punto di coordinate solidali $(3L, L, 0)$ (lamina a destra in figura).



Il riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$ ha asse 3 verticale ascendente. Il corpo C è vincolato a muoversi di moto traslatorio mantenendosi nel piano 1–2 fisso con la base solidale costantemente coincidente con quella fissa e con O' vincolato a scorrere sull'asse 1 fisso. L'elemento $\boldsymbol{X}$ si muove sull'asse 1 fisso.
La sollecitazione direttamente applicata è costituita dal peso e dalle forze

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}} = -k\boldsymbol{X} - k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_{O'}) , \quad \boldsymbol{F}_{O'} = -k(\boldsymbol{X}_{O'} - \boldsymbol{X}) + \alpha\boldsymbol{e}_1 ,$$

applicate rispettivamente all'elemento e al corpo rigido nel punto indicato. Qui $k > 0$ e $\alpha > 0$ sono costanti.
Come coordinate lagrangiane si usino $(q, s) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ tali che

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(q) = q\boldsymbol{e}_1 , \qquad \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_{O'}(s) = s\boldsymbol{e}_1 .$$

Ovvero, q e s sono, rispettivamente, le coordinate 1 relative al riferimento fisso dei punti $\boldsymbol{X}$ e O'.

Si consideri il moto del sistema rispetto al riferimento fisso.

06

Si determinino le coordinate $\boldsymbol{\lambda}_G$ del centro di massa G del corpo rigido C rispetto al riferimento solidale dato.

a

$$\lambda_{1G} = \frac{M+3m}{M+m}L\,, \qquad \lambda_{2G} = L\,, \qquad \lambda_{3G} = 0\,.$$

b

$$\lambda_{1G} = 2L\,, \qquad \lambda_{2G} = L\,, \qquad \lambda_{3G} = 0\,.$$

c

$$\lambda_{1G} = \frac{M-3m}{M+m}L\,, \qquad \lambda_{2G} = L\,, \qquad \lambda_{3G} = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

07

Si determini il momento d'inerzia I_{11} del corpo rigido C relativo all'asse 1 del riferimento solidale dato.

a

$$I_{11} = \frac{4}{3}ML^2 + \frac{4}{3}mL^2\,.$$

b

$$I_{11} = \frac{1}{6}ML^2 + \frac{1}{6}mL^2\,.$$

c

$$I_{11} = \frac{3}{4}ML^2 + \frac{1}{6}mL^2\,.$$

d Nessuna delle altre.

08

La base solidale data $(\boldsymbol{u}_h)$ è principale d'inerzia nel centro di massa G del corpo rigido C?

a Sì, per ogni valore dei parametri M, m, L.

b Solo se $M = m$.

c No, mai.

d Nessuna delle altre.

09

Si determini il momento angolare $\boldsymbol{L}_O$ del corpo rigido C, rispetto all'origine O del sistema di riferimento fisso.

a

$$\boldsymbol{L}_O = -(M+m)L\dot{s}\boldsymbol{e}_3\,.$$

b

$$\boldsymbol{L}_O = 0\,.$$

c

$$\boldsymbol{L}_O = (M+m)L\dot{s}\boldsymbol{e}_3 + 2LM\dot{q}\boldsymbol{e}_3\,.$$

d Nessuna delle altre.

10
Si determini l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
a

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}^2\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2}(M+m)(\dot{s}^2 + \dot{q}^2)\,.$$

c

$$T^{\text{L}} = \frac{1}{2}(M+m)(\dot{s}+\dot{q})^2\,.$$

d Nessuna delle altre.
11
Si determini il potenziale lagrangiano U^{L} delle forze direttamente applicate al sistema.
a

$$U^{\text{L}} = -\frac{1}{2}k(q-s)^2 - \frac{1}{2}kq^2 + \alpha s\,.$$

b

$$U^{\text{L}} = \frac{1}{2}k(q-s)^2 - \frac{1}{2}kq^2 - \alpha s\,.$$

c

$$U^{\text{L}} = (2M+m)g(q+s) + \frac{1}{2}k(q-s)^2 + \frac{1}{2}kq^2 - \alpha s\,.$$

d Nessuna delle altre.
12
Si scrivano le equazioni di Lagrange.
a

$$\begin{aligned} M\ddot{q} + k(q-s) + kq &= 0\,,\\ (M+m)\ddot{s} - k(q-s) - \alpha &= 0\,. \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{q} + k(q-s) - kq + Mg &= 0\,,\\ M\ddot{s} - k(q-s) - \alpha + (M+m)g &= 0\,. \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} M\ddot{q} - k(q-s) - kq &= 0\,,\\ (M+m)\ddot{s} - k(q-s) + \alpha &= 0\,. \end{aligned}$$

d Nessuna delle altre.
13
Si assuma solo per questa domanda $M = m$, e si stabilisca quale delle seguenti affermazioni è corretta relativamente alla configurazione $(q, s) = (\alpha/k, 2\alpha/k)$.

a È possibile considerare le piccole oscillazioni in tale punto e nelle frequenze normali si ha

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}\frac{k}{M}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}\frac{k}{M}}\,.$$

b Non è possibile considerare le piccole oscillazioni in tale punto.
c È possibile considerare le piccole oscillazioni in tale punto e nelle frequenze normali si ha

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2M}}\,.$$

d Nessuna delle altre.

14

Si determini la forza vincolare agente sull'elemento $\boldsymbol{X}$ in corrispondenza di un qualsiasi moto del sistema.
a Nessuna delle altre.
b

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = -Mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

c

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = (M+m)g\boldsymbol{e}_3\,.$$

d

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = (2M+m)g\boldsymbol{e}_3\,.$$

15

Si dica quale delle seguenti parametrizzazioni lagrangiane alternative è ammissibile.
a

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}} = (q_1+q_2)\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{X}^{\text{L}}_{O'} = q_1\boldsymbol{e}_1\,, \qquad (q_1,q_2)\in\boldsymbol{R}^2\,.$$

b

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}} = q_1^2\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{X}^{\text{L}}_{O'} = q_2\boldsymbol{e}_1\,, \qquad (q_1,q_2)\in\boldsymbol{R}^2\,.$$

c

$$\boldsymbol{X}^{\text{L}} = (q_1+q_2)\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{X}^{\text{L}}_{O'} = (q_1+q_3)\boldsymbol{e}_1\,, \qquad (q_1,q_2,q_3)\in\boldsymbol{R}^3\,.$$

d Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: a
Il centro di massa delle lamine quadrate è nei rispettivi centri geometrici. Allora, dalla proprietà additiva, segue che

$$\boldsymbol{X}_G - \boldsymbol{X}_{O'} = \frac{1}{M+m}[M(L\boldsymbol{u}_1+L\boldsymbol{u}_2)+m(3L\boldsymbol{u}_1+L\boldsymbol{u}_2)] = \frac{M+3m}{M+m}L\boldsymbol{u}_1+L\boldsymbol{u}_2\,.$$

