Meccanica Razionale
Esercizi di esame e di controllo
Versione senza risoluzioni

Daniele Andreucci
Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Università di Roma La Sapienza
via A.Scarpa 16, 00161 Roma
daniele.andreucci@sbai.uniroma1.it

launch_daexam 20250829 12.15

NOTE:

- (ex): esercizi d'esame; (hw): esercizi di controllo.
- *Salvo diverso avviso:*
  - coni e cilindri sono circolari retti;
  - i corpi rigidi sono omogenei;
  - si assume l'ipotesi dei lavori virtuali.

Indice

100. Generalità

1. [29/9/2014 (hw)I] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
\ddot{\varphi} + a\varphi &= b\cos(\omega t)\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,,\\
\varphi(0) &= 0\,,\\
\varphi(0) &= 1\,,
\end{aligned}
$$

per ogni scelta di a, b, $\omega \in \boldsymbol{R}$ con $b > 0$.

2. [29/9/2014 (hw)I] Supponiamo che $\varphi_0 \in \boldsymbol{R}$, $F \in C^1(\boldsymbol{R})$, $F > 0$, e che

$$\int_{\varphi_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{F(s)} := \lim_{k\to\infty} \int_{\varphi_0}^{k} \frac{\mathrm{d}s}{F(s)} = L < \infty\,.$$

Dimostrare che la soluzione di

$$\dot\varphi = F(\varphi)\,, \qquad \varphi(0) = \varphi_0\,,$$

non può essere definita per $t \geq L$.

3. [29/9/2014 (hw)I] Trovare tutte le soluzioni di ciascuno dei tre problemi:

$$1)\begin{cases} \dot\varphi = \varphi^{\frac{3}{5}}\,, \\ \varphi(0) = 0\,; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} \dot\varphi = \varphi^{\frac{3}{4}}\,, \\ \varphi(0) = 0\,; \end{cases} \qquad 3)\begin{cases} \dot\varphi = \varphi^{\frac{4}{5}}\,, \\ \varphi(0) = 0\,. \end{cases}$$

4. [29/9/2014 (hw)I] Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\varphi_1\varphi_2 \\ \ln\varphi_1 - 3\varphi_2^2 + 1 \end{pmatrix}\,, \qquad \begin{pmatrix}\varphi_1(0)\\ \varphi_2(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\,,$$

sapendo che si scrive nella forma

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at^2} \\ bt \end{pmatrix}\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,,$$

con a, $b \in \boldsymbol{R}$ costanti.

5. [6/10/2014 (hw)I] Si consideri il versore funzione di t

$$\boldsymbol{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big[\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\big]\,.$$

Qui $\omega > 0$ è una costante assegnata, e $t \in \boldsymbol{R}$.
Si costruisca una base ortonormale $(\boldsymbol{u}_h(t))$ positiva (ossia congruente con la base standard $(\boldsymbol{e}_h)$ di $\boldsymbol{R}^3$) in modo che

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \boldsymbol{u}(t)\,, \qquad \boldsymbol{u}_2(t)\cdot\boldsymbol{e}_3 = 0\,.$$

6. [6/10/2014 (hw)I] Si scriva la rappresentazione parametrica di classe C^1 dell'ellisse intersezione del cilindro e del piano

$$\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \\ &x_2 - x_3 = 0\,. \end{aligned}$$

7. [6/10/2014 (hw)I] Si scriva almeno una parametrizzazione per ciascuno dei seguenti oggetti geometrici mobili, ove $\alpha(t)$ è un'arbitraria funzione del tempo:

1. Circonferenza con diametro di estremi

$$(-R,0,0)\,, \qquad (R,0,0)\,,$$

il cui piano forma all'istante t l'angolo $\alpha(t)$ con il piano $x_3 = 0$.

2. Sfera di raggio R e centro C dato da

$$\overrightarrow{OC} = L\cos\alpha(t)\boldsymbol{e}_1 + L\sin\alpha(t)\boldsymbol{e}_2\,;$$

qui O è l'origine del sistema di riferimento.

3. Quadrato (pieno) $ABCD$ di lato L che giace sul piano

$$-x_1\sin\alpha(t) + x_2\cos\alpha(t) = 0\,,$$

e tale che

$$A = O\,, \qquad \overrightarrow{AB} = L\boldsymbol{e}_3\,.$$

120. Conservazione dell'energia

1. [22/9/2006 (ex)I] Un punto materiale è vincolato a muoversi nel piano (x, y) ed è soggetto a un campo di forze di potenziale

$$U(x, y) = -kx^2y^2\,.$$

Si dimostri che non si possono avere moti illimitati in cui il punto rimanga sempre nel settore

$$A = \{(x, y) \mid 0 < x < y < 2x\}\,.$$

2. [1/4/2008 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = \big(a\tau, b\tau^2, c\tau^3\big)\,, \qquad -\infty < \tau < \infty\,,$$

ed è soggetto a un campo di forze di potenziale

$$U(\boldsymbol{x}) = -\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}|^2} - \beta|\boldsymbol{x}|^2\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\}\,.$$

Qui a, b, c, α, β sono costanti positive.
Dimostrare che ciascun moto $\boldsymbol{\varphi}$ soddisfa

$$\varepsilon \le |\boldsymbol{\varphi}(t)| \le C\,,$$

per due opportune costanti positive C, ε (dipendenti dal moto), e per ogni t per cui è definito.

3. [17/2/2014 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sull'asse x_3. Su di esso oltre al peso $-mg\boldsymbol{e}_3$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \frac{k}{x_3^2}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Le condizioni iniziali sono

$$\overrightarrow{OP}(0) = L\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = -v_0\boldsymbol{e}_3 \,,$$

con L, $v_0 > 0$ costanti.
Determinare la quota a cui la velocità si annulla (per la prima volta).

4. [17/2/2014 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sull'asse x_3. Su di esso oltre al peso $-mg\boldsymbol{e}_3$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \frac{k}{x_3^2}\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Le condizioni iniziali sono

$$\overrightarrow{OP}(0) = L\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_3 \,,$$

con L, $v_0 > 0$ costanti.
Determinare la quota a cui la velocità si annulla (per la prima volta).

5. [10/2/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$1 + \frac{x_3^2}{a^2} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{b} \,,$$

ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda e^{-kx_3}\boldsymbol{e}_3 \,,$$

ove λ, $k > 0$ sono costanti.
Si dimostri che i moti di P hanno tutti quota x_3 limitata inferiormente.

6. [10/2/2015 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$1 + \frac{x_1^2}{a^2} = \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{b} \,,$$

ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -\lambda e^{kx_1}\boldsymbol{e}_1 \,,$$

ove λ, $k > 0$ sono costanti.
Si dimostri che i moti di P hanno tutti ascissa x_1 limitata superiormente.

7. [3/9/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = -k e^{\alpha |\boldsymbol{x}|^2} \boldsymbol{x} - \lambda |\boldsymbol{x}| \dot{\boldsymbol{x}} \,,$$

ove α, k, $\lambda > 0$ sono assegnati.
All'istante iniziale si ha per il moto $\boldsymbol{X}$ del punto P

$$\boldsymbol{X}(0) = R\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Si dimostri che per ogni $t \geq 0$

$$|\boldsymbol{X}(t)| \leq C \,,$$

determinando la costante C in funzione di k, α, λ, m, R, v_0.

8. [19/3/2016 (ex)I] Un punto materiale di massa m è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = -k\boldsymbol{x}(\lambda^2 + |\boldsymbol{x}|^2) + \boldsymbol{u} \times \dot{\boldsymbol{x}} \,,$$

ove $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^3$, k, $\lambda > 0$, sono costanti assegnate.
Si dimostri che tutti i moti sono limitati e si determini la limitazione in funzione dei parametri e delle condizioni iniziali.

9. [15/01/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove vincolato al piano $z = 0$ e soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = -\alpha x^2 \boldsymbol{e}_1 - \beta y^3 \boldsymbol{e}_2 \,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti.
Si dimostri che i moti non possono diventare illimitati nel semipiano $x > 0$.

10. [15/01/2018 (ex)II] Un punto materiale P di massa m si muove vincolato al piano $z = 0$ e soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = -\alpha x^3 \boldsymbol{e}_1 - \beta y^4 \boldsymbol{e}_2 \,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti.
Si dimostri che i moti non possono diventare illimitati nel semipiano $y > 0$.

11. [27/06/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = -kxy^2 \boldsymbol{e}_1 - kx^2 y \boldsymbol{e}_2 - \lambda z \boldsymbol{e}_3 \,,$$

ed è vincolato alla curva γ parametrizzata da

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = a\tau \boldsymbol{e}_1 + b\tau^2 \boldsymbol{e}_2 + c\cos\tau \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \tau \in \boldsymbol{R} \,.$$

Qui k, λ, a, b, c sono costanti positive assegnate. All'istante iniziale valgono

$$\overrightarrow{OP}(0) = c\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_1 \,,$$

con $v_0 > 0$.
Dimostrare che il moto resta limitato per $t > 0$.

12. [06/02/2020 (ex)I] Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva

$$x_2 = \alpha x_1^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Non ci sono forze direttamente applicate.
All'istante iniziale $t = 0$,

$$X_1(0) = x_0 > 0 \,, \qquad \dot{X}_1(0) = c > 0 \,.$$

Si completino le condizioni iniziali ricavando $\boldsymbol{X}(0)$, $\boldsymbol{v}(0)$ e si dimostri che

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{X}_1(t) = 0 \,.$$

[Si può assumere che il moto sia definito su $[0, +\infty]$.]

13. [06/02/2020 (ex)II] Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla curva

$$x_3 = \alpha x_1^2 \,, \qquad x_2 = 0 \,.$$

Non ci sono forze direttamente applicate.
All'istante iniziale $t = 0$,

$$X_1(0) = x_0 < 0 \,, \qquad \dot{X}_1(0) = c < 0 \,.$$

Si completino le condizioni iniziali ricavando $\boldsymbol{X}(0)$, $\boldsymbol{v}(0)$ e si dimostri che

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{X}_1(t) = 0 \,.$$

[Si può assumere che il moto sia definito su $[0, +\infty]$.]

150. Piano delle fasi

1. [18/7/2005 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r.
Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x) = kx|x| \,,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si determinino tutti i moti che rimangono limitati per $t \to \infty$.

2. [18/7/2005 (ex)II] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r.
Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x) = kx^3|x| \,,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si determinino tutti i moti che rimangono limitati per $t \to \infty$.

3. [7/4/2006 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r.
Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x) = k \cos x \,,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r, e k è una costante positiva.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si discuta qualitativamente l'andamento dei moti.

4. [13/12/2007 (ex)I] Tracciare nel piano delle fasi le orbite corrispondenti ai moti determinati da

$$m\ddot{x} = F(x) \,,$$

ove

$$F(x) = ax \sin(bx^2) \,,$$

e a, $b > 0$ sono costanti.

5. [13/12/2007 (ex)II] Tracciare nel piano delle fasi le orbite corrispondenti ai moti determinati da

$$m\ddot{x} = F(x) \,,$$

ove

$$F(x) = -ax \cos(bx^2) \,,$$

e a, $b > 0$ sono costanti.

6. [1/7/2008 (ex)I] Disegnare il diagramma nel piano delle fasi corrispondente al potenziale

$$U(x) = -ax^2 + bx^5 \,,$$

ove a, b sono costanti positive.

7. [1/7/2008 (ex)II] Disegnare il diagramma nel piano delle fasi corrispondente al potenziale

$$U(x) = -ax^4 + bx^7 \,,$$

ove a, b sono costanti positive.

8. [12/6/2009 (ex)I] Tracciare il diagramma nel piano delle fasi per i moti

$$m\ddot{x} = U'(x)\,,$$

con

$$U(x) = kx^3 e^{-ax}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui m, a, k sono costanti positive.

9. [12/6/2009 (ex)II] Tracciare il diagramma nel piano delle fasi per i moti

$$m\ddot{x} = U'(x)\,,$$

con

$$U(x) = -k(x-1)^3 e^{ax}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui m, $a < 3$, k sono costanti positive.

10. [20/11/2009 (ex)I] Tracciare le orbite nel piano delle fasi relative al potenziale

$$U(x) = \frac{x}{1+x^2}\,,$$

e discutere la stabilità dei punti di equilibrio.

11. [22/2/2010 (ex)I] Tracciare nel piano delle fasi il diagramma delle orbite corrispondenti al potenziale

$$U(x) = \alpha \sin(\beta x|x|)\,,$$

ove α e β sono costanti positive, mettendo in evidenza tutti i punti di equilibrio.

12. [22/2/2010 (ex)II] Tracciare nel piano delle fasi il diagramma delle orbite corrispondenti al potenziale

$$U(x) = -\alpha \sin(\beta x|x|)\,,$$

ove α e β sono costanti positive, mettendo in evidenza tutti i punti di equilibrio.

13. [20/1/2014 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r. Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x) = a(x^2 - b^2)^2\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r, e a, b sono costanti positive.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si discuta qualitativamente l'andamento dei moti.

14. [20/1/2014 (ex)II] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r. Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x) = -a(x^2 - b^2)^2 \,, \qquad x \in \boldsymbol{R} \,,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r, e a, b sono costanti positive.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si discuta qualitativamente l'andamento dei moti.

15. [17/7/2014 (ex)I] Tracciare il diagramma delle orbite nel piano delle fasi del moto di un punto di massa m corrispondente al potenziale

$$U(x) = x - \sqrt{x} \,, \qquad x > 0 \,.$$

16. [13/1/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r.
Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x) = x^2(x-2)(x-4)^2 \,, \qquad x \in \boldsymbol{R} \,,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si determinino tutti i moti che rimangono limitati per $t \to +\infty$.

17. [13/1/2015 (ex)II] Un punto materiale P di massa m si muove di moto rettilineo su una retta r.
Il punto è soggetto a una forza di potenziale

$$U(x) = x^2(x+2)(x+4)^2 \,, \qquad x \in \boldsymbol{R} \,,$$

ove x è l'ascissa di P misurata su r.
Si disegnino le orbite nel piano delle fasi, e si determinino tutti i moti che rimangono limitati per $t \to +\infty$.

18. [12/1/2015 (ex)I] Si disegnino le orbite nel piano delle fasi relative ai moti

$$m\ddot{x} = U'(x) \,,$$

ove

$$U(x) = \begin{cases} x(x+1) \,, & x \leq 0 \,, \\ \dfrac{x}{x^2+1} \,, & x > 0 \,, \end{cases}$$

spiegando come si è ottenuta la costruzione.
Quindi per ciascuna orbita si determini se esista il limite

$$\lim_{t \to +\infty} \dot{x}(t) \,,$$

e se esiste lo si calcoli.

19. [12/1/2015 (ex)II] Si disegnino le orbite nel piano delle fasi relative ai moti
$$m\ddot{x} = U'(x)\,,$$
ove
$$U(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x}{x^2+1}\,, & x < 0\,, \\ x(x-2)\,, & x \geq 0\,, \end{cases}$$
spiegando come si è ottenuta la costruzione.
Quindi per ciascuna orbita si determini se esista il limite
$$\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t)\,,$$
e se esiste lo si calcoli.

20. [6/9/2016 (ex)I] Disegnare e discutere il diagramma di fase del moto
$$m\ddot{x} = U'(x)\,,$$
ove
$$U(x) = ax^3(|x| - b)\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$
Qui a, $b > 0$ sono costanti assegnate.

21. [17/01/2017 (ex)I] Tracciare il diagramma nel piano delle fasi dei moti di un punto di massa m soggetto a forze di potenziale
$$U(x) = axe^{-bx^2}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$
ove a e b sono costanti positive, spiegando come si è ottenuta la costruzione.

22. [17/01/2017 (ex)II] Tracciare il diagramma nel piano delle fasi dei moti di un punto di massa m soggetto a forze di potenziale
$$U(x) = -\frac{ax}{1+bx^4}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,$$
ove a e b sono costanti positive, spiegando come si è ottenuta la costruzione.

23. [13/02/2018 (ex)I] Studiare e disegnare le orbite nel piano delle fasi relative al potenziale
$$U(x) = -e^{-3x}(3x+1)(1+x)\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

24. [13/02/2018 (ex)II] Studiare e disegnare le orbite nel piano delle fasi relative al potenziale
$$U(x) = e^{x}(x-1)(3-x)\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

25. [15/01/2019 (ex)I] Disegnare il ritratto di fase dei moti relativi al potenziale

$$U(x) = \frac{(x-1)^2(x-2)^2}{x^2}\,, \qquad x > 0\,,$$

spiegando come si è ottenuta la costruzione.

26. [15/01/2019 (ex)II] Disegnare il ritratto di fase dei moti relativi al potenziale

$$U(x) = \frac{4(x-1)^2(x-3)^2}{x^2}\,, \qquad x > 0\,,$$

spiegando come si è ottenuta la costruzione.

27. [06/02/2020 (ex)I] Un moto unidimensionale si svolge con potenziale

$$U(x) = \operatorname{arctg}\left(ax^3 + bx^2\right), \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui a, b sono costanti positive.
Tracciare il diagramma di fase dei moti e individuare le orbite corrispondenti a moti per cui vale almeno una tra le relazioni

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = 0\,, \qquad \lim_{t\to-\infty} \dot{x}(t) = 0\,.$$

28. [06/02/2020 (ex)II] Un moto unidimensionale si svolge con potenziale

$$U(x) = -\operatorname{arctg}\left(ax^3 - bx^2\right), \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui a, b sono costanti positive.
Tracciare il diagramma di fase dei moti e individuare le orbite corrispondenti a moti per cui vale almeno una tra le relazioni

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = 0\,, \qquad \lim_{t\to-\infty} \dot{x}(t) = 0\,.$$

220. Moti centrali e simili

1. [7/7/2006 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|^4}\,,$$

con $k > 0$ costante. Qui O è l'origine del sistema di riferimento fisso. Le condizioni iniziali del moto sono

$$P(0) = (r_0, 0, 0)\,, \qquad \boldsymbol{v}_P(0) = (0, v_0, 0)\,,$$

con r_0, $v_0 > 0$ tali che
$$k = r_0^2 v_0^2 m \,.$$
Determinare la traiettoria di P.
[Suggerimento: usare la formula di Binet.]

2. [7/7/2006 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è soggetto alla forza
$$\boldsymbol{F} = -k \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|^4} \,,$$
con $k > 0$ costante. Qui O è l'origine del sistema di riferimento fisso. Le condizioni iniziali del moto sono
$$P(0) = (0, r_0, 0) \,, \qquad \boldsymbol{v}_P(0) = (-v_0, 0, 0) \,,$$
con r_0, $v_0 > 0$ tali che
$$k = r_0^2 v_0^2 m \,.$$
Determinare la traiettoria di P.
[Suggerimento: usare la formula di Binet.]

3. [17/9/2007 (ex)I] Un punto P di massa m è soggetto al campo di forze
$$\boldsymbol{F} = k \left| \overrightarrow{OP} \right|^{\frac{1}{2}} \overrightarrow{OP} \,,$$
ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e $k > 0$ è costante.
All'istante iniziale P occupa la posizione
$$\overrightarrow{OP}(0) = L\boldsymbol{e}_1 \,,$$
con velocità iniziale
$$\boldsymbol{v}(0) = \alpha \boldsymbol{e}_2 + \beta \boldsymbol{e}_3 \,.$$
Si dimostri che il moto di P avviene su un piano fisso Π, si trovi l'equazione di Π, e si calcoli la velocità areolare di P.

4. [17/9/2007 (ex)II] Un punto P di massa m è soggetto al campo di forze
$$\boldsymbol{F} = -k \left| \overrightarrow{OP} \right|^{4} \overrightarrow{OP} \,,$$
ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e $k > 0$ è costante.
All'istante iniziale P occupa la posizione
$$\overrightarrow{OP}(0) = L\boldsymbol{e}_2 \,,$$
ove $L > 0$, con velocità iniziale
$$\boldsymbol{v}(0) = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Si dimostri che il moto di P avviene su un piano fisso Π, si trovi l'equazione di Π, e si calcoli la velocità areolare di P.

5. [18/7/2008 (ex)I] Un punto P di massa m si muove sul piano $x_3 = 0$, soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha r^{-3} \cos^2 \varphi \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} ,$$

ove O è l'origine e r, φ sono le coordinate polari nel piano.
All'istante iniziale

$$\overrightarrow{OP}(0) = L\boldsymbol{e}_1 , \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_2 .$$

Qui α, L e v_0 sono costanti positive.

1. Si calcoli la velocità areolare di P, dimostrando che rimane costante nel moto.

2. Si dimostri che lungo il moto r è crescente.

6. [18/7/2008 (ex)II] Un punto P di massa m si muove sul piano $x_3 = 0$, soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha r^{3} \sin^2 \varphi \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} ,$$

ove O è l'origine e r, φ sono le coordinate polari nel piano.
All'istante iniziale

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_2 , \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_1 .$$

Qui α, R e v_0 sono costanti positive.

1. Si calcoli la velocità areolare di P, dimostrando che rimane costante nel moto.

2. Si dimostri che lungo il moto r è crescente.

7. [9/4/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è soggetto al campo di forze

$$\boldsymbol{F} = k \frac{\overrightarrow{OP}}{|OP|} ,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
All'istante iniziale P occupa la posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_2 + R\boldsymbol{e}_3 ,$$

con velocità iniziale
$$\boldsymbol{v}(0) = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2 \,.$$
Qui α, β, k, R sono costanti positive.
Si dimostri che il moto avviene su un piano fisso e si determini l'equazione di tale piano.

310. Vincoli olonomi

1. [09/01/2020 (ex)I] Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_h, m)$ $h = 1, 2$, entrambi di massa m, rappresentati da
$$\boldsymbol{X}_1 = z_1 \boldsymbol{e}_1 + z_2 \boldsymbol{e}_2 + z_3 \boldsymbol{e}_3 \,, \quad \boldsymbol{X}_2 = z_4 \boldsymbol{e}_1 + z_5 \boldsymbol{e}_2 + z_6 \boldsymbol{e}_3 \,,$$
sono soggetti ai seguenti vincoli:
$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}) &= z_1^2 + z_2^2 - z_4^2 - z_5^2 = 0 \,, \\ f_2(\boldsymbol{z}) &= z_2^2 + z_3^2 - z_5^2 - z_6^2 = 0 \,. \end{aligned}$$

- Trovare almeno un aperto A di $\boldsymbol{R}^6$ in cui nelle configurazioni compatibili il vincolo è olonomo non singolare e in esse determinare una rappresentazione lagrangiana.

2. [09/01/2020 (ex)II] Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_h, m)$ $h = 1, 2$, entrambi di massa m, rappresentati da
$$\boldsymbol{X}_1 = z_1 \boldsymbol{e}_1 + z_2 \boldsymbol{e}_2 + z_3 \boldsymbol{e}_3 \,, \quad \boldsymbol{X}_2 = z_4 \boldsymbol{e}_1 + z_5 \boldsymbol{e}_2 + z_6 \boldsymbol{e}_3 \,,$$
sono soggetti ai seguenti vincoli:
$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{z}) &= z_1^2 + z_2^2 - z_4^2 - z_5^2 = 0 \,, \\ f_2(\boldsymbol{z}) &= z_1^2 + z_3^2 - z_4^2 - z_6^2 = 0 \,. \end{aligned}$$

- Trovare almeno un aperto A di $\boldsymbol{R}^6$ in cui nelle configurazioni compatibili il vincolo è olonomo non singolare e in esse determinare una rappresentazione lagrangiana.

3. [06/02/2020 (ex)I] Due moti
$$\boldsymbol{X}_1 = z_1 \boldsymbol{e}_1 + z_2 \boldsymbol{e}_2 + z_3 \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4 \boldsymbol{e}_1 + z_5 \boldsymbol{e}_2 + z_6 \boldsymbol{e}_3 \,,$$
sono vincolati come segue per una costante $R > 0$:

- $\boldsymbol{X}_1$ appartiene alla sfera S_1 di centro $(-R,0,0)$ e di raggio R;

- $\boldsymbol{X}_2$ appartiene alla sfera S_2 di centro $(R,0,0)$ e di raggio R;
- $\boldsymbol{X}_1$ e $\boldsymbol{X}_2$ sono a distanza fissa $2R$.

Si dimostri che il vincolo è regolare nella configurazione

$$\boldsymbol{X}_1 = -R\boldsymbol{e}_1 + R\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = R\boldsymbol{e}_1 + R\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Si determini poi almeno una configurazione compatibile con il vincolo in cui questo non è regolare.

4. [06/02/2020 (ex)II] Due moti

$$\boldsymbol{X}_1 = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = z_4\boldsymbol{e}_1 + z_5\boldsymbol{e}_2 + z_6\boldsymbol{e}_3 \,,$$

sono vincolati come segue per una costante $R > 0$:

- $\boldsymbol{X}_1$ appartiene alla sfera S_1 di centro $(0,0,-R)$ e di raggio R;
- $\boldsymbol{X}_2$ appartiene alla sfera S_2 di centro $(0,0,R)$ e di raggio R;
- $\boldsymbol{X}_1$ e $\boldsymbol{X}_2$ sono a distanza fissa $2R$.

Si dimostri che il vincolo è regolare nella configurazione

$$\boldsymbol{X}_1 = R\boldsymbol{e}_1 - R\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{X}_2 = R\boldsymbol{e}_1 + R\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Si determini poi almeno una configurazione compatibile con il vincolo in cui questo non è regolare.

5. [10/02/2020 (ex)I] Un cono C di altezza H e raggio R è vincolato come segue:

- Il vertice V rimane a distanza fissa $L > 0$ dall'origine del sistema di riferimento fisso.
- L'asse del cono si mantiene parallelo all'asse x_3.

Si scelgano le coordinate locali:

$$z_1 = x_{1V} \,, \quad z_2 = x_{2V} \,, \quad z_3 = x_{3V} \,, \quad z_4 = x_{1A} \,, \quad z_5 = x_{2A} \,, \quad z_6 = x_{1B} \,,$$

ove A è il centro della base del cono, e B un punto solidale della circonferenza di base.
Si scrivano i vincoli corrispondenti e si dimostri che sono olonomi regolari in tutte le configurazioni compatibili con i vincoli; naturalmente ci si limiti alle configurazioni in cui le coordinate locali si possono scegliere come sopra.

6. [10/02/2020 (ex)II] Un cilindro C di altezza H e raggio R è vincolato come segue:

- Il centro A di una delle due basi rimane a distanza fissa $L > 0$ dall'origine del sistema di riferimento fisso.
- L'asse del cilindro si mantiene parallelo all'asse x_1.

Si scelgano le coordinate locali:

$$z_1 = x_{1A} , \quad z_2 = x_{2A} , \quad z_3 = x_{3A} , \quad z_4 = x_{2B} , \quad z_5 = x_{3B} , \quad z_6 = x_{2D} ,$$

ove B è il centro della seconda base del cilindro, e D un punto solidale della circonferenza di base il cui centro è B.
Si scrivano i vincoli corrispondenti e si dimostri che sono olonomi regolari in tutte le configurazioni compatibili con i vincoli; naturalmente ci si limiti alle configurazioni in cui le coordinate locali si possono scegliere come sopra.

330. Calcolo di quantità meccaniche in moti relativi

1. [18/7/2005 (ex)I] Sia $\Pi(t)$ il piano mobile di equazione

$$-\sin(\alpha t)x_1 + \cos(\alpha t)x_2 = 0 ,$$

nel riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3).
Un disco rigido omogeneo di massa m e raggio R è vincolato a giacere su $\Pi(t)$, e ad avere il centro C coincidente con un punto P solidale con $\Pi(t)$, a distanza $d > 0$ dall'asse x_3.
Si esprima in coordinate lagrangiane l'energia cinetica del disco nel sistema di riferimento fisso.

2. [18/7/2005 (ex)II] Sia $\Pi(t)$ il piano mobile di equazione

$$-\sin(\alpha t)x_2 + \cos(\alpha t)x_3 = 0 ,$$

nel riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3).
Una lamina quadrata rigida omogenea di massa m e lato $2L$ è vincolata a giacere su $\Pi(t)$, e ad avere il centro C coincidente con un punto P solidale con $\Pi(t)$, a distanza $d > 0$ dall'asse x_1.
Si esprima in coordinate lagrangiane l'energia cinetica della lamina nel sistema di riferimento fisso.

3. [12/9/2005 (ex)I] Un triangolo ABC è formato da tre aste omogenee di lunghezza $2L$, ciascuna di massa m. È vincolato a ruotare intorno a un asse fisso per A, rimanendo sempre ortogonale ad esso; il vertice A è fisso.
Determinare in funzione di m, L e di un'opportuna coordinata lagrangiana l'energia cinetica del triangolo.

4. [12/9/2005 (ex)II] Un triangolo ABC è formato da tre aste omogenee di lunghezza $4L$, ciascuna di massa m. È vincolato a ruotare intorno a un asse fisso per A, rimanendo sempre ortogonale ad esso; il vertice A è fisso.
Determinare in funzione di m, L e di un'opportuna coordinata lagrangiana l'energia cinetica del triangolo.

5. [19/7/2006 (ex)I] Un sistema vincolato è costituito da un disco rigido di raggio $R > 0$ e massa $M > 0$, e da un punto materiale P di massa $m > 0$ vincolato a muoversi sulla circonferenza bordo del disco.
Inoltre il disco è vincolato a ruotare intorno a un asse fisso passante per un suo diametro, mantenendo il centro fisso su tale asse.
Determinare l'energia cinetica del sistema in funzione di opportune coordinate lagrangiane.

6. [19/7/2006 (ex)II] Un sistema vincolato è costituito da un disco rigido di raggio $R > 0$ e massa $M > 0$, e da un punto materiale P di massa $m > 0$ vincolato a muoversi sulla circonferenza concentrica al disco (e giacente su di esso), di raggio $R/2$.
Inoltre il disco è vincolato a ruotare intorno a un asse fisso passante per un suo diametro, mantenendo il centro fisso su tale asse.
Determinare l'energia cinetica del sistema in funzione di opportune coordinate lagrangiane.

7. [22/9/2006 (ex)I] Si trovi in termini delle opportune coordinate lagrangiane l'energia cinetica di un'asta rigida AB, omogenea, di lunghezza $2L$, massa m, e sottoposta ai vincoli:

- A appartiene a una circonferenza fissa di raggio $R > 0$ e centro O;
- l'asta si mantiene sempre ortogonale nel suo moto al raggio $\overrightarrow{OA}$.

8. [13/12/2006 (ex)I] Si trovi in termini delle opportune coordinate lagrangiane l'energia cinetica di un'asta rigida AB, omogenea, di lunghezza L, massa m, e sottoposta ai vincoli:

$$
\begin{aligned}
x_A^2 + y_A^2 &= z_A^2 \,, \\
x_B^2 + y_B^2 &= z_B^2 \,, \\
z_B &= z_A + \frac{L}{\sqrt{2}} \,.
\end{aligned}
$$

(Ossia, AB giace tutta sul cono $x^2 + y^2 = z^2$. Si assuma $z_A > 0$.)

9. [26/3/2007 (ex)I] Un cilindro circolare retto omogeneo di massa M, raggio R e altezza H è sottoposto ai seguenti vincoli:

- il suo centro O appartiene a una circonferenza fissa γ di raggio L, giacente su un piano fisso Π;
- il suo asse si mantiene ortogonale a Π.

Si trovi in termini delle opportune coordinate lagrangiane l'energia cinetica del cilindro.

10. [19/7/2007 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere l'estremo A sulla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\varphi\cos\varphi\,, \\ x_2 &= R\varphi\sin\varphi\,, \\ x_3 &= h\varphi\,, \end{aligned}$$

ove $0 < \varphi < \infty$. Qui R e h sono costanti positive.
Inoltre $\overrightarrow{AB}/2L$ si mantiene coincidente con

$$(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,.$$

Si calcoli l'energia cinetica di AB in funzione di opportune coordinate lagrangiane.

11. [19/7/2007 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere il centro G sulla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\varphi\cos\varphi\,, \\ x_2 &= R\varphi\sin\varphi\,, \\ x_3 &= h\varphi\,, \end{aligned}$$

ove $0 < \varphi < \infty$. Qui R e h sono costanti positive.
Inoltre $\overrightarrow{AB}/2L$ si mantiene coincidente con

$$(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\,.$$

Si calcoli l'energia cinetica di AB in funzione di opportune coordinate lagrangiane.

12. [17/9/2007 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata:

- ad avere il centro M sulla circonferenza di raggio $R > 0$

$$\gamma \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \\ \quad x_3 = 0\,; \end{cases}$$

- a giacere sul piano passante per l'asse x_3 e per il punto M (che è il piano ortogonale a γ in M).

Scrivere l'energia cinetica di AB in opportune coordinate lagrangiane.

13. [17/9/2007 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata:

- ad avere l'estremo A sulla circonferenza di raggio $R > 0$

$$\gamma \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \\ x_3 = 0 \,; \end{cases}$$

- a giacere sul piano passante per l'asse x_3 e per il punto A (che è il piano ortogonale a γ in A).

Scrivere l'energia cinetica di AB in opportune coordinate lagrangiane.

14. [13/12/2007 (ex)I] Un cilindro C di massa M, raggio R e altezza h in un sistema di riferimento solidale è descritto da

$$C = \{(x, y, z) \mid (x - R)^2 + y^2 \le R^2 \,, 0 \le z \le h\} \,.$$

Il cilindro è vincolato a mantenere i due punti $Q_1 = (0,0,0)$ e $Q_2 = (0,0,h)$ fissi su un asse fisso r (e quindi a ruotare intorno a r).
Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sulla circonferenza

$$\gamma = \{(x, y, z) \mid (x - R)^2 + y^2 = R^2 \,, z = 0\} \,,$$

bordo della base del cilindro.
Scrivere l'energia cinetica del sistema.

15. [13/12/2007 (ex)II] Un cilindro C di massa M, raggio R e altezza h in un sistema di riferimento solidale è descritto da

$$C = \{(x, y, z) \mid (x - R)^2 + y^2 \le R^2 \,, 0 \le z \le h\} \,.$$

Il cilindro è vincolato a mantenere i due punti $Q_1 = (0,0,0)$ e $Q_2 = (0,0,h)$ fissi su un asse fisso r (e quindi a ruotare intorno a r).
Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sulla circonferenza

$$\gamma = \{(x, y, z) \mid (x - R)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4} \,, z = h\}$$

(circonferenza che quindi è solidale con il cilindro).
Scrivere l'energia cinetica del sistema.

16. [1/4/2008 (ex)I] Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata:

- ad avere il centro C appartenente alla sfera di centro l'origine O e di raggio $R > 0$;

- a essere ortogonale alla sfera stessa.

Calcolarne l'energia cinetica in funzione di opportune coordinate lagrangiane.

17. [18/7/2008 (ex)I] Una circonferenza γ di centro O, raggio R e massa M è vincolata a ruotare intorno a un proprio diametro AB, che giace su un asse fisso. Anche i punti A e B sono solidali con γ e fissi.
Un'asta CD di lunghezza L e massa m è vincolata ad avere l'estremo C sulla circonferenza, e a mantenersi parallela ad AB (il che implica che CD giace sul piano di γ).
Scrivere l'energia cinetica del sistema in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

18. [18/7/2008 (ex)II] Una circonferenza γ di centro O, raggio R e massa M è vincolata a ruotare intorno a un proprio diametro AB, che giace su un asse fisso. Anche i punti A e B sono solidali con γ e fissi.
Un'asta CD di lunghezza L e massa m è vincolata ad avere l'estremo C sulla circonferenza, a giacere sul piano di γ, e a mantenersi ortogonale ad AB.
Scrivere l'energia cinetica del sistema in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

19. [12/2/2009 (ex)I] Un disco di raggio L e massa m è così vincolato:

- il suo centro C appartiene alla curva

$$\boldsymbol{\psi}(s) = \big(R\cos\lambda s\,, R\sin\lambda s\,, h\lambda s\big)\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$

  Qui s è la lunghezza d'arco, $\lambda = 1/\sqrt{R^2+h^2}$, e R, $h > 0$ sono costanti.

- la normale al disco coincide con la binormale $\boldsymbol{B}$ alla curva.

Si calcoli il momento delle quantità di moto del disco rispetto a C in funzione di due opportune coordinate lagrangiane.

20. [12/2/2009 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- ad avere l'estremo A nell'origine O;

- ad avere l'estremo B sulla curva

$$\boldsymbol{\psi}(s) = \big(\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)\big)\,, \qquad s \in (a,b)\,,$$

  ove s è l'ascissa curvilinea.

Determinare l'energia cinetica dell'asta in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana.

21. [12/2/2009 (ex)II] Un disco di raggio L e massa m è così vincolato:

- il suo centro C appartiene alla curva

$$\boldsymbol{\psi}(s) = \big(R\sin\lambda s\,, R\cos\lambda s\,, h\lambda s\big)\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,.$$

  Qui s è la lunghezza d'arco, $\lambda = 1/\sqrt{R^2+h^2}$, e R, $h>0$ sono costanti.

- la normale al disco coincide con la binormale $\boldsymbol{B}$ alla curva.

Si calcoli il momento delle quantità di moto del disco rispetto a C in funzione di due opportune coordinate lagrangiane.

22. [12/2/2009 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- ad avere l'estremo A nell'origine O;
- ad avere il centro C sulla curva

$$\boldsymbol{\psi}(s) = \big(\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)\big)\,, \qquad s \in (a,b)\,,$$

  ove s è l'ascissa curvilinea.

Determinare l'energia cinetica dell'asta in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana.

23. [12/6/2009 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza L e massa m soddisfa i vincoli

$$\begin{aligned} x_{1A}^2 + x_{2A}^2 - R^2 &= 0\,;\\ x_{3A} - x_{3B} &= 0\,;\\ x_{1A}x_{2B} - x_{2A}x_{1B} &= 0\,. \end{aligned}$$

Qui m, L, $R>0$ sono costanti.
Determinare l'energia cinetica dell'asta in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

24. [12/6/2009 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza L e massa m soddisfa i vincoli

$$\begin{aligned} x_{1A}^2 + x_{2A}^2 - R^2 &= 0\,;\\ x_{3A} - x_{3B} &= 0\,;\\ x_{1A}x_{1B} + x_{2A}x_{2B} &= 0\,. \end{aligned}$$

Qui m, L, $R>0$ sono costanti.
Determinare l'energia cinetica dell'asta in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

25. [15/7/2009 (ex)I] Una sfera solida di raggio R e massa M è vincolata:

- ad avere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso;
- ad avere il punto solidale A mobile con equazione assegnata

$$\overrightarrow{OA} = R(a \cos ct \boldsymbol{e}_1 + a \sin ct \boldsymbol{e}_2 + b \boldsymbol{e}_3) .$$

Qui a, b, c sono costanti positive tali che $a^2 + b^2 = 1$.
Determinare l'energia cinetica della sfera in funzione di una opportuna coordinata lagrangiana.