II: a
Ricordando che il momento centrale di una lamina quadrata di massa μ e lunghezza

del lato ℓ relativa a un asse complanare è $\mu\ell^2/12$, e usando il Teorema di Huygens, si ha

$$I_{11} = \frac{1}{12}M(2L)^2 + ML^2 + \frac{1}{12}m(2L)^2 + mL^2 = \frac{4}{3}ML^2 + \frac{4}{3}mL^2\,.$$

III: a
Si procede usando la teoria della simmetria materiale ortogonale: il versore $\boldsymbol{u}_3$ è principale in G perché il piano della lamina è di simmetria materiale ortogonale; analoga considerazione vale per $\boldsymbol{u}_2$.
IV: a
Dal momento che il moto è traslatorio la velocità angolare del corpo rigido è nulla, ossia $\boldsymbol{\omega} = 0$ e $\boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}_{O'}$ per ogni $(\boldsymbol{x}, t)$. Si ha quindi dalla formula nota dalla teoria

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_O &= \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega} + (M+m)(\boldsymbol{X}_G - \boldsymbol{X}_O) \times \boldsymbol{V}_{\text{T}}(\boldsymbol{X}_O(t), t)\\ &= (M+m)[(s+\lambda_{1G})\boldsymbol{e}_1 + \lambda_{2G}\boldsymbol{e}_2] \times \boldsymbol{v}_{O'}\\ &= (M+m)[(s+\lambda_{1G})\boldsymbol{e}_1 + \lambda_{2G}\boldsymbol{e}_2] \times (\dot{s}\boldsymbol{e}_1) = -(M+m)L\dot{s}\boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

V: a
Dal teorema di König e da $\boldsymbol{\omega} = 0$ si ha

$$T^{\text{L}}_C = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{M+m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2 = \frac{M+m}{2}|\boldsymbol{v}_{O'}|^2 = \frac{M+m}{2}\dot{s}^2\,.$$

VI: a
La quota del centro di massa (coordinata relativa all'asse 3 fisso) del corpo e quella della particella sono costanti, quindi il potenziale del peso è costante. Per la sollecitazione elastica si ha

$$U^{\text{L}}_{el} = -\frac{1}{2}k|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_{O'}|^2 - \frac{1}{2}k|\boldsymbol{X}|^2 = -\frac{1}{2}k(q-s)^2 - \frac{1}{2}kq^2\,.$$

Per la forza costante $\alpha\boldsymbol{e}_1$ agente su O' si ha che il potenziale vale $U_\alpha = \alpha x_{1O'}$. Allora $U^{\text{L}}_\alpha = \alpha s$.
VII: a
La sollecitazione attiva è tutta conservativa, quindi si considera la funzione lagrangiana $\mathcal{L} = T^{\text{L}} + U^{\text{L}}$ che vale

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k(q-s)^2 - \frac{1}{2}kq^2 + \alpha s\,.$$

Si calcolano quindi le equazioni in a.
VIII: a
Osservato che il sistema dell'equilibrio è

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial q} &= -k(q-s) - kq = 0\,,\\ \frac{\partial U^{\text{L}}}{\partial s} &= k(q-s) + \alpha = 0\,,\end{aligned}$$

si trova la sola soluzione $(q, s) = (\alpha/k, 2\alpha/k)$, che dà l'unica configurazione di equilibrio del sistema. Si calcola la matrice hessiana (che risulta costante)

$$D^2U^{\text{L}} = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -k \end{pmatrix},$$

che è definita negativa. Quindi nella posizione data si possono costruire le piccole oscillazioni. Dunque, se (a_{hk}) denota la matrice dell'energia cinetica, ove supponiamo $M = m$, i ω_i sono dati, come noto dalla teoria, dall'equazione

$$0 = \det((a_{hk})\omega^2 + D^2U^{\text{L}}) = \det \begin{pmatrix} M\omega^2 - 2k & k \\ k & 2M\omega^2 - k \end{pmatrix}$$
$$= 2M^2\omega^4 - 5Mk\omega^2 + k^2 \,,$$

da cui le soluzioni in a.
IX: a
Dall'equazione del moto dell'elemento

$$M\boldsymbol{a} = -Mg\boldsymbol{e}_3 - k\boldsymbol{X} - k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_{O'}) + \mathbf{f}_{\text{vin}} \,,$$

si ottiene

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = M\ddot{q}\boldsymbol{e}_1 + Mg\boldsymbol{e}_3 + kq\boldsymbol{e}_1 + k(q - s)\boldsymbol{e}_1 = Mg\boldsymbol{e}_3 \,,$$

ove nell'ultimo passaggio si è usata la prima equazione di Lagrange.
X: a
La a è corretta. La b risulta degenere per $q_1 = 0$, perché per tale valore, la derivata di tutti i moti lagrangiani rispetto a q_1 è nulla. La c ha un numero di parametri sbagliato.

Prova scritta del 16/01/2025

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 16/01/2025

I.1
Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.
01
Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \operatorname{arctg} t\boldsymbol{w}_1(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.
a È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.
b È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.
c È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.
d Nessuna delle altre.
02

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.
a Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ sono identiche.
b Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.
c L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ può essere diversa da quella relativa a $\mathcal{S}_2$.
d Nessuna delle altre.

03

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0)\,.$$

a

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(t)\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

b Il versore $\boldsymbol{u}_1$ è costante rispetto alla terna fissa.
c

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

d Nessuna delle altre.

Soluzione

I: a

Non si sa nulla della posizione di $\mathcal{M}$ o $\mathcal{N}$ relativa alla base fissa, quindi b non vale. La c non ha motivo di essere. Invece vale a perché le informazioni date implicano che il moto di $\mathcal{M}$ rispetto a $\mathcal{N}$ sia una rotazione di angolo φ con $\dot\varphi = \operatorname{arctg} t$, e quindi usando la condizione iniziale si ha

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_2 + \sin\varphi\,\boldsymbol{w}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{w}_2 + \cos\varphi\,\boldsymbol{w}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{w}_1\,,
\end{aligned}$$

con

$$\varphi(t) = \int_0^t \operatorname{arctg}\tau\,\mathrm{d}\tau\,.$$

II: a

Si ha per il teorema del moto relativo

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}_2} = \boldsymbol{v}_{O\mathcal{S}_2} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O) + \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}_2} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}_2}\,.$$

Quindi vale a. La c non vale perché

$$\boldsymbol{a}_{\mathcal{S}_2} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}} \times \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}_1} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \boldsymbol{a}_{\mathcal{S}_1}\,.$$

III: a
Infatti

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{u}_1 = 0 + 0 = 0\,,$$

quindi le componenti di $\boldsymbol{u}_1$ *in* $\mathcal{N}$ *sono costanti. La c non vale perché*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \times \boldsymbol{w}_1 = 0 + 0 = 0\,.$$

I.2
Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

04
Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo).
a $\ell = 8$.
b $\ell = 5$.
c ℓ non può essere determinato.
d Nessuna delle altre.

05
C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici coincidenti.
a $\ell = 9$.
b $\ell = 6$.
c $\ell = 7$.
d Nessuna delle altre.

06
Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{11} in $\boldsymbol{X}_O$ vale
a

$$I_{11} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b

$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

c

$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

d Nessuna delle altre.

Soluzione
I: a
Il vincolo può essere riformulato così: C_1 è libero di muoversi (quindi mantiene 6 gradi di libertà), poi C_2 è vincolato ad avere l'asse parallelo a quello di C_1 (-2 gradi di libertà), e il centro appartenente alla retta su cui giace in quell'istante l'asse di C_1 (-2 gradi di libertà). Quindi

$$\ell = 6 + 6 - 2 - 2 = 8\,.$$

II: a
Il vincolo può essere riformulato così: C_1 è libero di muoversi (quindi mantiene 6 gradi di libertà), poi C_2 è vincolato ad avere il vertice coincidente con quello di C_1 (-3 gradi di libertà). Quindi

$$\ell = 6 + 6 - 3 = 9\,.$$

III: a
Si sa che $I_{33} = I_{11} + I_{22}$, e d'altra parte per la simmetria radiale della densità $I_{11} = I_{22}$, quindi

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{2} I_{33} = \frac{1}{2} \iint_{C_1} a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 \\ &= \frac{1}{2} 2\pi a \int_0^R (r^2 + b) r^3\,\mathrm{d}r = \pi a \Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4} \Big)\,. \end{aligned}$$

I.3
Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

07
Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a
$$T^{\text{L}} = \alpha(q_1^2 + e^t)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2\,.$$

b
$$T^{\text{L}} = \alpha^2 \dot{q}_1^2 + \alpha\beta\dot{q}_1\dot{q}_2 + \beta^2\dot{q}_2^2 + \gamma\,.$$

c
$$T^{\text{L}} = (\alpha\dot{q}_1 + \beta\dot{q}_2)^2\,.$$

d Nessuna delle altre.

08
Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che
a Vale
$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\,.$$

b La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.
c Le forze direttamente applicate sono conservative.
d Nessuna delle altre.

09

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.
a Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\text{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^4\,,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.
b Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana definita positiva, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.
c Tutti i moti sono definiti per ogni $t \in \boldsymbol{R}$.
d Nessuna delle altre.

Soluzione

I: d

Poiché i vincoli sono fissi, T^{L} deve ridursi a una forma quadratica definita positiva nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$, con coefficienti dipendenti solo dalle $\boldsymbol{q}$. Quindi a e b sono escluse. La c è semidefinita positiva, ma non definita positiva.

II: a

La a è l'usuale condizione di chiusura del campo integrabile (Q_1, Q_2). Le b e c non valgono perché per esempio le forze direttamente applicate potrebbero dipendere dal tempo.

III: a

Vale a, perché per la conservazione dell'energia

$$q_1^8 + q_2^4 \le T^{\text{L}} - U^{\text{L}} = E\,,$$

con E dipendente dalle condizioni iniziali. La b non vale perché $\boldsymbol{q}_0$ risulta di minimo isolato per il potenziale. Neppure la c vale, per controesempi come quello fornito dall'attrazione gravitazionale (moti radiali rettilinei diretti verso la massa centrale).

I.4

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto.
Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h)\,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0)\,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R)\,.$$

10

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.

a

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s \boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2 \boldsymbol{N}(s) + \beta\tau \boldsymbol{B}(s)\,.$$

b

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s \boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2 \boldsymbol{N}(s)\,.$$

c

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

11 Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 \cos\Big(\frac{x_3}{h}\Big)(x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2)\,,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.

a Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.

b Nessun moto può essere definito per ogni $t \in \boldsymbol{R}$.

c Tutti i moti sono limitati.

d Nessuna delle altre.

12

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1 \cos(\alpha s) \boldsymbol{T}(s)\,,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare l'energia cinetica del punto nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\ddot{s}(t_1) = 0$.

a

$$T(t_1) = \frac{c_1}{\alpha}\,.$$

b

$$T(t_1) = \frac{m}{2} c_1 h\,.$$

c

$$T(t_1) = 0\,.$$

d Nessuna delle altre.

Soluzione

I: a

La proiezione su $\boldsymbol{N}$ dell'equazione di moto dà in ogni caso

$$km\dot{s}^2 = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N}\,.$$

Dunque nel caso a si ha $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} = 0$. Per lo stesso motivo non va bene il caso c. Il caso b andrebbe bene se valesse per ogni t

$$km\dot{s}(t)^2 = kmv_0^2\,,$$

ossia $\dot{s}(t) = v_0$. *Ma nel caso b proiettando l'equazione di moto lungo* $\boldsymbol{T}$ *si ha*

$$m\ddot{s} = \alpha\,,$$

che quindi dà invece $\dot{s}(t) = v_0 + \alpha t/m$.
II: a
Infatti, la forza non è conservativa, però

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = -c_1\cos(\alpha s)R\boldsymbol{N}(s)\cdot(\dot{s}\boldsymbol{T}(s)) = 0\,,$$

quindi le forze fanno lavoro nullo e vale la conservazione dell'energia. La b e la c non valgono perché l'equazione di moto dà

$$m\ddot{s} = 0\,,$$

e dunque i moti sono tutti della forma $s(t) = s(0) + t\dot{s}(0)$, $t \in \boldsymbol{R}$.
III: a
L'equazione di moto dà

$$m\ddot{s} = c_1\cos(\alpha s)\,,$$

da cui moltiplicando per $\dot{s}$ *e integrando su* $[0, t]$ *si ha*

$$T(t) = \frac{m}{2}\dot{s}(t)^2 = \frac{c_1}{\alpha}\sin(\alpha s(t))\,.$$

Dall'equazione di moto si ha che in t_1 *vale* $\alpha s(t_1) = \pi/2$, *e sostituendo in* T *si ha la a.*

I.5
Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3}\omega_h\boldsymbol{u}_h\,.$$

13
Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Esiste una condizione sugli I_{hh} che garantisce che tutti i moti siano periodici e che non tutti siano rotazioni.
b Esiste una condizione sugli I_{hh} che garantisce che nessun moto sia una rotazione.
c Se il momento angolare si mantiene costante nella base fissa, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.
d Nessuna delle altre.
14
Supponiamo che C sia un cubo omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?
a Solo quella di O come centro del cubo e nessun'altra.

b Infinite scelte.
c Nessuna scelta.
d Nessuna delle altre.
15 Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?
a

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2\,.$$

b

$$I_{11}^2\omega_1 + I_{22}^2\omega_2 + I_{33}^2\omega_3\,.$$

c

$$I_{11}\omega_1^2\,.$$

d Nessuna delle altre.
Soluzione
I: a
Il caso in a è vero se e solo se due momenti principali sono uguali tra di loro e il terzo è diverso. La b non vale perché esistono sempre le rotazioni intorno agli assi principali, e la c non vale perché il momento angolare è sempre costante.
II: a
Tutti i moti polari per inerzia sono rotazioni se e solo se i 3 momenti principali sono uguali tra di loro. Questo nel caso del cubo omogeneo avviene solo nel centro, perché in tutti gli altri punti per la proprietà di traslazione delle terne principali centrali e il teorema di Huygens, due momenti sono uguali ma il terzo no.
III: a
Gli integrali primi scalari sono

$$|\boldsymbol{L}_O|^2 = I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 = c\,, \quad T = \frac{1}{2}(I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 + I_{33}\omega_3^2) = c\,.$$

Prova scritta del 04/02/2025

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 04/02/2025

I.1

Una circonferenza materiale γ di raggio R e centro C è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, ove (x_h) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso. Sia $A \in \gamma$ un punto solidale a γ e consideriamo il sistema di riferimento solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_C, (\boldsymbol{u}_h))$ con

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{CA}}{R}\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

La circonferenza è formata da due semicirconferenza omogenee, di masse rispettivamente m_1 e m_2, individuate dal diametro parallelo a $\boldsymbol{u}_1$. Indichiamo con I_{hk} gli elementi della matrice d'inerzia in C relativa alla base $(\boldsymbol{u}_h)$.