26. [15/7/2009 (ex)I] Un disco di raggio R e massa M è vincolato:

- ad avere il centro C sull'asse fisso x_3;
- a mantenersi sempre ortogonale all'asse x_3.

Scrivere il momento della quantità di moto $\boldsymbol{L}_O$ del disco rispetto all'origine O, in funzione di opportune coordinate lagrangiane.

27. [15/7/2009 (ex)II] Una sfera solida di raggio R e massa M è vincolata:

- ad avere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso;
- ad avere il punto solidale A mobile con equazione assegnata

$$\overrightarrow{OA} = \frac{R}{2}(a \sin ct \boldsymbol{e}_1 + a \cos ct \boldsymbol{e}_2 + b \boldsymbol{e}_3) .$$

Qui a, b, c sono costanti positive tali che $a^2 + b^2 = 1$.
Determinare l'energia cinetica della sfera in funzione di una opportuna coordinata lagrangiana.

28. [15/7/2009 (ex)II] Un disco di raggio R e massa M è vincolato:

- ad avere il centro C sull'asse fisso x_1;
- a mantenersi sempre ortogonale all'asse x_1.

Scrivere il momento della quantità di moto $\boldsymbol{L}_A$ del disco rispetto al punto A tale che $\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_1$, in funzione di opportune coordinate lagrangiane. Qui O è l'origine del sistema di riferimento.

29. [11/9/2009 (ex)I] Una lamina rettangolare $ABCD$ di massa M e lati

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = a , \qquad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = b ,$$

è vincolata ad avere il lato $\overrightarrow{AD}$ sull'asse mobile r definito da

$$x_1 = L \cos \omega t , \qquad x_2 = L \sin \omega t , \qquad x_3 \in \boldsymbol{R} .$$

Supponiamo anche che

$$x_{3A} = 0\,, \qquad x_{3D} = b\,.$$

Calcolare l'energia cinetica della lamina nel sistema fisso (O, x_i).

30. [11/9/2009 (ex)II] Una lamina quadrata $ABCD$ di massa M e lato b è vincolata ad avere il lato $\overrightarrow{AD}$ sull'asse mobile r definito da

$$x_1 = L\cos\omega t\,, \qquad x_2 = L\sin\omega t\,, \qquad x_3 \in \boldsymbol{R}\,.$$

Supponiamo anche che

$$x_{3A} = b\,, \qquad x_{3D} = 2b\,.$$

Calcolare l'energia cinetica della lamina nel sistema fisso (O, x_i).

31. [20/11/2009 (ex)I] Una lamina quadrata di massa M e lato $2L$ è vincolata a ruotare intorno all'asse mobile r

$$x_1 \cos\alpha t + x_2 \sin\alpha t = R\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

in modo che r coincida con l'asse comune di due lati opposti della lamina. Il centro C della lamina occupa su r la posizione

$$\overrightarrow{OC} = R(\cos\alpha t\boldsymbol{e}_1 + \sin\alpha t\boldsymbol{e}_2)\,.$$

Calcolare in funzione delle opportune coordinate lagrangiane il momento delle quantità di moto della lamina, rispetto all'origine del sistema di riferimento fisso.

32. [25/1/2010 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di massa M e lato $2R$ è vincolata a giacere sul piano fisso $x_3 = 0$, mantenendo il lato AB sull'asse x_1 e rimanendo nel semipiano $x_2 > 0$.
Un'asta EF di lunghezza $2L$ e di massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, e ad avere l'estremo E coincidente con il centro K della lamina.
Si calcoli l'energia cinetica del sistema in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

33. [25/1/2010 (ex)II] Una lamina quadrata $ABCD$ di massa M e lato $2R$ è vincolata a giacere sul piano fisso $x_3 = 0$, mantenendo il lato AB sull'asse x_1 e rimanendo nel semipiano $x_2 < 0$.
Un'asta EF di lunghezza $2L$ e di massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, e ad avere l'estremo E coincidente con il vertice C della lamina.
Si calcoli l'energia cinetica del sistema in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

34. [22/2/2010 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di raggio R, centro C e massa M è vincolata ad avere il centro sulla curva

$$
\begin{aligned}
x_1 &= R\cos\varphi\,,\\
x_2 &= R\sin\varphi\,,\\
x_3 &= h\varphi\,,
\end{aligned}
$$

ove $-\infty < \varphi < \infty$ e h, R sono costanti positive. Inoltre la circonferenza è vincolata a giacere sul piano osculatore alla curva, ossia sul piano che ha normale $\boldsymbol{B}$.
Determinare l'energia cinetica di γ in funzione di opportune coordinate lagrangiane.

35. [22/2/2010 (ex)II] Una circonferenza materiale γ di raggio R, centro C e massa M è vincolata ad avere il centro sulla curva

$$
\begin{aligned}
x_1 &= R\cos\varphi\,,\\
x_2 &= R\sin\varphi\,,\\
x_3 &= -h\varphi\,,
\end{aligned}
$$

ove $-\infty < \varphi < \infty$ e h, R sono costanti positive. Inoltre la circonferenza è vincolata a giacere sul piano osculatore alla curva, ossia sul piano che ha normale $\boldsymbol{B}$.
Determinare l'energia cinetica di γ in funzione di opportune coordinate lagrangiane.

36. [9/4/2010 (ex)I] Una lamina quadrata rigida omogenea $ABCD$ di massa m e lato $2L$ è vincolata a mantenere il lato AB sulla retta mobile

$$
x_2 = R\cos(\alpha t)\,, \qquad x_3 = R\sin(\alpha t)\,,
$$

ove (O, x_i) è il sistema di riferimento fisso.
Si esprima l'energia cinetica della lamina, nel sistema di riferimento fisso, in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

37. [8/7/2010 (ex)I] Calcolare in funzione delle opportune coordinate lagrangiane l'energia cinetica di una circonferenza materiale γ di raggio R e massa M.
La circonferenza è vincolata ad avere il centro C su un asse mobile r, a cui inoltre il piano di γ rimane ortogonale in ogni istante. L'asse r ha equazioni

$$
-x_1\sin(\omega t) + x_2\cos(\omega t) = 0\,, \qquad x_3 = 0\,.
$$

38. [7/9/2010 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato L è vincolata ad avere il centro G appartenente alla circonferenza γ

$$
x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,,
$$

e a mantenere la sua normale coincidente con la normale principale a γ. Scrivere l'energia cinetica di $ABCD$ in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

39. [20/1/2014 (ex)I] Un disco di raggio R e massa M è vincolato a mantenere il centro C sulla retta mobile r di equazione

$$-x_1 \sin(\omega t) + x_2 \cos(\omega t) = 0 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

ove $\omega > 0$, e l'asse ortogonale in C coincidente con tale retta. In particolare si ha

$$\overrightarrow{OC} = L \cos(\omega t) \boldsymbol{e}_1 + L \sin(\omega t) \boldsymbol{e}_2 \,,$$

ove O è l'origine del sistema fisso.
Si determini il momento delle quantità di moto del disco rispetto a O, in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

40. [20/1/2014 (ex)II] Una lamina quadrata di lato R e massa M è vincolata a mantenere il centro C sulla retta mobile r di equazione

$$-x_1 \sin(\omega t) + x_2 \cos(\omega t) = 0 \,,$$

ove $\omega > 0$, e l'asse ortogonale in C coincidente con tale retta. In particolare si ha

$$\overrightarrow{OC} = L \cos(\omega t) \boldsymbol{e}_1 + L \sin(\omega t) \boldsymbol{e}_2 \,,$$

ove O è l'origine del sistema fisso.
Si determini il momento delle quantità di moto della lamina rispetto a O, in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

41. [17/2/2014 (ex)I] Un cubo rigido di spigolo L e massa M è vincolato ad avere il centro nell'origine del sistema fisso O e due vertici opposti A e B giacenti sul piano $x_3 = 0$. Qui (x_h) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso, e A e B sono opposti nel senso che

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3} L \,.$$

Si calcoli l'energia cinetica del cubo in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

42. [17/2/2014 (ex)II] Una sfera (piena) rigida di raggio L e massa M è vincolata ad avere il centro nell'origine del sistema fisso O e due punti solidali diametralmente opposti A e B giacenti sul piano $x_3 = 0$. Qui (x_h) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso, e A e B sono opposti nel senso che

$$|\overrightarrow{AB}| = 2L \,.$$

Si calcoli l'energia cinetica della sfera in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

43. [19/6/2014 (ex)I] Un sistema olonomo è costituito da due aste AB e CD ciascuna di massa M e lunghezza $2L$, vincolate a giacere nel piano $x_3 = 0$ e ad avere gli estremi B e C coincidenti.
Determinare l'energia cinetica del sistema in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

44. [17/7/2014 (ex)I] Un parallelepipedo E di massa M e spigoli di lunghezze a, b, c tutte diverse tra di loro è vincolato ad avere uno degli spigoli di lunghezza a giacente sul piano $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso, con un estremo nell'origine O del sistema.
Si calcoli l'energia cinetica di E in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

45. [10/2/2015 (ex)I] Un disco di massa M e raggio R è vincolato ad avere il centro C sul cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2 \,,$$

e a mantenersi a esso tangente. Qui $L > 0$ è costante e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso.
Calcolare l'energia cinetica del disco in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

46. [10/2/2015 (ex)II] Un disco di massa M e raggio R è vincolato ad avere il centro C sul cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = L^2 \,,$$

e a mantenere il proprio asse tangente al cilindro e ortogonale all'asse x_3. Qui $L > 0$ è costante e le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso.
Calcolare l'energia cinetica del disco in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

47. [2/7/2015 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a mantenere l'estremo A sull'elica circolare γ

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos(\lambda s) \,, \\ x_2 &= R\sin(\lambda s) \,, \\ x_3 &= hs \,, \end{aligned}$$

ove le costanti positive λ, h, R soddisfano $\lambda^2 R^2 + h^2 = 1$ cosicché $s \in \boldsymbol{R}$ è l'ascissa curvilinea su γ. Inoltre AB deve mantenersi nel piano Π_A passante per l'asse x_3 e per A.
Scrivere l'energia cinetica di AB nelle opportune coordinate lagrangiane.

48. [3/9/2015 (ex)I] Una lamina rettangolare di massa M e lati $a > b > 0$ è vincolata a mantenere il centro C sulla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Inoltre la lamina si mantiene ortogonale alla circonferenza. Qui $R > a$.
Scrivere il momento delle quantità di moto della lamina rispetto al centro C, in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

49. [9/2/2016 (ex)I] Una lamina rettangolare $ABCD$ di massa M e lati $\overline{AB} = L$ e $\overline{BC} = 2L$ è vincolata ad avere il vertice A nell'origine del sistema di riferimento fisso, e il lato AB sulla retta mobile $r(t)$

$$-x_1 \sin(kt) + x_2 \cos(kt) = 0 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Si calcoli l'energia cinetica della lamina in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana.

50. [9/2/2016 (ex)II] Una lamina ABC a forma di triangolo rettangolo di massa M e cateti $\overline{AB} = L$ e $\overline{AC} = 2L$ è vincolata ad avere il vertice A nell'origine del sistema di riferimento fisso, e il lato AB sulla retta mobile $r(t)$

$$x_1 \sin(kt) - x_2 \cos(kt) = 0 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Si calcoli l'energia cinetica della lamina in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana.

51. [19/3/2016 (ex)I] Un disco di raggio R e massa M è vincolato ad avere il centro C sulla parabola

$$x_2 = a x_1^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Qui $a > 0$ è una costante assegnata.
Inoltre l'asse ortogonale al disco in C si mantiene tangente alla parabola.
Scrivere l'energia cinetica del disco in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

52. [12/7/2016 (ex)I] Un disco di raggio R e massa M è vincolato ad avere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso $\mathcal{S} = (O, (x_h))$, e ad avere il diametro solidale AB appartenente al piano $x_3 = 0$.
Si determini il momento angolare del disco in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

53. [8/02/2017 (ex)I] Un cilindro di massa M, raggio R e altezza H è vincolato ad avere il centro C nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O, (x_h))$ e a mantenere l'asse sul piano $x_3 = 0$.

- Si calcoli il momento $\boldsymbol{L}_C$ delle quantità di moto del cilindro rispetto a C, in funzione delle opportune coordinate lagrangiane, scomponendolo nella base fissa.
- Si dimostri che se

$$\boldsymbol{L}_C \cdot \boldsymbol{e}_3 \geq \mu > 0\,, \qquad \text{per ogni } t > 0,$$

allora $\boldsymbol{L}_C \cdot \boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{L}_C \cdot \boldsymbol{e}_2$ si annullano infinite volte per $t > 0$.

54. [8/02/2017 (ex)II] Un parallelepipedo con base quadrata di massa M, lato della base R e altezza H è vincolato ad avere il centro C nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O, (x_h))$ e a mantenere l'asse sul piano $x_1 = 0$.

- Si calcoli il momento $\boldsymbol{L}_C$ delle quantità di moto del parallelepipedo rispetto a C, in funzione delle opportune coordinate lagrangiane, scomponendolo nella base fissa.
- Si dimostri che se

$$\boldsymbol{L}_C \cdot \boldsymbol{e}_1 \geq \mu > 0\,, \qquad \text{per ogni } t > 0,$$

allora $\boldsymbol{L}_C \cdot \boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{L}_C \cdot \boldsymbol{e}_3$ si annullano infinite volte per $t > 0$.

55. [15/01/2018 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e di massa M è vincolata ad avere l'estremo A sulla curva piana regolare

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (\psi_1(s), \psi_2(s), 0)\,, \qquad s \in (a, b)\,,$$

ove s è la lunghezza d'arco. Inoltre tutta l'asta è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Calcolare l'energia cinetica dell'asta in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

56. [15/01/2018 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza L e di massa M è vincolata ad avere l'estremo A sulla curva piana regolare

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (0, \psi_2(s), \psi_3(s))\,, \qquad s \in (a, b)\,,$$

ove s è la lunghezza d'arco. Inoltre tutta l'asta è vincolata a giacere sul piano $x_1 = 0$.
Calcolare l'energia cinetica dell'asta in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

57. [13/02/2018 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata ad avere il centro sulla circonferenza mobile

$$\gamma(t) = \Big\{ R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3(t) \mid 0 \le s \le 2\pi R \Big\} ,$$

ove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 . \end{aligned}$$

Qui $\alpha > 0$ è costante.
Inoltre AB si mantiene in ogni istante parallela a $\boldsymbol{u}_2$.
Calcolare l'energia cinetica dell'asta in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

58. [13/02/2018 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza L e massa M è vincolata ad avere l'estremo A sulla circonferenza mobile

$$\gamma(t) = \Big\{ R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_2(t) + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_3(t) \mid 0 \le s \le 2\pi R \Big\} ,$$

ove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\,\boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 . \end{aligned}$$

Qui $\beta > 0$ è costante.
Inoltre AB si mantiene in ogni istante parallela a $\boldsymbol{u}_1$.
Calcolare l'energia cinetica dell'asta in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

59. [11/02/2019 (ex)I] Si calcoli, in funzione di una opportuna coordinata lagrangiana, il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_O$ del disco di raggio R e massa M vincolato a avere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso e un punto A, solidale e appartenente al suo bordo, mobile con legge assegnata

$$\boldsymbol{X}_A(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 .$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante.

60. [11/02/2019 (ex)II] Si calcoli, in funzione di una opportuna coordinata lagrangiana, il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_O$ della lamina quadrata di lato $2R$ e massa M vincolata a avere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso e il punto medio A di un lato mobile con legge assegnata

$$\boldsymbol{X}_A(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_3 .$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante.

61. [09/01/2020 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ ha lato $2R$ e massa m, ed è vincolata ad avere il centro G sulla circonferenza γ

$$x_1^2 + x_2^2 = 2R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

e il vertice A nell'origine O del sistema di riferimento fisso.

- Calcolare in funzione delle opportune coordinate lagrangiane il momento delle quantità di moto della lamina rispetto a A, esprimendolo nella base solidale alla lamina.

62. [09/01/2020 (ex)II] Un disco C ha raggio R e massa m, ed è vincolato ad avere il centro G sulla circonferenza γ

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

e un punto solidale A appartenente alla circonferenza bordo del disco nell'origine O del sistema di riferimento fisso.

- Calcolare in funzione delle opportune coordinate lagrangiane il momento delle quantità di moto del disco rispetto a A, esprimendolo nella base solidale al disco.

340. Calcolo di quantità cinematiche in moti relativi

1. [15/12/2005 (ex)I] Un sistema di riferimento $(O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ si muove rispetto al sistema di riferimento fisso $(\varOmega, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ con

$$\boldsymbol{v}_O = c\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_2 \,,$$

con c, $\omega > 0$ costanti. All'istante iniziale le terne fissa e mobile coincidono. Un punto P ha velocità nel sistema mobile data da

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = k\boldsymbol{u}_2 \,, \qquad k > 0 \text{ costante.}$$

Determinare le componenti della velocità di P lungo $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

2. [7/4/2006 (ex)I] Un sistema di riferimento $(O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ si muove rispetto al sistema di riferimento fisso $(\varOmega, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ con

$$\boldsymbol{v}_O = c\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_2 \,,$$

e in modo che all'istante iniziale

$$O = \Omega \,, \qquad \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{e}_i \,, \quad i = 1\,,2\,,3\,.$$

Un punto P ha velocità nel sistema mobile data da

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = k\boldsymbol{u}_1 \,.$$

Qui c, ω, k sono costanti positive.
Determinare le componenti della velocità nel sistema fisso $\boldsymbol{v}$ di P lungo $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

3. [22/9/2006 (ex)I] Un punto si muove sulla circonferenza mobile

$$\gamma = \{R\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{u}_2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \,,$$

ove $(\boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare rispetto alla terna fissa data da

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{u}_3 \,.$$

Qui R, $\omega > 0$ sono costanti.
Il centro della circonferenza, l'origine del sistema di riferimento fisso, e l'origine del sistema di riferimento mobile O coincidono in ogni istante.
I due vettori $\boldsymbol{u}_3$ e $\boldsymbol{e}_3$ coincidono all'istante iniziale.
Sapendo che il moto del punto nel sistema di riferimento mobile è uniforme (cioè che la velocità relativa ha modulo costante c), si trovi la velocità del punto nel sistema di riferimento fisso.

4. [13/12/2006 (ex)I] Sia $(O, \boldsymbol{e}_i)$ il sistema di riferimento fisso, e sia $(\boldsymbol{u}_i)$ una terna mobile tale che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 \,,\\
\boldsymbol{u}_2(t) &= -\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 \,,\\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Consideriamo un disco D di centro C, sottoposto ai vincoli

- $\overrightarrow{OC} = L\boldsymbol{u}_1(t)$;
- D giace nel piano ortogonale a $\boldsymbol{u}_1$;
- D ruota intorno all'asse ad esso ortogonale in C con velocità angolare (scalare) costante $\beta > 0$.

Determinare la velocità angolare vettoriale di D nel sistema di riferimento fisso, esprimendola nella base $(\boldsymbol{e}_i)$.

5. [26/3/2007 (ex)I] Consideriamo tre terne $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$, $\mathcal{P} = (\boldsymbol{z}_i)$, tali che

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \lambda \boldsymbol{u}_1 \,, \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{P}} = \mu \boldsymbol{w}_1 \,.$$

All'istante $t = 0$

$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{w}_i(0) = \boldsymbol{z}_i(0) \,, \qquad i = 1{,}2{,}3 \,.$$

Determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ sia in termini di $(\boldsymbol{u}_i)$ che di $(\boldsymbol{z}_i)$.

6. [16/5/2007 (hw)I] Una terna $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ si muove rispetto a una terna $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$ con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ che soddisfa

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t} \right]_{\mathcal{M}} = -\alpha \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} + \boldsymbol{b} \,, \tag{1}$$

ove $\alpha > 0$ e $\boldsymbol{b}$ è un vettore solidale con $\mathcal{N}$. Sapendo che all'istante iniziale $t = 0$ vale

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(0) = \beta \boldsymbol{w}_1 \,,$$

con $\beta \in \boldsymbol{R}$, si determini $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$.

7. [16/5/2007 (hw)I] Una terna $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ si muove rispetto a una terna $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i)$ con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ che soddisfa

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t} \right]_{\mathcal{N}} = \alpha \cos\varphi \boldsymbol{u}_1 \,,$$
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(0) = 0 \,,$$

ove $\alpha > 0$ e φ è l'angolo tra $\boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{w}_2$. Si determini $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$, sapendo anche che

$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{w}_i(0) \,, \qquad i = 1, 2, 3 \,.$$

8. [16/5/2007 (hw)I] Un punto A si muove su una circonferenza con centro il punto B, con velocità angolare costante $\omega_A \boldsymbol{e}$. A sua volta B si muove di moto circolare uniforme intorno al punto C (fisso), con velocità angolare costante $\omega_B \boldsymbol{e}$. Qui $\boldsymbol{e}$ è un versore costante, perpendicolare al piano delle orbite di A e B. Denotiamo

$$\left| \overrightarrow{AB} \right| = R \,, \qquad \left| \overrightarrow{CB} \right| = d \,.$$

Determinare se la velocità di A può annullarsi, e in quali posizioni del sistema. Si assuma $\omega_A \neq 0$, $\omega_B \neq 0$.

9. [4/7/2007 (ex)I] Una terna mobile $(\boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna $(\boldsymbol{e}_i)$ data da

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha t \boldsymbol{u}_3 \,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante.
Determinare la scomposizione di $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ nella terna $(\boldsymbol{e}_i)$ sapendo che

$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{e}_i(0)\,, \qquad i = 1\,,2\,,3\,.$$

10. [4/7/2007 (ex)II] Una terna mobile $(\boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna $(\boldsymbol{e}_i)$ data da

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \gamma t^2 \boldsymbol{u}_1\,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante.
Determinare la scomposizione di $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ nella terna $(\boldsymbol{e}_i)$ sapendo che

$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{e}_i(0)\,, \qquad i = 1\,,2\,,3\,.$$

11. [1/7/2008 (ex)I] Determinare in funzione di due opportune coordinate la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di un disco di centro C soggetto ai vincoli

- C appartiene alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = -R\,;$$

- l'asse del disco si mantiene ortogonale all'asse x_3 e alla circonferenza.

Qui (O, x_i) è il sistema di riferimento fisso, e $R > 0$ è costante.

12. [1/7/2008 (ex)II] Determinare in funzione di due opportune coordinate la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di un disco di centro C soggetto ai vincoli

- C appartiene alla circonferenza

$$x_1^2 + x_3^2 = R^2\,, \qquad x_2 = R\,;$$

- l'asse del disco si mantiene ortogonale all'asse x_2 e alla circonferenza.

Qui (O, x_i) è il sistema di riferimento fisso, e $R > 0$ è costante.

13. [12/1/2009 (ex)I] Un cono circolare retto di altezza H e raggio di base R è vincolato ad avere il vertice nell'origine del sistema fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Inoltre è vincolato ad avere l'asse sul piano fisso $x_3 = 0$ (qui le x_i indicano le coordinate nel sistema di riferimento fisso).
Trovare la velocità angolare del cono nel sistema di riferimento fisso, in funzione di due opportune coordinate lagrangiane, e di $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

14. [12/1/2009 (ex)II] Un cilindro circolare retto di altezza H e raggio di base R è vincolato ad avere il centro nell'origine del sistema fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.

Inoltre è vincolato ad avere l'asse sul piano fisso $x_3 = 0$ (qui le x_i indicano le coordinate nel sistema di riferimento fisso).
Trovare la velocità angolare del cilindro nel sistema di riferimento fisso, in funzione di due opportune coordinate lagrangiane, e di $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

15. [9/4/2010 (ex)I] Un sistema di riferimento $(O, \boldsymbol{u}_i)$ si muove rispetto al sistema di riferimento fisso $(\Omega, \boldsymbol{e}_i)$ in modo che

$$\boldsymbol{v}_O = c\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_1 \,.$$

All'istante iniziale le terne fissa e mobile, e i due punti O e Ω, coincidono.
Un punto P ha velocità nel sistema di riferimento mobile data da

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(t) = k\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad t > 0 \,,$$

e all'istante iniziale

$$\overrightarrow{OP}(0) = L\boldsymbol{u}_1 \,.$$

Qui c, ω, k, L sono costanti positive.
Determinare le componenti della velocità di P nel sistema fisso lungo la terna $(\boldsymbol{u}_i)$, in funzione di c, ω, k, L.

16. [7/9/2010 (ex)I] Una terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ si muove rispetto alla terna fissa $(\boldsymbol{e}_i)$ con velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2 \,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.
Il sistema di riferimento $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$ ha l'origine coincidente con quella del sistema di riferimento fisso.
Determinare l'insieme dei punti solidali con $\mathcal{S}$ tali che la loro velocità (nel sistema fisso) si annulla.

17. [17/2/2014 (ex)I] Un sistema rigido $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ soddisfa a un certo istante $\bar{t}$

$$\boldsymbol{v}_O = \lambda \boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2 \,,$$

con α, β, $\lambda > 0$ costanti.
Scrivere la velocità di trascinamento (relativa a $\mathcal{S}$) in tutti i punti dell'asse istantaneo di moto nell'istante $\bar{t}$.

18. [17/2/2014 (ex)II] Un sistema rigido $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ soddisfa a un certo istante $\bar{t}$

$$\boldsymbol{v}_O = \lambda \boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2 + \gamma \boldsymbol{e}_3 \,,$$

con α, β, γ, $\lambda > 0$ costanti.
Scrivere la velocità di trascinamento (relativa a $\mathcal{S}$) in tutti i punti dell'asse istantaneo di moto nell'istante $\bar{t}$.

19. [10/2/2015 (ex)I] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ che soddisfa

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} &= \lambda\boldsymbol{\omega} + \cos(\beta t)\boldsymbol{u}_1 \,, \\ \boldsymbol{\omega}(0) &= 0 \,, \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{v}_O = k\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{X}_O(0) = 0 \,.$$

Qui λ, β, k sono costanti positive assegnate. Si supponga anche $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Determinare in funzione dei parametri assegnati le equazioni nel sistema di riferimento fisso del luogo dei punti ove la velocità di trascinamento è nulla, negli istanti in cui $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$.

20. [10/2/2015 (ex)II] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ che soddisfa

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} &= -k\boldsymbol{\omega} + \sin(\beta t)\boldsymbol{u}_3 \,, \\ \boldsymbol{\omega}(0) &= 0 \,, \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{v}_O = \lambda\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{X}_O(0) = 0 \,.$$

Qui λ, β, k sono costanti positive assegnate. Si supponga anche $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Determinare in funzione dei parametri assegnati le equazioni nel sistema di riferimento fisso del luogo dei punti ove la velocità di trascinamento è nulla, negli istanti in cui $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$.

21. [4/6/2015 (ex)I] Sia $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_i))$ un sistema di riferimento mobile tale che

$$\boldsymbol{X}_O(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{\omega}(t) = k\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad t > 0 \,,$$

con $\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{e}_i$.
Sia $\boldsymbol{X}$ un moto tale che la sua velocità relativa sia

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = c\boldsymbol{u}_1(t) \,,$$

e che $\boldsymbol{X}(0) = L\boldsymbol{u}_2(0)$. Qui L, R, c, k, $\alpha > 0$ sono costanti.
Si determini la scomposizione di $\boldsymbol{X}(t)$ nel sistema fisso.

22. [4/6/2015 (ex)II] Sia $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_i))$ un sistema di riferimento mobile tale che

$$\boldsymbol{X}_O(t) = -L\sin(ct)\boldsymbol{e}_1 + L\cos(ct)\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{\omega}(t) = -k\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad t > 0 \,,$$

con $\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{e}_i$.
Sia $\boldsymbol{X}$ un moto tale che la sua velocità relativa sia

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \alpha \boldsymbol{u}_2(t)\,,$$

e che $\boldsymbol{X}(0) = R\boldsymbol{u}_2(0)$. Qui L, R, c, k, $\alpha > 0$ sono costanti.
Si determini la scomposizione di $\boldsymbol{X}(t)$ nel sistema fisso.

23. [2/7/2015 (ex)I] È assegnata una terna mobile $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_i(t))$, $t \in I$. Una seconda terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare relativa a $\mathcal{N}$ data da

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2\,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti assegnate. Inoltre

$$\boldsymbol{u}_i(0) = \boldsymbol{w}_i(0)\,, \qquad i = 1\,,2\,,3\,.$$

Determinare $(\boldsymbol{u}_i(t))$ in funzione dei vettori $(\boldsymbol{w}_i(t))$.

24. [9/2/2016 (ex)I] Un sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ è tale che

$$\boldsymbol{X}_O(t) = ct\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{\omega}(t) = k\boldsymbol{u}_1(t)\,, \qquad \boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h\,, \quad h = 1\,,2\,,3\,.$$

Qui c, $k > 0$ sono costanti assegnate.
Determinare, al variare di $\alpha \in \boldsymbol{R}$, i moti tali che

$$\boldsymbol{X}(0) = 0\,, \qquad \boldsymbol{v}(t) = \alpha \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(t)\,, \quad \text{per ogni } t.$$

25. [9/2/2016 (ex)II] Un sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ è tale che

$$\boldsymbol{X}_O(t) = ct\boldsymbol{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{\omega}(t) = k\boldsymbol{u}_2(t)\,, \qquad \boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h\,, \quad h = 1\,,2\,,3\,.$$

Qui c, $k > 0$ sono costanti assegnate.
Determinare, al variare di $\alpha \in \boldsymbol{R}$, i moti tali che

$$\boldsymbol{X}(0) = 0\,, \qquad \boldsymbol{v}(t) = \alpha \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(t)\,, \quad \text{per ogni } t.$$

26. [19/3/2016 (ex)I] Una terna $\mathcal{M}$ si muove rispetto a una terna $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ che soddisfa

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = k\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{w}_3 + \lambda \boldsymbol{w}_3\,.$$

All'istante iniziale $t = 0$ vale

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \beta \boldsymbol{w}_1\,.$$

Qui k, λ, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.
Si determini $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$.

27. [7/6/2016 (ex)I] Una circonferenza γ_1 di raggio R_1 è vincolata ad avere i due estremi A e B di un diametro solidale coincidenti con due punti fissi

$$\overrightarrow{OP_1} = -R_1 \boldsymbol{e}_3 , \qquad \overrightarrow{OP_2} = R_1 \boldsymbol{e}_3 ,$$

e quindi il centro coincidente con l'origine O. Una seconda circonferenza γ_2 di raggio $R_2 < R_1$ è vincolata ad avere il centro C_2 su γ_1, ma libero di muoversi su γ_1, e a giacere nel piano ortogonale a γ_1 in C_2.
Esprimere la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di γ_2 in termini delle opportune coordinate lagrangiane, nella base fissa.

28. [7/6/2016 (ex)I] Un sistema mobile di riferimento $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ soddisfa

$$\boldsymbol{X}_O(t) = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 ,$$

e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 .
\end{aligned}$$

Dire per quali valori dei parametri positivi R, α, ω, L, β il moto di P descritto in $\mathcal{S}$ come

$$\overrightarrow{OP} = L\cos(\beta t)\boldsymbol{u}_1(t) + L\sin(\beta t)\boldsymbol{u}_2(t) ,$$

ha istanti di arresto nel sistema fisso, ossia soddisfa $\boldsymbol{v}(t) = 0$ per qualche $t \in \boldsymbol{R}$.

29. [6/9/2016 (ex)I] Una terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ si muove rispetto a quella fissa con con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ che obbedisce alla legge

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = -\lambda e^{-\alpha t} \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} , \qquad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 \neq 0 .$$

Qui α, $\lambda > 0$ sono costanti assegnate.
Si determini se $\boldsymbol{\omega}(t) \to 0$ per $t \to t_0$ per qualche $t_0 > 0$.

30. [17/01/2017 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e massa M è vincolata ad avere il vertice A sull'elica cilindrica γ

$$\begin{aligned}
x_1 &= R\cos(\lambda s) , \\
x_2 &= R\sin(\lambda s) , \\
x_3 &= h\lambda s ,
\end{aligned}$$

ove R, $h > 0$ sono costanti, $\lambda = (R^2 + h^2)^{-1/2}$, cosicché $s \in \boldsymbol{R}$ è l'ascissa curvilinea. Qui le (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$.
Inoltre la diagonale $\overrightarrow{AC}$ è diretta come la normale a γ, ossia

$$\overrightarrow{AC} = \sqrt{2} L \boldsymbol{N}(s) \,.$$

Determinare la velocità angolare della lamina in funzione di due opportune coordinate lagrangiane, esprimendola nella base fissa $(\boldsymbol{e}_h)$.

31. [17/01/2017 (ex)II] Una sfera di raggio R e massa M è vincolata ad avere il centro A sull'elica cilindrica γ

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos(\lambda s) \,, \\ x_2 &= R\sin(\lambda s) \,, \\ x_3 &= h\lambda s \,, \end{aligned}$$

ove R, $h > 0$ sono costanti, $\lambda = (R^2 + h^2)^{-1/2}$, cosicché $s \in \boldsymbol{R}$ è l'ascissa curvilinea. Qui le (x_h) sono le coordinate nel sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$.
Inoltre il raggio solidale della sfera $\overrightarrow{AB}$ è diretto come la normale a γ, ossia

$$\overrightarrow{AB} = R\boldsymbol{N}(s) \,.$$

Determinare la velocità angolare della sfera in funzione di due opportune coordinate lagrangiane, esprimendola nella base fissa $(\boldsymbol{e}_h)$.

32. [8/02/2017 (ex)I] Una terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ soddisfa

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha \boldsymbol{u}_1(t) + \beta \boldsymbol{u}_3(t) \,, \qquad \boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h \,, \quad h = 1\,,2\,,3 \,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti.
Si scriva l'equazione differenziale (vettoriale) di secondo ordine soddisfatta da $\boldsymbol{u}_2$, ricavandone la scomposizione di $\boldsymbol{u}_2(t)$ nella base fissa $(\boldsymbol{e}_h)$, e si riconosca che il moto di $\mathcal{M}$ è una rotazione.

33. [8/02/2017 (ex)II] Una terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ soddisfa

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha \boldsymbol{u}_2(t) + \beta \boldsymbol{u}_3(t) \,, \qquad \boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h \,, \quad h = 1\,,2\,,3 \,,$$

con α, $\beta > 0$ costanti.
Si scriva l'equazione differenziale (vettoriale) di secondo ordine soddisfatta da $\boldsymbol{u}_1$, ricavandone la scomposizione di $\boldsymbol{u}_1(t)$ nella base fissa $(\boldsymbol{e}_h)$, e si riconosca che il moto di $\mathcal{M}$ è una rotazione.

34. [06/06/2017 (ex)I] Una lamina quadrata di lato $L > 0$ è vincolata a giacere nel piano $x_3 = 0$ e ad avere il centro C sull'ellisse

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{B^2} = 1 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

A, $B > 0$ assegnati. La lamina è anche vincolata a mantenere i punti O, C, K allineati, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso (O, x_i), e K è un vertice della lamina.
Si scriva la velocità angolare del corpo in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

35. [11/07/2017 (ex)I] Una lamina quadrata di lato $2L$ è vincolata ad avere il vertice A nell'origine del sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$, e il vertice opposto B sulla curva

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 8L^2 \,, \\ x_1 = x_2 \,, \qquad x_1 > 0 \,. \end{aligned}$$

Determinare la scomposizione della velocità angolare della lamina nella base fissa $(\boldsymbol{e}_h)$, in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

36. [11/07/2017 (ex)I] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ si muove di moto tale che

$$\boldsymbol{X}_O(t) = ht\boldsymbol{e}_3 \,,$$

e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\beta t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\beta t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\beta t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Qui h, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.
Trovare le velocità relative (scomposte in $(\boldsymbol{u}_h)$) di tutti i moti che siano rettilinei uniformi nel sistema di riferimento fisso.

37. [23/07/2018 (ex)I] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ mantiene l'origine coincidente con quella del sistema di riferimento fisso e si muove di rotazione intorno all'asse $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$. L'angolo di rotazione è dato da $\varphi \in C^2(\boldsymbol{R})$, $\varphi(0) = 0$. All'istante iniziale $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Consideriamo un moto $\boldsymbol{X}$ tale che

$$\boldsymbol{X}(0) = 0 \,, \qquad \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

con α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ assegnati, non entrambi nulli.

- Determinare esplicitamente la scomposizione nella base fissa del moto $\boldsymbol{X}$.

- Trovare un vincolo olonomo mobile $f(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ soddisfatto dal moto; qui x_i denotano le coordinate nel sistema fisso.

38. [15/01/2019 (ex)I] Un disco D di raggio R è vincolato

- a avere il centro C sulla circonferenza

$$\gamma : \qquad x_1^2 + x_2^2 = L^2 \,, \quad x_3 = L \,;$$

- a essere ortogonale al versore

$$\boldsymbol{\nu}(C) = \frac{(-x_{1C}, -x_{2C}, L)}{\sqrt{2}L} \,,$$

ossia a mantenersi tangente al cono $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$.

Si esprima la velocità angolare del disco in funzione delle opportune coordinate lagrangiane, scomposta nella base fissa.

39. [15/01/2019 (ex)II] Una lamina quadrata Q di raggio L è vincolata

- a avere il centro C sulla circonferenza

$$\gamma : \qquad x_1^2 + x_2^2 = \frac{R^2}{2} \,, \quad x_3 = -\frac{R}{\sqrt{2}} \,;$$

- a essere ortogonale al versore

$$\boldsymbol{\nu}(C) = \frac{(-x_{1C}, -x_{2C}, -x_{3C})}{R} \,,$$

ossia a mantenersi tangente alla sfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$.

Si esprima la velocità angolare della lamina in funzione delle opportune coordinate lagrangiane, scomposta nella base fissa.