01

Vale

a
$$I_{11} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2 \,.$$

b
$$I_{11} = \frac{1}{4}(m_1 + m_2)R^2 \,.$$

c
$$I_{11} = \frac{1}{2\pi}(m_1 + m_2)R^2 \,.$$

d Nessuna delle altre.

02

Vale

a
$$I_{12} = 0 \,.$$

b
$$I_{12} = -\frac{1}{2}(m_1 - m_2)R^2 \,.$$

c
$$I_{12} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2 \,.$$

d Nessuna delle altre.

03

Il momento angolare della circonferenza γ con polo C soddisfa:

a È parallelo a $\boldsymbol{e}_3$.

b È ortogonale a $\boldsymbol{e}_3$.

c Ha componenti parallela e ortogonale a $\boldsymbol{e}_3$ sempre diverse da 0, a parte il caso della quiete.

d Nessuna delle altre.

Soluzione

I: a

Se la circonferenza fosse omogenea di massa $2m$ si avrebbe per essa

$$\widetilde{I}_{11} = \frac{1}{2}\widetilde{I}_{33} = \frac{1}{2}(2m)R^2 = mR^2 \,.$$

Quindi ciascuna delle due semicirconferenze (che è metà di una circonferenza omogenea) ha momento $m_i R^2/2$.

II: a

Infatti $(\boldsymbol{u}_h)$ è principale d'inerzia in C perché: $\boldsymbol{u}_3$ lo è per le proprietà delle lamine; $\boldsymbol{u}_1$ lo è perché ortogonale in C a un piano di simmetria materiale ortogonale per la circonferenza; $\boldsymbol{u}_2$ lo è di conseguenza, come dalla teoria.

III: a
Per definizione

$$\boldsymbol{L}_C = \int_\gamma (\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{X}_C(t)) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}(t,\boldsymbol{\lambda})\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Poiché sia $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_C$ *che* $\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}$ *appartengono al piano* $x_3 = 0$*, il loro prodotto vettoriale è parallelo a* $\boldsymbol{e}_3$*.*

I.2
Un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \ldots, n$, si muove senza vincoli, soggetto al sistema di forze $\boldsymbol{F}_i$ ($\boldsymbol{F}_i$ è la forza applicata su $\boldsymbol{X}_i$). Denotiamo come al solito $\boldsymbol{X}_i = z_{3i-2}\boldsymbol{e}_1 + z_{3i-1}\boldsymbol{e}_2 + z_{3i}\boldsymbol{e}_3$, $i = 1, \ldots, n$ e $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_{3n}) = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, $\dot{\boldsymbol{z}} = (\dot{z}_1, \ldots, \dot{z}_{3n}) = (\dot{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_n)$.
04
Supponiamo che $n = 2$ e

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{z}) = -k(z_1 - z_4)\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{z})\,,$$

con $k > 0$ costante assegnata. Allora
a Il potenziale del sistema di forze è

$$U(\boldsymbol{z}) = -\frac{k}{2}(z_1 - z_4)^2\,.$$

b Il potenziale del sistema di forze è

$$U(\boldsymbol{z}) = -\frac{k}{2}(z_1^2 - z_4^2)\,.$$

c Il potenziale del sistema di forze non esiste.
d Nessuna delle altre.
05
Supponiamo che esista una funzione $U \in C^2(\boldsymbol{R}^{3n})$ tale che

$$\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}}) = \nabla_{\boldsymbol{x}_i} U(\boldsymbol{z}) + \alpha_i \boldsymbol{\omega}_i \times \dot{\boldsymbol{x}}_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

con $\alpha_i \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{\omega}_i \in \boldsymbol{R}^3$ costanti assegnate tali che $\boldsymbol{\omega}_i \neq 0$ per ogni i. Indichiamo

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}|\dot{\boldsymbol{X}}_i(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}_1(t), \ldots, \boldsymbol{X}_n(t))\,.$$

a $\mathcal{E}(t)$ si conserva costante lungo ciascun moto.
b $\mathcal{E}(t)$ si conserva costante lungo ciascun moto se e solo se $\alpha_i = 0$ per ogni i.
c Se $\alpha_i < 0$ per ogni i, allora $\mathcal{E}(t)$ decresce strettamente lungo ciascun moto.
d Nessuna delle altre.
06

Supponiamo che esista una funzione $U \in C^2(\boldsymbol{R}^{3n})$ tale che

$$\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{z}) = \nabla_{\boldsymbol{x}_i} U(\boldsymbol{z}) \,, \quad i = 1 \,, \dots \,, n \,.$$

Dire in quale caso $\boldsymbol{z} = 0$ è un punto di equilibrio stabile.
a

$$U(\boldsymbol{z}) = -\sum_{i=1}^{n} k_i |\boldsymbol{x}_i|^{2i} \,,$$

con $k_i > 0$ costanti assegnate.
b

$$U(\boldsymbol{z}) = -k|\boldsymbol{x}_1|^2 \,,$$

con $k > 0$ costante assegnata.
c

$$U(\boldsymbol{z}) = k|\boldsymbol{z}|^2 \,,$$

con $k > 0$ costante assegnata.
d Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: a
Infatti

$$\nabla_{\boldsymbol{x}_1} U(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{F}_1 \,, \qquad \nabla_{\boldsymbol{x}_2} U(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{F}_2 \,.$$

II: a
Le forze $\alpha_i \boldsymbol{\omega}_i \times \dot{\boldsymbol{X}}_i$ fanno lavoro nullo, perché

$$\alpha_i \boldsymbol{\omega}_i \times \dot{\boldsymbol{X}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{X}}_i = 0 \,.$$

Quindi vale la conservazione dell'energia.
III: a
Nel caso a la U ha un massimo isolato in $\boldsymbol{z} = 0$. Nel caso b ha un massimo, ma non isolato e nel caso c ha un minimo isolato.

I.3

Si consideri un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, con $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e $\boldsymbol{\omega}$ velocità angolare di $\mathcal{M}$. Indichiamo con $\boldsymbol{\lambda}$ le coordinate in $\mathcal{S}$.
Si consideri anche un sistema di punti materiali $(\boldsymbol{X}_i, m_i)$, $i = 1, \dots, n$, con coordinate locali $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^{3n}$, sottoposto a vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0 \,,$$

e con parametrizzazione lagrangiana $\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t)$.
07
In quale dei seguenti casi le componenti lagrangiane delle forze di Coriolis relative a $\mathcal{S}$ sono nulle?
a Se tutti i moti appartengono al piano $\lambda_1 = 0$ e $\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha e^{\alpha t} \boldsymbol{u}_3(t)$, con $\alpha > 0$ costante.

b Se tutti i moti appartengono al piano $\lambda_3 = 0$ e $\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha e^{\alpha t}\boldsymbol{u}_3(t)$, con $\alpha > 0$ costante.
c Se i vincoli sono fissi nel sistema mobile.
d Nessuna delle altre.

08

Supponiamo che i vincoli siano fissi se scritti nelle coordinate del sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$, ossia si possano scrivere come

$$\boldsymbol{f}^{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\lambda}) = 0\,.$$

a Se il sistema ha un solo grado di libertà, ossia $\ell = 1$, le componenti lagrangiane sia delle forze di trascinamento che delle forze di Coriolis sono nulle.
b Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali l'energia meccanica (nel sistema fisso) si conserva.
c L'energia cinetica nel sistema fisso si riduce a una forma quadratica nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$.
d Nessuna delle altre.

09

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha\boldsymbol{u}_3(t)$ con $\alpha > 0$ costante e $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$. Supponiamo anche $\boldsymbol{X}_O(t) = ct\boldsymbol{u}_3(t)$, con $c > 0$ costante.
a L'accelerazione di trascinamento dei moti $\boldsymbol{X}_i$ è ortogonale a $\boldsymbol{e}_3$.
b L'accelerazione di trascinamento dei moti $\boldsymbol{X}_i$ è ortogonale a $\boldsymbol{u}_1$.
c L'accelerazione di trascinamento dei moti $\boldsymbol{X}_i$ è parallela a $\boldsymbol{u}_3$.
d Nessuna delle altre.

Soluzione

I: a

Dalla teoria, perché i moti appartengono a un piano solidale a $\mathcal{S}$ cui appartiene anche $\boldsymbol{\omega}$.

II: d

Le ipotesi in a implicano che le componenti lagrangiane delle forze di Coriolis sono nulle. La b non vale perché per esempio le forze potrebbero essere non conservative. La c non vale perché i vincoli non sono fissi in generale (nel sistema fisso).

III: a

Il moto di $\mathcal{M}$ è tale che $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t, quindi $\boldsymbol{X}_O(t) = ct\boldsymbol{e}_3$ ha accelerazione nulla. Calcoliamo dal teorema di Coriolis

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\scriptscriptstyle T} &= \boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O)] \\ &= \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O)] = -\alpha^2 \left[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_O)\right]_\perp\,,\end{aligned}$$

dal noto Lemma teorico, ove la componente perpendicolare si intende relativa a $\boldsymbol{\omega}$, ossia a $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3$.

I.4

Si consideri il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = U'(x)\,, \qquad U \in C^2(\boldsymbol{R})\,.$$

Nel seguito ci riferiamo al piano delle fasi relativo a questo moto.

10

Quale delle seguenti ipotesi implica che esistano moti periodici non di quiete?

a $U'(0) = 0$, $U''(0) < 0$.

b $U'(0) = 0$, $U''(0) > 0$.

c $U'(0) = 0$, $U''(0) = 0$.

d Nessuna delle altre.

11

In quale dei seguenti casi esistono orbite illimitate?

a

$$U(x) = -\alpha e^{\beta x}\,,$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ costanti.

b

$$U(x) = -\alpha e^{\beta x^2}\,,$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ costanti.

c

$$U(x) = -\alpha x^4 + \beta x^3\,,$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ costanti.

d Nessuna delle altre.

12

Sia

$$U(x) = -\alpha x^4 + \beta x^3\,,$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ costanti.

a Esistono due punti di equilibrio, di cui uno è stabile e l'altro è instabile.

b Esiste un solo punto di equilibrio che è stabile.

c I punti di equilibrio sono tutti instabili.

d Nessuna delle altre.

SOLUZIONE

I: a

La a implica che $x = 0$ sia di equilibrio stabile; quindi esistono, vicine a questo punto, orbite chiuse che corrispondono a moti periodici.

II: a

Come noto, le curve su cui giacciono le orbite dei moti di livello energetico E sono definite sull'insieme in cui

$$E \geq -U(x)\,.$$

Questo insieme è illimitato solo nel caso a, e solo se $E > 0$, caso in cui si ha un'unica orbita illimitata con un punto di inversione.

III: a

Si ha

$$U'(x) = -4\alpha x^3 + 3\beta x^2\,, \qquad U''(x) = -12\alpha x^2 + 6\beta x\,.$$

Perciò si hanno i due punti di equilibrio $x = 0$ e $x = x_1 := 3\beta/(4\alpha)$. Dato che

$$U''\Big(\frac{3\beta}{4\alpha}\Big) = -\frac{9\beta^2}{4\alpha} < 0\,,$$

x_1 è di equilibrio stabile. Poi da

$$U(x) = x^3(-\alpha x + \beta)\,,$$

segue che U cambia segno in $x = 0$ che quindi è di equilibrio instabile.

I.5

Consideriamo un sistema di punti materiali soggetto a vincoli olonomi regolari con coordinate lagrangiane $\boldsymbol{q} \in Q = \boldsymbol{R}^\ell$. Indichiamo con Q_h la componente lagrangiana delle forze relativa alla coordinata q_h. Qui α, β, γ denotano costanti reali positive. Si assume la ipotesi dei lavori virtuali.

13

In quale dei seguenti casi esiste il potenziale lagrangiano?

a Le forze direttamente applicate sono conservative.

b Si ha $\ell = 2$ e

$$Q_1 = q_1 + \alpha t\,, \qquad Q_2 = q_1 + \beta t\,.$$

c Le forze direttamente applicate sono posizionali e i vincoli sono fissi.

d Nessuna delle altre.

14

Dire quale dei seguenti casi può verificarsi.

a Una delle equazioni di Lagrange non contiene nessuna delle q_h.

b Una delle equazioni di Lagrange non contiene nessuna delle $\ddot{q}_h$.

c I vincoli sono fissi, ma l'energia cinetica T^{L} dipende esplicitamente dal tempo t.

d Nessuna delle altre.

15

Dire quale dei seguenti è il potenziale lagrangiano nel caso in cui $\ell = 2$ e

$$Q_1 = \alpha q_2 + \beta t + \gamma \sin q_1\,, \qquad Q_2 = \alpha q_1 + \beta t\,.$$

a

$$U^{\text{L}} = \alpha q_1 q_2 + \beta t(q_1 + q_2) - \gamma \cos q_1\,.$$

b

$$U^{\text{L}} = \alpha q_1 q_2 + \beta t(q_1 + q_2) + \gamma q_2 \sin q_1\,.$$

c

$$U^{\text{L}} = \frac{\alpha}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \beta t(q_1 + q_2) - \gamma \cos q_1\,.$$

d Nessuna delle altre.

Soluzione

I: a

Dalla teoria. La b non vale perché non vale la condizione di chiusura. Nel caso c le componenti sono in sostanza arbitrarie funzioni di $\boldsymbol{q}$.