40. [13/01/2020 (ex)I] Si consideri la parametrizzazione nell'ascissa curvilinea dell'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 \,, \quad s \in \boldsymbol{R} \,,$$

con R, h, $\alpha > 0$ e $\alpha^2(h^2 + R^2) = 1$.
Si consideri anche il sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, ove $\boldsymbol{X}_O(t) = \boldsymbol{\psi}(ct)$ per $c > 0$ assegnato e $\mathcal{M}$ è la terna intrinseca dell'elica in $\boldsymbol{\psi}(ct)$.
Si dimostri che i moti $\boldsymbol{X}(t)$ solidali a $\mathcal{S}$ per cui vale $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_O(t)$ sono tutti e soli quelli per cui

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_O(t) + f(t)\boldsymbol{e}_3 \,,$$

per un'opportuna $f \in C^2(\boldsymbol{R})$.
Per comodità ricordiamo che per l'elica:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}(s) = -R\alpha \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\alpha \cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha \boldsymbol{e}_3 \,, \quad \boldsymbol{N}(s) = -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 \,, \\
&\boldsymbol{B}(s) = \alpha h \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h \cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R \boldsymbol{e}_3 \,, \quad k(s) = R\alpha^2 \,, \quad \tau(s) = -\alpha^2 h \,.
\end{aligned}
$$

41. [13/01/2020 (ex)II] Si consideri la parametrizzazione nell'ascissa curvilinea dell'elica

$$
\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 \,, \quad s \in \boldsymbol{R} \,,
$$

con R, h, $\alpha > 0$ e $\alpha^2(h^2 + R^2) = 1$.
Si consideri anche il sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, ove $\boldsymbol{X}_O(t) = \boldsymbol{\psi}(ct)$ per $c > 0$ assegnato e $\mathcal{M}$ è la terna intrinseca dell'elica in $\boldsymbol{\psi}(ct)$.
Si dimostri che i moti $\boldsymbol{X}(t)$ per cui vale

$$
\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_O(t) + \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(t) \,, \qquad t \in \boldsymbol{R} \,,
$$

sono tutti e soli quelli per cui

$$
\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_O(t) + f(t)\boldsymbol{e}_3 \,,
$$

per un'opportuna $f \in C^2(\boldsymbol{R})$.
Per comodità ricordiamo che per l'elica:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}(s) = -R\alpha \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\alpha \cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha \boldsymbol{e}_3 \,, \quad \boldsymbol{N}(s) = -\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 \,, \\
&\boldsymbol{B}(s) = \alpha h \sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 - \alpha h \cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + \alpha R \boldsymbol{e}_3 \,, \quad k(s) = R\alpha^2 \,, \quad \tau(s) = -\alpha^2 h \,.
\end{aligned}
$$

350. Dinamica relativa

1. [4/7/2005 (ex)I] Una retta $r(t)$ si muove mantenendosi sovrapposta all'asse fisso x_1, con velocità di traslazione $-\alpha t\boldsymbol{e}_1$, con $\alpha > 0$ costante.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a $r(t)$, e al tempo $t = 0$ ha velocità relativa a $r(0)$ data da $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = v_0\boldsymbol{e}_1$, con $v_0 > 0$.
Su P agisce la forza

$$
\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \,, \qquad \mu > 0 \text{ costante,}
$$

ove $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ è la velocità di P relativa a $r(t)$.
Per quali valori dei parametri α, μ, v_0 il moto di P relativo a $r(t)$ è uniforme (cioè $|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}| \equiv$costante)?

2. [4/7/2005 (ex)II] Una retta $r(t)$ si muove mantenendosi sovrapposta all'asse fisso x_1, con velocità di traslazione $\alpha t\boldsymbol{e}_1$, con $\alpha > 0$ costante.

Un punto materiale P di massa m è vincolato a $r(t)$, e al tempo $t = 0$ ha velocità relativa a $r(0)$ data da $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_1$, con $v_0 < 0$.
Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \,, \qquad \mu > 0 \text{ costante,}$$

ove $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ è la velocità di P relativa a $r(t)$.
Per quali valori dei parametri α, μ, v_0 il moto di P relativo a $r(t)$ è uniforme (cioè $|\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}| \equiv$costante)?

3. [16/5/2007 (hw)I] Un punto P di massa m è vincolato al piano ruotante $\Pi(t)$ di equazione

$$x_1 \sin(\alpha t) - x_2 \cos(\alpha t) = 0$$

(qui le x_i denotano le coordinate nel sistema di riferimento fisso). Si calcolino in funzione della posizione e della velocità di P le forze fittizie che agiscono su P nel sistema di riferimento $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$ è data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2(t) &= -\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3(t) &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Si dimostri anche che il lavoro relativo

$$\int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}) \cdot \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} \, \mathrm{d}t$$

dipende solo dalle posizioni di P agli istanti t_1 e t_2.

4. [15/7/2009 (ex)I] Consideriamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\omega t \, \boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t \, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\omega t \, \boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t \, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Indichiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$. Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra di raggio R di equazioni

$$y_1^2 + y_2^2 = R^2 \,, \qquad y_3 = 0 \,.$$

La circonferenza è solidale con $\mathcal{S}$.
Il punto P è soggetto alla reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$, che soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| = \mu \left| [\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}]_{\perp} \right| \,,$$

ove $\mu > 0$ è costante e $[\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}]_{\perp}$ indica la componente di $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ normale alla circonferenza. Inoltre $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ ha componente tangenziale diretta in modo tale da opporsi al moto di P (relativo alla circonferenza).

1. Scrivere l'equazione di moto di P (almeno fino al primo istante in cui ha velocità nulla in $\mathcal{S}$), sapendo che all'istante iniziale

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{u}_1(0)\,, \qquad \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = v_0\boldsymbol{u}_2(0)\,,$$

   con $v_0 > 0$.

2. Dimostrare che in effetti $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(\bar{t}) = 0$ per qualche $\bar{t} > 0$.

5. [15/7/2009 (ex)II] Consideriamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos\omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t\, \boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t\, \boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

Indichiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$. Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra di raggio R di equazioni

$$y_1^2 + y_2^2 = R^2\,, \qquad y_3 = R\,.$$

La circonferenza è solidale con $\mathcal{S}$.
Il punto P è soggetto alla reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$, che soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| = \mu\, |[\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}]_{\perp}|\,,$$

ove $\mu > 0$ è costante e $[\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}]_{\perp}$ indica la componente di $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ normale alla circonferenza. Inoltre $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ ha componente tangenziale diretta in modo tale da opporsi al moto di P (relativo alla circonferenza).

1. Scrivere l'equazione di moto di P (almeno fino al primo istante in cui ha velocità nulla in $\mathcal{S}$), sapendo che all'istante iniziale

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{u}_2(0)\,, \qquad \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = -v_0\boldsymbol{u}_1(0)\,,$$

   con $v_0 > 0$.

2. Dimostrare che in effetti $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(\bar{t}) = 0$ per qualche $\bar{t} > 0$.

6. [22/2/2010 (ex)I] Un piano mobile $\Pi(t)$ si muove mantenendosi sovrapposto al piano fisso $y_3 = 0$, con velocità di traslazione data da

$$\alpha t \boldsymbol{e}_2\,;$$

qui (y_i) indica la terna delle coordinate nel sistema di riferimento fisso. Un punto materiale P è vincolato a $\Pi(t)$ e sottoposto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + k x_1 \boldsymbol{e}_1\,,$$

ove (x_i) indica la terna di coordinate nel sistema solidale con $\Pi(t)$ dato da $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{e}_i)$; si assume che $O(0)$ coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso e che il piano $\Pi(t)$ coincida con $x_3 = 0$. Qui α, μ e k sono costanti positive.
Scrivere le equazioni di moto di P.

7. [22/2/2010 (ex)II] Un piano mobile $\Pi(t)$ si muove mantenendosi sovrapposto al piano fisso $y_3 = 0$, con velocità di traslazione data da

$$\alpha t \boldsymbol{e}_1 ;$$

qui (y_i) indica la terna delle coordinate nel sistema di riferimento fisso. Un punto materiale P è vincolato a $\Pi(t)$ e sottoposto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{v}_{\mathcal{S}} + k \boldsymbol{e}_2 ,$$

ove (x_i) indica la terna di coordinate nel sistema solidale con $\Pi(t)$ dato da $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{e}_i)$; si assume che $O(0)$ coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso e che il piano $\Pi(t)$ coincida con $x_3 = 0$. Qui α, μ e k sono costanti positive.
Scrivere le equazioni di moto di P.

8. [20/1/2014 (ex)I] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 .
\end{aligned}$$

Se indichiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$, un punto materiale P di massa m è vincolato ad appartenere alla circonferenza solidale con $\mathcal{S}$

$$(y_1 - L)^2 + y_2^2 = R^2 , \qquad y_3 = 0 ,$$

ove L, $R > 0$. Il vincolo è con attrito e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| \leq \mu \left| \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{N} \boldsymbol{N} + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} \boldsymbol{B} \right| ,$$

con $\mu > 0$ assegnato.
Trovare le eventuali posizioni di equilibrio di P relative a $\mathcal{S}$.

9. [20/1/2014 (ex)II] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 .
\end{aligned}$$

Se indichiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$, un punto materiale P di massa m è vincolato ad appartenere alla circonferenza solidale con $\mathcal{S}$

$$(y_1 - L)^2 + y_2^2 = R^2 , \qquad y_3 = 0 ,$$

ove L, $R > 0$. Il vincolo è con attrito e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| = \nu \, |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{N} \, \boldsymbol{N} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} \, \boldsymbol{B}| \ ,$$

con $\nu > 0$ assegnato.
Scrivere l'equazione del moto di P relativo a $\mathcal{S}$.

10. [12/1/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato al piano mobile scabro $\varPi$ di equazione

$$\alpha \cos(\lambda t) x_1 + \alpha \sin(\lambda t) x_2 + \beta x_3 = 0 ,$$

ove $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, α, β, $\lambda > 0$ sono costanti assegnate.
Sul punto agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$. La forza di attrito statico esercitata dal piano è tale che

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| \leq \mu \, |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \ ,$$

con $\mu > 0$.
Scrivere la condizione per l'esistenza di punti di equilibrio per P relativo al piano mobile $\varPi$, in funzione di due opportune coordinate lagrangiane.

11. [12/1/2015 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato al piano mobile scabro $\varPi$ di equazione

$$\alpha \cos(\lambda t) x_1 + \alpha \sin(\lambda t) x_2 - \beta x_3 = 0 ,$$

ove $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, α, β, $\lambda > 0$ sono costanti assegnate.
Sul punto agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$. La forza di attrito statico esercitata dal piano è tale che

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| \leq \mu \, |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \ ,$$

con $\mu > 0$.
Scrivere la condizione per l'esistenza di punti di equilibrio per P relativo al piano mobile $\varPi$, in funzione di due opportune coordinate lagrangiane.

450. Corpi rigidi: moti polari

1. [4/7/2005 (ex)I] Un cilindro retto circolare omogeneo di massa m, raggio R e altezza h precede intorno al suo centro di massa G. Al tempo $t = 0$ la sua velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ nel sistema di riferimento fisso è

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{01}\boldsymbol{u}_1 + \omega_{03}\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \omega_{01} \,, \omega_{03} > 0 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ sono i versori del sistema di riferimento solidale con il cilindro, con origine in G. In particolare $\boldsymbol{u}_3$ è diretto come l'asse del cilindro.
Il cilindro è soggetto a un momento delle forze esterne (polo G)

$$\boldsymbol{M} = \lambda \cos(kt)\boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove λ, $k > 0$.
Determinare il valore massimo raggiunto da $|\boldsymbol{\omega}(t)|^2$ durante il moto.

2. [4/7/2005 (ex)II] Un cono retto circolare omogeneo di massa m, raggio di base R e altezza h precede intorno al suo centro di massa G. Al tempo $t = 0$ la sua velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ nel sistema di riferimento fisso è

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{02}\boldsymbol{u}_2 + \omega_{03}\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \omega_{02} \,, \omega_{03} > 0 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ sono i versori del sistema di riferimento solidale con il cono, con origine in G. In particolare $\boldsymbol{u}_2$ è diretto come l'asse del cono.
Il cono è soggetto a un momento delle forze esterne (polo G)

$$\boldsymbol{M} = k \sin(\lambda t)\boldsymbol{u}_2 \,,$$

ove λ, $k > 0$.
Determinare il valore massimo raggiunto da $|\boldsymbol{\omega}(t)|^2$ durante il moto.

3. [18/7/2005 (ex)I] Un cubo omogeneo di massa m e spigolo $2L$ precede intorno al suo centro di massa C. Il cubo è soggetto a una forza $\boldsymbol{F}$ di modulo costante μ, applicata a un suo vertice A; $\boldsymbol{F}$ si mantiene sempre ortogonale a $\overrightarrow{CA}$, e costante nel sistema di riferimento solidale con il cubo.
Sapendo che per $t = 0$ la velocità angolare del cubo nel sistema di riferimento fisso è nulla, dimostrare che il moto è una rotazione e determinare il primo istante $t_1 > 0$ in cui A torna a occupare la sua posizione iniziale.

4. [18/7/2005 (ex)I] Una lamina quadrata omogenea di lato $2L$ e massa m è vincolata a ruotare intorno all'asse comune di due suoi lati opposti, che coincide con l'asse x_3 del riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3).
Inoltre il centro di massa della lamina è fisso.
I vincoli sono lisci.
Sulla lamina agisce una densità di forza

$$\lambda x_2 \boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \lambda > 0 \text{ costante.}$$

Sapendo che all'istante iniziale la lamina giace sul piano $x_1 = 0$, ed è ferma, determinarne l'energia cinetica nel primo istante positivo $t_1 > 0$ in cui la lamina torna a giacere sul piano $x_1 = 0$.

5. [18/7/2005 (ex)II] Una sfera omogenea di massa m e raggio R precede intorno al suo centro di massa. La sfera è soggetta a una forza $\boldsymbol{F}$ di modulo costante λ, applicata a un punto A della sua superficie, solidale con la sfera medesima. La forza $\boldsymbol{F}$ si mantiene sempre tangente a una circonferenza massima della sfera, anch'essa solidale con la sfera medesima.
Sapendo che per $t = 0$ la velocità angolare della sfera nel sistema di riferimento fisso è nulla, dimostrare che il moto è una rotazione e determinare il primo istante $t_1 > 0$ in cui A torna a occupare la sua posizione iniziale.

6. [18/7/2005 (ex)II] Una lamina quadrata omogenea di lato $2L$ e massa m è vincolata a ruotare intorno all'asse comune di due suoi lati opposti, che coincide con l'asse x_1 del riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3).
Inoltre il centro di massa della lamina è fisso.
I vincoli sono lisci.
Sulla lamina agisce una densità di forza

$$\mu x_3 \boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \mu > 0 \text{ costante.}$$

Sapendo che all'istante iniziale la lamina giace sul piano $x_2 = 0$, ed è ferma, determinarne l'energia cinetica nel primo istante positivo $t_1 > 0$ in cui la lamina giace sul piano $x_3 = 0$.

7. [12/9/2005 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di raggio $R > 0$ ha il centro coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3), ed è vincolata a ruotare intorno all'asse verticale x_3. I suoi punti di intersezione $A = (0,0,-R)$ e $B = (0,0,R)$ con tale asse sono fissi.
Ciascuna delle due semicirconferenze γ_1 e γ_2 in cui γ è divisa dai punti A e B è omogenea, di massa rispettivamente m_1 e m_2.
All'istante iniziale γ giace sul piano $x_1 = 0$, con γ_1 nel semipiano $x_2 \geq 0$, e $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{30} \boldsymbol{e}_3$, $\omega_{30} > 0$.
Su γ agiscono il peso e le reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^A$ e $\mathbf{f}_{\text{vin}}{}^B$.
Si determinino le componenti nella base fissa $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, di

$$\boldsymbol{\mu} = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{f}_{\text{vin}}{}^A + \overrightarrow{OB} \times \mathbf{f}_{\text{vin}}{}^B \,,$$

come funzioni esplicite di m_1, m_2, R, g, ω_{30} e t.

8. [12/9/2005 (ex)II] Una circonferenza materiale γ di raggio $R > 0$ ha il centro coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso

$$(O, x_1, x_2, x_3) \,,$$

ed è vincolata a ruotare intorno all'asse verticale x_2. I suoi punti di intersezione $A = (0, -R{,}0)$ e $B = (0, R{,}0)$ con tale asse sono fissi.
Ciascuna delle due semicirconferenze γ_1 e γ_2 in cui γ è divisa dai punti A e B è omogenea, di massa rispettivamente m_1 e m_2.
All'istante iniziale γ giace sul piano $x_1 = 0$, con γ_1 nel semipiano $x_3 \geq 0$, e $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{20}\boldsymbol{e}_2$, $\omega_{20} > 0$.
Su γ agiscono il peso e le reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^A$ e $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^B$.
Si determinino le componenti nella base fissa $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, di

$$\boldsymbol{\mu} = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^A + \overrightarrow{OB} \times \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^B \,,$$

come funzioni esplicite di m_1, m_2, R, g, ω_{20} e t.

9. [15/12/2005 (ex)I] Un cilindro retto di massa m, raggio R e altezza H precede intorno al suo centro O, con vincolo liscio. All'istante iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0\boldsymbol{u}_3(0) \,, \qquad \omega_0 > 0 \,,$$

se $\boldsymbol{u}_3$ denota il versore della direzione dell'asse del cilindro.
Il cilindro è soggetto a un momento delle forze esterne (rispetto a O)

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}}(t) = -\mu\sqrt{|\boldsymbol{\omega}(t)|}\boldsymbol{u}_3(t) \,,$$

ove $\mu > 0$ è costante.
Descrivere il moto del cilindro fino all'istante in cui si arresta.

10. [7/4/2006 (ex)I] Una circonferenza omogenea γ di massa $m > 0$ e raggio $R > 0$ è vincolata a ruotare intorno a un suo diametro, che giace su una retta fissa r. Il centro C della circonferenza è fisso su r.
La circonferenza è ferma all'istante iniziale $t = 0$ ed è soggetta alla forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{e} \,,$$

ove λ, $\mu > 0$ sono costanti e

- $\boldsymbol{u}$ è il versore normale al piano di γ;
- $\boldsymbol{e}$ è il versore della retta r.

La forza $\boldsymbol{F}$ è applicata in un punto P di γ, e con essa solidale, tale che

$$\boldsymbol{e} \cdot \overrightarrow{CP} = \frac{R}{\sqrt{2}} \,.$$

Si scrivano le equazioni di moto della circonferenza.

11. [19/7/2006 (ex)I] Un cilindro retto di raggio R e altezza H, rigido, omogeneo, è vincolato a ruotare intorno all'asse fisso passante per i centri A e B delle sue basi, mantenendo A e B fissi su tale asse.

Denotiamo con $(O, \boldsymbol{e}_i)$ un sistema di riferimento fisso, ove O è il centro del cilindro, e con $(O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con il cilindro, tali che

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3(t) = \frac{\overrightarrow{BA}}{H}\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

Il cilindro è soggetto alle forze (con λ, $\mu > 0$ costanti)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &= \lambda \boldsymbol{e}_1\,, \quad \text{applicata in } P_1, \text{ ove } \overrightarrow{AP_1} = R\boldsymbol{u}_1, \\ \boldsymbol{F}_2 &= \mu \boldsymbol{u}_2\,, \quad \text{applicata in } P_2, \text{ ove } \overrightarrow{BP_2} = R\boldsymbol{u}_1. \end{aligned}$$

(Ossia P_1 e P_2 sono le intersezioni con le basi di una stessa generatrice del cilindro.)
I momenti delle reazioni vincolari lungo l'asse di rotazione sono nulli.
Il cilindro è fermo all'istante $t = 0$.
Determinare l'equazione di moto.

12. [19/7/2006 (ex)II] Un cilindro retto di raggio R e altezza H, rigido, omogeneo, è vincolato a ruotare intorno all'asse fisso passante per i centri A e B delle sue basi, mantenendo A e B fissi su tale asse.
Denotiamo con $(O, \boldsymbol{e}_i)$ un sistema di riferimento fisso, ove O è il centro del cilindro, e con $(O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con il cilindro, tali che

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3(t) = \frac{\overrightarrow{BA}}{H}\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

Il cilindro è soggetto alle forze (con λ, $\mu > 0$ costanti)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &= \lambda \boldsymbol{u}_2\,, \quad \text{applicata in } P_1, \text{ ove } \overrightarrow{AP_1} = R\boldsymbol{u}_1, \\ \boldsymbol{F}_2 &= \mu \boldsymbol{e}_1\,, \quad \text{applicata in } P_2, \text{ ove } \overrightarrow{BP_2} = R\boldsymbol{u}_1. \end{aligned}$$

(Ossia P_1 e P_2 sono le intersezioni con le basi di una stessa generatrice del cilindro.)
I momenti delle reazioni vincolari lungo l'asse di rotazione sono nulli.
Il cilindro è fermo all'istante $t = 0$.
Determinare l'equazione di moto.

13. [13/12/2006 (ex)I] Un guscio sferico S di raggio R, massa m e centro C è vincolato a precedere intorno a un suo punto O, coincidente con l'origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Sia $(O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con S. In particolare sia $\overrightarrow{CO} = R\boldsymbol{u}_3$. Quindi $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ è una base (solidale con S) del piano tangente a S nei due suoi punti diametralmente opposti O e O', ove appunto $\overrightarrow{CO'} = -R\boldsymbol{u}_3$.
All'istante $t = 0$ il guscio S è fermo.
In O' è applicata una forza

$$\boldsymbol{F} = \mu[\cos(\lambda t)\boldsymbol{u}_1 + \sin(\lambda t)\boldsymbol{u}_2]\,.$$

Qui R, m, λ, μ sono costanti positive.
Si determini l'energia cinetica T di S come funzione del tempo.

14. [26/3/2007 (ex)I] Un sistema rigido è costituito da tre punti materiali, P_1, P_2 e P_3, ciascuno di massa m, posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato L.
Il sistema è vincolato con vincolo liscio a ruotare intorno al lato P_1P_2, mantenuto fisso in posizione verticale.
Il sistema ha all'istante iniziale velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_0$.
Descrivere il moto del sistema e ricavare risultante e momento risultante delle reazioni vincolari.

15. [4/7/2007 (ex)I] Un cono circolare retto di altezza H, raggio di base R, e massa m è vincolato a precedere intorno al suo vertice O.
Introduciamo anche un sistema di riferimento solidale con il cono $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, con $\boldsymbol{u}_3$ diretto come l'altezza $\overrightarrow{OA}$ del cono (A è quindi il centro della base del cono), e $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ normali a $\overrightarrow{OA}$. Il cono è sottoposto a una distribuzione di forze (che agisce solo sulla base)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{base}} = \big[(\alpha - \beta x_2)\boldsymbol{u}_1 + (\alpha + \beta x_1)\boldsymbol{u}_2\big]\delta_{\{x_3=H\}}\,.$$

Qui α, $\beta \in C(\boldsymbol{R})$ sono funzioni del tempo assegnate e positive.

- Scrivere le equazioni di Eulero.
- Determinare le condizioni perché la componente di $\boldsymbol{\omega}$ ortogonale a $\boldsymbol{u}_3$ sia solidale con $\mathcal{S}$, nell'ipotesi che $\boldsymbol{\omega}(0) \cdot \boldsymbol{u}_3(0) = \omega_{30} > 0$ all'istante iniziale.

16. [4/7/2007 (ex)II] Un cono circolare retto di altezza H, raggio di base R, e massa m è vincolato a precedere intorno al suo vertice O.
Introduciamo anche un sistema di riferimento solidale con il cono $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, con $\boldsymbol{u}_3$ diretto come l'altezza $\overrightarrow{OA}$ del cono (A è quindi il centro della base del cono), e $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ normali a $\overrightarrow{OA}$. Il cono è sottoposto a una distribuzione di forze (che agisce solo sulla base)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{base}} = \big[(\alpha + \beta x_2)\boldsymbol{u}_1 + (\alpha - \beta x_1)\boldsymbol{u}_2\big]\delta_{\{x_3=H\}}\,.$$

Qui α, $\beta \in C(\boldsymbol{R})$ sono funzioni del tempo assegnate e positive.

- Scrivere le equazioni di Eulero.
- Determinare le condizioni perché la componente di $\boldsymbol{\omega}$ ortogonale a $\boldsymbol{u}_3$ sia solidale con $\mathcal{S}$, nell'ipotesi che $\boldsymbol{\omega}(0) \cdot \boldsymbol{u}_3(0) = \omega_{30} < 0$ all'istante iniziale.

17. [19/7/2007 (ex)I] Una sfera di raggio R e massa m precede intorno al suo centro O, origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Al punto P tale che
$$\overrightarrow{OP} = R\boldsymbol{e}_1 \,,$$
è applicata la forza
$$\boldsymbol{F} = \lambda \boldsymbol{e}_2 + \mu \boldsymbol{e}_3 \,,$$
con λ e μ costanti positive.
La sfera ha velocità angolare al tempo $t = 0$
$$\boldsymbol{\omega}(0) = \sum_{i=1}^{3} \omega_{i0} \boldsymbol{e}_i \,.$$
Determinare le condizioni sui dati iniziali e gli altri parametri perché esista un istante $\bar{t} > 0$ tale che la sfera si arresti in $\bar{t}$.

18. [19/7/2007 (ex)I] Un corpo rigido precede intorno a un suo punto O. Le equazioni di Eulero sono
$$I_{11}\dot{\omega}_1 = (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 \,, \tag{1}$$
$$I_{22}\dot{\omega}_2 = (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 \,, \tag{2}$$
$$I_{33}\dot{\omega}_3 = (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \,, \tag{3}$$
ove $f \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$ è una funzione assegnata.
Determinare un integrale primo del moto in ciascuno dei due casi seguenti:

- $I_{11} = I_{22}$.
- $I_{22} = I_{33}$.

19. [19/7/2007 (ex)II] Una sfera di raggio R e massa m precede intorno al suo centro O, origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Al punto P tale che
$$\overrightarrow{OP} = R\boldsymbol{e}_1 \,,$$
è applicata la forza
$$\boldsymbol{F} = \lambda \boldsymbol{e}_2 + \mu \boldsymbol{e}_3 \,,$$
con λ e μ costanti positive.
La sfera ha velocità angolare al tempo $t = 0$
$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{20}\boldsymbol{e}_2 + \omega_{30}\boldsymbol{e}_3 \,.$$
Determinare le condizioni sui dati iniziali e gli altri parametri perché il moto sia una rotazione.

20. [19/7/2007 (ex)II] Un corpo rigido precede intorno a un suo punto O. Le equazioni di Eulero sono

$$
\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 \,, &(1)\\
I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \,, &(2)\\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 \,, &(3)
\end{aligned}
$$

ove $f \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$ è una funzione assegnata.
Determinare un integrale primo del moto in ciascuno dei due casi seguenti:

- $I_{11} = I_{22}$.
- $I_{11} = I_{33}$.

21. [13/12/2007 (ex)I] Un disco D di centro C, raggio $R > 0$ e massa $m > 0$, è vincolato

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- a mantenere un punto A del suo bordo, solidale con il disco, fisso nell'origine O del sistema fisso.

Il disco è soggetto alle forze:

- Una coppia di forze applicate nei punti opposti al centro H e K del suo bordo tali che

  $$\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{CA} \,, \qquad \overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{CA} \,;$$

  la coppia è data da

  $$\boldsymbol{F}_H = \lambda\overrightarrow{AC} \,, \qquad \boldsymbol{F}_K = -\lambda\overrightarrow{AC} \,,$$

  con λ costante positiva.
- Una forza applicata nel punto B

  $$\boldsymbol{F}_B = \mu\boldsymbol{e}_1 \,,$$

  con $\mu > 0$ costante, e B punto opposto al centro di A.

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio del disco.

22. [13/12/2007 (ex)II] Un disco D di centro C, raggio $R > 0$ e massa $m > 0$, è vincolato

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;

- a mantenere un punto A del suo bordo, solidale con il disco, fisso nell'origine O del sistema fisso.

Il disco è soggetto alle forze:

- Una coppia di forze applicate nei punti opposti al centro H e K del suo bordo tali che

  $$\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{CA}\,, \qquad \overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{CA}\,;$$

  la coppia è data da

  $$\boldsymbol{F}_H = \lambda \overrightarrow{AC}\,, \qquad \boldsymbol{F}_K = -\lambda \overrightarrow{AC}\,,$$

  con λ costante positiva.

- Una forza applicata nel punto B

  $$\boldsymbol{F}_B = -\mu \boldsymbol{e}_1\,,$$

  con $\mu > 0$ costante, e B punto opposto al centro di A.

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio del disco.

23. [1/4/2008 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato $2L$ è vincolata ad avere il punto medio del lato AB nell'origine.
È soggetta alla forza, applicata nel vertice B, data da

$$\boldsymbol{F} = \frac{k}{4L^2} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\,,$$

ove AB e BC sono due lati consecutivi, e $k > 0$ è costante.

1. Scrivere le equazioni di moto.
2. Trovare i moti in cui l'energia cinetica rimane costante.

24. [1/7/2008 (ex)I] Una lamina quadrata omogenea di lato $2L$ e massa m precede intorno al proprio centro O.
Sia $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con la lamina, tale che $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ siano paralleli ai lati della lamina, e indichiamo con (x_1, x_2, x_3) le coordinate in $\mathcal{S}$.
La lamina è soggetta a una distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \big(\alpha x_1^2 x_2 \boldsymbol{u}_1 + \beta x_1 x_2^2 \boldsymbol{u}_3\big)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,,$$

ove α, $\beta \in \boldsymbol{R}$.
La lamina all'istante iniziale è ferma.

Determinare i valori di α e β in corrispondenza dei quali il moto è una rotazione intorno a uno degli assi di $\mathcal{S}$, e risolvere le equazioni di Eulero in questi casi.

25. [1/7/2008 (ex)II] Una lamina quadrata omogenea di lato $2L$ e massa m precede intorno al proprio centro O.
Sia $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con la lamina, tale che $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ siano paralleli ai lati della lamina, e indichiamo con (x_1, x_2, x_3) le coordinate in $\mathcal{S}$.
La lamina è soggetta a una distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \big(\alpha x_1 x_2^2 \boldsymbol{u}_2 + \beta x_1^2 x_2 \boldsymbol{u}_3\big) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \,,$$

ove α, $\beta \in \boldsymbol{R}$.
La lamina all'istante iniziale è ferma.
Determinare i valori di α e β in corrispondenza dei quali il moto è una rotazione intorno a uno degli assi di $\mathcal{S}$, e risolvere le equazioni di Eulero in questi casi.

26. [18/7/2008 (ex)I] Si consideri un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove O è fisso, e le coordinate in $\mathcal{S}$ sono indicate da (λ_i). Un corpo rigido è dato da

$$C = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \le R^2\} \,,$$

con densità

$$\rho(\lambda) = \big[\rho_0 + m\delta_{\{P\}}(\lambda)\big] \,\mathrm{d}\lambda \,,$$

ove ρ_0, $m > 0$ sono costanti e

$$P = \Big(0, \frac{1}{4}R, \frac{\sqrt{15}}{4}R\Big) \,.$$

Si tratta dunque di una sfera omogenea con un punto fissato alla sua superficie.
C è vincolato a precedere intorno al punto fisso O, ed è soggetto a due forze $\boldsymbol{F}_A$ e $\boldsymbol{F}_B$ applicate rispettivamente nei punti A e B tali che

$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \overrightarrow{OB} = -R\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Le due forze possono venire scelte ad arbitrio, con la sola restrizione che

$$|\boldsymbol{F}_A| \le \mu \,, \qquad |\boldsymbol{F}_B| \le \mu \,,$$

con $\mu > 0$ costante.
Determinare i valori di ω_3 per cui è possibile che il moto sia una rotazione uniforme con velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \boldsymbol{u}_3 \,.$$

27. [18/7/2008 (ex)II] Si consideri un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove O è fisso, e le coordinate in $\mathcal{S}$ sono indicate da (λ_i). Un corpo rigido è dato da

$$C = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \leq R^2\} ,$$

con densità

$$\rho(\lambda) = \big[\rho_0 + m\delta_{\{P\}}(\lambda)\big] \,\mathrm{d}\lambda ,$$

ove ρ_0, $m > 0$ sono costanti e

$$P = \Big(0, \frac{3}{4}R, \frac{\sqrt{7}}{4}R\Big) .$$

Si tratta dunque di una sfera omogenea con un punto fissato alla sua superficie.
C è vincolato a precedere intorno al punto fisso O, ed è soggetto a due forze $\boldsymbol{F}_A$ e $\boldsymbol{F}_B$ applicate rispettivamente nei punti A e B tali che

$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_3 , \qquad \overrightarrow{OB} = -R\boldsymbol{u}_3 .$$

Le due forze possono venire scelte ad arbitrio, con la sola restrizione che

$$|\boldsymbol{F}_A| \leq \mu , \qquad |\boldsymbol{F}_B| \leq \mu ,$$

con $\mu > 0$ costante.
Determinare i valori di ω_3 per cui è possibile che il moto sia una rotazione uniforme con velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \boldsymbol{u}_3 .$$

28. [12/9/2008 (ex)I] Un cilindro retto circolare rigido di massa m, altezza H e raggio R è vincolato a precedere intorno al suo centro O.
Su due punti A e B diametralmente opposti di una delle circonferenze di base sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = a\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{u} , \qquad \boldsymbol{F}_B = -b\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{u} ,$$

con a, $b > 0$ costanti, e $\boldsymbol{u}$ versore solidale con il cilindro, diretto come il suo asse (nel verso tale che $\overrightarrow{AO} \cdot \boldsymbol{u} > 0$).
Il cilindro è fermo al tempo iniziale.

- Determinare una condizione su a e b che rende il moto una rotazione.
- Nell'ipotesi che l'ellissoide d'inerzia in O sia una sfera, determinare T per ogni valore di a, $b > 0$.

29. [12/9/2008 (ex)I] Un parallelepipedo di massa m e di spigoli $a < b < c$ precede per inerzia intorno al suo centro O.
All'istante iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \boldsymbol{u}_1(0) + \beta \boldsymbol{u}_2(0) + \gamma \boldsymbol{u}_3(0) ,$$

ove $(O, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con il parallelepipedo, con versori $\boldsymbol{u}_i$ ortogonali alle facce del solido, e coincidente al tempo $t = 0$ con il sistema di riferimento fisso. Qui a, b, c, α, β, γ sono costanti positive.

- Si determini il piano fisso su cui rotola l'ellissoide d'inerzia.
- Si determini la condizione su α, β, γ per cui tale piano ha normale parallela a
$$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 .$$

30. [12/9/2008 (ex)II] Un cilindro retto circolare rigido di massa m, altezza H e raggio R è vincolato a precedere intorno al suo centro O.
Su due punti A e B diametralmente opposti di una delle circonferenze di base sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = a\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{u} , \qquad \boldsymbol{F}_B = -b\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{u} ,$$

con a, $b \in \boldsymbol{R}$ costanti, e $\boldsymbol{u}$ versore solidale con il cilindro, diretto come il suo asse (nel verso tale che $\overrightarrow{AO} \cdot \boldsymbol{u} > 0$).
Il cilindro è fermo al tempo iniziale.

- Riconoscere che sono possibili due distinti moti di rotazione (non banale), in corrispondenza di particolari condizioni soddisfatte da a e b, e determinare tali condizioni.
- Nell'ipotesi che l'ellissoide d'inerzia in O sia una sfera, determinare T per ogni valore di a, b.

31. [12/9/2008 (ex)II] Un parallelepipedo di massa m e di spigoli $a > b > c > 0$ precede per inerzia intorno al suo centro O.
All'istante iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \boldsymbol{u}_1(0) + \beta \boldsymbol{u}_2(0) + \gamma \boldsymbol{u}_3(0) ,$$

ove $(O, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con il parallelepipedo, con versori $\boldsymbol{u}_i$ ortogonali alle facce del solido, e coincidente al tempo $t = 0$ con il sistema di riferimento fisso. Qui a, b, c, α, β, γ sono costanti.

- Si determini il piano fisso su cui rotola l'ellissoide d'inerzia.

- Si determini la condizione su α, β, γ per cui tale piano ha normale parallela a
$$\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 \,.$$

32. [12/1/2009 (ex)I] Un disco di raggio R e massa m è vincolato a ruotare intorno alla direzione fissa $\boldsymbol{e}_3$, ortogonale al disco stesso, mantenendo il suo centro C fisso nell'origine del sistema di riferimento fisso. Consideriamo anche un sistema di riferimento solidale con il disco, $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$, con $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$; denotiamo con (x_1, x_2, x_3) le coordinate in $\mathcal{S}$.
Sul disco agiscono:

- la distribuzione di forze
$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = \alpha x_1 \boldsymbol{u}_2 \,;$$
- la forza elastica applicata in P
$$\boldsymbol{F}_e = -k\overrightarrow{P_0P} \,,$$
ove $\overrightarrow{CP_0} = L\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{CP} = R\boldsymbol{u}_1$.

Qui α, k, L sono costanti positive.
All'istante iniziale il disco è fermo, e $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$.

- Si determini l'equazione di moto del disco.
- Supponendo che il disco compia un giro completo, si determini la sua energia cinetica nell'istante in cui completa il primo giro.

33. [12/1/2009 (ex)II] Un disco di raggio R e massa m è vincolato a ruotare intorno alla direzione fissa $\boldsymbol{e}_3$, ortogonale al disco stesso, mantenendo il suo centro C fisso nell'origine del sistema di riferimento fisso. Consideriamo anche un sistema di riferimento solidale con il disco, $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$, con $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$; denotiamo con (x_1, x_2, x_3) le coordinate in $\mathcal{S}$.
Sul disco agiscono:

- la distribuzione di forze
$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = \alpha x_1 \boldsymbol{u}_2 \,;$$
- la forza elastica applicata in P
$$\boldsymbol{F}_e = -k\overrightarrow{P_0P} \,,$$
ove $\overrightarrow{CP_0} = L\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{CP} = R\boldsymbol{u}_2$.

Qui α, k, L sono costanti positive.
All'istante iniziale il disco è fermo, e $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$.

- Si determini l'equazione di moto del disco.
- Supponendo che il disco compia un giro completo, si determini la sua energia cinetica nell'istante in cui completa il primo giro.