II: a

Si pensi al caso del moto di punti vincolati al piano $x_3 = 0$ con forze direttamente

applicate nulle. Si ha poi

$$\frac{\partial T^{\text{L}}}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{hk}(\boldsymbol{q}, t)\dot{q}_k + b_h(\boldsymbol{q}, t)\,,$$

con (a_{hk}) definita positiva, quindi b non può valere. La c è impossibile dalla teoria.
III: a
Segue calcolando le derivate del potenziale e uguagliando alle Q_h.

Prova scritta del 11/06/2025

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 11/06/2025

I.1 Consideriamo il moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = U'(x)\,, \qquad U(x) = x(1-x)^2\,, \quad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

01 I punti di equilibrio sono
a Due, uno stabile e uno instabile.
b Due, entrambi stabili.
c Uno solo.
d Nessuna delle altre.
02 Le orbite nel piano delle fasi sono
a Tutte limitate.
b Alcune limitate, altre illimitate.
c Una sola è periodica.
d Nessuna delle altre.
03 Supponiamo che le condizioni iniziali siano $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Il moto risultante è
a Definito solo per t in un intervallo limitato.
b Limitato ma non periodico.
c Periodico.
d Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: a
Si ha dai calcoli

$$U'(x) = (1-x)(1-3x)\,, \quad U''(x) = -4 + 6x\,.$$

Quindi si hanno i punti di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 1/3$, in cui

$$U''(x_1) = 2 > 0\,, \qquad U''(x_2) = -2 < 0\,.$$

Pertanto x_1 è instabile e x_2 è stabile.
II: b
In effetti disegnando il diagramma di fase si vede che le orbite corrispondenti a livelli energetici $E > 0$ sono illimitate e quelle corrispondenti a livelli $E \in (-4/27{,}0)$ sono periodiche (più precisamente una delle due orbite corrispondenti a ciascun livello è periodica).
III: b
Infatti corrisponde al livello energetico $E = 0$, e si trova sull'orbita che tende per $t \to \pm\infty$ al punto di equilibrio instabile (1,0).

I.2 Un sistema di n punti materiali è soggetto a un sistema di vincoli olonomi regolari

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^{3n+1} \to \boldsymbol{R}^m\,.$$

Indichiamo con $\boldsymbol{q}$ un sistema di coordinate lagrangiane e con $\boldsymbol{z}^{\text{L}}$ la relativa parametrizzazione lagrangiana.
04 Lo spazio

$$\langle \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\text{L}}}{\partial q_1}\,, \dots\,, \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\text{L}}}{\partial q_\ell} \rangle \subset \boldsymbol{R}^{3n}$$

soddisfa
a Contiene le reazioni vincolari se vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
b Contiene le componenti lagrangiane delle forze.
c È sempre indipendente dal tempo.
d Nessuna delle altre.
05 Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali, la reazione vincolare complessiva

$$\mathbf{f}_{\text{vin}} = (\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^1\,, \dots\,, \mathbf{f}_{\text{vin}}{}^n) \in \boldsymbol{R}^{3n}$$

è in realtà costretta ad appartenere a un sottospazio di $\boldsymbol{R}^{3n}$ di dimensione
a ℓ.
b 3.
c m.
d Nessuna delle altre.
06 Sia $\ell = 2$, e supponiamo che i vincoli siano fissi. Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica in forma lagrangiana? Qui α, β, γ sono costanti positive.
a

$$T^{\text{L}} = \alpha \dot{q}_1^2 + (\beta + \gamma t)^2 \dot{q}_2^2\,.$$

b

$$T^{\text{L}} = (\alpha^2 + 1)\dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \beta^2 \dot{q}_2^2\,.$$

c

$$T^{\text{L}} = \alpha \dot{q}_1^2 + \beta \dot{q}_2^2 + \gamma \sqrt{1 + \dot{q}_2^2}\,.$$

d Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: d
Quello indicato è lo spazio degli spostamenti virtuali. Le reazioni vincolari stanno nello spazio normale (se vale l'ipotesi dei lavori virtuali). Le componenti lagrangiane delle forze non sono un vettore di $\boldsymbol{R}^{3n}$. Lo spazio indicato dipende in genere dal tempo se i vincoli sono mobili.
II: c
L'ipotesi dei lavori virtuali prescrive esattamente $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ che ha dimensione m.
III: b
La a dipende esplicitamente dal tempo, mentre i vincoli sono fissi. La c non è una forma quadratica nelle $\dot{q}_h$. La b lo è, ed è definita positiva.

I.3 Consideriamo un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ soggetto al campo di forze posizionale $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$.
07 In quale dei seguenti casi è applicabile il teorema di Dirichlet sull'equilibrio stabile, nel punto $\boldsymbol{x} = 0$? Qui $\alpha > 0$ è una costante.
a

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\alpha|\boldsymbol{x}|^3\boldsymbol{x}\,, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\,.$$

b

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \alpha x_2 \boldsymbol{e}_1\,, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\,.$$

c

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\alpha(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)\,, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\,.$$

d Nessuna delle altre.
08 Sia

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \alpha x_1 \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,, \qquad \boldsymbol{x} \neq 0\,.$$

Qui $\alpha > 0$ è costante. Allora
a L'energia meccanica si conserva.
b Tutti i moti sono limitati
c Tutti i moti sono piani.
d Nessuna delle altre.
09 Supponiamo che $\boldsymbol{F} \in C^1(\boldsymbol{R}^3)$ e che soddisfi le condizioni di chiusura

$$\frac{\partial F_h}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_h}\,, \qquad h, k = 1{,}2{,}3\,,$$

su $\boldsymbol{R}^3$. Allora
a Il potenziale di $\boldsymbol{F}$ esiste, ma solo localmente, cioè in genere non è definito su tutto $\boldsymbol{R}^3$.
b Tutti gli eventuali punti di equilibrio sono stabili.
c Tutti gli eventuali punti di equilibrio sono instabili.
d Nessuna delle altre.