34. [12/2/2009 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di lato $2L$, non omogenea, ha densità dipendente dalla distanza dal lato AB:

$$\rho(P) = \begin{cases} \rho_1 \,, & \text{se } \operatorname{dist}(P, AB) \leq L, \\ \rho_2 \,, & \text{se } \operatorname{dist}(P, AB) > L. \end{cases}$$

Qui $\rho_1 > \rho_2 > 0$ sono costanti.
La lamina è vincolata a precedere intorno al suo centro geometrico O, che si mantiene fisso.
Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_3$. Alla lamina è applicata anche la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{u} \chi_{AB} \,\mathrm{d}s + \beta \boldsymbol{u} \chi_{BC} \,\mathrm{d}s$$

che è diversa da zero appunto solo sui lati AB e BC. Qui $\mathrm{d}s$ è l'elemento di lunghezza su tali lati, e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale alla lamina, ad essa ortogonale.
Qui α e β sono costanti.
All'istante iniziale la lamina è ferma in posizione orizzontale, con $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Eulero.
- Trovare una condizione su α e β perché la lamina resti in equilibrio nella posizione iniziale.

35. [12/2/2009 (ex)I] Un cono circolare retto di altezza h e raggio di base R precede per inerzia intorno al suo vertice O, che rimane fisso.
All'istante iniziale la sua velocità angolare è

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con il cono, con $\boldsymbol{u}_3$ parallelo all'asse del cono. Qui h, R, α, β sono costanti positive.
Determinare $\boldsymbol{\omega}(t)$ per ogni $t > 0$.

36. [12/2/2009 (ex)II] Una lamina quadrata $ABCD$ di lato $2L$, non omogenea, ha densità dipendente dalla distanza dal lato AB:

$$\rho(P) = \begin{cases} \rho_1 \,, & \text{se } \operatorname{dist}(P, AB) \leq L, \\ \rho_2 \,, & \text{se } \operatorname{dist}(P, AB) > L. \end{cases}$$

Qui $\rho_2 > \rho_1 > 0$ sono costanti.

La lamina è vincolata a precedere intorno al suo centro geometrico O, che si mantiene fisso.
Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_3$. Alla lamina è applicata anche la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{u} \chi_{AB} \,\mathrm{d}s + \beta \boldsymbol{u} \chi_{AD} \,\mathrm{d}s$$

che è diversa da zero appunto solo sui lati AB e AD. Qui $\mathrm{d}s$ è l'elemento di lunghezza su tali lati, e $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale alla lamina, ad essa ortogonale.
Qui α e β sono costanti.
All'istante iniziale la lamina è ferma in posizione orizzontale, con $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Eulero.
- Trovare una condizione su α e β perché la lamina resti in equilibrio nella posizione iniziale.

37. [12/2/2009 (ex)II] Un cilindro circolare retto di altezza h e raggio di base R precede per inerzia intorno al suo centro O, che rimane fisso.
All'istante iniziale la sua velocità angolare è

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con il cilindro, con $\boldsymbol{u}_1$ parallelo all'asse del cilindro. Qui h, R, α, β sono costanti positive.
Determinare $\boldsymbol{\omega}(t)$ per ogni $t > 0$.

38. [11/9/2009 (ex)I] Un cilindro di altezza $2H$, raggio R, massa M, è vincolato a precedere intorno al suo centro C.
Introduciamo il sistema solidale con il cilindro $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$, ove $\boldsymbol{u}_3$ è diretto come l'asse del cilindro.
Sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}_1 \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{u}_1 \,,$$

nei punti A e B rispettivamente dati da

$$\overrightarrow{CA} = R\boldsymbol{u}_2 + H\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \overrightarrow{CB} = -R\boldsymbol{u}_2 - H\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Agisce anche un momento d'attrito di polo C pari a

$$\boldsymbol{M}_{\text{attrito}} = -\mu \boldsymbol{\omega} \,.$$

Qui k, $\mu > 0$ sono costanti.

- Scrivere le equazioni di Eulero del cilindro.
- Determinare l'unico valore di $\boldsymbol{\omega}(0)$ che rende $\boldsymbol{\omega}$ costante durante il moto.

39. [11/9/2009 (ex)II] Un parallelepipedo con sezione quadrata, di altezza $2H$, lato della base $2R$, massa M, è vincolato a precedere intorno al suo centro C.
Introduciamo il sistema solidale con il parallelepipedo $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$, ove $\boldsymbol{u}_3$ è diretto come l'asse del parallelepipedo, e $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ sono ortogonali alle facce laterali del solido.
Sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}_1 \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{u}_1 \,,$$

nei punti A e B rispettivamente dati da

$$\overrightarrow{CA} = R\boldsymbol{u}_2 + H\boldsymbol{u}_3 \,, \qquad \overrightarrow{CB} = -R\boldsymbol{u}_2 - H\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Agisce anche un momento d'attrito di polo C pari a

$$\boldsymbol{M}_{\text{attrito}} = -\mu\boldsymbol{\omega} \,.$$

Qui k, $\mu > 0$ sono costanti.

- Scrivere le equazioni di Eulero del rigido.
- Determinare l'unico valore di $\boldsymbol{\omega}(0)$ che rende $\boldsymbol{\omega}$ costante durante il moto.

40. [20/11/2009 (ex)I] Un disco rigido di massa M e raggio R precede intorno al suo centro O.
Il sistema $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ è solidale con il disco, e il versore $\boldsymbol{u}_3$ è ad esso ortogonale.
Al disco sono applicate le forze

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}_A = -\lambda\boldsymbol{u}_1 \,, && \text{nel punto } A \text{, tale che } \overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_2; \\ &\boldsymbol{F}_B = \mu\boldsymbol{e}_1 \,, && \text{nel punto } B \text{, tale che } \overrightarrow{OB} = R\boldsymbol{u}_1. \end{aligned}$$

Qui λ e μ sono costanti positive.
Determinare le eventuali posizioni di equilibrio del disco.
Sotto l'ulteriore vincolo

$$\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad t \geq 0 \,,$$

scrivere le equazioni di moto del disco.

41. [25/1/2010 (ex)I] Un cilindro di altezza H, raggio R e massa M precede per inerzia intorno al suo centro C.

Il moto è tale che in un certo istante $\bar{t}$ si ha

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\omega}(\bar{t}) = \beta\overrightarrow{CA}(\bar{t}) + \alpha\overrightarrow{CE}(\bar{t}) \,, \\ \overrightarrow{CA}(\bar{t}) = \frac{H}{2}\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \overrightarrow{CE}(\bar{t}) = R\boldsymbol{e}_1 \,,\end{gathered}$$

ove A è il centro di una delle basi del cilindro, ed E appartiene alla circonferenza direttrice di centro C. Inoltre α, $\beta > 0$ sono costanti.
Determinare il momento della quantità di moto $\boldsymbol{L}_C(t)$ per ogni t, in termini della base fissa $(\boldsymbol{e}_i)$ e dei parametri del problema.

42. [25/1/2010 (ex)II] Un cono di altezza H, raggio R e massa M precede per inerzia intorno al centro della sua base C.
Il moto è tale che in un certo istante $\bar{t}$ si ha

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\omega}(\bar{t}) = \beta\overrightarrow{CA}(\bar{t}) + \alpha\overrightarrow{CE}(\bar{t}) \,, \\ \overrightarrow{CA}(\bar{t}) = H\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \overrightarrow{CE}(\bar{t}) = R\boldsymbol{e}_1 \,,\end{gathered}$$

ove A è il vertice del cono, ed E appartiene alla circonferenza di base. Inoltre α, $\beta > 0$ sono costanti.
Determinare il momento della quantità di moto $\boldsymbol{L}_C(t)$ per ogni t, in termini della base fissa $(\boldsymbol{e}_i)$ e dei parametri del problema.

43. [22/2/2010 (ex)I] Un cubo omogeneo di spigolo $2L$, centro C e massa M è vincolato a precedere intorno a un suo vertice A, che rimane fisso.
Il cubo è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}_C = \lambda e^{-\beta t}\boldsymbol{u} \,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale con il cubo e ortogonale a $\overrightarrow{CA}$; inoltre λ, $\beta > 0$ sono costanti.
Il cubo è fermo all'istante iniziale $t = 0$.
Determinare una costante che limiti l'energia cinetica del cubo per tutti i tempi positivi.

44. [22/2/2010 (ex)II] Un cubo omogeneo di spigolo $2L$, centro C e massa M è vincolato a precedere intorno a un suo vertice A, che rimane fisso.
Il cubo è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}_C = \frac{\lambda}{1 + \beta^2 t^2}\boldsymbol{u} \,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale con il cubo e ortogonale a $\overrightarrow{CA}$; inoltre λ, $\beta > 0$ sono costanti.
Il cubo è fermo all'istante iniziale $t = 0$.

Determinare una costante che limiti l'energia cinetica del cubo per tutti i tempi positivi.

45. [8/7/2010 (ex)I] Una sfera di raggio R, massa M e centro C precede per inerzia intorno a un punto fisso O sulla sua superficie.
All'istante iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \alpha \frac{\overrightarrow{OC}}{R} + \beta \boldsymbol{u}\,,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore tale che $\boldsymbol{u} \perp \overrightarrow{OC}$. Qui α, β sono costanti positive.
Determinare $\boldsymbol{\omega}(t)$.

46. [7/9/2010 (ex)I] Un cubo di massa m e spigolo $2L$ è vincolato a precedere intorno al suo centro C.
Sul cubo agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda \boldsymbol{u}\,,$$

applicata in un suo vertice A, ove il versore solidale con il cubo

$$\boldsymbol{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2L}$$

è diretto come lo spigolo AB.
Scrivere le equazioni di moto del cubo.

47. [20/1/2014 (ex)I] Un cilindro di altezza $2H$, raggio R e massa M è vincolato a mantenere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Se (x_i) denota le coordinate in tale sistema, si assume che all'istante iniziale il cilindro sia fermo con l'asse giacente sull'asse x_3.
Al cilindro è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda \boldsymbol{u}_2 + \mu\Big(1 - \frac{x_{3A}}{H}\Big)\boldsymbol{e}_3\,,$$

nel punto solidale A centro della base che all'istante iniziale si trova a quota $x_3 = H$. Qui λ e μ sono costanti positive, e $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ è un sistema di riferimento solidale con il cilindro, ove si assume che all'istante iniziale $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Si determini una condizione su λ e μ che garantisca che la quota x_{3A} di A si annulli in un tempo finito.

48. [20/1/2014 (ex)II] Un cono di altezza H, raggio R e massa M è vincolato a mantenere il vertice nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Se (x_i) denota le coordinate in tale sistema, si assume che all'istante iniziale il cono sia fermo con l'asse giacente sull'asse x_3.
Al cono è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = \mu \boldsymbol{u}_1 + \lambda\Big(1 - \frac{x_{3A}}{H}\Big)\boldsymbol{e}_3\,,$$

nel punto solidale A centro della base, che all'istante iniziale si trova a quota $x_3 = H$. Qui λ e μ sono costanti positive, e $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ è un sistema di riferimento solidale con il cono, ove si assume che all'istante iniziale $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Si determini una condizione su λ e μ che garantisca che la quota x_{3A} di A si annulli in un tempo finito.

49. [19/6/2014 (ex)I] Un disco D di massa M e raggio R è vincolato ad avere il centro O coincidente con l'origine del sistema di riferimento fisso. Sia $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_i))$ un sistema solidale con il disco tale che $\boldsymbol{u}_3$ si mantenga ortogonale al piano del disco.
Sulla circonferenza bordo del disco agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = \lambda \boldsymbol{T}\,,$$

dove $\boldsymbol{T}$ è il versore tangente alla circonferenza e $\lambda > 0$ è costante. Inoltre sul punto B del disco dato da

$$\overrightarrow{OB} = R\boldsymbol{u}_1\,,$$

è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_2 = -k\overrightarrow{AB}\,,$$

ove

$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_1\,.$$

Qui $(O, (\boldsymbol{e}_i))$ denota il sistema di riferimento fisso.
All'istante iniziale il disco giace sul piano ortogonale a $\boldsymbol{e}_3$ ed è fermo, con $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$.
Scrivere le equazioni di moto, dare una condizione su λ, k, R che garantisca che il disco faccia un giro completo intorno a $\boldsymbol{u}_3$, e determinare la sua velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ nell'istante in cui completa il primo giro.

50. [13/1/2015 (ex)I] Un corpo rigido si muove di moto polare intorno a un suo punto O, ove il tensore di inerzia nella base solidale $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ è dato da

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{M}} = \mathrm{diag}(I_{11}, I_{11}, I_{33})\,, \qquad I_{11} \neq I_{33}\,.$$

Inoltre il corpo è soggetto a forze esterne di momento risultante

$$\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = -\alpha\omega_2\boldsymbol{u}_1 + \alpha\omega_1\boldsymbol{u}_2 + \beta(\omega_1^2 + \omega_2^2)\boldsymbol{u}_3\,.$$

Qui α, β sono costanti positive e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare del corpo.
All'istante iniziale si ha

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{01}\boldsymbol{u}_1(0) + \omega_{02}\boldsymbol{u}_2(0) + \omega_{03}\boldsymbol{u}_3(0)\,, \qquad \omega_{01}\omega_{02} \neq 0\,, \quad \omega_{03} < 0\,.$$

Scrivere le equazioni di moto e determinare l'unico istante $\bar{t} > 0$ tale che $\boldsymbol{\omega}(\bar{t})$ è ortogonale a $\boldsymbol{u}_3(\bar{t})$.

51. [13/1/2015 (ex)II] Un corpo rigido si muove di moto polare intorno a un suo punto O, ove il tensore di inerzia nella base solidale $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ è dato da

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{M}} = \operatorname{diag}(I_{11}, I_{22}, I_{11}) , \qquad I_{11} \neq I_{22} .$$

Inoltre il corpo è soggetto a forze esterne di momento risultante

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \alpha\omega_3\boldsymbol{u}_1 - \beta \cosh\big(\lambda(\omega_1^2 + \omega_3^2)\big)\boldsymbol{u}_2 - \alpha\omega_1\boldsymbol{u}_3 .$$

Qui α, β, λ sono costanti positive e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare del corpo.
All'istante iniziale si ha

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{01}\boldsymbol{u}_1(0) + \omega_{02}\boldsymbol{u}_2(0) + \omega_{03}\boldsymbol{u}_3(0) , \qquad \omega_{01}\omega_{03} \neq 0 , \quad \omega_{02} > 0 .$$

Scrivere le equazioni di moto e determinare l'unico istante $\bar{t} > 0$ tale che $\boldsymbol{\omega}(\bar{t})$ è ortogonale a $\boldsymbol{u}_2(\bar{t})$.

52. [10/2/2015 (ex)I] Un corpo rigido è formato da un cubo omogeneo di spigolo L e massa M, e da un'asta rigida di lunghezza L e massa m. L'asta è solidale con il cubo e si mantiene sovrapposta al suo spigolo AB.
Il corpo è vincolato a mantenere il centro C del cubo nell'origine del sistema di riferimento fisso.
Nel vertice A è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda\overrightarrow{AB} .$$

Sul corpo agisce anche il momento rispetto a C

$$\boldsymbol{M} = -\alpha\boldsymbol{\omega} .$$

Qui λ e α sono costanti positive.
Il cubo è fermo all'istante iniziale.
Scrivere le equazioni di moto e dimostrare che se $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ allora

$$\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0 ,$$

per un opportuno $\boldsymbol{\omega}_0 \in \boldsymbol{R}^3$.

53. [10/2/2015 (ex)II] Un corpo rigido è formato da un cubo omogeneo di spigolo L e massa M, e da un'asta rigida di lunghezza L e massa m. L'asta è solidale con il cubo e si mantiene sovrapposta al suo spigolo AB.
Il corpo è vincolato a mantenere il centro C del cubo nell'origine del sistema di riferimento fisso.

Nel punto medio D di AB è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda \overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{AB} .$$

Sul corpo agisce anche il momento rispetto a C

$$\boldsymbol{M} = -\alpha \boldsymbol{\omega} .$$

Qui λ e α sono costanti positive.
Il cubo è fermo all'istante iniziale.
Scrivere le equazioni di moto e dimostrare che se $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ allora

$$\lim_{t \to +\infty} \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0 ,$$

per un opportuno $\boldsymbol{\omega}_0 \in \boldsymbol{R}^3$.

54. [4/6/2015 (ex)I] Un cono di massa M, altezza H e raggio R è vincolato a muoversi di moto polare con il vertice A coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso.
Su di esso agisce la forza applicata nel centro C della base

$$\boldsymbol{F}_C = \lambda \cos(\alpha t) \boldsymbol{u}_3 ,$$

ed è applicato anche il momento di polo A

$$\boldsymbol{M}_1 = \mu \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_3 + \lambda \cos(\alpha t) \boldsymbol{\omega} .$$

Qui α, λ, μ sono costanti positive, e $(\boldsymbol{u}_i)$ è una base solidale con il cono, tale che

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{AC}}{H} .$$

Trovare il massimo dell'energia cinetica durante il moto, per il moto generico.

55. [4/6/2015 (ex)II] Un cilindro di massa M, altezza H e raggio R è vincolato a muoversi di moto polare con il centro di una base A coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso.
Su di esso agisce la forza applicata nel centro C dell'altra base

$$\boldsymbol{F}_C = \mu e^{-\alpha t} \boldsymbol{u}_3 ,$$

ed è applicato anche il momento di polo A

$$\boldsymbol{M}_1 = \lambda \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_3 + \mu e^{-\alpha t} \boldsymbol{\omega} .$$

Qui α, λ, μ sono costanti positive, e $(\boldsymbol{u}_i)$ è una base solidale con il cilindro, tale che

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{AC}}{H} .$$

Trovare il limite dell'energia cinetica per $t \to +\infty$, per il moto generico.

56. [2/7/2015 (ex)I] Un cilindro di massa M raggio R e altezza $2H$ è vincolato ad avere il centro C nell'origine del sistema fisso O.
Al cilindro è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{e}_1 \,,$$

nel punto solidale A di una delle due circonferenze di base. Qui λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$ sono costanti non nulle e il versore $\boldsymbol{u}$ è dato da

$$\boldsymbol{u} = \frac{\overrightarrow{CB}}{H} \,,$$

ove B è il centro della circonferenza di base cui appartiene A.
All'istante iniziale il cilindro è fermo con l'asse coincidente con l'asse fisso x_3 e

$$\overrightarrow{OA} = H\boldsymbol{e}_3 + R\boldsymbol{e}_1 \,.$$

- Si scrivano le equazioni di Eulero del corpo nelle opportune coordinate lagrangiane.
- Se $\lambda > 0$, $\mu < 0$ si scriva il valore dell'energia cinetica nel primo istante $\bar{t} > 0$ in cui l'asse del cilindro diviene ortogonale a $\boldsymbol{e}_3$.

57. [3/9/2015 (ex)I] Un disco di raggio R e massa M è vincolato ad avere il centro nell'origine del sistema di riferimento fisso O. Consideriamo anche il sistema di riferimento solidale con il disco $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ ove $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al disco.
Sul disco agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove A è un punto solidale con il disco appartenente al suo bordo, dato da $\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{u}_1$, e $k > 0$.
All'istante iniziale si ha per $\omega_{30} > 0$ assegnato

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{u}_3(0) = \boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{30}\boldsymbol{u}_3(0) \,.$$

- Scrivere le equazioni di Eulero del disco e determinarne la velocità angolare in funzione dei parametri e dati assegnati, nella base $(\boldsymbol{u}_h)$.
- Dare una condizione sufficiente perché l'asse del disco non divenga ortogonale a $\boldsymbol{u}_3(0) = \boldsymbol{e}_2$ nell'intervallo di tempo $(0, \bar{t})$, ove $\bar{t} > 0$ è assegnato.

58. [12/1/2015 (ex)I] Un rigido è costituito da un cilindro omogeneo di massa M, raggio R, altezza H e da 4 punti materiali P_1, P_2, P_3, P_4, ciascuno di massa m, solidali al cilindro.

Si consideri un sistema di riferimento solidale con il rigido $\mathcal{S} = (C, (\boldsymbol{u}_h))$, ove C è il centro del cilindro e $\boldsymbol{u}_3$ è parallelo all'asse del cilindro. Si assuma che

$$I_{33}^{\text{cil}} > I_{11}^{\text{cil}} = I_{22}^{\text{cil}} ,$$

ove I_{jj}^{cil} indica il momento di inerzia del cilindro, senza i punti P_i.
I punti P_i devono essere fissati a distanza R dall'asse del cilindro, ma in posizioni altrimenti libere. Si trovino per essi posizioni tali che valgano entrambe le condizioni:

- la terna (u_h) sia principale per il rigido in C;
- tutti i momenti del rigido rispetto a tale terna in C siano uguali:

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} .$$

59. [12/1/2015 (ex)II] Un rigido è costituito da un cono omogeneo di massa M, raggio R, altezza H e da 4 punti materiali P_1, P_2, P_3, P_4, ciascuno di massa m, solidali al cono.
Si consideri un sistema di riferimento solidale con il rigido $\mathcal{S} = (C, (\boldsymbol{u}_h))$, ove C è il vertice del cono e $\boldsymbol{u}_3$ è parallelo all'asse del cono. Si assuma che

$$I_{33}^{\text{cono}} > I_{11}^{\text{cono}} = I_{22}^{\text{cono}} ,$$

ove I_{jj}^{cono} indica il momento di inerzia del cono, senza i punti P_i.
I punti P_i devono essere fissati a distanza R dall'asse del cono, ma in posizioni altrimenti libere. Si trovino per essi posizioni tali che valgano entrambe le condizioni:

- la terna (u_h) sia principale per il rigido in C;
- tutti i momenti del rigido rispetto a tale terna in C siano uguali:

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} .$$

60. [9/2/2016 (ex)I] Una lamina ABC a forma di triangolo equilatero di lato L e massa M è vincolata a mantenere il centro di massa G nell'origine del sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$.
Nel vertice A è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{P_0 A} + h\boldsymbol{u} ,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore normale alla lamina e k, $h > 0$. Qui $\overrightarrow{OP_0} = (L/\sqrt{3})\boldsymbol{e}_1$.
La lamina all'istante iniziale è ferma, con ABC nel piano $x_3 = 0$, e A coincidente con P_0.

- Si scrivano le equazioni di moto.
- Se ne ricavi un integrale primo del moto.

61. [9/2/2016 (ex)II] Una lamina $ABCD$ a forma di quadrato di lato L e massa M è vincolata a mantenere il vertice A nell'origine del sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$.
Nel centro di massa G è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_G = k\overrightarrow{P_0G} + h\boldsymbol{u} ,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore normale alla lamina e k, $h > 0$. Qui $\overrightarrow{OP_0} = (L/\sqrt{2})\boldsymbol{e}_1$.
La lamina all'istante iniziale è ferma, con $ABCD$ nel piano $x_3 = 0$, e G coincidente con P_0.

- Si scrivano le equazioni di moto.
- Se ne ricavi un integrale primo del moto.

62. [19/3/2016 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e massa M è vincolata ad avere il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso.
Sia $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale con la lamina, ove $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale alla lamina, e

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{L} , \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{BC}}{L} .$$

La lamina è sottoposta alle forze

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda \sin(\mu t)\boldsymbol{u}_1 , \qquad \boldsymbol{F}_B = \lambda \sin(\mu t)\boldsymbol{u}_2 ,$$

applicate come indicato nei vertici consecutivi A e B, ove λ, $\mu > 0$ sono assegnati.
Si determinino massimo e minimo dell'energia cinetica nel corso del moto, in funzione dei parametri e delle condizioni iniziali del moto.

63. [12/7/2016 (ex)I] Un cono di raggio R, altezza H e massa M è vincolato a precedere intorno a un punto fisso e solidale A del suo asse.
Sul cono agiscono un momento, rispetto ad A,

$$\boldsymbol{M}_a = -\lambda\boldsymbol{\omega} ,$$

e una distribuzione di forze applicata solo sulla base del cono, data da

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(P) = ke^{-\mu t}\overrightarrow{VC} \times \overrightarrow{CP} ,$$

ove V è il vertice del cono, C il centro della base, P il generico punto della base. Qui k, λ, $\mu > 0$ sono costanti assegnate.

- Si scrivano le equazioni di Eulero.
- Assumendo che il momento assiale I_{33} del cono soddisfi $\mu I_{33} > \lambda$, si dimostri che si può scegliere A in modo che se $\boldsymbol{\omega}(0)$ non è parallelo all'asse del cono, allora $\boldsymbol{\omega}(t)$ tende a disporsi ortogonalmente all'asse per $t \to +\infty$.

64. [6/9/2016 (ex)I] Un cubo di massa M e spigolo $2L$ è vincolato ad avere il centro C coincidente con l'origine del sistema fisso O.
Sul cubo agiscono le due forze, applicate nei punti indicati,

$$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{P_A A}\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k\overrightarrow{P_B B}\,.$$

Qui A e B sono due vertici adiacenti (ossia estremi dello stesso spigolo), P_A, P_B ne indicano le rispettive proiezioni ortogonali sul piano $x_3 = 0$, e $k > 0$ è costante.
All'istante iniziale il cubo ha le facce ortogonali agli assi coordinati, in modo che

$$\overrightarrow{OA}(0) = -L\boldsymbol{e}_1 + L\boldsymbol{e}_2 - L\boldsymbol{e}_3\,, \qquad \overrightarrow{OB}(0) = L\boldsymbol{e}_1 + L\boldsymbol{e}_2 - L\boldsymbol{e}_3\,.$$

Inoltre vale per $\omega_0 > 0$

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0 \boldsymbol{e}_1\,.$$

Scrivere le equazioni di moto e dare una condizione sui parametri per cui durante il moto si abbia $x_{2A}(t) = 0$ per qualche $t > 0$.

65. [17/01/2017 (ex)I] Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati $|\overrightarrow{AB}| = a$, $|\overrightarrow{BC}| = b$, $b > a$, e di massa M, è vincolata a ruotare intorno alla diagonale $\overrightarrow{AC}$ che si mantiene fissa; anche A e C sono fissi.
Sulla lamina agisce la forza applicata nel punto D

$$\boldsymbol{F}_D = \lambda \frac{\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{DC}}{\left|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{DC}\right|}\,,$$

con $\lambda > 0$ costante.
La lamina all'istante iniziale è ferma.
Scrivere le equazioni di moto e trovare il momento $\boldsymbol{\mu}$ delle reazioni vincolari nell'istante in cui la lamina compie il primo giro.
[Note: Il vincolo è liscio, quindi la componente di $\boldsymbol{\mu}$ lungo l'asse di rotazione è nulla.
Si possono lasciare indicate le coordinate dei vertici della lamina nel sistema solidale scelto.]

66. [17/01/2017 (ex)II] Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati $|\overrightarrow{AB}| = a$, $|\overrightarrow{BC}| = b$, $b > a$, e di massa M, è vincolata a ruotare intorno alla diagonale $\overrightarrow{AC}$ che si mantiene fissa; anche A e C sono fissi.
Sulla lamina agisce la forza applicata nel punto B

$$\boldsymbol{F}_B = -\lambda \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right|} ,$$

con $\lambda > 0$ costante.
La lamina all'istante iniziale è ferma.
Scrivere le equazioni di moto e trovare il momento $\boldsymbol{\mu}$ delle reazioni vincolari nell'istante in cui la lamina compie il primo giro.
[Note: Il vincolo è liscio, quindi la componente di $\boldsymbol{\mu}$ lungo l'asse di rotazione è nulla.
Si possono lasciare indicate le coordinate dei vertici della lamina nel sistema solidale scelto.]

67. [8/02/2017 (ex)I] Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia con polo O. Si sa che i suoi momenti d'inerzia nella terna principale in O, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, soddisfano

$$0 < I_{11} = I_{22} < I_{33} .$$

Vale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \lambda \boldsymbol{u}_1(0) + \mu \boldsymbol{u}_3(0) ,$$

con λ, μ costanti positive.

- Si determini la scomposizione di $\boldsymbol{\omega}(t)$ nella terna $(\boldsymbol{u}_h)$.
- Si provi che $\boldsymbol{\omega}(t)$ è periodico e il periodo può essere fissato ad arbitrio pur di scegliere μ in modo opportuno.

68. [8/02/2017 (ex)II] Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia con polo O. Si sa che i suoi momenti d'inerzia nella terna principale in O, $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, soddisfano

$$0 < I_{11} < I_{22} = I_{33} .$$

Vale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \lambda \boldsymbol{u}_1(0) + \mu \boldsymbol{u}_3(0) ,$$

con λ, μ costanti positive.

- Si determini la scomposizione di $\boldsymbol{\omega}(t)$ nella terna $(\boldsymbol{u}_h)$.

- Si provi che $\boldsymbol{\omega}(t)$ è periodico e il periodo può essere fissato ad arbitrio pur di scegliere λ in modo opportuno.

69. [06/06/2017 (ex)I] Un cubo di spigolo $2L$ e massa M è vincolato a muoversi di moto polare con polo nel centro di una delle facce.
Il moto polare è per inerzia.

- Si dimostri che il moto è periodico.
- Conoscendo la lunghezza della velocità angolare
$$|\boldsymbol{\omega}(\bar{t})|^2 = \mu^2 > 0\,,$$
si diano due limitazioni per l'energia cinetica $T(\bar{t})$ del cubo, superiore e inferiore, in funzione di μ, L, M e dei momenti di inerzia nel centro di massa G del cubo.

70. [11/07/2017 (ex)I] Un cono di raggio R, altezza H e massa M è vincolato a muoversi di moto polare intorno al suo vertice V, che coincide con l'origine del sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$.
Sul cono agiscono le forze, applicate nei punti indicati,
$$\boldsymbol{F}_A = k\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{F}_B = -k\cos(\alpha t)\boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{F}_C = \lambda\boldsymbol{e}_1\,.$$
Qui C è il centro della base del cono, A e B sono gli estremi di uno stesso diametro della base, e
$$\boldsymbol{u} = \frac{\overrightarrow{VC} \times \overrightarrow{CA}}{RH}$$
è (come si vede) un versore tangente alla circonferenza di base in A. Le costanti α, λ, $k > 0$ sono assegnate.
Il cono parte da fermo nella posizione
$$\overrightarrow{VC} = H\boldsymbol{e}_1\,, \quad \overrightarrow{CA} = -R\boldsymbol{e}_2\,, \quad \overrightarrow{CB} = R\boldsymbol{e}_2\,.$$

- Scrivere le equazioni di moto.
- Determinare l'energia cinetica del cono per ogni istante t.

71. [15/01/2018 (ex)I] Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati $L = |\overrightarrow{AB}|$, $R = |\overrightarrow{BC}|$, con $L > R$, e massa M è vincolata a muoversi di moto polare intorno al suo centro G.
La lamina è soggetta alla distribuzione di forze
$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha(\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AC}\,\mathrm{d}\mu\,,$$

ove $\alpha > 0$ è una costante assegnata, P è il generico punto della lamina e $\mathrm{d}\mu$ è la misura di area.
Dire se e quali moti di rotazione intorno alla diagonale $\overrightarrow{AC}$ sono possibili.

72. [15/01/2018 (ex)II] Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati $L = |\overrightarrow{AB}|$, $R = |\overrightarrow{BC}|$, con $L < R$, e massa m è vincolata a muoversi di moto polare intorno al suo centro G.
La lamina è soggetta alla distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -\beta(\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{AC})\overrightarrow{CA}\,\mathrm{d}\mu\,,$$

ove $\beta > 0$ è una costante assegnata, P è il generico punto della lamina e $\mathrm{d}\mu$ è la misura di area.
Dire se e quali moti di rotazione intorno alla diagonale $\overrightarrow{AC}$ sono possibili.

73. [13/02/2018 (ex)I] Una sfera di raggio R e massa M è vincolata ad avere il centro C nell'origine O del sistema di riferimento fisso.
Alla sfera sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda\boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -\lambda\boldsymbol{u}\,,$$

con $\lambda > 0$ costante, A, B punti solidali sulla superficie della sfera, opposti rispetto a C, e $\boldsymbol{u}$ versore solidale tangente alla sfera in A e quindi anche in B.
La sfera è ferma all'istante iniziale.
Scrivere e risolvere le equazioni di moto.

74. [13/02/2018 (ex)II] Un cubo di spigolo $2L$ e massa M è vincolato ad avere il centro C nell'origine O del sistema di riferimento fisso.
Al cubo sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda t\boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -\lambda t\boldsymbol{u}\,,$$

con $\lambda > 0$ costante, A, B vertici opposti del cubo, e $\boldsymbol{u}$ versore solidale al cubo ortogonale a $\overrightarrow{CA}$.
Il cubo è fermo all'istante iniziale.
Scrivere e risolvere le equazioni di moto.

75. [27/06/2018 (ex)I] Un disco di centro C, raggio R e massa M è vincolato ad avere C nell'origine del sistema di riferimento fisso. Sul disco sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}_3\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = \lambda\boldsymbol{\tau}\,,$$

ove A e B sono punti solidali sul bordo del disco, $\boldsymbol{\tau}$ è il versore tangente in B alla circonferenza bordo del disco. Inoltre $(C, (\boldsymbol{u}_i))$ è il sistema di riferimento solidale con $\boldsymbol{u}_3$ ortogonale al disco e

$$\overrightarrow{CA} = R\boldsymbol{u}_1\,.$$

Qui k, λ sono costanti assegnate.

- Scrivere le equazioni di Eulero del moto.
- Determinare il moto nel caso $\lambda = 0$, $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$.

76. [27/06/2018 (ex)I] Un corpo rigido C è costituito da un cubo solido omogeneo K di massa M e spigolo L, e da quattro punti materiali P_1, P_2, P_3, P_4 tutti di massa m, la cui posizione può essere scelta ad arbitrio.
Dimostrare che tale posizione può essere scelta in modo che tutti i moti polari per inerzia di C, con polo in un fissato vertice A del cubo, siano rotazioni.

77. [23/07/2018 (ex)I] Un cubo di spigolo $2L$ e massa M è vincolato ad avere il centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O, (\boldsymbol{e}_i))$. Siano A e B due vertici opposti del cubo, tali che all'istante iniziale

$$\overrightarrow{OA}(0) = -\overrightarrow{OB}(0) = L(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) .$$

Su A e B sono applicate le forze

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u} , \qquad \boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{u} ,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un versore solidale al cubo e ortogonale a $\overrightarrow{OA}$. Sul cubo agisce anche il momento

$$\boldsymbol{M}_O = -\mu\boldsymbol{\omega} .$$

Qui μ, k sono costanti positive assegnate.
Il cubo ha velocità angolare iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0\boldsymbol{u} , \qquad \omega_0 > 0 .$$

- Scrivere le equazioni di moto.
- Determinare $\boldsymbol{\omega}(t)$ (in funzione di una base solidale).
- Trovare
$$\lim_{t\to+\infty} T(t) .$$

78. [15/01/2019 (ex)I] Si consideri il sistema $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ solidale con il rigido C. Il corpo rigido è formato da 4 elementi materiali P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, in posizioni

$$\overrightarrow{OP_1} = -L\boldsymbol{u}_1 , \qquad \overrightarrow{OP_2} = L\boldsymbol{u}_1 ,$$
$$\overrightarrow{OP_3} = -L\boldsymbol{u}_1 + H\boldsymbol{u}_3 , \overrightarrow{OP_4} = s\boldsymbol{u}_1 + H\boldsymbol{u}_3 .$$

P_1, P_2, P_3 hanno massa m, P_4 ha massa $2m$. I parametri $L > 0$, $H > 0$, $s \in \boldsymbol{R}$ sono costanti.

Il rigido è vincolato a muoversi di moto polare di polo O, che coincide con l'origine del sistema di riferimento fisso.
Sul rigido agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}_1 \,,$$

con $k \in \boldsymbol{R}$ assegnato, applicata nel punto A, ove $\overrightarrow{OA} = H\boldsymbol{u}_3$.
All'istante iniziale $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$, e $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega\boldsymbol{e}_3 = \omega\boldsymbol{u}_3(0)$, con $\omega > 0$.
Determinare la relazione tra i parametri che fa sì che il moto sia una rotazione uniforme.

79. [15/01/2019 (ex)II] Si consideri il sistema $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ solidale con il rigido C. Il corpo rigido è formato da 4 elementi materiali P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, in posizioni

$$\overrightarrow{OP_1} = -H\boldsymbol{u}_2 \,, \qquad \overrightarrow{OP_2} = H\boldsymbol{u}_2 \,,$$
$$\overrightarrow{OP_3} = -H\boldsymbol{u}_2 + R\boldsymbol{u}_3 \,, \overrightarrow{OP_4} = s\boldsymbol{u}_2 + R\boldsymbol{u}_3 \,.$$

P_1, P_2, P_3 hanno massa m, P_4 ha massa $2m$. I parametri $R > 0$, $H > 0$, $s \in \boldsymbol{R}$ sono costanti.
Il rigido è vincolato a muoversi di moto polare di polo O, che coincide con l'origine del sistema di riferimento fisso.
Sul rigido agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_A = k\boldsymbol{u}_2 \,,$$

con $k \in \boldsymbol{R}$ assegnato, applicata nel punto A, ove $\overrightarrow{OA} = -R\boldsymbol{u}_3$.
All'istante iniziale $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$, e $\boldsymbol{\omega}(0) = -\omega\boldsymbol{e}_3 = -\omega\boldsymbol{u}_3(0)$, con $\omega > 0$.
Determinare la relazione tra i parametri che fa sì che il moto sia una rotazione uniforme.

80. [11/02/2019 (ex)I] Un cubo C di spigolo $2R$ e massa m è vincolato a mantenere il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Indichiamo con A, B i centri di due facce opposte, e con D, E i centri di altre due facce opposte. Sia $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ una terna solidale tale che

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2R} \,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{DE}}{2R} \,.$$

Sul cubo agiscono, sui punti indicati, le forze

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -\lambda\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui $\lambda > 0$ è costante.
All'istante iniziale il cubo è fermo con $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Si determini l'energia cinetica del cubo nel primo istante in cui $\overrightarrow{AB}$ è parallelo a $\boldsymbol{e}_2$.

[Suggerimento: per scrivere le equazioni di moto è utile comprendere intuitivamente che tipo di moto sia quello del cubo.]