Soluzione
I: a
Infatti nel caso a la forza ha il potenziale

$$U(\boldsymbol{x}) = -\frac{\alpha}{5}|\boldsymbol{x}|^5\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}^3\,,$$

che ha un punto di massimo isolato in 0. *Nel caso b la forza non ha potenziale. Nel caso c, ha in effetti potenziale*

$$U(\boldsymbol{x}) = -\frac{\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2)\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\,,$$

che ha un massimo in 0, *ma non isolato.*
II: c
La forza ha direzione radiale. Però dipende anche dalla direzione, quindi sappiamo dalla teoria che non è conservativa. Se $x_1 = 0$ *si annulla, quindi per esempio ammette il moto*

$$\boldsymbol{X}(t) = t\boldsymbol{e}_2\,, \qquad t > 0\,,$$

che non è limitato. Il moto comunque è centrale e quindi è piano.
III: d
Dato che $\boldsymbol{R}^3$ *è semplicemente connesso, la chiusura di* $\boldsymbol{F}$ *garantisce l'esistenza di un potenziale su tutto* $\boldsymbol{R}^3$. *La natura dei punti di equilibrio è indipendente dalla conservatività della forza.*

I.4 Un corpo rigido C si muove di moto polare di polo O. Il sistema di riferimento $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ non è necessariamente principale, ma è solidale. Scriviamo come al solito

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h\,.$$

Supponiamo che all'istante $t = 0$ si abbia $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
10 Supponiamo che il moto sia polare per inerzia. Allora
a Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è principale d'inerzia in O, e l'ellissoide d'inerzia in O è di rotazione, almeno una delle componenti ω_h è costante durante il moto.
b Necessariamente allora $(\boldsymbol{u}_h)$ è principale d'inerzia in O.
c Non si può avere che $\boldsymbol{\omega}$ si mantenga costante (nella terna fissa) durante il moto.
d Nessuna delle altre.
11 Supponiamo che il momento delle forze esterne sia $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(t) = \mu\boldsymbol{e}_1$ con $\mu > 0$ costante, per ogni t, e che $(\boldsymbol{u}_h)$ sia principale d'inerzia in O. Allora:
a Se il corpo parte da fermo, il moto è una rotazione.
b L'energia cinetica è costante.
c Il momento angolare $\boldsymbol{L}_O(t)$ è costante (nella terna fissa).
d Nessuna delle altre.
12 Supponiamo che l'energia cinetica $T(t)$ soddisfi per ogni t la

$$T(t) \geq c > 0\,,$$

per un'opportuna costante $c > 0$. Allora
a $T(t)$ non può mantenersi costante.
b $T(t)$ deve mantenersi limitata.
c Deve valere $|\boldsymbol{\omega}(t)| \geq c_0 > 0$ per ogni t, per un'opportuna costante $c_0 > 0$.
d Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: a
Infatti nel caso a tutti i moti polari sono precessioni regolari o rotazioni. La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ si mantiene costante se il moto è una rotazione.
II: a
Sia $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}(0) = \mu \boldsymbol{u}_1(0)$, $\mu \neq 0$ costante. Allora si vede subito che le equazioni di Eulero sono soddisfatte da $\boldsymbol{\omega}(t) = \mu t \boldsymbol{u}_1(t)/I_{11}$, con $\boldsymbol{u}_1(t) = \boldsymbol{e}_1$. Dunque vale la a e non la b. Quanto alla c, non può valere per la seconda equazione globale della dinamica.
III: c
L'energia cinetica si mantiene costante nei moti polari per inerzia, per esempio. Non è detto in genere sia limitata, basti vedere l'esempio della seconda domanda. È noto

$$|\boldsymbol{\omega}(t)|^2 \max_h I_{hh} \geq 2T(t) \geq 2c\,,$$

da cui la limitazione cercata.

I.5 Consideriamo un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi regolari, con parametrizzazione lagrangiana $\boldsymbol{z}^{\text{L}}(\boldsymbol{q}, t)$, $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^\ell$.
13 Supponiamo che i vincoli siano fissi. Allora
a Le componenti lagrangiane delle forze sono indipendenti dal tempo.
b L'energia cinetica in forma lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo.
c L'energia cinetica in forma lagrangiana dipende esplicitamente da ciascuna delle q_h, $h = 1, \ldots, \ell$.
d Nessuna delle altre.
14 Valga l'ipotesi dei lavori virtuali. Le equazioni di Lagrange sono
a Un sistema di equazioni differenziali del primo ordine.
b Un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine.
c Un sistema di equazioni differenziali del terzo ordine.
d Nessuna delle altre.
15 In quale dei seguenti casi la forma quadratica nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$ contenuta nell'energia cinetica in forma lagrangiana può essere solo semidefinita positiva?
a Se tra i corpi rigidi ci sono aste rigide.
b Se tra i corpi rigidi ci sono punti materiali.
c Se non vale l'ipotesi dei lavori virtuali.
d Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: b
Dalla teoria. La a non vale: le forze e quindi le loro componenti lagrangiane possono dipendere dal tempo. La c non vale: per un punto materiale vincolato al pia-

no, l'energia cinetica è una forma quadratica a coefficienti costanti (in coordinate cartesiane).
II: b
Dalla teoria.
III: d
La forma quadratica dell'energia cinetica in forma lagrangiana è sempre definita positiva.

Prova scritta del 04/07/2025

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

Prova scritta del 04/07/2025

I.1 In ciascun caso si risponda alla domanda sui vincoli.
Le x_h denotano le coordinate nel sistema fisso, e le x_{hP} denotano le coordinate del punto P. La $(\boldsymbol{e}_h)$ è la base fissa.
01 L'asta rigida di estremi A e B, di lunghezza $L > 0$, è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$. Quali dei seguenti vincoli (in un opportuno insieme di coordinate locali per il rigido) sono quelli corretti?
a $x_{3A} = 0$.
b $x_{3A} = 0$, $x_{3B} = 0$.
c $x_{3A} = x_{3B}$.
d Nessuna delle altre.
02 L'asta rigida di estremi A e B, di lunghezza $L > 0$, è vincolata da $(\boldsymbol{X}_A - \boldsymbol{X}_B) \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$. Quali dei seguenti vincoli (in un opportuno insieme di coordinate locali per il rigido) sono quelli corretti?
a $x_{3A} = 0$.
b $x_{3A} = 0$, $x_{3B} = 0$.
c $x_{3A} - x_{3B} = 0$.
d Nessuna delle altre.
03 L'asta rigida di estremi A e B, di lunghezza $L > 0$, è vincolata da $(\boldsymbol{X}_A - \boldsymbol{X}_B) \times \boldsymbol{e}_3 = 0$. Quali dei seguenti vincoli (in un opportuno insieme di coordinate locali per il rigido) sono quelli corretti?
a $x_{3A} = 0$.
b $x_{1A} - x_{1B} = 0$, $x_{2A} - x_{2B} = 0$.
c $x_{3A} = x_{3B}$.
d Nessuna delle altre.
Soluzione

I: b
Infatti questo vincolo impone che entrambi gli estremi dell'asta siano nel piano $x_3 = 0$.
II: c
Infatti

$$(\boldsymbol{X}_A - \boldsymbol{X}_B) \cdot \boldsymbol{e}_3 = x_{3A} - x_{3B} \,.$$

III: b
Infatti

$$(\boldsymbol{X}_A - \boldsymbol{X}_B) \times \boldsymbol{e}_3 = (x_{2A} - x_{2B})\boldsymbol{e}_1 - (x_{1A} - x_{1B})\boldsymbol{e}_2 \,.$$

I.2 Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, s ascissa curvilinea, con $k(s) > 0$. La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$.
04 Si assuma che la curva sia piana. Allora
a L'accelerazione $\ddot{\boldsymbol{X}}$ risulta parallela al piano della curva.
b L'accelerazione $\ddot{\boldsymbol{X}}$ risulta ortogonale alla curva.
c La velocità può non essere tangente alla curva.
d Nessuna delle altre.
05 Sia $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ con $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}$.
a Se il vincolo è liscio l'energia cinetica si conserva.
b La forza prescritta è incompatibile con l'ipotesi di vincolo scabro.
c Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali l'energia meccanica si conserva.
d Nessuna delle altre.
06 Supponiamo che il vincolo sia liscio e che