81. [11/02/2019 (ex)I] Un corpo rigido non degenere si muove di moto polare di polo O. Di fatto tuttavia il suo moto è una rotazione intorno al versore $\boldsymbol{u}_1$ della terna solidale $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$. Denotiamo con φ l'angolo di rotazione.
Si noti che $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ non sono principali di inerzia in O, mentre $\boldsymbol{u}_3$ lo è.
Il momento delle forze esterne in O soddisfa

$$\frac{\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_1}{I_{11}} = \frac{\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_2}{I_{12}}\,, \qquad \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_2 = -\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3\,.$$

Determinare il moto una volta assegnate le condizioni iniziali $\varphi(0)$, $\dot\varphi(0)$.

82. [11/02/2019 (ex)II] Un cubo C di spigolo $2R$ e massa m è vincolato a mantenere il centro G nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Indichiamo con A, B i centri di due facce opposte, e con D, E i centri di altre due facce opposte. Sia $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ una terna solidale tale che

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2R}\,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{DE}}{2R}\,.$$

Sul cubo agiscono, sui punti indicati, le forze

$$\boldsymbol{F}_A = \mu \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -\mu \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{e}_3\,.$$

Qui $\mu > 0$ è costante.
All'istante iniziale il cubo è fermo con $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Si determini l'energia cinetica del cubo nel primo istante in cui $\overrightarrow{AB}$ ha compiuto un mezzo giro.
[Suggerimento: per scrivere le equazioni di moto è utile comprendere intuitivamente che tipo di moto sia quello del cubo.]

83. [11/02/2019 (ex)II] Un corpo rigido non degenere si muove di moto polare di polo O. Di fatto tuttavia il suo moto è una rotazione intorno al versore $\boldsymbol{u}_3$ della terna solidale $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$. Denotiamo con φ l'angolo di rotazione.
Si noti che $\boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{u}_3$ non sono principali di inerzia in O, mentre $\boldsymbol{u}_1$ lo è.
Il momento delle forze esterne in O soddisfa

$$\frac{\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_2}{I_{23}} = \frac{\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3}{I_{33}}\,, \qquad \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_2 = -\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_1\,.$$

Determinare il moto una volta assegnate le condizioni iniziali $\varphi(0)$, $\dot\varphi(0)$.

84. [06/02/2020 (ex)I] Un corpo rigido ha supporto

$$C = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid -L \le \lambda_h \le L\,, h = 1,2,3\}\,,$$

con densità non omogenea

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{M}{8L^3}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} + m\,\mathrm{d}\delta_{(L,L,L)}(\boldsymbol{\lambda})\,,$$

ossia è un cubo omogeneo di massa M e spigolo $2L$, con un punto materiale P di massa m fissato nel vertice $\boldsymbol{\lambda}_A = (L, L, L)$.
Il corpo è vincolato a muoversi di moto polare di polo l'origine O del sistema di riferimento fisso, coincidente con il punto solidale $\boldsymbol{\lambda} = 0$, ossia con l'origine del sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, di cui $\boldsymbol{\lambda}$ rappresenta le coordinate.
Sul corpo agiscono la forza $\boldsymbol{F}_B = \alpha\boldsymbol{u}_1$ applicata nel punto di coordinate solidali $\boldsymbol{\lambda}_B = (L, L, 0)$, e una forza da determinare $\boldsymbol{F}_D$ applicata nel punto di coordinate solidali $\boldsymbol{\lambda}_D = (0, 0, -L)$, della forma

$$\boldsymbol{F}_D = \beta(t)\boldsymbol{u}_1 + \gamma(t)\boldsymbol{u}_2\,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante assegnata e β, $\gamma \in C(\boldsymbol{R})$ sono funzioni del tempo a priori incognite.
Il corpo parte da fermo nella posizione tale che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Determinare $\boldsymbol{F}_D$ in modo che il moto sia una rotazione intorno all'asse λ_3.

85. [06/02/2020 (ex)II] Un corpo rigido ha supporto

$$C = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid -L \leq \lambda_h \leq L\,, h = 1,2,3\}\,,$$

con densità non omogenea

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{M}{8L^3}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} + m\,\mathrm{d}\delta_{(L,L,L)}(\boldsymbol{\lambda})\,,$$

ossia è un cubo omogeneo di massa M e spigolo $2L$, con un punto materiale P di massa m fissato nel vertice $\boldsymbol{\lambda}_A = (L, L, L)$.
Il corpo è vincolato a muoversi di moto polare di polo l'origine O del sistema di riferimento fisso, coincidente con il punto solidale $\boldsymbol{\lambda} = 0$, ossia con l'origine del sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, di cui $\boldsymbol{\lambda}$ rappresenta le coordinate.
Sul corpo agiscono la forza $\boldsymbol{F}_B = \alpha t\boldsymbol{u}_1$ applicata nel punto di coordinate solidali $\boldsymbol{\lambda}_B = (L, L, 0)$, e una forza da determinare $\boldsymbol{F}_D$ applicata nel punto di coordinate solidali $\boldsymbol{\lambda}_D = (0, 0, L)$, della forma

$$\boldsymbol{F}_D = \beta(t)\boldsymbol{u}_1 + \gamma(t)\boldsymbol{u}_2\,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante assegnata e β, $\gamma \in C(\boldsymbol{R})$ sono funzioni del tempo a priori incognite.
Il corpo parte da fermo nella posizione tale che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.
Determinare $\boldsymbol{F}_D$ in modo che il moto sia una rotazione intorno all'asse λ_3.

86. [09/06/2023 (ex)I] Un cono circolare retto C di altezza H, raggio di base R e massa m è vincolato a muoversi di moto polare, con il vertice V

nell'origine O del sistema di riferimento fisso.
Si consideri il sistema di riferimento solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, con

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{VA}}{H}\,,$$

ove A è il centro della base di C.
Sul cono sono applicate, nei punti indicati, le forze

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda \boldsymbol{u}_1\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = \mu \boldsymbol{u}_2\,,$$

ove $\overrightarrow{AB} = R\boldsymbol{u}_1$. Qui λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$.
1) Si scriva il momento delle forze rispetto a V (scomposto nella terna solidale).
2) Assumendo $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$, $\mu = 0$, si scrivano le equazioni di Eulero del rigido e si determini $\boldsymbol{\omega}(t)$ (scomposta nella terna solidale).
3) Assumendo $\mu = 0$, si scriva la derivata $\mathrm{d}T/\,\mathrm{d}t$ come funzione delle componenti di $\boldsymbol{\omega}$.
4) Si assuma $\mu = 0$, $\lambda = 0$ e, per ω_{10}, $\omega_{30} > 0$,

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{10}\boldsymbol{u}_1(0) + \omega_{30}\boldsymbol{u}_3(0)\,, \qquad \boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h\,, \quad h = 1\,,2\,,3\,.$$

Si determini $\boldsymbol{L}_V(t)$ per ogni t, scomposto nella terna fissa $(\boldsymbol{e}_h)$.
5) Nelle ipotesi del quesito 4), si determini una relazione tra ω_{10} e ω_{30} che garantisca che

$$\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(0) \geq \frac{1}{4}|\boldsymbol{\omega}(0)|^2\,, \quad \text{per ogni } t > 0.$$

6) Supponiamo che

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha \boldsymbol{u}_2(t)\,,$$

con $\alpha > 0$ costante. Si determini il primo istante $\bar{t} > 0$ in cui $\boldsymbol{u}_3(\bar{t}) = \boldsymbol{u}_3(0)$.

87. [08/09/2023 (ex)I] Un corpo rigido C è costituito da un disco omogeneo D di raggio R, massa M, raggio R e centro $\boldsymbol{X}_O$, cui è fissato solidalmente un punto materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$. Nel sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ di coordinate $(\boldsymbol{\lambda})$, il disco è

$$\{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leq R^2\,, \lambda_3 = 0\}\,,$$

e le coordinate di P sono

$$\Big(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, 0\Big)\,.$$

Il corpo è vincolato a ruotare intorno all'asse fisso x_1, che coincide con l'asse solidale λ_1; $\boldsymbol{X}_O$ coincide con l'origine del sistema fisso.
Sul sistema agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica applicata in P

$$\boldsymbol{F}_P = -k(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_A)\,,$$

con $k > 0$ costante e $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_3$.
Si assuma come coordinata lagrangiana l'angolo $\varphi \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1\,.
\end{aligned}$$

1) Si trovino esplicitamente i 6 momenti I^O_{hk}, rispetto agli assi di $\mathcal{S}$, in funzione di M, m, R.
2) Si calcoli il momento delle forze direttamente applicate $\boldsymbol{M}^{\text{ext}}_O$ scomponendolo nella terna $(\boldsymbol{u}_h)$, in funzione di φ.
3) Si scriva il sistema delle 3 equazioni di Eulero rispetto agli assi di $\mathcal{S}$.
4) Si calcoli il momento delle reazioni vincolari $\boldsymbol{M}^{\text{vin}}$ (rispetto a O) nell'istante $t = 0$, se le condizioni iniziali sono $\varphi(0) = 0$, $\dot\varphi(0) = \dot\varphi_0 > 0$.
5) Si determinino le posizioni di equilibrio per C e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
6) Si scriva la legge di conservazione dell'energia, e la si usi per determinare $\omega_0 \geq 0$ tale che se $|\dot\varphi(0)| > \omega_0$ allora $\dot\varphi(t) \neq 0$ per ogni t.

88. [12/06/2024 (ex)I] Si consideri il corpo rigido dato dal cono circolare retto omogeneo C di raggio di base R, altezza H e massa M. Il cono è vincolato a mantenere il vertice O nell'origine del sistema di riferimento fisso. Si assume per il vincolo l'ipotesi dei lavori virtuali.
Consideriamo il sistema di riferimento solidale con il rigido $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\overrightarrow{OA}}{H}\,, \qquad A \text{ centro della base del cono.}$$

Denotiamo con (x_h) le coordinate nel sistema di riferimento fisso e con (λ_h) le coordinate nel sistema di riferimento solidale.
Il rigido è soggetto alla distribuzione di forze direttamente applicate

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -k\lambda_1 \boldsymbol{u}_3 \,\mathrm{d}\lambda_1\, \mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con $k > 0$ costante, applicata solo sul cerchio di base che denotiamo con D.
1) Determinare la risultante $\boldsymbol{F}$ di $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$, esprimendola nella base $(\boldsymbol{u}_h)$.
2) Determinare il momento risultante $\boldsymbol{M}_O$ di $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$, rispetto al polo O, esprimendolo nella base $(\boldsymbol{u}_h)$.
3) Scrivere le equazioni scalari di Eulero per il moto; si determini quindi $\boldsymbol{\omega}(t)$ nella base $(\boldsymbol{u}_h)$ se il dato iniziale è $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$.
4) Usando la prima equazione cardinale, determinare la risultante delle reazioni vincolari al tempo $t = 0$, nella base $(\boldsymbol{u}_h)$, assumendo $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$. Si denoti con $\boldsymbol{X}_G = L\boldsymbol{u}_3$ il moto del centro di massa; non occorre calcolare la costante $L > 0$.

5) Supponiamo che $k = 0$, cioè che il moto sia polare per inerzia. Determinare la normale al piano su cui rotola senza strisciare l'ellissoide d'inerzia (secondo il teorema sul moto alla Poinsot), sapendo che

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{01}\boldsymbol{u}_1(0) + \omega_{03}\boldsymbol{u}_3(0)\,, \qquad \boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h\,, \quad h = 1{,}2{,}3\,,$$

con ω_{01}, $\omega_{03} > 0$ costanti. Si scomponga la normale nella base fissa.
6) Si scelgano per il corpo le coordinate locali

$$x_{1O}\,, x_{2O}\,, x_{3O}\,, x_{1A}\,, x_{2A}\,, x_{1B}\,,$$

ove B è il punto tale che $\overrightarrow{OB} = H\boldsymbol{u}_3 + R\boldsymbol{u}_1$. Si esprima in queste coordinate il vincolo che l'asse $\overrightarrow{OA}$ giaccia sul cono Γ dato da

$$x_3^2 = x_1^2 + x_2^2\,.$$

Si assuma valido il vincolo già presente nel testo, che diviene in questo caso

$$x_{1O} = 0\,, \quad x_{2O} = 0\,, \quad x_{3O} = 0\,.$$

89. [04/02/2025 (ex)I]
Un corpo rigido ha per supporto

$$C = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid -L \le \lambda_h \le L\,, \quad h = 1\,{,}2\,, \quad \lambda_3 = 0\}\,,$$

ove $L > 0$ è una costante. Qui $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ è il sistema di riferimento solidale a C e $\boldsymbol{\lambda}$ denota le coordinate in $\mathcal{S}$. La densità del corpo è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{M}{4L^2}\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 + m\,\mathrm{d}\delta_P(\boldsymbol{\lambda})\,,$$

con M, $m > 0$, ove P è il punto solidale di coordinate solidali $\boldsymbol{\lambda}_P = (L, L{,}0)$. Si tratta quindi di una lamina omogenea quadrata di massa M e lato $2L$, con un punto materiale di massa m fissato rigidamente nel vertice P.
La lamina è vincolata a mantenere il centro O nell'origine del sistema di riferimento fisso, e a ruotare intorno all'asse λ_1 coincidente con l'asse x_1 del sistema di riferimento fisso.
Il corpo è soggetto alla distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha\lambda_2\boldsymbol{u}_3(t)\,\mathrm{d}s\,,$$

che agisce solo sui 4 lati di C; qui s indica la lunghezza d'arco su tali lati e $\alpha > 0$ è una costante assegnata.
All'istante iniziale si ha

$$\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h\,, \quad h = 1\,{,}2\,{,}3\,; \qquad \boldsymbol{\omega}(0) = 0\,.$$

1) Calcolare il tensore d'inerzia del corpo in O, rispetto alla terna $(\boldsymbol{u}_h)$. Esprimere la matrice in funzione di M, m, L.
2) Determinare, motivando la scelta, un sistema di assi principali d'inerzia in O, e i relativi momenti d'inerzia principali. Esprimere la matrice in funzione di M, m, L.
3) Calcolare il momento $\boldsymbol{M}_O$ della distribuzione di forze $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$, relativo a O, scomposto nella base $(\boldsymbol{u}_h)$.
4) Determinare $(\boldsymbol{u}_h(t))$ in funzione del tempo, ossia determinare il moto del corpo. (Si possono lasciare indicati i momenti I_{hk}.)
5) Usando l'equazione di Eulero in forma vettoriale, calcolare il momento rispetto a O delle reazioni vincolari, come funzione del tempo e scomposto nella base $(\boldsymbol{u}_h)$. (Si possono lasciare indicati i momenti I_{hk}.)
6) Si esprimano i vincoli sul corpo rigido come vincoli olonomi regolari, usando come coordinate locali del corpo rigido le coordinate cartesiane nel sistema fisso

$$x_{1O}\,, \quad x_{2O}\,, \quad x_{3O}\,, \quad x_{3P}\,, \quad x_{1A}\,, \quad x_{3A}\,,$$

ove A è il punto di C di coordinate solidali $\boldsymbol{\lambda}_A = (0, L, 0)$.

90. [11/06/2025 (ex)I]
Un disco omogeneo C di raggio R e massa M è vincolato a mantenere il centro O nell'origine del sistema di riferimento fisso. I vincoli sono lisci.
Si consideri anche il sistema di riferimento solidale al disco $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, con coordinate $\boldsymbol{\lambda}$, tale che

$$C = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \lambda_3 = 0\,, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \le R^2\}\,.$$

Le forze direttamente applicate al disco, nei punti indicati, sono

$$\boldsymbol{F}_A = -k(\boldsymbol{X}_A - \boldsymbol{X}_{P_0})\,, \qquad \boldsymbol{F}_B = \mu \boldsymbol{u}_3\,,$$

con $k \ge 0$, $\mu \ge 0$ costanti assegnate e

$$\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{u}_2\,, \quad \boldsymbol{X}_B = -R\boldsymbol{u}_2\,, \quad \boldsymbol{X}_{P_0} = R\boldsymbol{e}_3\,.$$

Il disco parte da fermo all'istante $t = 0$, con $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h$.
1) Si determini il momento delle forze esterne $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$, in termini di una generica posizione della terna solidale tale che

$$\boldsymbol{e}_3 = \sum_{h=1}^{3} \alpha_h \boldsymbol{u}_h\,.$$

2) Si scrivano le equazioni di Eulero del moto, riducendole a un opportuno esplicito problema di Cauchy per una coordinata lagrangiana.
3) Si determini un integrale primo del moto.

4) Si assuma in questa domanda $\mu > 0$, $k > 0$, e si trovi una relazione tra μ, k, R che implichi che, durante il moto, $\boldsymbol{u}_2$ compia nel piano $\langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$ un'oscillazione di ampiezza totale $\pi/2$.
5) Si assuma in questa domanda $\mu = 0$, $k = 0$ (ossia che le forze direttamente applicate siano nulle), e, piuttosto che assumere che il disco parta da fermo, si assuma invece $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{10}\boldsymbol{u}_1(0) + \omega_{30}\boldsymbol{u}_3(0)$, con ω_{10}, ω_{30} costanti assegnate. Si determini in funzione di M, R, t, ω_{10}, ω_{30} il vettore $\boldsymbol{L}_O(t)$ per ogni t (si richiede di trovare i necessari I_{hk} in funzione di M e R).
6) Ancora nelle ipotesi della domanda 5), si dimostri che $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ si mantiene costante durante il moto.

470. Corpi rigidi: equazioni cardinali

1. [7/7/2006 (ex)I] Denotiamo con $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ il sistema di riferimento fisso. Un parallelepipedo omogeneo di spigoli a, b, $c > 0$ e di massa $m > 0$ è soggetto a due forze

$$\boldsymbol{F}_1 = k\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = -k\boldsymbol{e}_1 \,,$$

con $k > 0$ costante, applicate rispettivamente nei centri di due facce opposte A_1 e A_2.
All'istante iniziale il parallelepipedo è fermo, con le facce A_1 e A_2 parallele al piano $x_3 = 0$, e le altre facce perpendicolari agli assi fissi.
Si determini il massimo raggiunto dall'energia cinetica durante il moto.

2. [7/7/2006 (ex)I] Segnaposto.

3. [7/7/2006 (ex)II] Denotiamo con $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ il sistema di riferimento fisso. Un parallelepipedo omogeneo di spigoli a, b, $c > 0$ e di massa $m > 0$ è soggetto a due forze

$$\boldsymbol{F}_1 = -2k\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = 2k\boldsymbol{e}_2 \,,$$

con $k > 0$ costante, applicate rispettivamente nei centri di due facce opposte A_1 e A_2.
All'istante iniziale il parallelepipedo è fermo, con le facce A_1 e A_2 parallele al piano $x_3 = 0$, e le altre facce perpendicolari agli assi fissi.
Si determini il massimo raggiunto dall'energia cinetica durante il moto.

4. [7/7/2006 (ex)II] Segnaposto.

5. [22/9/2006 (ex)I] Una lamina materiale a forma di disco è poggiata su un piano Π inclinato sull'orizzontale con un angolo $\alpha \in (0, \pi/2)$. Il coefficiente di attrito statico tra la lamina e il piano è $\mu > 0$. Si assuma $\mu \cos\alpha > \sin\alpha$.

Il piano Π è mobile, con equazione

$$x_2 \sin\alpha - x_3 \cos\alpha = -\frac{ct^2}{2} \sin\alpha \,,$$

ove $c > 0$; i punti solidali con il piano abbiano velocità parallela all'asse x_2. Il peso quindi risulta diretto nel verso negativo dell'asse x_3.
Si determini il valore massimo del modulo c dell'accelerazione del piano che permette al disco di restare in equilibrio relativo al piano, partendo da condizioni iniziali compatibili con l'equilibrio stesso.

6. [12/6/2009 (ex)I] Una sfera omogenea di raggio R e massa M ha il centro C mobile con legge assegnata

$$\overrightarrow{OC} = L \cos\alpha t \boldsymbol{e}_1 + L \sin\alpha t \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Nel punto che occupa la posizione

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + R\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|} = (R+L)\cos\alpha t \boldsymbol{e}_1 + (R+L)\sin\alpha t \boldsymbol{e}_2$$

è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = \lambda \boldsymbol{e}_1 \,.$$

Qui α, λ, L, M, $R > 0$ sono costanti.
All'istante iniziale

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{10} \boldsymbol{e}_1 \,,$$

con $\omega_{10} > 0$.

1. Determinare la velocità angolare della sfera nel sistema fisso in funzione di α, λ, L, M, R, ω_{10} e t.
2. Dimostrare che il punto P solidale con la sfera tale che $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}$ all'istante $t = 0$ *non* si mantiene a quota $\xi_3 = 0$ durante il moto (qui (ξ_i) indica le coordinate nel sistema di riferimento fisso).

7. [12/6/2009 (ex)II] Una sfera omogenea di raggio R e massa M ha il centro C mobile con legge assegnata

$$\overrightarrow{OC} = L \sin\alpha t \boldsymbol{e}_1 + L \cos\alpha t \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Nel punto che occupa la posizione

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + R\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|} = (R+L)\sin\alpha t \boldsymbol{e}_1 + (R+L)\cos\alpha t \boldsymbol{e}_2$$

è applicata la forza
$$\boldsymbol{F}_A = \lambda \boldsymbol{e}_2 \,.$$
Qui α, λ, L, M, $R > 0$ sono costanti.
All'istante iniziale
$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{20} \boldsymbol{e}_2 \,,$$
con $\omega_{20} > 0$.

1. Determinare la velocità angolare della sfera nel sistema fisso in funzione di α, λ, L, M, R, ω_{20} e t.

2. Dimostrare che il punto P solidale con la sfera tale che $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}$ all'istante $t = 0$ *non* si mantiene a quota $\xi_3 = 0$ durante il moto (qui (ξ_i) indica le coordinate nel sistema di riferimento fisso).

8. [15/7/2009 (ex)I] Un disco rigido di raggio L, massa M e centro C è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$.
All'istante iniziale $t = 0$ valgono:
$$\overrightarrow{OC} = 0 \,, \qquad \boldsymbol{v}_C(0) = 0 \,, \qquad \boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0 \boldsymbol{e}_3 \,.$$
Qui O denota l'origine del sistema di riferimento fisso, $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del disco, e $\omega_0 > 0$ è una costante.
Si determinino $\overrightarrow{OC}(t)$ e $\boldsymbol{\omega}(t)$ per ogni $t > 0$.

9. [15/7/2009 (ex)II] Una lamina rigida quadrata di lato L, massa M e centro C è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$.
All'istante iniziale $t = 0$ valgono:
$$\overrightarrow{OC} = 0 \,, \qquad \boldsymbol{v}_C(0) = 0 \,, \qquad \boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0 \boldsymbol{e}_3 \,.$$
Qui O denota l'origine del sistema di riferimento fisso, $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare della lamina, e $\omega_0 > 0$ è una costante.
Si determinino $\overrightarrow{OC}(t)$ e $\boldsymbol{\omega}(t)$ per ogni $t > 0$.

10. [09/01/2020 (ex)I] Un disco C di massa m e raggio R è vincolato ad avere il centro di massa G sul piano $x_3 = 0$.
Sul punto A solidale a C e appartenente alla circonferenza bordo del disco, è applicata la forza
$$\boldsymbol{F} = \mu \boldsymbol{u} \,,$$
con $\mu > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ solidale e ortogonale al piano di C.
Il disco parte da fermo con
$$\boldsymbol{X}_G(0) = 0 \,, \qquad \boldsymbol{X}_A(0) = R\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{e}_3 \,.$$

- Determinare il moto del disco con le equazioni globali (o cardinali).

Si noti che il moto del centro di massa conterrà un integrale nel tempo impossibile da esprimere in termini di funzioni elementari che dovrà essere lasciato indicato.
[Suggerimento: la reazione vincolare si può rappresentare solo con una forza $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ applicata in G e parallela a $\boldsymbol{e}_3$; si usi la seconda equazione (con polo in G) per risolvere la prima.]

11. [09/01/2020 (ex)II] Una lamina quadrata C di massa m e lato $2L$ è vincolata ad avere il centro di massa G sul piano $x_3 = 0$.
Sul punto A solidale a C dato dal punto medio di uno dei lati, è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = \mu \boldsymbol{u} \,,$$

con $\mu > 0$ costante e $\boldsymbol{u}$ solidale e ortogonale al piano di C.
Il disco parte da fermo con

$$\boldsymbol{X}_G(0) = 0 \,, \qquad \boldsymbol{X}_A(0) = L\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{e}_3 \,.$$

- Determinare il moto della lamina con le equazioni globali (o cardinali).

Si noti che il moto del centro di massa conterrà un integrale nel tempo impossibile da esprimere in termini di funzioni elementari che dovrà essere lasciato indicato.
[Suggerimento: la reazione vincolare si può rappresentare solo con una forza $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ applicata in G e parallela a $\boldsymbol{e}_3$; si usi la seconda equazione (con polo in G) per risolvere la prima.]

520. Statica per sistemi vincolati: vincoli fissi

1. [12/7/2016 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

ed è soggetto alla forza peso diretta come

$$-\frac{\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} \,.$$

La reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

ove $\mu > 0$.

Determinare le possibili posizioni di equilibrio del punto.

2. [8/02/2017 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato all'ellisse

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_1 - x_3 = 0 \,.$$

Il vincolo è scabro, e la reazione vincolare soddisfa

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| \leq \mu \left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right| \,.$$

Qui R, μ sono costanti positive.
Inoltre sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.
Trovare le posizioni di equilibrio del punto.
[Parametrizzazione dell'ellisse con $\theta \in [0,2\pi]$:

$$\boldsymbol{\Psi}(\theta) = R\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3 \,;$$
$$\boldsymbol{T}(\theta) = \frac{-\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_2 - \sin\theta\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{1+\sin^2\theta}} \,,$$
$$\boldsymbol{N}(\theta) = \frac{-\cos\theta\boldsymbol{e}_1 - 2\sin\theta\boldsymbol{e}_2 - \cos\theta\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2(1+\sin^2\theta)}} \,, \quad \boldsymbol{B}(\theta) = \frac{-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} \,. \,]$$

3. [8/02/2017 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato all'ellisse

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_2 - x_3 = 0 \,.$$

Il vincolo è scabro, e la reazione vincolare soddisfa

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| \leq \mu \left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right| \,.$$

Qui R, μ sono costanti positive.
Inoltre sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.
Trovare le posizioni di equilibrio del punto.
[Parametrizzazione dell'ellisse con $\theta \in [0,2\pi]$:

$$\boldsymbol{\Psi}(\theta) = R\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_2 + R\cos\theta\boldsymbol{e}_3 \,;$$
$$\boldsymbol{T}(\theta) = \frac{\cos\theta\boldsymbol{e}_1 - \sin\theta\boldsymbol{e}_2 - \sin\theta\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{1+\sin^2\theta}} \,,$$
$$\boldsymbol{N}(\theta) = \frac{-2\sin\theta\boldsymbol{e}_1 - \cos\theta\boldsymbol{e}_2 - \cos\theta\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2(1+\sin^2\theta)}} \,, \quad \boldsymbol{B}(\theta) = \frac{\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}} \,. \,]$$

4. [27/06/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Su di esso agiscono le forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_1 = -k_1 \overrightarrow{A_1 P} \,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = -k_2 \overrightarrow{A_2 P} \,,$$

ove

$$\overrightarrow{OA_1} = -R\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \overrightarrow{OA_2} = R\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Qui k_1, k_2 sono costanti positive assegnate.
Determinare i punti di equilibrio.

5. [23/07/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva piana

$$x_2 = \frac{d}{x_1} \,, \quad x_3 = 0 \,, \qquad x_1 > 0 \,.$$

È soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Il vincolo è scabro e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,.$$

Qui d, α, β, μ sono costanti positive assegnate.
Determinare le posizioni di equilibrio possibili.

6. [10/02/2020 (ex)I] Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 x_2 \,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante.
Sul punto agiscono la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$ e la reazione vincolare di vincolo scabro, tale che alla quiete

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante.
Si trovino le posizioni in cui è possibile l'equilibrio.

7. [10/02/2020 (ex)II] Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie

$$x_3 = -\alpha x_1 x_2 \,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante.
Sul punto agiscono la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$ e la reazione vincolare di vincolo scabro, tale che alla quiete

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \leq \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$ costante.
Si trovino le posizioni in cui è possibile l'equilibrio.

560. Dinamica per sistemi vincolati: vincoli fissi

1. [18/7/2005 (ex)I] Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza $2L$ e massa m è soggetta ai seguenti vincoli:

- il suo centro di massa appartiene all'elica cilindrica γ
$$\begin{cases} x = R\cos\alpha\zeta\,, \\ y = R\sin\alpha\zeta\,, \\ z = \zeta\,, \end{cases} \qquad -\infty < \zeta < \infty\,;$$
qui $\alpha > 0$ è costante;
- l'asta è parallela alla tangente a γ.

I vincoli sono lisci.
Sull'asta agisce la forza peso, diretta secondo il verso negativo dell'asse z.
Il centro di massa dell'asta all'istante iniziale è a quota $z = h > 0$, con velocità nulla.
Determinare la velocità del centro di massa quando esso raggiunge la quota $z = 0$.

2. [18/7/2005 (ex)II] Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza $2L$ e massa m è soggetta ai seguenti vincoli:

- il suo centro di massa appartiene all'elica cilindrica γ
$$\begin{cases} x = R\cos\alpha\zeta\,, \\ y = R\sin\alpha\zeta\,, \\ z = \zeta\,, \end{cases} \qquad -\infty < \zeta < \infty\,;$$
qui $\alpha > 0$ è costante;
- l'asta è parallela alla tangente a γ.

I vincoli sono lisci.
Sull'asta agisce la forza peso, diretta secondo il verso negativo dell'asse z.
Il centro di massa dell'asta all'istante iniziale è a quota $z = 0$, con velocità corrispondente a $\dot{z}(0) = v_0 > 0$.
Determinare la quota massima raggiunta dal centro di massa nel moto successivo.

3. [19/7/2006 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza
$$\begin{cases} x_1 = R\cos\varphi\,, \\ x_2 = R\sin\varphi\,, \\ x_3 = 0\,, \end{cases} \qquad -\pi \le \varphi \le \pi\,.$$

Su di esso agiscono la forza peso, nella direzione negativa dell'asse x_2, e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$, la cui componente tangente si oppone al moto ed è tale che

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\tan}\right| = \mu \left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right| .$$

Scrivere l'equazione del moto di P nella forma di un'equazione differenziale scalare per la coordinata lagrangiana.

4. [19/7/2006 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza

$$\begin{cases} x_1 = R\cos\varphi\,, \\ x_2 = 0\,, \\ x_3 = R\sin\varphi\,, \end{cases} \qquad -\pi \le \varphi \le \pi\,.$$

Su di esso agiscono la forza peso, nella direzione negativa dell'asse x_1, e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$, la cui componente tangente si oppone al moto ed è tale che

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\tan}\right| = \mu \left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right| .$$

Scrivere l'equazione del moto di P nella forma di un'equazione differenziale scalare per la coordinata lagrangiana.

5. [17/9/2007 (ex)I] Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2L > 0\,, \qquad \left|\overrightarrow{AD}\right| = H > 0\,,$$

è vincolata a ruotare intorno al lato $\overrightarrow{AD}$ che giace sull'asse fisso x_3. I punti A e D sono fissi.
Sulla lamina agisce il campo di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \alpha\Big(r - \frac{3}{2}L\cos\varphi\Big)\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}S\,,$$

ove P indica il generico punto sulla lamina, $\alpha > 0$ è costante, O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e $\mathrm{d}S$ è la misura di superficie sulla lamina. Inoltre r e φ sono le usuali coordinate cilindriche tali che

$$\overrightarrow{OP} = r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad r \ge 0\,, \varphi \in [-\pi, \pi)\,.$$

Determinare le posizioni di equilibrio della lamina.

6. [17/9/2007 (ex)II] Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2L > 0\,, \qquad \left|\overrightarrow{AD}\right| = H > 0\,,$$

è vincolata a ruotare intorno al lato $\overrightarrow{AD}$ che giace sull'asse fisso x_3. I punti A e D sono fissi.

Sulla lamina agisce il campo di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -\beta\Big(2r - 3L\cos\varphi\Big)\boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{AP}\,\mathrm{d}S\,,$$

ove P indica il generico punto sulla lamina, $\beta > 0$ è costante, e $\mathrm{d}S$ è la misura di superficie sulla lamina. Inoltre r e φ sono le usuali coordinate cilindriche tali che

$$\overrightarrow{OP} = r\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + r\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad r \geq 0\,, \varphi \in [-\pi,\pi)\,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso. Determinare le posizioni di equilibrio della lamina.

7. [13/12/2007 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato con attrito alla circonferenza

$$\gamma = \{(R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0) \mid -\pi < \varphi < \pi\}\,.$$

La reazione vincolare ha la forma

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\,, \quad \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}} := \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}\,, \quad |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con μ costante positiva.
Su P agiscono

- La forza elastica
$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{AP}\,,$$
con $k > 0$ costante e $A = (R{,}0{,}0)$.
- La forza peso
$$-mg\boldsymbol{e}_2\,.$$

Determinare l'equazione di moto.

8. [13/12/2007 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato con attrito alla circonferenza

$$\gamma = \{(R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0) \mid -\pi < \varphi < \pi\}\,.$$

La reazione vincolare ha la forma

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\,, \quad \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}} := \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}\,, \quad |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con μ costante positiva.
Su P agiscono

- La forza elastica
$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{AP}\,,$$
con $k > 0$ costante e $A = (0, R{,}0)$.

- La forza peso
$$-mg\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Determinare l'equazione di moto.

9. [12/1/2009 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos\lambda s \,, \\ x_2 &= R\sin\lambda s \,, \qquad -\infty < s < \infty \,, \\ x_3 &= h\lambda s \,, \end{aligned}$$

ove R, $h > 0$ sono costanti, e $\lambda = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$. Si noti che s è la lunghezza d'arco.
Il punto è soggetto alla forza peso

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Il punto parte da fermo a quota $x_3 = 0$.
Trovare la reazione vincolare che agisce su P quando esso raggiunge quota $x_3 = -2\pi h$, in funzione di R, h, λ, m, g, e dei vettori $\boldsymbol{e}_i$.

10. [12/1/2009 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\sin\lambda s \,, \\ x_2 &= R\cos\lambda s \,, \qquad -\infty < s < \infty \,, \\ x_3 &= h\lambda s \,, \end{aligned}$$

ove R, $h > 0$ sono costanti, e $\lambda = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$. Si noti che s è la lunghezza d'arco.
Il punto è soggetto alla forza peso

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Il punto parte da fermo a quota $x_3 = 2\pi h$.
Trovare la reazione vincolare che agisce su P quando esso raggiunge quota $x_3 = 0$, in funzione di R, h, λ, m, g, e dei vettori $\boldsymbol{e}_i$.

11. [11/9/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \,, \qquad x_2 = x_3 \,.$$

Il punto è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Il punto parte da fermo nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Determinare la reazione vincolare quando P raggiunge la posizione

$$\overrightarrow{OP} = -\frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) .$$

12. [11/9/2009 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 , \qquad x_2 = x_3 .$$

Il punto è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_2 .$$

Il punto parte da fermo nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1 .$$

Determinare la reazione vincolare quando P raggiunge la posizione

$$\overrightarrow{OP} = -\frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) .$$

13. [20/11/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato a muoversi sull'iperbole

$$x_2 = \frac{\alpha}{x_1} , \qquad \alpha > 0 ,$$

sotto l'azione del peso

$$-mg\boldsymbol{e}_2 .$$

All'istante iniziale

$$x_1(0) = \beta \in (0, \sqrt{\alpha}) , \qquad \dot{x}_1(0) = 0 .$$

Calcolare la reazione vincolare all'istante in cui

$$x_1 = x_2 = \sqrt{\alpha} .$$

(Si dia come noto che in questo punto la curva ha curvatura $k = 1/\sqrt{2\alpha}$.)

14. [9/4/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra

$$x_3 = 0 , \qquad x_1^2 + x_2^2 = R^2 ,$$

e su di esso agiscono il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_2, e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}$, che soddisfa (finché il punto ha velocità non nulla)

$$\left|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}\right| = \mu \left|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}\right| , \qquad \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{v} \le 0 .$$

Scrivere l'equazione differenziale (scalare) di moto del punto, assumendo che la velocità non sia nulla.

15. [8/7/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra γ che nel sistema di riferimento fisso ha equazioni

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

All'istante iniziale P occupa la posizione

$$P(0) = (-R, 0, 0) \,,$$

con velocità

$$\boldsymbol{v}_0 = (0, v_0, 0) \,.$$

La reazione vincolare, che si oppone al moto, soddisfa (se P ha velocità non nulla)

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| = \mu \left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right| \,.$$

Qui R, v_0, μ sono costanti positive.
Scrivere le equazioni di moto e dire se il punto si arresti o meno in un tempo finito.

16. [7/9/2010 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato all'arco di parabola

$$x_2 = a x_1^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,, \qquad x_1 > 0 \,.$$

Sul punto agiscono la forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_2$$

e la forza

$$\boldsymbol{F} = b\boldsymbol{T} \,,$$

ove $\boldsymbol{T}$ è il versore tangente alla parabola (tale che $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_1 > 0$). Qui a, $b > 0$ sono costanti.
Trovare le eventuali posizioni di equilibrio.

17. [19/6/2014 (ex)I] Due aste AB e CD di uguale lunghezza $2L$ sono vincolate ad avere un estremo, rispettivamente A e C, sulla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \,, \qquad R > 0 \,.$$

Qui $\mathcal{S} = (O, x_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Inoltre entrambe le aste si mantengono ortogonali alla sfera.
Sulle aste agiscono le distribuzioni di forze

$$\text{su } AB\text{:} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = \lambda \boldsymbol{e}_1 \,\mathrm{d}s \,; \qquad \text{su } CD\text{:} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{F}_2 = \mu \boldsymbol{e}_2 \,\mathrm{d}s \,.$$

Inoltre gli estremi B e D si attraggono con forza elastica

$$\boldsymbol{F}_B = -\boldsymbol{F}_D = -k\overrightarrow{DB}\,.$$

Qui λ, μ, k sono costanti positive.
Scrivere il potenziale del sistema di forze in coordinate lagrangiane.

18. [4/6/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove con velocità non nulla sulla circonferenza orizzontale di raggio $R > 0$

$$(x_1, x_2, x_3) = R\Big(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}, 0\Big)\,,$$

ove $s \in (0{,}2\pi R)$ è l'ascissa curvilinea e si assume che $\dot{s} < 0$. Qui $(O, (x_i))$ è il sistema di riferimento fisso.
Sul punto agiscono:

- il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$;
- la forza $\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}} = k\overrightarrow{OP}$, $k \in (0, +\infty)$;
- la forza d'attrito, tale che per $\mu > 0$ costante

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,.$$

Scrivere l'equazione di moto del punto.

19. [4/6/2015 (ex)II] Un punto materiale P di massa m si muove con velocità non nulla sulla circonferenza orizzontale di raggio $R > 0$

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,; \qquad x_3 = 0\,.$$

qui $(O, (x_i))$ è il sistema di riferimento fisso.
Su di esso agiscono:

- il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$;
- la forza elastica $\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}} = -k\overrightarrow{OP}$, $k \in (0, +\infty)$;
- la forza d'attrito, tale che per $\mu > 0$ costante

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,.$$

Scrivere l'equazione di moto del punto.

20. [9/2/2016 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Su P agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_2$ e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ tale che

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| = \mu \left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right| .$$

All'istante iniziale il moto soddisfa

$$\boldsymbol{X}(0) = R\boldsymbol{e}_1 , \qquad \boldsymbol{v}(0) = -v_0\boldsymbol{e}_2 .$$

Qui v_0, $\mu > 0$ sono costanti assegnate.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Dare una condizione sui parametri che garantisca che il moto di P si arresti prima di raggiungere l'asse x_2.

21. [9/2/2016 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza scabra

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 , \qquad x_3 = 0 .$$

Su P agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_2$ e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ tale che

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| = \mu \left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right| .$$

All'istante iniziale il moto soddisfa

$$\boldsymbol{X}(0) = R\frac{\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2}{\sqrt{2}} , \qquad \boldsymbol{v}(0) = -v_0\frac{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2}{\sqrt{2}} .$$

Qui v_0, $\mu > 0$ sono costanti assegnate.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Dare una condizione sui parametri che garantisca che il moto di P si arresti prima di raggiungere l'asse x_2.

22. [6/9/2016 (ex)I] Un punto materiale P di massa M si muove sulla circonferenza γ

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 , \qquad x_3 = 0 .$$

Qui $(O, (x_h))$ è il sistema di riferimento fisso.
Il punto è soggetto alla forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_2$ e alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{v} ,$$

ove $\boldsymbol{v}$ è la velocità del punto e $k > 0$ è costante.

Il punto parte da fermo nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Scrivere le equazioni di moto e dedurne che il punto resta sempre nel semipiano $x_2 < 0$ per $t > 0$.

23. [06/06/2017 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza verticale

$$x_2^2 + x_3^2 = R^2 \,, \qquad x_1 = 0 \,,$$

Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_3$. Sul punto agisce anche la forza

$$\boldsymbol{F} = -kx_3^2\boldsymbol{T} \,,$$

ove $\boldsymbol{T}$ è il campo vettoriale tangente che in $(0, R, 0)$ vale $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{e}_3$.
Il punto P parte da fermo nella posizione

$$\boldsymbol{X}(0) = R\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Trovare la reazione vincolare nel primo istante in cui P occupa la posizione $-R\boldsymbol{e}_3$.

24. [13/02/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos(\lambda s) \,, \\ x_2 &= R\sin(\lambda s) \,, \\ x_3 &= hs \,, \end{aligned}$$

con R, h, $\lambda > 0$ e $R^2\lambda^2 + h^2 = 1$ in modo che $s \in \boldsymbol{R}$ sia l'ascissa curvilinea.
Sul punto agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -\alpha\overrightarrow{P'P} \,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante e P' è la proiezione ortogonale di P sull'asse x_3.
Scrivere l'equazione di moto scomposta nella terna intrinseca della curva.

25. [13/02/2018 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos(\lambda s) \,, \\ x_2 &= R\sin(\lambda s) \,, \\ x_3 &= hs \,, \end{aligned}$$

con R, h, $\lambda > 0$ e $R^2\lambda^2 + h^2 = 1$ in modo che $s \in \boldsymbol{R}$ sia l'ascissa curvilinea.

Sul punto agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = \beta \overrightarrow{P'P} \,,$$

ove $\beta > 0$ è costante e P' è la proiezione ortogonale di P sull'asse x_3.
Scrivere l'equazione di moto scomposta nella terna intrinseca della curva.

26. [09/01/2020 (ex)I] Un punto materiale P di massa m si muove sulla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 x_2 \,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,.$$

Il vincolo è scabro, e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

almeno se la velocità non si annulla, il che si deve assumere.
Qui α, $\mu > 0$ sono costanti.
Sul punto agisce la forza costante $k\boldsymbol{e}_3$, $k \neq 0$.

- Scrivere le equazioni di moto.

27. [09/01/2020 (ex)II] Un punto materiale P di massa m si muove sulla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 x_2 \,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,.$$

Il vincolo è scabro, e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

almeno se la velocità non si annulla, il che si deve assumere.
Qui α, $\mu > 0$ sono costanti.
Sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di moto.

28. [13/01/2020 (ex)I] Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato al cilindro K di equazione

$$x_2^2 + x_3^2 = L^2 \,.$$

Il vincolo è scabro e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}| \,,$$

con $\mu > 0$, almeno se la velocità non si annulla, il che supponiamo.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k x_1 \boldsymbol{e}_1 \,,$$

con $k > 0$.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Dare un esempio di condizioni iniziali $\boldsymbol{X}(0) \in K$, $\boldsymbol{v}(0) \neq 0$ in modo che lungo il moto corrispondente si abbia conservazione dell'energia

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 + \frac{k}{2}x_1(t)^2 .$$

29. [13/01/2020 (ex)II] Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato al cilindro K di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 .$$

Il vincolo è scabro e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}| = \mu |\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}| ,$$

con $\mu > 0$, almeno se la velocità non si annulla, il che supponiamo.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = kx_3\boldsymbol{e}_3 ,$$

con $k > 0$.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Dare un esempio di condizioni iniziali $\boldsymbol{X}(0) \in K$, $\boldsymbol{v}(0) \neq 0$ in modo che lungo il moto corrispondente si abbia conservazione dell'energia

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 - \frac{k}{2}x_3(t)^2 .$$

580. Dinamica per sistemi vincolati: vincoli mobili

1. [7/7/2006 (ex)I] Un'ellisse scabra E di semiassi $a > b > 0$ può esercitare una reazione vincolare $\mathbf{f}_{\text{vin}}$ con

$$\left|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{tan}}\right| \leq \mu \left|\mathbf{f}_{\text{vin}}^{\text{nor}}\right| ,$$

ove μ è una costante positiva, e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca di E. L'ellisse giace su un piano ortogonale all'asse fisso x_3, e ruota con velocità angolare costante

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_3 , \qquad \omega > 0 ,$$

mantenendo il suo centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Trovare tutte le possibili posizioni di equilibrio relative all'ellisse di un punto materiale P di massa $m > 0$ vincolato ad essa.

2. [7/7/2006 (ex)II] Un'ellisse scabra E di semiassi $0 < a < b$ può esercitare una reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ con

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| \leq \lambda \left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right| ,$$

ove λ è una costante positiva, e $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca di E. L'ellisse giace su un piano ortogonale all'asse fisso x_1, e ruota con velocità angolare costante

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_1 , \qquad \omega > 0 ,$$

mantenendo il suo centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Trovare tutte le possibili posizioni di equilibrio relative all'ellisse di un punto materiale P di massa $m > 0$ vincolato ad essa.

3. [19/6/2014 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato all'asse x_1 del sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (A, (\boldsymbol{e}_i))$, ove

$$\overrightarrow{OA} = ct\boldsymbol{e}_1 ,$$

ove $c > 0$ costante, e $\mathcal{S}_0 = (O, (\boldsymbol{e}_i))$ è il sistema di riferimento fisso. Qui le x_i indicano le coordinate in $\mathcal{S}$.
Su P agiscono il peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 ,$$

e la forza di reazione vincolare, con attrito, data da

$$\left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}\right| = \mu \left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}\right| ,$$

$\mu > 0$. Le condizioni iniziali sono

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0 ,$$
$$\dot{x}_1(0) = v_0 > 0 , \qquad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0 .$$

Determinare la posizione, sia rispetto a $\mathcal{S}$ che a $\mathcal{S}_0$, assunta da P nell'istante $\bar{t}$ in cui la sua velocità $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ rispetto a $\mathcal{S}$ si annulla.

4. [17/7/2014 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una curva γ di parametrizzazione

$$\boldsymbol{\psi}(s, t) = \psi_1(s)\boldsymbol{u}_1(t) + \psi_2(s)\boldsymbol{u}_2(t) , \qquad s \in I ,$$

ove $I \subset \boldsymbol{R}$ è un intervallo aperto, s è l'ascissa curvilinea, e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 . \end{aligned}$$

Il punto è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda \boldsymbol{u}_1 \,,$$

con $\lambda > 0$ costante.
Si scriva l'equazione di moto e si trovi un integrale primo del moto.

5. [13/1/2015 (ex)I] Un punto materiale P è vincolato a una retta scabra r che si muove mantenendosi sovrapposta all'asse x_1, con velocità

$$\boldsymbol{v}_r(t) = \lambda \operatorname{arctg}(\beta t) \boldsymbol{e}_1 \,.$$

Sul punto agiscono la forza

$$\boldsymbol{F} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 \,,$$

e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ soggetta alla restrizione

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_1| = \mu \, |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_2 \, \boldsymbol{e}_2 + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_3 \, \boldsymbol{e}_3| \;.$$

Qui a, b, β, λ e μ sono costanti positive.
Il punto parte con velocità relativa a r data da

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_1 \,, \qquad v_0 \in \boldsymbol{R}, v_0 \neq 0 \,.$$

Determinare se, assegnato $v_0 \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, sia possibile scegliere gli altri parametri in modo che la velocità di P relativa a r non si annulli mai per $t > 0$.

6. [13/1/2015 (ex)II] Un punto materiale P è vincolato a una retta scabra r che si muove mantenendosi sovrapposta all'asse x_1, con velocità

$$\boldsymbol{v}_r(t) = \lambda (1 + e^{-\beta t}) \boldsymbol{e}_1 \,.$$

Sul punto agiscono la forza

$$\boldsymbol{F} = -b\boldsymbol{e}_1 + a\boldsymbol{e}_3 \,,$$

e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ soggetta alla restrizione

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_1| = \mu \, |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_2 \, \boldsymbol{e}_2 + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{e}_3 \, \boldsymbol{e}_3| \;.$$

Qui a, b, β, λ e μ sono costanti positive.
Il punto parte con velocità relativa a r data da

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}(0) = v_0 \boldsymbol{e}_1 \,, \qquad v_0 \in \boldsymbol{R}, v_0 \neq 0 \,.$$

Determinare se, assegnato $v_0 \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, sia possibile scegliere gli altri parametri in modo che la velocità di P relativa a r non si annulli mai per $t > 0$.

7. [3/9/2015 (ex)I] Si consideri l'asse mobile r di equazioni

$$x_1 \cos(\lambda t) + x_2 \sin(\lambda t) = R\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

ossia la retta tangente alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

nel punto A dato da

$$\overrightarrow{OA} = R\cos(\lambda t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\lambda t)\boldsymbol{e}_2\,,$$

ove λ, $R > 0$.
Il punto materiale P di massa m è vincolato con vincolo scabro a muoversi su r.
P è soggetto a una reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ tale che

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T}| = \mu \left|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} - (\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T})\boldsymbol{T}\right|\,,$$

ove $\boldsymbol{T}$ denota il versore tangente a r.
Si scrivano le equazioni di moto del punto in un sistema di riferimento solidale con l'asse r.

8. [15/01/2018 (ex)I] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Qui $\omega > 0$ è una costante.
Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza γ solidale con $\mathcal{S}$ data da

$$\gamma = \Big\{ R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{u}_1 + R\sin\frac{s}{R}\Big(\frac{\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3}{\sqrt{2}}\Big) \mid 0 \le s < 2\pi R \Big\}\,.$$

Il vincolo è scabro e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \le \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,,$$

con $\mu > 0$. Sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di moto del punto all'equilibrio relativo a $\mathcal{S}$.
- Mostrare che se $\mu = 1$ e $\omega > 0$ è abbastanza grande, tutte le posizioni su γ sono di equilibrio relativo.

9. [15/01/2018 (ex)II] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Qui $\omega > 0$ è una costante.
Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza γ solidale con $\mathcal{S}$ data da

$$\gamma = \Big\{ R \cos\frac{s}{R} \boldsymbol{u}_1 + R \sin\frac{s}{R} \Big(\frac{\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3}{\sqrt{2}} \Big) \mid 0 \le s < 2\pi R \Big\} \,.$$

Il vincolo è scabro e la reazione vincolare soddisfa

$$|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| \le \mu |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| \,,$$

con $\mu > 0$. Sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_2$.

- Scrivere le equazioni di moto del punto all'equilibrio relativo a $\mathcal{S}$.
- Mostrare che se $\mu = 1$ e $\omega > 0$ è abbastanza grande, tutte le posizioni su γ sono di equilibrio relativo.

10. [27/06/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla retta mobile

$$x_1 \sin(\omega t) - x_2 \cos(\omega t) = 0 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Sul punto agisce la forza peso diretta come $\boldsymbol{e}_2$, e la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}$ tale che

$$|\mathbf{f}^{\mathrm{tan}}_{\mathrm{vin}}| \le \mu |\mathbf{f}^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{vin}}| \,.$$

Il moto ha dati iniziali

$$\overrightarrow{OP}(0) = d\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = \omega d \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Qui ω, μ, d sono costanti positive assegnate e $(O, (x_i))$ è il sistema di riferimento fisso.
Trovare la condizione su ω, μ, d perché $|\overrightarrow{OP}| = d$ in un opportuno intervallo $(0, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$ e dimostrare che in ogni caso $\bar{t} < \pi/2\omega$.

11. [15/01/2019 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva scabra γ data da

$$y_3 = \alpha \sin(\beta y_1) \,, \qquad y_1 \in \boldsymbol{R} \,; \qquad y_2 = 0 \,.$$

Qui (y_i) denota le coordinate del sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

La reazione vincolare soddisfa la relazione

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \le \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,.$$

Qui α, β, ω, μ sono costanti positive assegnate.
Trovare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$, ignorando le posizioni ove si annulla la curvatura di γ.

12. [15/01/2019 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva scabra γ data da

$$y_3 = \beta\cos(\alpha y_1)\,, \qquad y_1 \in \boldsymbol{R}\,; \qquad y_2 = 0\,.$$

Qui (y_i) denota le coordinate del sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

La reazione vincolare soddisfa la relazione

$$|\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{tan}}| \le \mu |\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}^{\mathrm{nor}}|\,.$$

Qui α, β, ω, μ sono costanti positive assegnate.
Trovare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$, ignorando le posizioni ove si annulla la curvatura di γ.

620. Equazioni di Lagrange per vincoli fissi

1. [12/9/2005 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie liscia

$$z = f\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)\,, \qquad f \in C^3([0,\infty))\,.$$

Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse z.
Dimostrare che un moto circolare (che non sia la quiete) su $x^2+y^2 = \bar{r}^2 > 0$ è possibile se e solo se $f'(\bar{r}) > 0$.

2. [12/9/2005 (ex)I] Una circonferenza γ di raggio R, centro C e massa m è vincolata a muoversi su un piano verticale fisso π. Inoltre il punto medio Q del raggio $\overrightarrow{CA}$ ove A è un punto di γ (solidale con essa) è fisso su π. Si noti che Q è solidale con la circonferenza, la quale perciò ruota intorno all'asse ortogonale a π in Q.
Un punto materiale P di massa M è vincolato a muoversi su γ.
Si scriva la lagrangiana del sistema, scegliendo come coordinate lagrangiane: l'angolo θ formato da $\overrightarrow{CA}$ con la verticale ascendente; l'angolo φ formato da $\overrightarrow{CP}$ con la verticale ascendente.

3. [12/9/2005 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie liscia di equazione

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\,, \qquad x_1^2 + x_2^2 > 0\,,$$

e soggetto a una forza

$$\boldsymbol{F} = -\frac{k}{x_3^\alpha}\boldsymbol{e}_3\,,$$

con $1 > \alpha > 0$, $k > 0$ costanti.
Dimostrare che non sono possibili moti nei quali x_3 diviene illimitata.

4. [12/9/2005 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie liscia

$$z = f\big(\sqrt{x^2 + y^2}\,\big)\,, \qquad f \in C^3([0,\infty))\,.$$

Il peso è diretto nel verso positivo dell'asse z.
Dimostrare che un moto circolare (che non sia la quiete) su $x^2 + y^2 = \bar{r}^2 > 0$ è possibile se e solo se $f'(\bar{r}) < 0$.

5. [12/9/2005 (ex)II] Una circonferenza γ di raggio $2L$, centro C e massa M è vincolata a muoversi su un piano verticale fisso π. Inoltre il punto medio Q del raggio $\overrightarrow{CA}$ ove A è un punto di γ (solidale con essa) è fisso su π. Si noti che Q è solidale con la circonferenza, la quale perciò ruota intorno all'asse ortogonale a π in Q.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su γ.
Si scriva la lagrangiana del sistema, scegliendo come coordinate lagrangiane: l'angolo θ formato da $\overrightarrow{CA}$ con la verticale ascendente; l'angolo φ formato da $\overrightarrow{CP}$ con la verticale ascendente.

6. [12/9/2005 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie liscia di equazione

$$x_3 = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\,, \qquad x_1^2 + x_2^2 > 0\,,$$

e soggetto a una forza

$$\boldsymbol{F} = -\frac{k}{x_3^\alpha}\boldsymbol{e}_3 \,,$$

con $1 > \alpha > 0$, $k > 0$ costanti.
Dimostrare che non sono possibili moti nei quali x_3 diviene illimitata.

7. [15/12/2005 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie liscia

$$z = x + y^2 \,,$$

ed è soggetto alla forza peso diretta nel verso negativo dell'asse z. All'istante iniziale il punto è fermo nella posizione (1,0,1).
Trovare il moto del punto.

8. [15/12/2005 (ex)I] Calcolare la lagrangiana di un punto materiale di massa m che si muove sulla superficie

$$z = xy \,,$$

soggetto alla forza peso diretta nel verso negativo dell'asse z, e a una forza costante

$$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad k > 0 \,.$$

9. [7/4/2006 (ex)I] Si scrivano le equazioni di Lagrange del sistema formato da due punti materiali P_1, P_2, entrambi di massa $m > 0$, e vincolati alla parabola liscia

$$y = ax^2 \,, \qquad z = 0 \,,$$

con $a > 0$. Su P_1, P_2 agiscono le forze

$$\text{su } P_1\text{:} \qquad \boldsymbol{F}_1 = k\overrightarrow{P_1P_2} - \lambda\boldsymbol{e}_1 \,,$$
$$\text{su } P_2\text{:} \qquad \boldsymbol{F}_2 = k\overrightarrow{P_2P_1} - \mu\boldsymbol{e}_2 \,,$$

ove k, λ, $\mu > 0$ sono costanti.

10. [22/9/2006 (ex)I] Scrivere la funzione lagrangiana del sistema formato da due punti materiali P_1 e P_2 di massa m vincolati a una circonferenza fissa di raggio R, che si attraggono a vicenda con una forza elastica di costante $k > 0$.

11. [26/3/2007 (ex)I] Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza R e massa M è vincolata ad avere l'estremo A sull'asse fisso x_3, e B sull'elica circolare

$$x_1 = R\cos u \,, \quad x_2 = R\sin u \,, \quad x_3 = hu \,, \qquad -\infty < u < \infty \,.$$

Qui $h > 0$ è costante, e (O, x_i) denota il sistema di riferimento fisso.

Oltre al peso, diretto nel verso negativo dell'asse x_3, l'asta è soggetta alla forza elastica applicata in A

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OA}\,,$$

con k costante positiva.
Scrivere le equazioni di moto dell'asta.
[*Sugg.* L'asta ha un solo grado di libertà.]

12. [19/7/2007 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie data, in coordinate cilindriche, da

$$z = rf(\varphi)\,, \qquad r > 0\,,$$

ove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e φ sono appunto le usuali coordinate polari nel piano (x, y). La $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è un'assegnata funzione positiva, periodica con periodo 2π.
Sul punto agisce la forza peso, nel verso negativo dell'asse z.
Si dimostri che se $f'(\varphi_0) = 0$, con $\varphi_0 \in (-\pi, \pi)$ dato, allora è possibile un moto di P in cui $\varphi(t) = \varphi_0$ per ogni t.

13. [19/7/2007 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie data, in coordinate cilindriche, da

$$z = rf(\varphi)\,, \qquad r > 0\,,$$

ove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e φ sono appunto le usuali coordinate polari nel piano (x, y). La $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è un'assegnata funzione positiva, periodica con periodo 2π.
Sul punto agisce una forza di potenziale

$$U = kx\,,$$

con $k > 0$ costante.
Si dimostri che se $f'(0) = 0$, allora è possibile un moto di P in cui $\varphi(t) = 0$ per ogni t.

14. [13/12/2007 (ex)I] Un'asta rigida di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata

- a giacere nel piano verticale fisso $x_3 = 0$;
- ad avere il centro C sull'asse x_2.

Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_2$. Inoltre sull'asta agiscono due forze elastiche applicate nei due estremi A_1 e A_2:

$$\boldsymbol{F}_{A_1} = -k_1\overrightarrow{OA_1}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{A_2} = -k_2\overrightarrow{OA_2}\,,$$

ove si assume $k_1 > k_2 > 0$.
Scrivere le equazioni di Lagrange dell'asta, e determinarne le posizioni di equilibrio.

15. [13/12/2007 (ex)II] Un'asta rigida di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata

- a giacere nel piano verticale fisso $x_3 = 0$;
- ad avere il centro C sull'asse x_2.

Il peso è diretto come $\boldsymbol{e}_2$. Inoltre sull'asta agiscono due forze elastiche applicate nei due estremi A_1 e A_2:

$$\boldsymbol{F}_{A_1} = -k_1 \overrightarrow{OA_1}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{A_2} = -k_2 \overrightarrow{OA_2}\,,$$

ove si assume $k_2 > k_1 > 0$.
Scrivere le equazioni di Lagrange dell'asta, e determinarne le posizioni di equilibrio.

16. [1/4/2008 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla sfera di raggio $R > 0$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

ed è soggetto

- alla forza peso, diretta come $-\boldsymbol{e}_3$;
- alla forza elastica $\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{NP}$, ove $N = (0,0,R)$. Qui $k > 0$ è costante.

Determinare

1. le equazioni di moto;
2. per quali quote x_3 sono possibili moti circolari a quota x_3 costante.

17. [1/4/2008 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato all'elica circolare

$$x_1 = R\cos\varphi\,,$$
$$x_2 = R\sin\varphi\,,$$
$$x_3 = a\varphi\,,$$

ove a e R sono costanti positive.
Il punto è soggetto alla forza peso, ortogonale all'asse dell'elica,

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_2\,.$$

Scrivere l'equazione di moto del punto.

18. [1/7/2008 (ex)I] Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è sottoposta ai seguenti vincoli:

- giace sul piano $x_3 = 0$;
- il centro C appartiene alla curva

$$x_2 = -b \cos a x_1 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

L'asta è sottoposta alle seguenti forze:

- la forza peso, diretta nel verso negativo dell'asse x_2;
- le due forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{A_1 A} \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k\overrightarrow{B_1 B} \,,$$

  ove A_1 [rispettivamente B_1] è la proiezione di A [rispettivamente di B] sull'asse x_1.

Qui a, b, k sono costanti positive.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange;
2. dare una condizione sui dati iniziali perché l'asta nel suo moto compia una rotazione completa.

19. [1/7/2008 (ex)II] Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è sottoposta ai seguenti vincoli:

- giace sul piano $x_3 = 0$;
- il centro C appartiene alla curva

$$x_2 = a \cos b x_1 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

L'asta è sottoposta alle seguenti forze:

- la forza peso, diretta nel verso positivo dell'asse x_2;
- le due forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{A_1 A} \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k\overrightarrow{B_1 B} \,,$$

  ove A_1 [rispettivamente B_1] è la proiezione di A [rispettivamente di B] sull'asse x_1.

Qui a, b, k sono costanti positive.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange;
2. dare una condizione sui dati iniziali perché l'asta nel suo moto compia una rotazione completa.

20. [12/9/2008 (ex)I] Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza L è vincolata ad avere l'estremo A nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
All'estremo B è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = -kx_1\boldsymbol{e}_3 ,$$

con $k > 0$ costante.
Le condizioni iniziali sono tali che al tempo $t = 0$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{L}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 - \frac{L}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2 , \qquad \boldsymbol{v}_B = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 + \frac{v_0}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2 .$$

Scrivere le equazioni di Lagrange e ricavare un integrale primo del moto.

21. [12/9/2008 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos\varphi , \\ x_2 &= \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\varphi , \qquad -\pi \le \varphi \le \pi . \\ x_3 &= \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\varphi , \end{aligned}$$

ove $R > 0$ è costante.
Il punto è soggetto alla forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{CP} ,$$

ove $k > 0$ è costante, e

$$\overrightarrow{OC} = R\boldsymbol{e}_3 ,$$

con O origine del sistema di riferimento fisso.
Il punto è anche soggetto alla forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.

22. [12/9/2008 (ex)II] Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata ad avere il centro C nell'origine O del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
All'estremo B è applicata la forza

$$\boldsymbol{F} = -kx_2\boldsymbol{e}_3 ,$$

con $k > 0$ costante.

Le condizioni iniziali sono tali che al tempo $t = 0$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{L}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 - \frac{L}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2 , \qquad \boldsymbol{v}_B = 0 .$$

Scrivere le equazioni di Lagrange e ricavare un integrale primo del moto.

23. [12/9/2008 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos\varphi , \\ x_2 &= \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\varphi , \qquad -\pi \le \varphi \le \pi . \\ x_3 &= \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\varphi , \end{aligned}$$

ove $R > 0$ è costante.
Il punto è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{CP} ,$$

ove $k > 0$ è costante, e

$$\overrightarrow{OC} = -R\boldsymbol{e}_3 ,$$

con O origine del sistema di riferimento fisso.
Il punto è anche soggetto alla forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.

24. [12/6/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla curva

$$x_3 = 0 , \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 ,$$

ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}_P = -k\overrightarrow{AP} ,$$

ove

$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_3 .$$

Qui a, b, R, k sono costanti positive, con $a > b$.
Si determinino l'equazione di moto del punto, e le posizioni di equilibrio.

25. [12/6/2009 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla curva

$$x_3 = 0 , \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 ,$$

ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F}_P = k\overrightarrow{AP}\,,$$

ove

$$\overrightarrow{OA} = -R\boldsymbol{e}_3\,,$$

e al peso

$$\boldsymbol{F}_{\text{peso}} = -mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Qui a, b, R, k sono costanti positive, con $a > b$.
Si determinino l'equazione di moto del punto, e le posizioni di equilibrio.

26. [15/7/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato al cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,.$$

Sul punto P agisce il peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Le condizioni iniziali del moto sono

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_2\,.$$

1. Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
2. Dare una condizione su v_0 perché risulti $\overrightarrow{OP}(t)$ ortogonale a $\boldsymbol{e}_1$ prima che $x_{3P}(t) = -R$.

27. [15/7/2009 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato al cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,.$$

Sul punto P agisce il peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Le condizioni iniziali del moto sono

$$\overrightarrow{OP}(0) = -R\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = -v_0\boldsymbol{e}_2\,.$$

1. Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
2. Dare una condizione su v_0 perché $\overrightarrow{OP}(t)$ ritorni ortogonale a $\boldsymbol{e}_2$ (per un tempo positivo t) con $x_{3P}(t) > -R$.

28. [11/9/2009 (ex)I] Un corpo rigido è formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R, e da un punto P di massa m solidale al disco, fissato al bordo del disco.

Il rigido è vincolato a ruotare intorno all'asse x_1 del sistema di riferimento fisso (O, x_i). Tale asse si mantiene perpendicolare al disco nel suo centro C, che è a sua volta fissato nell'origine O.
La forza peso è diretta nel verso negativo dell'asse x_3. Sul rigido agisce anche la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_P = -k\overrightarrow{AP} ,$$

applicata in P, ove A è tale che

$$\overrightarrow{OA} = L\boldsymbol{e}_2 .$$

Qui k, L, R sono costanti positive.

- Scrivere le equazioni di moto del rigido.
- Trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

29. [11/9/2009 (ex)II] Un corpo rigido è formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R, e da un punto P di massa m solidale al disco, fissato al bordo del disco.
Il rigido è vincolato a ruotare intorno all'asse x_1 del sistema di riferimento fisso (O, x_i). Tale asse si mantiene perpendicolare al disco nel suo centro C, che è a sua volta fissato nell'origine O.
La forza peso è diretta nel verso negativo dell'asse x_3. Sul rigido agisce anche la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{AQ} ,$$

ove Q è il punto solidale con il rigido tale che

$$\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{CQ} ,$$

e A è tale che

$$\overrightarrow{OA} = L\boldsymbol{e}_2 .$$

Qui k, L, R sono costanti positive.

- Scrivere le equazioni di moto del rigido.
- Trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

30. [25/1/2010 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2 = \beta \cos(\alpha x_1) , \qquad x_3 = 0 .$$

Qui α, $\beta > 0$ sono costanti.

L'asta è soggetta alla forza peso diretta secondo il verso negativo dell'asse x_2.
Scrivere la lagrangiana dell'asta.

31. [25/1/2010 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- ad avere il centro C sulla curva

$$x_2 = \beta \cos(\alpha x_1) \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

  Qui α, $\beta > 0$ sono costanti.

L'asta è soggetta alla forza peso diretta secondo il verso negativo dell'asse x_2.
Scrivere la lagrangiana dell'asta.

32. [22/2/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha \sin(\beta x_1) + \gamma x_2^2 \,,$$

ove α, β, γ sono costanti positive.
Il punto è soggetto alla forza peso diretta nel verso negativo dell'asse x_3.
Il punto parte con velocità iniziale nulla nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = 0 \,.$$

Qui $(O, \boldsymbol{e}_i)$ denota il sistema fisso, con coordinate (x_i).
Scrivere le equazioni di moto del punto, e dedurne che il moto è piano.

33. [22/2/2010 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha \sin(\beta x_1) + \gamma x_2^2 \,,$$

ove α, β, γ sono costanti positive.
Il punto è soggetto alla forza peso diretta nel verso negativo dell'asse x_3.
Il punto parte con velocità iniziale nulla nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = -\frac{\pi}{2\beta}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{e}_2 + \Big(\frac{1}{\gamma} - \alpha\Big)\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui $(O, \boldsymbol{e}_i)$ denota il sistema fisso, con coordinate (x_i).
Scrivere le equazioni di moto del punto, e dedurne che il moto è piano.

34. [9/4/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \,.$$

Il punto è soggetto alla forza peso diretta nel verso negativo dell'asse x_3 e alla forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha x_1 \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Qui α, $R > 0$ sono costanti, e (O, x_i) denota il sistema di riferimento fisso. Scrivere le equazioni di Lagrange per il moto.

35. [20/1/2014 (ex)I] Un punto materiale P di massa M è vincolato al cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,.$$

Sul punto agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_3. Il punto parte dalla posizione (R,0,0), con velocità iniziale $\boldsymbol{v}(0)$ tale che

$$\boldsymbol{v}(0) \cdot \boldsymbol{e}_2 > 0 \,, \qquad \boldsymbol{v}(0) \cdot \boldsymbol{e}_3 > 0 \,.$$

Dare una condizione su $\boldsymbol{v}(0)$ che garantisca che nell'istante in cui il punto raggiunge la sua massima quota x_3 esso si trovi sulla retta

$$x_1 = -R \,, \qquad x_2 = 0 \,.$$

36. [20/1/2014 (ex)II] Un punto materiale P di massa M è vincolato al cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,.$$

Sul punto agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP} \,,$$

ove $k > 0$ è costante e O è l'origine del sistema di riferimento.
Il punto parte dalla posizione (R,0,0), con velocità iniziale $\boldsymbol{v}(0)$ tale che

$$\boldsymbol{v}(0) \cdot \boldsymbol{e}_2 > 0 \,, \qquad \boldsymbol{v}(0) \cdot \boldsymbol{e}_3 > 0 \,.$$

Dare una condizione su $\boldsymbol{v}(0)$ che garantisca che nell'istante in cui il punto raggiunge la sua massima quota x_3 esso si trovi sulla retta

$$x_1 = -R \,, \qquad x_2 = 0 \,.$$

37. [17/2/2014 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una sfera di raggio R con centro nell'origine O del sistema di riferimento fisso. Su di esso non sono applicate forze.
Si mostri che, a parte il caso della quiete, la traiettoria è sempre una circonferenza di raggio R, indicandone la dipendenza dalle condizioni iniziali del moto.

38. [17/2/2014 (ex)I] Un disco D di centro C, massa M e raggio R è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$. Qui $(O, (x_h))$ è il sistema di riferimento fisso. Su di esso agisce una distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(P) = \lambda \overrightarrow{CP} \times \boldsymbol{e}_3 \, \mathrm{d}\mu \,, \qquad P \in D \,,$$

ove $\mathrm{d}\mu$ rappresenta la misura di superficie sul disco, e $\lambda > 0$ è costante.
Scrivere le equazioni di Lagrange del disco.

39. [17/2/2014 (ex)II] Un disco D di centro C, massa M e raggio R è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$. Qui $(O, (x_h))$ è il sistema di riferimento fisso. Su di esso agisce una distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(P) = \lambda |\overrightarrow{CP}| \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{CP} \, \mathrm{d}\mu \,, \qquad P \in D \,,$$

ove $\mathrm{d}\mu$ rappresenta la misura di superficie sul disco, e $\lambda > 0$ è costante.
Scrivere le equazioni di Lagrange del disco.

40. [19/6/2014 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie S ottenuta ruotando la parabola

$$x_2 = L + \alpha x_3^2 \,, \qquad x_3 \in \boldsymbol{R} \,,$$

intorno all'asse x_3. Qui L e α sono costanti positive.
Su di esso agisce il peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Si assuma che il moto avvenga tutto o sulla parte di S ove $x_3 > 0$ o su quella ove $x_3 < 0$.

- Si scrivano le equazioni di moto di P.
- Si dica se sono possibili moti in cui P si mantiene a distanza fissa dall'asse x_3, e li si descriva qualitativamente.

41. [17/7/2014 (ex)I] Due aste AB e CD di uguale lunghezza $2L$ e massa M sono vincolate a giacere nel piano $x_3 = 0$ e ad avere ciascuna il centro in un punto fisso del piano $x_3 = 0$, ossia rispettivamente

$$\overrightarrow{OP_1} = 0 \,, \qquad \overrightarrow{OP_2} = R\boldsymbol{e}_1 \,,$$

ove P_1 [P_2] è il centro di AB [CD] e $R > 4L$. Qui $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{e}_i))$ è il sistema di riferimento fisso, e le (x_i) sono le coordinate in tale sistema.
Gli estremi A e C si attraggono con forza elastica

$$\boldsymbol{F}_A = k\overrightarrow{AC} = -\boldsymbol{F}_C \,,$$

con $k > 0$.
Ricavare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

42. [13/1/2015 (ex)I] Una circonferenza materiale γ_1 di massa M e raggio R è vincolata a giacere sul piano verticale $x_3 = 0$, con il centro coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso. Qui le x_i indicano le coordinate in tale sistema.
Una seconda circonferenza γ_2 di centro C, raggio $r < R$ e massa m è vincolata a rotolare senza strisciare su γ_1, mantenendosi al suo interno e giacendo anch'essa sul piano $x_3 = 0$.
Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_2$.
Si determinino le velocità angolari delle due circonferenze e si scrivano le equazioni di Lagrange del sistema.
[Si scelgano come coordinate lagrangiane le anomalie polari θ di un punto A solidale con γ_1 e φ di C.]

43. [13/1/2015 (ex)II] Una circonferenza materiale γ_1 di massa M e raggio R è vincolata a giacere sul piano verticale $x_3 = 0$, con il centro coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso. Qui le x_i indicano le coordinate in tale sistema.
Una seconda circonferenza γ_2 di centro C, raggio r e massa m è vincolata a rotolare senza strisciare su γ_1, mantenendosi al suo esterno e giacendo anch'essa sul piano $x_3 = 0$.
Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_2$.
Si determinino le velocità angolari delle due circonferenze e si scrivano le equazioni di Lagrange del sistema.
[Si scelgano come coordinate lagrangiane le anomalie polari θ di un punto A solidale con γ_1 e φ di C.]

44. [10/2/2015 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di raggio R e massa M è vincolata a ruotare intorno al suo diametro AB che giace sull'asse x_3 del sistema di riferimento fisso; i punti A e B sono fissi e solidali con γ. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su γ.
Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema e dare una condizione sui parametri M, m, R perché valga, se $\boldsymbol{\omega}$ denota la velocità angolare della circonferenza, che

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}(0)| \leq |\boldsymbol{\omega}(t)| \leq 2|\boldsymbol{\omega}(0)|\,, \qquad t > 0\,,$$

per qualunque scelta delle condizioni iniziali.

45. [10/2/2015 (ex)II] Una circonferenza materiale γ di raggio r e massa m è vincolata a ruotare intorno al suo diametro AB che giace sull'asse x_2 del sistema di riferimento fisso; i punti A e B sono fissi e solidali con γ. Un punto materiale P di massa M è vincolato a muoversi su γ.

Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema e trovare due integrali primi del moto.

46. [4/6/2015 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di massa M e raggio R è vincolata ad avere un punto solidale A nell'origine O del sistema fisso $(O, (x_i))$, e a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sulla circonferenza. Sul sistema agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_2$.

- Si scriva la lagrangiana del sistema.
- Si determinino gli eventuali punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

47. [4/6/2015 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$. Su di essa agisce la distribuzione di forze elastiche

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -ks\overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}s\,, \qquad P \in AB\,,$$

ove $k > 0$ è costante, e $s \in [0,2L]$ è l'ascissa di P su AB misurata a partire da A. Qui $(O, (\boldsymbol{e}_i))$ è il sistema fisso di riferimento.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Determinare le posizioni di equilibrio dell'asta.

48. [4/6/2015 (ex)II] Una circonferenza materiale γ di massa m e raggio L è vincolata ad avere un punto solidale B nel punto $2L\boldsymbol{e}_1$ del sistema fisso $(O, (x_i))$, e a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Un punto materiale P di massa M è vincolato a muoversi sulla circonferenza. Sul sistema agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_2$.