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad s \in (-\pi R, \pi R) \,.$$

Sia $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ con $\boldsymbol{F}(s) = -\alpha s\boldsymbol{T}$, $\alpha > 0$ costante, e si assumano le condizioni iniziali $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0$.
a Qualunque sia v_0, si ha $|s(t)| \to \pi R$ in un tempo finito.
b Esistono v_0 tali che $|s(t)| < \pi R$ per ogni $t \in (0, +\infty)$.
c È possibile che $s(t) \to \pi R/2$ per $t \to +\infty$.
d Nessuna delle altre.
Soluzione
I: a
Infatti $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ *appartengono al piano della curva, e* $\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{T} + k\dot{s}^2\boldsymbol{N}$.
II: c
Infatti la forza è conservativa con potenziale

$$U(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3}|\boldsymbol{x}|^3 \,.$$

III: b
L'equazione di moto risulta

$$m\ddot{s} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} = -\alpha s \,.$$

Si tratta dell'equazione dei moti armonici con soluzione (date le condizioni iniziali sopra)

$$s(t) = \sqrt{\frac{m}{\alpha}} v_0 \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}} t\right).$$

Segue la b se

$$|v_0| < \pi R \sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

I.3 Si consideri un sistema di punti materiali soggetti a vincoli olonomi regolari, con parametri lagrangiani $\boldsymbol{q} \in Q \subset \boldsymbol{R}^\ell$. Si assume l'ipotesi dei lavori virtuali.

07 Quale delle seguenti condizioni garantisce che esista il potenziale lagrangiano?

a Le componenti lagrangiane delle forze Q_h non dipendono dalle $\dot{\boldsymbol{q}}$.

b I vincoli sono fissi.

c Si ha $\ell = 1$.

d Nessuna delle altre.

08 Quando le reazioni vincolari fanno lavoro complessivo nullo?

a Se i vincoli sono fissi.

b Se le forze direttamente applicate sono conservative.

c Se il sistema è costituito da un solo punto.

d Nessuna delle altre.

09 Quando l'atto di moto $\dot{\boldsymbol{z}}$ del sistema appartiene a $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$?

a Se i vincoli sono fissi.

b Se le forze direttamente applicate sono conservative.

c Se il sistema è costituito da un solo punto.

d Nessuna delle altre.

Soluzione

I: d

La a è una condizione necessaria, ma non sufficiente: infatti si deve avere che il campo (Q_h) è integrabile.

La b non è necessaria, né sufficiente.

La c diviene sufficiente insieme a $Q_1 = Q_1(q_1, t)$.

II: a

Infatti il lavoro complessivo virtuale delle reazioni vincolari è nullo, per l'ipotesi dei lavori virtuali. Ma il lavoro virtuale coincide con quello effettivo se i vincoli sono fissi.

III: a

Infatti l'atto di moto appartiene allo spazio degli spostamenti effettivi, che coincide con quello degli spostamenti virtuali se i vincoli sono fissi.

I.4 Sia C un corpo rigido non degenere vincolato a muoversi di moto polare di polo $\boldsymbol{X}_O$. Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale al corpo, non necessariamente principale.

10 Quando il moto può essere di rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_1$?

a Se $\boldsymbol{u}_1$ è principale e $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ ha componente ortogonale a $\boldsymbol{u}_1$ non nulla.

b Se $\boldsymbol{u}_1$ è principale e $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ ha componente ortogonale a $\boldsymbol{u}_1$ nulla.
c Solo se $\boldsymbol{u}_1$ non è principale.
d Nessuna delle altre.
11 Il moto sia polare per inerzia. Allora
a Tutti i moti sono rotazioni costanti.
b Nessun moto è una rotazione.
c Il momento delle quantità di moto è solidale al corpo.
d Nessuna delle altre.
12 Quale delle seguenti determina il moto del corpo? (Sotto le usuali ipotesi di regolarità.)
a La prima equazione globale della dinamica.
b La conservazione dell'energia.
c Le equazioni di Eulero.
d Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: b
Dalla teoria.
II: d
I moti polari per inerzia sono rotazioni se e solo se $\boldsymbol{\omega}$ risulta parallelo a un asse principale in qualche istante. Inoltre il momento delle quantità di moto è costante, ma non sempre solidale.
III: c
Le equazioni di Eulero sono un sistema normalizzabile negli angoli di Eulero, e quindi determinano il moto del corpo, assegnate le condizioni iniziali e ovviamente le forze. La conservazione dell'energia può non valere.

I.5 Un rettangolo omogeneo di lati con lunghezze a e b, $a > b$, è vincolato a ruotare intorno a un asse fisso passante per due vertici opposti (ossia intorno a una diagonale del rettangolo). I vincoli sono lisci, e il centro G del rettangolo è fisso.
13 Si assuma che il momento rispetto a G delle forze direttamente applicate sia parallelo all'asse di rotazione e che il moto non sia la quiete. Allora
a Il momento rispetto a G delle reazioni vincolari è sicuramente nullo.
b Il momento rispetto a G delle reazioni vincolari è sicuramente non nullo.
c L'energia cinetica è costante.
d Nessuna delle altre.
14 Quante terne solidali principali di inerzia esistono in G?
a Infinite.
b Nessuna.
c Una.
d Nessuna delle altre.
15 Supponiamo che le forze direttamente applicate abbiano momento $\alpha\boldsymbol{u}$, con $\alpha > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ versore dell'asse di rotazione. Il moto non sia di quiete. Allora l'energia cinetica del corpo
a Non si mantiene costante.

b Si mantiene costante.
c Il momento assegnato è impossibile sotto l'ipotesi di vincolo liscio.
d Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: b
Infatti l'asse di rotazione è non principale in G, quindi dalla teoria si sa che il momento delle forze esterne deve avere componente ortogonale all'asse di rotazione non nulla. Poiché il momento delle forze direttamente applicate invece ha tale componente nulla, deve averla non nulla il momento delle reazioni vincolari, perché $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = \boldsymbol{M}_{G,d.a.} + \boldsymbol{M}_{\text{vin}}^G$. *L'energia cinetica in genere non è costante perché ha derivata temporale* $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega}$.
II: c
Infatti ne esiste almeno una, e per motivi di simmetria materiale ortogonale si può prendere quella con due versori paralleli ai lati del rettangolo e il terzo ortogonale al piano del rettangolo. Poiché i 3 *momenti d'inerzia relativi sono tutti diversi tra di loro, non possono esistere altri versori principali, cioè autovettori della matrice.*
III: a
Si sa dalla teoria che nei moti polari vale

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega} = (\alpha \boldsymbol{u}) \cdot (\omega \boldsymbol{u}) = \alpha\omega \neq 0\,,$$

se indichiamo $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{u}$. *Nella seconda uguaglianza si è usata l'ipotesi di vincolo liscio, che prescrive* $\boldsymbol{M}_{\text{vin}}^G \cdot \boldsymbol{u} = 0$.