- Si scriva la lagrangiana del sistema.
- Si determinino gli eventuali punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

49. [4/6/2015 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere sul piano $x_1 = 0$. Su di essa agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = ks^2\overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}s\,, \qquad P \in AB\,,$$

ove $k > 0$ è costante, e $s \in [0,2L]$ è l'ascissa di P su AB misurata a partire da A. Qui $(O, (\boldsymbol{e}_i))$ è il sistema fisso di riferimento.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Determinare le posizioni di equilibrio dell'asta.

50. [3/9/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$\frac{x_3^2}{a^2} = -1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{b^2} \,, \qquad x_3 < 0 \,,$$

ove a, $b > 0$ sono costanti assegnate.
Su P agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
- Dimostrare che non esistono moti lungo i quali x_3 si mantiene costante.

51. [3/9/2015 (ex)I] Un mezzo disco di centro C, massa M e raggio R è vincolato a giacere sul piano coordinato fisso $x_3 = 0$.
Su di esso agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = k(\overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} \,\mathrm{d}\mu \,,$$

ove P denota il generico punto del mezzo disco, $\mathrm{d}\mu$ l'usuale misura di area e $\boldsymbol{u}$ è il versore solidale con il mezzo disco e parallelo a $\overrightarrow{CA}$, ove A è uno degli estremi del diametro che delimita il mezzo disco. Inoltre O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Qui $k > 0$ è una costante assegnata.
Calcolare le componenti lagrangiane della distribuzione $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$.

52. [9/2/2016 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L < 2R$ e massa M è vincolata a mantenere l'estremo A sulla circonferenza fissa

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

e a giacere sul piano $x_3 = 0$, mantenendosi ortogonale alla circonferenza; B è esterno alla circonferenza.
Sull'asta agiscono il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_2$, e una forza data da

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -\mu x_2 \boldsymbol{v} \chi_{AB} \,\mathrm{d}s \,,$$

ove s denota l'ascissa sulla retta di AB e $\mu > 0$ è costante.
Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.

53. [9/2/2016 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L < 2R$ e massa M è vincolata a mantenere l'estremo A sulla circonferenza fissa

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

e a giacere sul piano $x_3 = 0$, mantenendosi ortogonale alla circonferenza; B è interno alla circonferenza.

Sull'asta agiscono il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_2$, e una forza data da

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mu x_1 \boldsymbol{v} \chi_{AB} \, \mathrm{d}s \,,$$

ove s denota l'ascissa sulla retta di AB e $\mu > 0$ è costante.
Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.

54. [19/3/2016 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie data, in coordinate cilindriche, da

$$z = rf(\varphi) \,, \qquad r > 0 \,,$$

ove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e φ sono appunto le usuali coordinate polari nel piano (x, y). La $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ è un'assegnata funzione positiva, periodica con periodo 2π.
Sul punto agisce la forza data, per una $g \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, da

$$\boldsymbol{F} = g(z)\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Si diano condizioni su f e g perché siano possibili moti di P in cui $\varphi(t) = \varphi_0 \in (-\pi, \pi)$ per ogni t.

55. [7/6/2016 (ex)I] Un disco di centro C, massa M e raggio R è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Su di esso agisce la forza applicata nel punto A

$$\boldsymbol{F}_A = k\overrightarrow{CA} \times \boldsymbol{e}_3 \,,$$

ove A è un punto solidale con il disco a distanza $2R$ da C. Qui $k > 0$ è costante.
Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che il moto non è periodico.

56. [12/7/2016 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie ottenuta ruotando la curva

$$z = \alpha x + \beta \sin(\lambda x) \,, \quad x > 0 \,; \qquad y = 0 \,,$$

intorno all'asse z.
Sul punto agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza

$$\boldsymbol{F} = k(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) \,.$$

Qui α, β, λ, $k > 0$ sono costanti assegnate.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Si dimostri che esistono moti circolari e che i possibili raggi di tali moti sono limitati da una costante dipendente solo dai parametri del problema.

57. [6/9/2016 (ex)I] Due punti materiali P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 sono vincolati ad appartenere al piano $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso $(O, (x_h))$ e a mantenersi allineati con l'origine O (ossia: O, P_1 e P_2 appartengono a una stessa retta in ciascun istante, non necessariamente costante nel tempo). Si assuma sempre che né P_1 né P_2 coincidano con O e che O si trovi tra i due punti P_i.
Sui punti agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_2$.

- Si scrivano le equazioni di moto.
- Si trovino le eventuali configurazioni di equilibrio.

58. [6/9/2016 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di massa M, centro C e raggio R è vincolata a giacere sul piano fisso $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso $(O, (x_h))$.
La circonferenza γ è soggetta alla distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(P) = -k(\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA})\overrightarrow{OP} \, \mathrm{d}s \,.$$

Qui A è un punto di γ a essa solidale, P è il generico punto di γ e $k > 0$ è una costante assegnata.
Calcolare le componenti lagrangiane delle forze.

59. [17/01/2017 (ex)I] Un punto materiale di massa m è vincolato alla superficie

$$z = \alpha(x^2 + y^2) \,, \qquad z > 0 \,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Qui (x, y, z) sono le coordinate nel sistema fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{PP_0} \,,$$

ove $k > 0$ è costante e P_0 è la proiezione ortogonale di P sul piano $z = 0$.

- Si scrivano le equazioni di moto del punto.
- Si trovino le condizioni iniziali per le quali il moto del punto avviene a quota $z > 0$ costante.

60. [17/01/2017 (ex)II] Un punto materiale di massa m è vincolato alla superficie

$$z = -\frac{\alpha}{x^2 + y^2} \,, \qquad x^2 + y^2 > 0 \,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Qui (x, y, z) sono le coordinate nel sistema fisso $(O, (\boldsymbol{e}_h))$.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{PP_0} \,,$$

ove $k > 0$ è costante e P_0 è la proiezione ortogonale di P sul piano $z = 0$.

- Si scrivano le equazioni di moto del punto.
- Si trovino le condizioni iniziali per le quali il moto del punto avviene a quota $z < 0$ costante.

61. [8/02/2017 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato ad appartenere al cilindro

$$x_2^2 + x_3^2 = R^2 .$$

Sul punto agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}} = -k\overrightarrow{P_0P} ,$$

ove P_0 è la proiezione di P sulla retta

$$x_2 = 0 , \qquad x_3 = R ,$$

e $k > 0$ è costante.

- Si scrivano le equazioni di Lagrange del punto.
- Si determinino le condizioni iniziali cui corrispondono moti rettilinei.

62. [8/02/2017 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato ad appartenere al cilindro

$$x_2^2 + x_3^2 = R^2 .$$

Sul punto agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}} = k\overrightarrow{P_0P} ,$$

ove P_0 è la proiezione di P sulla retta

$$x_2 = 0 , \qquad x_3 = -R ,$$

e $k > 0$ è costante.

- Si scrivano le equazioni di Lagrange del punto.
- Si determinino le condizioni iniziali cui corrispondono moti rettilinei.

63. [06/06/2017 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di raggio R e massa M è vincolata a giacere sul piano verticale $x_3 = 0$. Inoltre è vincolata ad avere il punto solidale $A \in \gamma$ nell'origine del sistema fisso.
Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_2$. Un punto materiale P di massa m è vincolato a stare su γ.

- Scrivere la lagrangiana del sistema.
- Trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

64. [11/07/2017 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = g(x - y) \,,$$

con $g \in C^\infty(\boldsymbol{R})$.
Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{P'P} \,,$$

ove P' è la proiezione ortogonale di P sull'asse z, e $k > 0$ è costante.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Determinare esplicitamente tutti i moti per cui

  $$x(t) = y(t) + C \,, \qquad t \in \boldsymbol{R} \,,$$

  con $C \in \boldsymbol{R}$ costante assegnata, per le costanti C per cui esistono tali moti.

65. [11/07/2017 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = \alpha \cos(\beta x) \,;$$

qui $(O, (x, y, z))$ è il sistema di riferimento fisso, e α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.
Sul punto agisce la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$.
Il moto soddisfa le condizioni iniziali

$$\overrightarrow{OP} = \alpha \boldsymbol{e}_3 \,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = \lambda \boldsymbol{e}_1 \,,$$

per un $\lambda > 0$ dato.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Esprimere la reazione vincolare in funzione delle coordinate lagrangiane e delle loro derivate prime (rispetto al tempo).

66. [15/01/2018 (ex)I] Due punti materiali P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 sono vincolati rispettivamente da $P_1 \in \gamma_1$ e $P_2 \in \gamma_2$, ove

$$\begin{aligned} \gamma_1 : &\qquad x_1^2 + x_2^2 = r_1^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,; \\ \gamma_2 : &\qquad x_1^2 + x_3^2 = r_2^2 \,, \qquad x_2 = 0 \,, \end{aligned}$$

ove $r_1 > r_2 > 0$ sono costanti.
I due punti si attraggono con forza elastica

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = -k\overrightarrow{P_2P_1} = -\boldsymbol{F}_{P_2} \,, \qquad k > 0 \text{ costante.}$$

- Si scrivano le equazioni di Lagrange del sistema.
- Se ne deduca che sono possibili dei moti ove solo uno dei punti è in quiete.

67. [15/01/2018 (ex)II] Due punti materiali P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 sono vincolati rispettivamente da $P_1 \in \gamma_1$ e $P_2 \in \gamma_2$, ove

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \qquad & x_1^2 + x_2^2 = r_1^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,; \\ \gamma_2 : \qquad & x_2^2 + x_3^2 = r_2^2 \,, \qquad x_1 = 0 \,, \end{aligned}$$

ove $r_2 > r_1 > 0$ sono costanti.
I due punti si attraggono con forza elastica

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = -k\overrightarrow{P_2P_1} = -\boldsymbol{F}_{P_2} \,, \qquad k > 0 \text{ costante.}$$

- Si scrivano le equazioni di Lagrange del sistema.
- Se ne deduca che sono possibili dei moti ove solo uno dei punti è in quiete.

68. [13/02/2018 (ex)I] Un punto materiale (P, m) è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \,,$$

ove $R > 0$ è costante, ed è soggetto al peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.
Il punto parte da fermo nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = \frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \,.$$

Determinare $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$, $\ddot{\boldsymbol{q}}$ nell'istante $\bar{t}$ in cui P raggiunge per la prima volta la quota $x_3 = -R/2$. Qui $\boldsymbol{q}$ indica il vettore delle coordinate lagrangiane.

69. [13/02/2018 (ex)II] Un punto materiale (P, m) è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \,,$$

ove $R > 0$ è costante, ed è soggetto al peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.
Il punto parte da fermo nella posizione

$$\overrightarrow{OP}(0) = \frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) \,.$$

Determinare $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$, $\ddot{\boldsymbol{q}}$ nell'istante $\bar{t}$ in cui P raggiunge per la prima volta la quota $x_3 = -R/\sqrt{2}$. Qui $\boldsymbol{q}$ indica il vettore delle coordinate lagrangiane.

70. [27/06/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie S che si ottiene ruotando intorno all'asse x_3 la curva

$$x_1 = a(\sin(bx_3) + 2)\,, \qquad x_2 = 0\,.$$

Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{P'P}\,,$$

ove P' è la proiezione ortogonale di P sul piano $x_3 = 0$. Qui a, b, k sono costanti positive assegnate.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.
- Dimostrare che sono possibili moti con x_3 costante e opportuna, e determinarli.

71. [23/07/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

ove $(O, (x_i))$ è il sistema di riferimento fisso.
Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{P'P}\,,$$

ove P' è la proiezione ortogonale di P sul piano $x_3 = -R$.
All'istante iniziale si ha

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui R, v_0, k sono costanti positive assegnate.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Ottenere un integrale primo in funzione di m, R, k, v_0.
- Dimostrare che P non può raggiungere quota $x_3 = -R$.

72. [06/02/2020 (ex)I] Si consideri il toro S parametrizzato da

$$\boldsymbol{r}(\varphi, \theta) = \cos\varphi(L + R\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(L + R\cos\theta)\boldsymbol{e}_2 + R\sin\theta\boldsymbol{e}_3\,,$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in (-\pi, \pi)$. Per maggiore chiarezza, questo è il toro dato dalla rotazione della circonferenza

$$(x_2 - L)^2 + x_3^2 = R^2\,, \qquad x_1 = 0\,,$$

intorno all'asse x_3. Qui $L > R > 0$.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a S. Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha|x_2|\Big(-\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\boldsymbol{e}_1 + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\boldsymbol{e}_2\Big) .$$

Determinare i moti che si svolgono in modo che φ o θ (ma non entrambi) rimangano costanti durante il moto.
[Suggerimento: usare le equazioni di Lagrange.]

73. [06/02/2020 (ex)I] [*Questa parte tra [...] non è indispensabile alla risoluzione e viene proposta solo come aiuto all'intuizione.*
Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ *è vincolato alla superficie espressa da*

$$x_3 = f(r) , \qquad r > 0 ,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. *Qui* r *e* φ *sono le usuali coordinate polari nel piano* (x_1, x_2).
Sul punto agiscono il peso $-mg\boldsymbol{e}_3$ *e la forza elastica*

$$\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_A) .$$

Qui $\boldsymbol{X}_A$ *è la proiezione ortogonale di* $\boldsymbol{X}$ *sull'asse* x_3.]
La lagrangianaa del moto è

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\big[\dot r^2\big(1 + f'(r)^2\big) + r^2\dot\varphi^2\big] - mgf(r) - \frac{k}{2}r^2 ,$$

ove $r \in (0, +\infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ sono le coordinate lagrangiane. Qui m, g, $k > 0$ sono costanti e $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$.
Determinare tutti i moti della forma $(r_0, \varphi(t))$, $t \in I$, ossia con $r(t) = r_0$ costante.

74. [06/02/2020 (ex)II] Si consideri il toro S parametrizzato da

$$\boldsymbol{r}(\varphi, \theta) = \cos\varphi(R + h\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(R + h\cos\theta)\boldsymbol{e}_2 + h\sin\theta\boldsymbol{e}_3 ,$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in (-\pi, \pi)$. Per maggiore chiarezza, questo è il toro dato dalla rotazione della circonferenza

$$(x_2 - R)^2 + x_3^2 = h^2 , \qquad x_1 = 0 ,$$

intorno all'asse x_3. Qui $R > h > 0$.
Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato a S. Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha|x_1|\Big(-\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\boldsymbol{e}_1 + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\boldsymbol{e}_2\Big) .$$

Determinare i moti che si svolgono in modo che φ o θ (ma non entrambi) rimangano costanti durante il moto.
[Suggerimento: usare le equazioni di Lagrange.]

75. [06/02/2020 (ex)II] [*Questa parte tra [...] non è indispensabile alla risoluzione e viene proposta solo come aiuto all'intuizione.*
Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ *è vincolato alla superficie espressa da*

$$x_3 = f(r) , \qquad r > 0 ,$$

con $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$*. Qui* r *e* φ *sono le usuali coordinate polari nel piano* (x_1, x_2)*.*
Sul punto agiscono il peso $-mg\boldsymbol{e}_3$ *e la forza elastica repulsiva*

$$\boldsymbol{F} = k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_A) .$$

Qui $\boldsymbol{X}_A$ *è la proiezione ortogonale di* $\boldsymbol{X}$ *sull'asse* x_3*.*]
La lagrangianaa del moto è

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\big[\dot{r}^2\big(1 + f'(r)^2\big) + r^2\dot{\varphi}^2\big] - mgf(r) + \frac{k}{2}r^2 ,$$

ove $r \in (0, +\infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ sono le coordinate lagrangiane. Qui m, g, $k > 0$ sono costanti e $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$.
Determinare tutti i moti della forma $(r_0, \varphi(t))$, $t \in I$, ossia con $r(t) = r_0$ costante.

76. [10/02/2020 (ex)I] Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie ottenuta ruotando la curva

$$x_2 = be^{cx_3} , \qquad x_1 = 0 ,$$

intorno all'asse x_3; qui b, $c > 0$ sono costanti.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -\mu\boldsymbol{v} + kx_3\boldsymbol{e}_1 ,$$

ove $\boldsymbol{v}$ è la velocità e μ, $k > 0$ sono costanti.

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Determinare se sono possibili moti in cui il punto rimane su un piano passante per l'asse x_3.

77. [10/02/2020 (ex)II] Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato alla superficie ottenuta ruotando la curva

$$x_1 = be^{-cx_3} , \qquad x_2 = 0 ,$$

intorno all'asse x_3; qui b, $c > 0$ sono costanti.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -\mu\boldsymbol{v} + kx_3\boldsymbol{e}_2 ,$$

ove $\boldsymbol{v}$ è la velocità e μ, $k > 0$ sono costanti.

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Determinare se sono possibili moti in cui il punto rimane su un piano passante per l'asse x_3.

78. [19/01/2023 (ex)I] Consideriamo il sistema formato dall'asta rigida AB di lunghezza R e massa M, e dal punto materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$. L'asta è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ con l'estremo A nell'origine O del sistema di riferimento fisso, e $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 , \qquad x_3 = 0 .$$

I vincoli sono lisci.
Sull'asta agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = cs\boldsymbol{e}_1 \,\mathrm{d}s - k(\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_P)\,\mathrm{d}\delta_B ,$$

ove $s \in [0, R]$ è l'ascissa sull'asta misurata da A. Qui c, k sono costanti positive assegnate; $\mathrm{d}\delta_B$ indica che la forza è applicata in B. Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_P = -k(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_B) .$$

Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi/2, 3\pi/2) \times (-\pi/2, 3\pi/2)$, tali che

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi) = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 , \quad \boldsymbol{X}_B^{\mathrm{L}}(\theta) = R\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{e}_2 .$$

1) Si determini l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Si determini il potenziale lagrangiano delle forze direttamente applicate all'asta.
3) Si dimostri che le equazioni di Lagrange sono:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot{\varphi}] = kR^2\sin(\theta - \varphi) ,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I\dot{\theta}] = -kR^2\sin(\theta - \varphi) - \frac{cR^3}{3}\sin\theta .$$

4) Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
5) Assegnate le condizioni iniziali

$$\varphi(0) = 0 , \quad \theta(0) = 0 , \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 , \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 ,$$

si determini una limitazione su $\dot{\varphi}_0$, $\dot{\theta}_0$ in termini di m, M, R e dei momenti di inerzia di AB che garantisca

$$|\theta(t)| \leq \frac{\pi}{3} , \qquad \text{per ogni } t.$$

6) Usando come coordinate locali del sistema

$$x_{1A}\,,x_{2A}\,,x_{3A}\,,x_{1B}\,,x_{3B}\,,x_{1P}\,,x_{2P}\,,x_{3P}\,,$$

si esprimano i vincoli dati come vincoli olonomi regolari.

79. [24/03/2023 (ex)I] Consideriamo il sistema formato dall'asta rigida AB di lunghezza R e massa M, e dal punto materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$. L'asta è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ con l'estremo A nell'origine O del sistema di riferimento fisso, e $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

I vincoli sono lisci.
Sull'asta agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = [c\boldsymbol{e}_1 - k(\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_P)]\,\mathrm{d}\delta_B\,,$$

ove $c \geq 0$, $k > 0$ sono costanti assegnate; $\mathrm{d}\delta_B$ indica che la forza è applicata in B. Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_P = d\boldsymbol{e}_2 - k(\boldsymbol{X}_P - \boldsymbol{X}_B)\,,$$

con $d > 0$ assegnata.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, tali che

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi) = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{X}_B^{\mathrm{L}}(\theta) = R\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta\boldsymbol{e}_2\,.$$

1) Si determini l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Si determini il potenziale lagrangiano delle forze direttamente applicate all'asta.
3) Si dimostri che le equazioni di Lagrange sono:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot\varphi] &= kR^2\sin(\theta-\varphi) + dR\cos\varphi\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I\dot\theta] &= -kR^2\sin(\theta-\varphi) - cR\sin\theta\,.\end{aligned}$$

4) Assumendo $c = 0$, si determinino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
5) Si assuma ancora $c = 0$. Assegnate le condizioni iniziali

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{2}\,, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{2}\,, \quad \dot\varphi(0) = \dot\varphi_0\,, \quad \dot\theta(0) = \dot\theta_0\,,$$

si determini una limitazione su $\dot\varphi_0$, $\dot\theta_0$ in termini di m, M, R e dei momenti di inerzia di AB che garantisca

$$\varphi(t) \geq \frac{\pi}{6}\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

6) Si considerino le coordinate locali del sistema

$$x_{1A}\,, x_{2A}\,, x_{3A}\,, x_{1B}\,, x_{3B}\,, x_{1P}\,, x_{2P}\,, x_{3P}\,.$$

Si estragga da esse un sistema di possibili coordinate lagrangiane (valido almeno per alcune configurazioni).

80. [18/01/2024 (ex)I] Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ (le x_h denotano le coordinate del sistema di riferimento fisso). L'estremo A è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Sull'asta agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_2$ e la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_B = -k\boldsymbol{X}_B\,,$$

applicata nell'estremo B. Qui L, R, k sono costanti positive assegnate.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_A^{\mathrm{L}}(\varphi) = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2\,,$$
$$\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) - \boldsymbol{X}_A^{\mathrm{L}}(\varphi) = 2L\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + 2L\sin\theta\boldsymbol{e}_2\,.$$

1) Si determini l'energia cinetica in rappresentazione lagrangiana dell'asta.
2) Determinare il potenziale lagrangiano delle forze direttamente applicate.
3) Determinare le posizioni di equilibrio ove $\varphi = \theta$.
4) Dimostrare che esiste una posizione di equilibrio con $\varphi = \theta$ ove, se i parametri k, m, R, L, g soddisfano una condizione opportuna, è possibile definire le piccole oscillazioni; calcolare l'energia cinetica ridotta in tale posizione.
5) All'istante $t = 0$ si abbia

$$\boldsymbol{X}_A(0) = \frac{R}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)\,, \quad \boldsymbol{v}_A(0) = \frac{v_0}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)\,,$$
$$\boldsymbol{X}_B(0) = \frac{R+2L}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)\,, \quad \boldsymbol{v}_B(0) = \frac{v_0}{2}(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1)\,,$$

con $v_0 > 0$ costante assegnata. Ricavare $\varphi(0)$, $\theta(0)$, $\dot{\varphi}(0)$, $\dot{\theta}(0)$.
6) Usando come coordinate locali per l'asta

$$\boldsymbol{z} = (x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, x_{1B}, x_{3B})\,,$$

scrivere i vincoli nella forma $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = 0$ (omettere il vincolo di rigidità $|\boldsymbol{X}_A - \boldsymbol{X}_B| = 2L$), e dimostrare che hanno matrice iacobiana di rango massimo.

81. [06/09/2024 (ex)I] Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$ e $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ sono vincolati con vincoli lisci come segue: $\boldsymbol{X}_1$ appartiene alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = h\,,$$

e invece $\boldsymbol{X}_2$ appartiene alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Su $\boldsymbol{X}_1$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_1 = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) + \beta \boldsymbol{e}_2 \,,$$

e su $\boldsymbol{X}_2$ agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_2 = -k(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1) \,;$$

qui R, h, k, β sono costanti positive.
Si usino le coordinate lagrangiane $(\theta, \varphi) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\theta) = R\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + R\sin\theta \boldsymbol{e}_2 + h\boldsymbol{e}_3 \,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(\varphi) = R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \,.$$

1) Si calcoli il potenziale lagrangiano del sistema.
2) Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
3) Si scrivano le equazioni di Lagrange.
4) Si dimostri che ciascun moto mantiene velocità limitata e se ne determini una limitazione in funzione dei dati iniziali.
5) Si determini nell'istante generico la reazione vincolare $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}2}$ su $\boldsymbol{X}_2$, in funzione di θ, φ, $\dot\theta$, $\dot\varphi$ (oltre che ovviamente di m_1, m_2, R, h, k, β).
6) Si usino le coordinate locali $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_6)$ tali che

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{i=1}^{3} z_i \boldsymbol{e}_i \qquad \boldsymbol{X}_2 = \sum_{i=1}^{3} z_{i+3} \boldsymbol{e}_i \,.$$

Si determini, nella configurazione $\boldsymbol{z}_0 = (R{,}0, h{,}0, R{,}0)$, una base dello spazio normale dei vincoli $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ come sottospazio di $\boldsymbol{R}^6$.

82. [16/01/2025 (ex)I] Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.
La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.
Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.
Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \alpha \boldsymbol{T},$$

ove $\boldsymbol{T}$ è il versore tangente a γ nella posizione occupata da $\boldsymbol{X}_P$ e $\alpha > 0$ è una costante.

Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, 3\pi/2)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3\,, \\
\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R}\,,
\end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) &= R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi)\,, \\
\boldsymbol{T} = \frac{1}{R}\frac{\partial \boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}}{\partial\theta} &= -\sin\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + \cos\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi)\,.
\end{aligned}$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere il sistema che determina i punti di equilibrio e dare una condizione sui parametri M, m, R, α che garantisca che abbia soluzioni.
4) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui φ è costante e θ non lo è.
5) Usando la prima equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere la risultante delle reazioni vincolari che agiscono sul sistema, in funzione di φ, θ, $\dot\varphi$, $\dot\theta$, $\ddot\varphi$, $\ddot\theta$.
6) Si esprimano i vincoli assegnati sulla circonferenza γ come vincoli olonomi usando le coordinate locali

$$x_{1O}\,, x_{2O}\,, x_{3O}\,, x_{3A}\,, x_{1C}\,, x_{3C}\,,$$

ove C è un estremo del diametro di γ ortogonale a AB.

630. Equazioni di Lagrange per vincoli mobili

1. [4/7/2005 (ex)I] Due punti materiali P_1 e P_2 di uguale massa m sono vincolati a una circonferenza γ di centro l'origine O del sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3), e di raggio R. La circonferenza ruota intorno all'asse verticale x_2 (che è un suo diametro) con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_2$. I vincoli sono lisci.
I punti si attraggono con forze elastiche di costante $k > 0$, ossia

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = k\overrightarrow{P_1P_2}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{P_2} = k\overrightarrow{P_2P_1}\,.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.

2. [4/7/2005 (ex)II] Due punti materiali P_1 e P_2 di uguale massa m sono vincolati a una circonferenza γ di centro l'origine O del sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3), e di raggio R. La circonferenza ruota intorno all'asse verticale x_2 (che è un suo diametro) con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_2$. I vincoli sono lisci.
I punti si respingono con forze elastiche di costante $k > 0$, ossia

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = k\overrightarrow{P_2P_1}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{P_2} = k\overrightarrow{P_1P_2}\,.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.

3. [18/7/2005 (ex)I] Si consideri un piano mobile $\pi(t)$ sovrapposto al piano fisso $x_3 = 0$, ruotante intorno all'asse x_3 con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = -\omega \boldsymbol{e}_3$, ove $\omega > 0$. Il punto O solidale con $\pi(t)$ coincide con l'origine del sistema fisso. Una curva γ solidale con $\pi(t)$ ha equazione (in coordinate polari su $\pi(t)$)

$$r = a\theta\,, \qquad 0 < \theta < \infty\,,$$

ove $a > 0$ è costante.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a γ. Il vincolo è liscio. Si dimostri che se le condizioni iniziali del moto corrispondono a

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \dot{\theta}(0) = \omega\,,$$

il moto di P nel sistema di riferimento fisso è rettilineo.
(Si deve assumere che θ cresca nel verso antiorario rispetto al verso positivo dell'asse x_3.)

4. [18/7/2005 (ex)II] Si consideri un piano mobile $\pi(t)$ sovrapposto al piano fisso $x_1 = 0$, ruotante intorno all'asse x_1 con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = -\omega \boldsymbol{e}_1$, ove $\omega > 0$. Una curva γ solidale con $\pi(t)$ ha equazione (in coordinate polari su $\pi(t)$)

$$r = b\theta\,, \qquad 0 < \theta < \infty\,,$$

ove $b > 0$ è costante.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a γ. Il vincolo è liscio. Si dimostri che se le condizioni iniziali del moto corrispondono a

$$\theta(0) = \pi\,, \qquad \dot{\theta}(0) = \omega\,,$$

il moto di P nel sistema di riferimento fisso è rettilineo.
(Si deve assumere che θ cresca nel verso antiorario rispetto al verso positivo dell'asse x_1.)

5. [15/12/2005 (ex)I] Un'asta omogenea di lunghezza $2L$ e massa m ha un estremo vincolato a una circonferenza γ di raggio R e centro O, che a sua

volta ruota con velocità costante $\boldsymbol{\omega}$ intorno al suo diametro verticale AB. I punti A e B sono fissi nel sistema di riferimento fisso. L'asta appartiene al piano della circonferenza. I vincoli sono lisci.
Scrivere il sistema di equazioni che determina le posizioni di equilibrio dell'asta nel sistema di riferimento solidale con il piano della circonferenza, e origine in O, e riconoscere che in nessuna posizione di equilibrio l'asta si mantiene orizzontale.

6. [7/7/2006 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato a una retta $R(t)$ di equazione

$$\begin{aligned} x_3 &= 0\,, \\ x_1 \sin\alpha(t) - x_2 \cos\alpha(t) &= 0\,, \end{aligned}$$

ove $\alpha : [0,\infty) \to [0,\infty)$ è una funzione C^1 con $\dot{\alpha} > 0$. Il peso è diretto secondo il verso negativo dell'asse x_2.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.
2. Determinare il moto del punto nel caso in cui $\alpha(t) = \omega t$, e siano assegnate le condizioni iniziali

$$P(0) = (s_0{,}0{,}0)\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = s_0\omega(0{,}1{,}0)\,.$$

7. [7/7/2006 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato a una retta $R(t)$ di equazione

$$\begin{aligned} x_3 &= 0\,, \\ -x_1 \cos\alpha(t) + x_2 \sin\alpha(t) &= 0\,, \end{aligned}$$

ove $\alpha : [0,\infty) \to [0,\infty)$ è una funzione C^1 con $\dot{\alpha} > 0$. Il peso è diretto secondo il verso negativo dell'asse x_1.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.
2. Determinare il moto del punto nel caso in cui $\alpha(t) = \omega t$, e siano assegnate le condizioni iniziali

$$P(0) = (0, s_0{,}0)\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = s_0\omega(1{,}0{,}0)\,.$$

8. [19/7/2006 (ex)I] Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a muoversi sul piano ruotante $\Pi(t)$ di equazione

$$-x_1 \cos(\omega t) + x_2 \sin(\omega t) = 0\,,$$

ove $\omega > 0$ è costante.
Sia $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con $\Pi(t)$, ove $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{u}_1(t)$ è perpendicolare a $\Pi(t)$ per ogni t; inoltre sia $\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{e}_1$. Qui O denota l'origine del sistema di riferimento fisso. Siano (ξ_i) le coordinate associate a $\mathcal{S}$.
Il centro C dell'asta è vincolato alla retta solidale con $\Pi(t)$

$$\xi_3 = \xi_2 \,, \qquad \xi_1 = 0 \,.$$

Sull'asta agisce la forza peso diretta nel verso negativo dell'asse x_3.

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Determinare le eventuali posizioni di equilibrio relative a $\Pi(t)$.

9. [19/7/2006 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza di raggio variabile $r(t)$ data da

$$x_1^2 + x_2^2 = r(t)^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Qui dunque $r \in C^1(\boldsymbol{R})$ è un'assegnata funzione con $r(t) > 0$ per ogni t.
Il punto è soggetto alla forza peso, diretta nel verso negativo dell'asse x_1.
Scrivere le equazioni di Lagrange.

10. [19/7/2006 (ex)II] Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata a muoversi sul piano ruotante $\Pi(t)$ di equazione

$$-x_1 \cos(\omega t) + x_2 \sin(\omega t) = 0 \,,$$

ove $\omega > 0$ è costante.
Sia $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ un sistema di riferimento solidale con $\Pi(t)$, ove $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{u}_1(t)$ è perpendicolare a $\Pi(t)$ per ogni t; inoltre sia $\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{e}_1$. Qui O denota l'origine del sistema di riferimento fisso. Siano (ξ_i) le coordinate associate a $\mathcal{S}$.
Il centro C dell'asta è vincolato alla retta solidale con $\Pi(t)$

$$\xi_3 = -\xi_2 \,, \qquad \xi_1 = 0 \,.$$

Sull'asta agisce la forza peso diretta nel verso positivo dell'asse x_3.

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Determinare le eventuali posizioni di equilibrio relative a $\Pi(t)$.

11. [19/7/2006 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla circonferenza di raggio variabile $r(t)$ data da

$$x_1^2 + x_2^2 = r(t)^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Qui dunque $r \in C^1(\boldsymbol{R})$ è un'assegnata funzione con $r(t) > 0$ per ogni t.
Il punto è soggetto alla forza peso, diretta nel verso positivo dell'asse x_2.
Scrivere le equazioni di Lagrange.

12. [22/9/2006 (ex)I] Un'asta rigida di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere su un piano ruotante, con velocità angolare di modulo costante $\omega > 0$, intorno all'asse fisso verticale x_3.
Un estremo A dell'asta è fisso su tale asse, mentre l'altro B è richiamato da una forza elastica di costante $k > 0$ e centro un punto C solidale con il piano ruotante.
Se denotiamo con $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2)$ un sistema di riferimento solidale con tale piano, in modo che $O \equiv A$, $\boldsymbol{u}_3 \equiv \boldsymbol{e}_3$, e $\boldsymbol{u}_1$ sia sempre ortogonale al piano, si ha che

$$\overrightarrow{OC} = R\boldsymbol{u}_2 + R\boldsymbol{u}_3\,.$$

Sia inoltre $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{u}_3$ l'accelerazione di gravità.
Scrivere le equazioni di moto dell'asta, e trovare una condizione su m, L, R, ω, k che permetta di avere una configurazione di equilibrio relativo per l'asta quando questa è orizzontale.

13. [13/12/2006 (ex)I] Sia $(O, \boldsymbol{e}_i)$ il sistema di riferimento fisso, e sia

$$\overrightarrow{OP} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_3\boldsymbol{e}_3\,,$$

ove P è un punto di massa m. P è vincolato a una circonferenza di raggio R e centro A, giacente sul piano $x_2 = 0$.
A sua volta, A è vincolato ad appartenere all'asse x_3, ma è mobile su tale asse, con moto

$$\overrightarrow{OA} = -ct^2\boldsymbol{e}_3\,,$$

con c costante positiva.
Su P agisce la forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange di P.

14. [26/3/2007 (ex)I] Due punti materiali P_1 e P_2 entrambi di massa m sono vincolati a una circonferenza liscia di raggio R e centro O, che ruota intorno a un suo diametro fisso AB con velocità angolare costante $\omega > 0$.

Sui punti P_1 e P_2 agiscono le forze:

$$\text{su } P_1 : \qquad \boldsymbol{F}_1 = k \left| \overrightarrow{P_1P_2} \right|^2 \overrightarrow{P_1P_2} \,;$$
$$\text{su } P_2 : \qquad \boldsymbol{F}_2 = k \left| \overrightarrow{P_1P_2} \right|^2 \overrightarrow{P_2P_1} \,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Scrivere le equazioni che danno le posizioni di equilibrio relativo al piano della circonferenza.

15. [4/7/2007 (ex)I] Un punto P è vincolato alla retta mobile r data da

$$r(t) = \{ s\boldsymbol{u}(t) \mid s \in \boldsymbol{R} \} \,,$$

ove

$$\boldsymbol{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \big(\boldsymbol{u}_1(t) + \boldsymbol{u}_2(t) + \boldsymbol{u}_3(t) \big) \,,$$

e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2(t) &= -\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3(t) &= \boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

con $\omega > 0$ costante.
Su P agiscono il peso, nel verso negativo dell'asse x_3, e la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{AP} \,,$$

con k costante positiva, ove A è il punto di $r(t)$ corrispondente a $s = L > 0$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
- Determinare le eventuali posizioni di equilibrio di P rispetto a r.

16. [4/7/2007 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$, e ad avere l'estremo A mobile secondo la legge

$$\overrightarrow{OA}(t) = R\cos\alpha(t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin\alpha(t)\boldsymbol{e}_2 \,,$$

ove $\alpha \in C^2(\boldsymbol{R})$ è una funzione assegnata, con $\alpha(0) = 0$.
L'asta è anche sottoposta alla forza peso, che agisce nel verso negativo dell'asse x_2.

- Scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema.

- Trovare, nella forma di un'equazione differenziale, la condizione che deve soddisfare α affinché siano possibili moti in cui $\overrightarrow{AB}$ si mantiene parallelo a $\overrightarrow{OA}$.

17. [4/7/2007 (ex)I] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare rispetto a quello fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$ data da $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_3$, con $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t.
Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva solidale con $\mathcal{S}$

$$\gamma : \begin{cases} x_3 = a \operatorname{arctg} bx_2 \,, \\ x_1 = 0 \,, \end{cases}$$

con a, b costanti positive (qui le x_i indicano le coordinate in $\mathcal{S}$).
Su P agisce la forza peso nel verso negativo di x_3.
Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.

18. [4/7/2007 (ex)II] Un punto P è vincolato alla retta mobile r data da

$$r(t) = \{ s\boldsymbol{u}(t) \mid s \in \boldsymbol{R} \} \,,$$

ove

$$\boldsymbol{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \big(\boldsymbol{u}_1(t) + \boldsymbol{u}_2(t) + \boldsymbol{u}_3(t) \big) \,,$$

e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1(t) &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2(t) &= -\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3(t) &= \boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

con $\omega > 0$ costante.
Su P agiscono il peso, nel verso negativo dell'asse x_3, e la forza

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{AP} \,,$$

con k costante positiva, ove A è il punto di $r(t)$ corrispondente a $s = -L$, $L > 0$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.
- Determinare le eventuali posizioni di equilibrio di P rispetto a r.

19. [4/7/2007 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$, e ad avere l'estremo A mobile secondo la legge

$$\overrightarrow{OA}(t) = R \cos \alpha(t) \boldsymbol{e}_1 + R \sin \alpha(t) \boldsymbol{e}_2 \,,$$

ove $\alpha \in C^2(\boldsymbol{R})$ è una funzione assegnata, con $\alpha(0) = 0$.
L'asta è anche sottoposta alla forza peso, che agisce nel verso negativo dell'asse x_1.

- Scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema.
- Trovare, nella forma di un'equazione differenziale, la condizione che deve soddisfare α affinché siano possibili moti in cui l'angolo tra $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OA}$ sia sempre uguale a $\pi/2$.

20. [4/7/2007 (ex)II] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ha velocità angolare rispetto a quello fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$ data da $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_3$, con $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t.
Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva solidale con $\mathcal{S}$

$$\gamma : \begin{cases} x_2 = a \operatorname{arctg} bx_3 \,, \\ x_1 = 0 \,, \end{cases}$$

con a, b costanti positive (qui le x_i indicano le coordinate in $\mathcal{S}$).
Su P agisce la forza peso nel verso negativo di x_3.
Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.

21. [19/7/2007 (ex)I] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega \boldsymbol{u}_3$, con $\omega > 0$ costante, rispetto al sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$. Si prenda $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t.
Al piano ruotante $x_1 = 0$ (qui le x_i denotano le coordinate in $\mathcal{S}$) è vincolata un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m.
L'asta è sottoposta alla forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{u}_1$$

(quindi ortogonale all'asta medesima), applicata all'estremo B, con λ costante positiva.
Scrivere le equazioni di Lagrange dell'asta.

22. [19/7/2007 (ex)II] Un sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega \boldsymbol{u}_3$, con $\omega > 0$ costante, rispetto al sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$. Si prenda $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t.
Al piano ruotante $x_1 = 0$ (qui le x_i denotano le coordinate in $\mathcal{S}$) è vincolata un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m.
L'asta è sottoposta alla forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda(t) \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{u}_1$$

(quindi ortogonale all'asta medesima), applicata all'estremo A, con $\lambda \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ funzione assegnata del tempo.

Scrivere le equazioni di Lagrange dell'asta.

23. [17/9/2007 (ex)I] Un piano mobile $\Pi(t)$ ha equazione nel sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$

$$x_1 \cos \omega t + x_2 \sin \omega t + x_3 = 0 \,.$$

Si tratta dunque di un piano passante per l'origine e con normale

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \omega t, \sin \omega t, 1) \,.$$

Un punto materiale P di massa m è vincolato a $\Pi(t)$ e sottoposto alla forza peso, diretta nel verso negativo dell'asse x_3.
Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.

24. [17/9/2007 (ex)II] Un piano mobile $\Pi(t)$ ha equazione nel sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$

$$x_1 \cos \omega t + x_2 + x_3 \sin \omega t = 0 \,.$$

Si tratta dunque di un piano passante per l'origine e con normale

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \omega t, 1, \sin \omega t) \,.$$

Un punto materiale P di massa m è vincolato a $\Pi(t)$ e sottoposto alla forza peso, diretta nel verso positivo dell'asse x_2.
Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.

25. [1/7/2008 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato a giacere sulla superficie mobile

$$x_3 = a \sin \bigl(b(x_1 - ct) \bigr) \,,$$

ove a, b, c sono costanti positive.
P è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 \,,$$

e alla forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP} \,,$$

ove $k > 0$ è costante, e O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Scrivere le equazioni di Lagrange del moto, e riconoscere che non si possono avere moti uniformi (cioè con accelerazione nulla nel sistema di riferimento fisso).

26. [1/7/2008 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato a giacere sulla superficie mobile

$$x_3 = a \cos \bigl(b(x_2 - ct) \bigr) \,,$$

ove a, b, c sono costanti positive.
P è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,,$$

e alla forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP}\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Scrivere le equazioni di Lagrange del moto, e riconoscere che non si possono avere moti uniformi (cioè con accelerazione nulla nel sistema di riferimento fisso).

27. [18/7/2008 (ex)I] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\overrightarrow{\Omega O} = R\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

Qui ω, R sono costanti positive, e $(\Omega, \boldsymbol{e}_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Le coordinate in $\mathcal{S}$ si denotano con (x_i).
Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e massa m è vincolata ad avere il lato AD sull'asse (mobile) x_3, con A e D fissi rispetto a $\mathcal{S}$.
Al vertice B è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_B = k\boldsymbol{\nu}\,,$$

ove $\boldsymbol{\nu}$ è il versore normale alla lamina, e $k > 0$ è costante.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange della lamina.
2. Trovare per quali valori dei parametri si possono avere posizioni di equilibrio relativo.

28. [18/7/2008 (ex)II] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e

$$\overrightarrow{\Omega O} = R\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

Qui ω, R sono costanti positive, e $(\Omega, \boldsymbol{e}_i)$ è il sistema di riferimento fisso. Le coordinate in $\mathcal{S}$ si denotano con (x_i).
Una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e massa m è vincolata ad avere il lato AD sull'asse (mobile) x_3, con A e D fissi rispetto a $\mathcal{S}$.
Al centro G della lamina è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_G = k\boldsymbol{u}_2 \,,$$

ove $k > 0$ è costante.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange della lamina.
2. Dimostrare che per tutti i valori dei parametri si hanno posizioni di equilibrio relativo.

29. [12/9/2008 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla sfera mobile

$$(x_1 - R\cos\omega t)^2 + (x_2 - R\sin\omega t)^2 + x_3^2 = R^2 \,,$$

ove $R > 0$ e $\omega > 0$ sono costanti.
Su P agisce la forza peso

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3 \,.$$

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Trovare per P le posizioni di equilibrio relative al sistema di riferimento mobile $(C, \boldsymbol{u}_i)$, ove C è il centro della sfera, e

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{OC}}{R} \,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3 \,.$$

30. [12/9/2008 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla sfera mobile

$$(x_1 - L\cos\omega t)^2 + x_2^2 + (x_3 - L\sin\omega t)^2 = L^2 \,,$$

ove $L > 0$ e $\omega > 0$ sono costanti.
Su P agisce la forza peso

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_2 \,.$$

- Scrivere le equazioni di Lagrange.
- Trovare per P le posizioni di equilibrio relative al sistema di riferimento mobile $(C, \boldsymbol{u}_i)$, ove C è il centro della sfera, e

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overrightarrow{OC}}{L} \,, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3 \,.$$

31. [12/1/2009 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$x_3 = \alpha \sin(\beta x_1) \,, \qquad x_1 \in \boldsymbol{R} \,,$$

sul piano ruotante

$$\xi_1 \sin \omega t - \xi_2 \cos \omega t = 0 \,.$$

Qui α, β, ω sono costanti positive, $(O, \boldsymbol{e}_i)$ è il sistema di riferimento fisso, con coordinate ξ_i, e $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ è il sistema di riferimento mobile solidale con il piano ruotante, con coordinate x_i. $\mathcal{S}$ è scelto in modo che $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t, e che $\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{u}_2(0) = \boldsymbol{e}_2$, per $t = 0$.
Sul punto agisce il peso, diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.
- Supponendo che il punto parta da fermo nell'origine O, dimostrare che si ha $x_1(t) < 0$ almeno per un intervallo opportuno $(0, \bar{t})$.

32. [12/1/2009 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere l'estremo A sull'asse fisso x_1, e a giacere sul piano verticale $x_3 = 0$. Inoltre l'estremo A è soggetto al vincolo

$$x_{1A} = \frac{\alpha}{2} t^2 \,,$$

con $\alpha > 0$ costante.
Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_2.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Supponendo $\alpha = g$, tracciare il diagramma di fase del moto.

33. [12/1/2009 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$x_3 = -\alpha \sin x_1 \,, \qquad x_1 \in \boldsymbol{R} \,,$$

sul piano ruotante

$$\xi_1 \sin \omega t - \xi_2 \cos \omega t = 0 \,.$$

Qui α, ω sono costanti positive, $(O, \boldsymbol{e}_i)$ è il sistema di riferimento fisso, con coordinate ξ_i, e $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ è il sistema di riferimento mobile solidale con il piano ruotante, con coordinate x_i. $\mathcal{S}$ è scelto in modo che $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t, e che $\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{u}_2(0) = \boldsymbol{e}_2$, per $t = 0$.
Sul punto agisce il peso, diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange del punto.

- Supponendo che il punto parta da fermo nell'origine O, dimostrare che si ha $x_1(t) > 0$ almeno per un intervallo opportuno $(0, \bar{t})$.

34. [12/1/2009 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza L e massa m è vincolata ad avere l'estremo A sull'asse fisso x_1, e a giacere sul piano verticale $x_2 = 0$. Inoltre l'estremo A è soggetto al vincolo

$$x_{1A} = -\frac{\alpha}{2} t^2 \,,$$

con $\alpha > 0$ costante.
Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_3.

- Scrivere l'equazione di moto.
- Supponendo $\alpha = g$, tracciare il diagramma di fase del moto.

35. [12/2/2009 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere l'estremo A sull'ellisse ruotante

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

ove le coordinate x_i sono relative al sistema mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

L'asta è anche vincolata a giacere sul piano dell'ellisse.
Qui L, a, b sono costanti positive, e O è anche l'origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Si calcolino le componenti lagrangiane delle forze agenti sull'asta nel sistema $\mathcal{S}$.

36. [12/2/2009 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata ad avere il centro C sull'ellisse ruotante

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

ove le coordinate x_i sono relative al sistema mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

L'asta è anche vincolata a giacere sul piano dell'ellisse.
Qui L, a, b sono costanti positive, e O è anche l'origine del sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Si calcolino le componenti lagrangiane delle forze agenti sull'asta nel sistema $\mathcal{S}$.

37. [12/6/2009 (ex)I] Due punti P_1 e P_2 entrambi di massa m sono vincolati come segue:

$$
\begin{gathered}
x_{2P_1} = 0\,, \qquad x_{2P_2} = 0\,; \\
x_{3P_1} = \frac{a}{x_{1P_1}}\,, \quad x_{1P_1} > 0\,; \qquad x_{3P_2} = -\frac{a}{x_{1P_2}}\,, \quad x_{1P_2} < 0\,;
\end{gathered}
$$

qui $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, e (x_i) indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos \omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \sin \omega t\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin \omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \cos \omega t\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}
$$

con $\omega > 0$ costante.
Sui punti agiscono il peso, diretto nel verso negativo dell'asse x_3, e le forze elastiche

$$
\boldsymbol{F}_{P_1} = -k\overrightarrow{P_2P_1}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{P_2} = -k\overrightarrow{P_1P_2}\,,
$$

ove $k > 0$.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema.
2. Si assuma anche $k > m\omega^2$. Allora moti in cui la distanza di uno dei due punti da O divenga illimitata sono impossibili, in uno dei due casi $a > 0$ o $a < 0$. Trovare in quale.

38. [12/6/2009 (ex)II] Due punti P_1 e P_2 entrambi di massa m sono vincolati come segue:

$$
\begin{gathered}
x_{2P_1} = 0\,, \qquad x_{2P_2} = 0\,; \\
x_{3P_1} = \frac{a}{x_{1P_1}^2}\,, \quad x_{1P_1} > 0\,; \qquad x_{3P_2} = \frac{a}{x_{1P_2}^2}\,, \quad x_{1P_2} < 0\,;
\end{gathered}
$$

qui $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, e (x_i) indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos \omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \sin \omega t\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin \omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \cos \omega t\, \boldsymbol{e}_2\,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}
$$

con $\omega > 0$ costante.
Sui punti agiscono il peso, diretto nel verso negativo dell'asse x_3, e le forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = -k\overrightarrow{P_2P_1}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{P_2} = -k\overrightarrow{P_1P_2}\,,$$

ove $k > 0$.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema.
2. Si assuma anche $k > m\omega^2$. Allora moti in cui la distanza di uno dei due punti da O divenga illimitata sono impossibili, in uno dei due casi $a > 0$ o $a < 0$. Trovare in quale.

39. [11/9/2009 (ex)I] Un punto P di massa M è vincolato alla superficie mobile liscia data, nel sistema di riferimento fisso (O, x_i), da

$$S(t) = \big\{(r\cos(\varphi+\omega t), r\sin(\varphi+\omega t), \alpha r^2 \sin(2\varphi+\omega t)) \mid r > 0\,, \varphi \in (-\pi,\pi)\big\}\,.$$

Qui $\omega > 0$ e $\alpha > 0$ sono costanti.
Sul punto agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_3.

- Scrivere la lagrangiana del punto.
- Scrivere i dati iniziali per le coordinate lagrangiane corrispondenti a:
  - velocità iniziale diretta lungo $\boldsymbol{e}_3$;
  - $x_1(0) = \rho_0 > 0$, $x_2(0) = 0$.

40. [11/9/2009 (ex)II] Un punto P di massa M è vincolato alla superficie mobile liscia data, nel sistema di riferimento fisso (O, x_i), da

$$S(t) = \big\{(r\sin(\varphi+\omega t), r\cos(\varphi+\omega t), \alpha r^2 \sin(2\varphi+\omega t)) \mid r > 0\,, \varphi \in (-\pi,\pi)\big\}\,.$$

Qui $\omega > 0$ e $\alpha > 0$ sono costanti.
Sul punto agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_3.

- Scrivere la lagrangiana del punto.
- Scrivere i dati iniziali per le coordinate lagrangiane corrispondenti a:
  - velocità iniziale diretta lungo $\boldsymbol{e}_3$;
  - $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = \rho_0 > 0$.

41. [20/11/2009 (ex)I] Un'asta di massa M e lunghezza $2R$ è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$, e ad avere l'estremo A mobile con legge assegnata

$$\overrightarrow{OA} = L\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1\,,$$

ove $(O, \boldsymbol{e}_i)$ è il sistema fisso e $L > 0$, $\alpha > 0$ sono costanti.
Sull'asta agiscono il peso, diretto nel verso negativo dell'asse x_2, e la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_B = -k\overrightarrow{OB}\,,$$

ove $k > 0$ è costante.
Scrivere le equazioni di Lagrange dell'asta.

42. [25/1/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato al piano ruotante

$$\Pi(t): \qquad -x_1 \sin\omega t + x_2 \cos\omega t = 0\,,$$

ed è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_2\,.$$

All'istante iniziale si ha

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \omega R\boldsymbol{e}_2 + \beta\boldsymbol{e}_3\,.$$

Trovare una condizione sulle costanti ω, m, $R > 0$, e α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ che garantisca che $x_{2P} > 0$ per $0 < t < \pi/\omega$.

43. [25/1/2010 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato al piano ruotante

$$\Pi(t): \qquad -x_1 \sin\omega t + x_2 \cos\omega t = 0\,,$$

ed è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_1\,.$$

All'istante iniziale si ha

$$\overrightarrow{OP}(0) = R\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \omega R\boldsymbol{e}_2 + \beta\boldsymbol{e}_3\,.$$

Trovare una condizione sulle costanti ω, m, $R > 0$, e α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ che garantisca che $x_{2P} > 0$ per $0 < t < \pi/\omega$.

44. [8/7/2010 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato a un piano mobile $\Pi(t)$ che ruota intorno a un suo asse r orizzontale con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$. Supponiamo che r coincida con l'asse fisso x_1 e che $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_1$.
Sul punto agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{P'P}\,,$$

ove P' è la proiezione ortogonale di P su r. Qui k e ω sono costanti positive.

1. Scrivere le equazioni di moto.
2. Determinare le condizioni iniziali per cui il moto è periodico, sapendo che all'istante iniziale Π è orizzontale.

45. [7/9/2010 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato a una circonferenza γ di raggio R, che è vincolata a sua volta a ruotare intorno al suo diametro verticale AB. I punti A e B sono sia fissi che solidali con γ.
La velocità di rotazione di γ è assegnata come

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t)\frac{\overrightarrow{AB}}{2R}\,,$$

con $\omega \in C^1(\boldsymbol{R})$.
Scrivere l'equazione di moto del punto.

46. [17/7/2014 (ex)I] Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere sul piano mobile $\Pi(t)$ la cui equazione è

$$-x_1\sin(\alpha t) + x_2\cos(\alpha t) = 0\,,$$

ove $\alpha > 0$ è una costante assegnata e (x_i) denota le coordinate nel sistema fisso. Il centro C dell'asta è vincolato a giacere sul piano fisso $x_3 = 0$.
Sull'asta agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(P) = \lambda\overrightarrow{CP} \times \boldsymbol{u}\,,$$

ove $\lambda > 0$ è una costante assegnata, P denota il generico punto dell'asta e

$$\boldsymbol{u} = -\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_2$$

denota la normale al piano $\Pi(t)$. Qui $(\boldsymbol{e}_h)$ è la base fissa.
Scrivere le equazioni di Lagrange e determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\Pi(t)$.

47. [13/1/2015 (ex)I] Consideriamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e per $\alpha > 0$ dato

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(x_1, t) = x_1\boldsymbol{u}_1(t) + \lambda x_1^k\boldsymbol{u}_3(t)\,, \qquad x_1 > 0\,,$$

ove λ, $k > 0$. Qui le (x_i) denotano le coordinate nel sistema $\mathcal{S}$.
Sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di moto del punto.
- Determinare, se esistono, le posizioni di equilibrio di P in $\mathcal{S}$ e studiarne la stabilità.

48. [13/1/2015 (ex)II] Consideriamo il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$ ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e per $\alpha > 0$ dato

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

Un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva

$$\boldsymbol{\Psi}(x_1, t) = \lambda x_3^k \boldsymbol{u}_1(t) + x_3 \boldsymbol{u}_3(t)\,, \qquad x_3 > 0\,,$$

ove λ, $k > 0$. Qui le (x_i) denotano le coordinate nel sistema $\mathcal{S}$.
Sul punto agisce la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di moto del punto.
- Determinare, se esistono, le posizioni di equilibrio di P in $\mathcal{S}$ e studiarne la stabilità.

49. [2/7/2015 (ex)I] Una lamina quadrata $ABCD$ di lato $2L$ e massa M è vincolata in modo che i due vertici consecutivi A e B sono dati da

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega A} &= R\boldsymbol{u}_1(t) + L\boldsymbol{u}_2(t) - \frac{c}{2}t^2\boldsymbol{u}_3(t)\,,\\ \overrightarrow{\Omega B} &= R\boldsymbol{u}_1(t) - L\boldsymbol{u}_2(t) - \frac{c}{2}t^2\boldsymbol{u}_3(t)\,,\end{aligned}$$

ove la terna $(\boldsymbol{u}_i)$ è data da

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.\end{aligned}$$

Qui α, c, $R > 0$ sono assegnati e Ω è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Scrivere le equazioni di Lagrange della lamina nel sistema $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_i))$ ove

$$\overrightarrow{\Omega O} = -\frac{c}{2}t^2\boldsymbol{u}_3(t)\,.$$

50. [12/1/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza mobile

$$x_1^2 + (x_2 - \alpha\sin(\lambda t))^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Qui α, λ, $R > 0$ sono costanti assegnate.
Determinare l'equazione di moto di P in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana.

51. [12/1/2015 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla circonferenza mobile

$$(x_1 - \alpha \cos(\lambda t))^2 + x_2^2 = R^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,.$$

Qui α, λ, $R > 0$ sono costanti assegnate.
Determinare l'equazione di moto di P in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana.

52. [9/2/2016 (ex)I] La terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ del sistema di riferimento $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$ ha velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega \boldsymbol{u}_3(t) = \omega \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie solidale con $\mathcal{S}$

$$y_3 = f(r) g(\varphi) \,, \qquad r > 0 \,,$$

ove (y_h) sono le coordinate in $\mathcal{S}$, e (r, φ) le relative coordinate polari nel piano $y_3 = 0$. Si assuma sempre $r > 0$.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k \overrightarrow{P'P} = -k y_3 \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove P' è la proiezione di P su $y_3 = 0$. Qui ω, $k > 0$ sono costanti assegnate.

- Scrivere la funzione lagrangiana del moto.
- Trovare le posizioni di equilibrio, relativo a $\mathcal{S}$, assumendo che

$$g(\varphi) = 2 + \cos \varphi \,, \qquad f(r) = r^2 \,.$$

53. [9/2/2016 (ex)II] La terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ del sistema di riferimento $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$ ha velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega \boldsymbol{u}_3(t) = \omega \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie solidale con $\mathcal{S}$

$$y_3 = f(r) g(\varphi) \,, \qquad r > 0 \,,$$

ove (y_h) sono le coordinate in $\mathcal{S}$, e (r, φ) le relative coordinate polari nel piano $y_3 = 0$. Si assuma sempre $r > 0$.
Sul punto agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{P'P} = k y_3 \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove P' è la proiezione di P su $y_3 = 0$. Qui ω, $k > 0$ sono costanti assegnate.

- Scrivere la funzione lagrangiana del moto.
- Trovare le posizioni di equilibrio, relativo a $\mathcal{S}$, assumendo che

  $$g(\varphi) = 2 + \cos\varphi \,, \qquad f(r) = r^{-2} \,,$$

  e discuterne la stabilità.

54. [7/6/2016 (ex)I] Quattro punti materiali A, B, C, D di uguale massa m sono vincolati ad appartenere al piano ruotante $\mathit{\Pi}(t)$ di equazione

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0 \,,$$

ove le x_i sono le coordinate nel sistema fisso. Inoltre $ABCD$ è un quadrato di centro l'origine O del sistema fisso, di lato di lunghezza variabile positiva, con i lati AD e BC paralleli all'asse x_3.
Su ciascun punto $X \in \{A, B, C, D\}$ agisce la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_X = -k\overrightarrow{YX} - k\overrightarrow{ZX} \,,$$

ove Y e Z sono i due vertici adiacenti a X. Sui punti agisce anche la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$.
Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema e dare una condizione sui parametri positivi k e α perché il lato del quadrato si mantenga limitato durante tutti i moti.

55. [7/6/2016 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ è formata da due metà omogenee, una AC di massa m_1 e una CB di massa $m_2 > m_1$, ove C è il centro dell'asta.
L'asta è vincolata ad avere il centro C mobile con legge

$$\overrightarrow{OC} = R\cos(\alpha t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha t)\boldsymbol{e}_2 \,,$$

ove R, $\alpha > 0$ sono costanti date. Qui $(O, (\boldsymbol{e}_h))$ è il sistema di riferimento fisso.
Si scrivano le equazioni di moto dell'asta nel sistema mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

56. [12/7/2016 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$\Pi : \quad -x_1 \cos(\alpha t) + x_2 \sin(\alpha t) = 0 \, .$$

Inoltre l'estremo A deve appartenere alla curva

$$y_3 = \lambda y_1^c \, , \quad y_1 > 0 \, ; \qquad y_2 = 0 \, .$$

Qui λ, $c > 0$ sono parametri assegnati e $\mathcal{S} = (O, (y_h))$ è un sistema di riferimento mobile tale che $\Pi = \{y_2 = 0\}$, e gli assi x_3 e y_3 coincidono.
Sull'asta agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.
Si scrivano le equazioni di moto.

57. [17/01/2017 (ex)I] Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere nel piano mobile $\Pi(t)$ di equazione

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0 \, ;$$

qui $\alpha > 0$ è costante.
Sull'asta agiscono le forze

$$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{OA} \, , \qquad \boldsymbol{F}_{P_0} = -k\overrightarrow{OP_0} \, ,$$

applicate nei punti indicati, ove

$$\overrightarrow{AP_0} = r \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \, .$$

Qui r, $k > 0$ sono costanti assegnate e O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Scrivere la lagrangiana del moto.

58. [17/01/2017 (ex)II] Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere nel piano mobile $\Pi(t)$ di equazione

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0 \, ;$$

qui $\alpha > 0$ è costante.
Sull'asta agiscono le forze

$$\boldsymbol{F}_B = k\overrightarrow{OB} \, , \qquad \boldsymbol{F}_{P_0} = -k\overrightarrow{OP_0} \, ,$$

applicate nei punti indicati, ove

$$\overrightarrow{AP_0} = r \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \, .$$

Qui r, $k > 0$ sono costanti assegnate e O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Scrivere la lagrangiana del moto.

59. [8/02/2017 (ex)I] Un'asta AB di massa M e lunghezza $2L$ è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0\,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante. Inoltre l'estremo A è vincolato ad appartenere alla circonferenza solidale al piano

$$(y_1 - R)^2 + y_3^2 = R^2\,, \qquad y_2 = 0\,,$$

ove $\mathcal{S} = (O, (y_h))$ è il sistema di riferimento mobile dato da O origine del sistema fisso e base

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sull'asta agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.
Si determini il potenziale lagrangiano del moto in $\mathcal{S}$, e si dimostri che l'asta non può avere posizioni di equilibrio relativo in cui è orizzontale.

60. [8/02/2017 (ex)II] Un'asta AB di massa m e lunghezza L è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0\,.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante. Inoltre l'estremo A è vincolato ad appartenere alla circonferenza solidale al piano

$$(y_1 + R)^2 + y_3^2 = R^2\,, \qquad y_2 = 0\,,$$

ove $\mathcal{S} = (O, (y_h))$ è il sistema di riferimento mobile dato da O origine del sistema fisso e base

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sull'asta agisce il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$.
Si determini il potenziale lagrangiano del moto in $\mathcal{S}$, e si dimostri che l'asta non può avere posizioni di equilibrio relativo in cui è orizzontale.

61. [06/06/2017 (ex)I] Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e densità variabile data da

$$\rho(P) = \rho_0 |\overrightarrow{AP}| \,,$$

con $\rho_0 > 0$ costante, è vincolata a giacere sul piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0 \,,$$

ove $\alpha > 0$ è una costante assegnata.
Si scriva la lagrangiana del moto.

62. [23/07/2018 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata al piano ruotante

$$x_1 \sin(\alpha t) - x_2 \cos(\alpha t) = 0 \,.$$

Su di essa agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e una forza elastica applicata in A

$$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{OA} \,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso $(O, (x_i))$. Qui α, k sono costanti positive assegnate.
Scrivere la lagrangiana del sistema.

63. [15/01/2019 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato al cilindro mobile

$$y_1^2 + y_2^2 = R^2 \,,$$

ove le (y_i) sono le coordinate nel sistema $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, con $\boldsymbol{X}_O(t) = L\boldsymbol{u}_1(t)$, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP} \,.$$

Qui L, R, α, k sono costanti positive assegnate.
Scegliere come coordinate lagrangiane $\varphi \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ e $z \in \boldsymbol{R}$ tali che

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{u}_2 + z\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange e determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$.

64. [15/01/2019 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato al cilindro mobile

$$y_1^2 + y_2^2 = L^2 \,,$$

ove le (y_i) sono le coordinate nel sistema $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, con $\boldsymbol{X}_O(t) = R\boldsymbol{u}_2(t)$, e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{OP} \,.$$

Qui L, R, α, k sono costanti positive assegnate.
Scegliere come coordinate lagrangiane $\varphi \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ e $z \in \boldsymbol{R}$ tali che

$$\overrightarrow{OP} = L\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + L\sin\varphi \boldsymbol{u}_2 + z\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange e determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$.

65. [11/02/2019 (ex)I] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Denotiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$ e con γ la circonferenza solidale a $\mathcal{S}$

$$(y_1 - c)^2 + y_3^2 = R^2 \,, \qquad y_2 = 0 \,.$$

Un punto materiale P di massa m è vincolato a γ, ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda y_3 \boldsymbol{T} \,,$$

ove $\boldsymbol{T}$ è il versore tangente a γ. Qui α, c, R, λ sono costanti positive assegnate.
Scrivere le equazioni di Lagrange di P.

66. [11/02/2019 (ex)I] Si consideri l'elica γ data da

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (R\cos(\alpha s) \,, R\sin(\alpha s) \,, hs) \,,$$

con R, α, $h > 0$ assegnati in modo che $s \in \boldsymbol{R}$ sia l'ascissa curvilinea.
Si consideri poi il sistema $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$, ove $\mathcal{M} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca di γ e O è il punto dato da

$$\boldsymbol{X}_O(t) = \boldsymbol{\psi}(s_O(t)) \,,$$

con $s_O \in C^2(\boldsymbol{R})$ assegnata.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a stare sull'asse coordinato di $\mathcal{S}$ parallelo a $\boldsymbol{T}$.
Scegliere come coordinata lagrangiana per P la significativa coordinata cartesiana in $\mathcal{S}$ e calcolare la relativa componente lagrangiana della forza di trascinamento per P in $\mathcal{S}$.
Si ricordi che

$$\boldsymbol{T} = (-R\alpha \sin(\alpha s)\,, R\alpha\cos(\alpha s)\,, h)\,, \quad \boldsymbol{N} = -(\cos(\alpha s)\,, \sin(\alpha s)\,, 0)\,,$$
$$\boldsymbol{B} = (h\sin(\alpha s)\,, -h\cos(\alpha s)\,, R\alpha)\,, \quad k(s) = R\alpha^2\,, \quad \tau(s) = -\alpha h\,.$$

67. [11/02/2019 (ex)II] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Denotiamo con (y_i) le coordinate in $\mathcal{S}$ e con γ la circonferenza solidale a $\mathcal{S}$

$$(y_1 + c)^2 + y_3^2 = R^2\,, \qquad y_2 = 0\,.$$

Un punto materiale P di massa m è vincolato a γ, ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \lambda y_1 \boldsymbol{T}\,,$$

ove $\boldsymbol{T}$ è il versore tangente a γ. Qui α, c, R, λ sono costanti positive assegnate.
Scrivere le equazioni di Lagrange di P.

68. [11/02/2019 (ex)II] Si consideri l'elica γ data da

$$\boldsymbol{\psi}(s) = (R\cos(\alpha s)\,, R\sin(\alpha s)\,, hs)\,,$$

con R, α, $h > 0$ assegnati in modo che $s \in \boldsymbol{R}$ sia l'ascissa curvilinea.
Si consideri poi il sistema $\mathcal{S} = (O, \mathcal{M})$, ove $\mathcal{M} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ è la terna intrinseca di γ e O è il punto dato da

$$\boldsymbol{X}_O(t) = \boldsymbol{\psi}(s_O(t))\,,$$

con $s_O \in C^2(\boldsymbol{R})$ assegnata.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a stare sull'asse coordinato di $\mathcal{S}$ parallelo a $\boldsymbol{N}$.
Scegliere come coordinata lagrangiana per P la significativa coordinata cartesiana in $\mathcal{S}$ e calcolare la relativa componente lagrangiana della forza di trascinamento per P in $\mathcal{S}$.

Si ricordi che

$$\boldsymbol{T} = (-R\alpha\sin(\alpha s)\,, R\alpha\cos(\alpha s)\,, h)\,, \quad \boldsymbol{N} = -(\cos(\alpha s)\,, \sin(\alpha s)\,, 0)\,,$$
$$\boldsymbol{B} = (h\sin(\alpha s)\,, -h\cos(\alpha s)\,, R\alpha)\,, \quad k(s) = R\alpha^2\,, \quad \tau(s) = -\alpha h\,.$$

69. [09/01/2020 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato al cilindro mobile di equazione

$$y_1^2 + y_3^2 = R^2\,,$$

ove (y_1, y_2, y_3) sono le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante.
Sul punto agisce il peso $-mg\boldsymbol{e}_3$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange.

70. [09/01/2020 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato al cilindro mobile di equazione

$$y_2^2 + y_3^2 = R^2\,,$$

ove (y_1, y_2, y_3) sono le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante.
Sul punto agisce la forza costante $k\boldsymbol{e}_3$, $k \neq 0$.

- Scrivere le equazioni di Lagrange.

71. [13/01/2020 (ex)I] Si consideri il sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e $\boldsymbol{X}_O$ è l'origine del sistema fisso. Le coordinate in $\mathcal{S}$ vengono denotate con (y_1, y_2, y_3).
Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante $y_2 = 0$; inoltre il centro di massa dell'asta è vincolato ad appartenere alla curva

$$y_3 = \beta y_1^p + \gamma\,, \qquad y_2 = 0\,, \qquad y_1 \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui α, β, $\gamma > 0$ e p è un intero positivo.
Sull'estremo A dell'asta è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_A = -k\overrightarrow{AA'}\,,$$

ove A' è la proiezione di A sull'asse y_1 e $k > 0$.

- Scrivere la lagrangiana dell'asta.
- Nel caso $p = 2$, trovare tutte le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ in cui AB si mantiene parallela a $\boldsymbol{u}_3$.

72. [13/01/2020 (ex)II] Si consideri il sistema mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

e $\boldsymbol{X}_O$ è l'origine del sistema fisso. Le coordinate in $\mathcal{S}$ vengono denotate con (y_1, y_2, y_3).
Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano ruotante $y_2 = 0$; inoltre il centro di massa dell'asta è vincolato ad appartenere alla curva

$$y_3 = \beta y_1^p\,, \qquad y_2 = 0\,, \qquad y_1 \in \boldsymbol{R}\,.$$

Qui α, $\beta > 0$ e p è un intero positivo.
Sull'estremo B dell'asta è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}_B = k\overrightarrow{BB'}\,,$$

ove B' è la proiezione di B sull'asse y_1 e $k > 0$.

- Scrivere la lagrangiana dell'asta.
- Nel caso $p = 2$, trovare tutte le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ in cui AB si mantiene parallela a $\boldsymbol{u}_3$.

73. [00/12/2022 (hw)I]
Il punto materiale $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$ è vincolato alla retta mobile r_1 e il punto materiale $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ è vincolato alla retta mobile r_2, ove r_1, r_2 sono date da

$$\begin{aligned} r_1: &\qquad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,; \\ r_2: &\qquad \lambda_1 = 0\,, \quad \lambda_3 = H\,. \end{aligned}$$

Qui $(\boldsymbol{\lambda})$ indica le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = 0$ per $t \in \boldsymbol{R}$ e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Su ciascun punto $\boldsymbol{X}_i$ agisce la forza elastica $\boldsymbol{F}_i$ data da

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2)\,.$$

Qui α, H, $k > 0$ sono costanti. Usare come coordinate lagrangiane $(s_1, s_2) \in \boldsymbol{R}^2$ con

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(s_1, s_2, t) = s_1 \boldsymbol{u}_1(t)\,, \qquad \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(s_1, s_2, t) = s_2 \boldsymbol{u}_2(t) + H \boldsymbol{u}_3(t)\,.$$

1. Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento fisso.

2. Scrivere l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.

3. Dimostrare che il potenziale lagrangiano in $\mathcal{S}$ esiste ed è:
$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = -\frac{k}{2}(s_1^2 + s_2^2 + H^2) + \frac{m_1}{2}\alpha^2 s_1^2 + \frac{m_2}{2}\alpha^2 s_2^2\,.$$

4. Si assuma $k \neq m_1\alpha^2$, $m_2\alpha^2$. A partire dal potenziale $U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}$ dato nel punto precedente determinare le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e determinarne la stabilità.

5. Si assuma $k > m_1\alpha^2$, $m_2\alpha^2$. Determinare se tutti i moti sono limitati (cioè se $|\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}| + |\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}| \le C$ per ogni t, con C costante dipendente dal moto).

6. Scrivere i vincoli nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) = 0$, ove
$$\boldsymbol{X}_i = \sum_{h=1}^{3} z_{3(i-1)+h}\boldsymbol{e}_h\,, \qquad i = 1\,,2\,.$$

74. [03/02/2023 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di centro G, massa m e raggio R è vincolata al piano mobile $y_2 = 0$, ove le y_i sono le coordinate nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, con $\boldsymbol{X}_O$ origine del sistema fisso e $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$, con

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{w}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

ove $\alpha > 0$ è una costante assegnata. Inoltre un punto solidale alla circonferenza $A \in \gamma$ è vincolato alla circonferenza mobile

$$y_1^2 + y_3^2 = L^2\,, \qquad y_2 = 0\,.$$

Sulla circonferenza γ non agiscono forze direttamente applicate.
Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi/2{,}3\pi/2) \times (-\pi/2{,}3\pi/2)$, ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_A^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta, t) &= L\cos\varphi \boldsymbol{w}_1(t) + L\sin\varphi \boldsymbol{w}_3(t)\,,\\
\boldsymbol{X}_G^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta, t) &= \boldsymbol{X}_A^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta, t) + R\cos\theta \boldsymbol{w}_1(t) + R\sin\theta \boldsymbol{w}_3(t)\,.
\end{aligned}$$

Si usi come sistema solidale alla circonferenza $(\boldsymbol{X}_G, \mathcal{M})$, con $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\theta\,\boldsymbol{w}_1 + \sin\theta\,\boldsymbol{w}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\theta\,\boldsymbol{w}_1 + \cos\theta\,\boldsymbol{w}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{w}_2\,.
\end{aligned}$$

1) Si calcoli la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}}$ della circonferenza relativa alla terna fissa $\mathcal{P} = (\boldsymbol{e}_h)$ (espressa in una terna qualsiasi).
2) Calcolare l'energia cinetica in forma lagrangiana della circonferenza γ relativa al sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Si calcoli la distribuzione della forza di trascinamento in $\mathcal{S}$ agente su γ, in forma lagrangiana, ossia la funzione vettoriale

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta, t, s)\,,$$

espressa nella base $\mathcal{N}$ di $\mathcal{S}$. Si noti che s deve essere una coordinata solidale a γ.
4) Calcolare il momento delle quantità di moto di polo G, relativo al sistema di riferimento fisso, in funzione delle coordinate lagrangiane e delle loro derivate in t (espresso in una base qualunque).
5) Sapendo che il potenziale lagrangiano della forza di trascinamento agente su γ è

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = \frac{m\alpha^2}{2}(L\cos\varphi + R\cos\theta)^2\,,$$

dimostrare che il sistema ha almeno 5 posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ (nel dominio di variabilità assegnato per (φ, θ)).
6) Si dia per noto il potenziale lagrangiano della forza di trascinamento agente su γ dato sopra. Si dimostri che nella posizione $(\varphi, \theta) = (0{,}0)$ di equilibrio relativo si possono definire le piccole oscillazioni (relative a $\mathcal{S}$), e se ne scriva il potenziale ridotto U^*.

75. [07/07/2023 (ex)I] Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m_1)$, $(\boldsymbol{X}_2, m_2)$ sono vincolati al piano mobile $\lambda_2 = 0$ del sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

ove $\alpha > 0$ è costante. Qui $\boldsymbol{\lambda}$ indica le coordinate in $\mathcal{S}$.
I punti sono soggetti ai vincoli ulteriori: $\boldsymbol{X}_1$ appartiene alla circonferenza solidale con $\mathcal{S}$, di centro $\boldsymbol{X}_O$, raggio $R > 0$ e giacente sul piano $\lambda_2 = 0$; $\boldsymbol{X}_2$ ha la stessa quota λ_3 di $\boldsymbol{X}_1$.
Sui due punti sono direttamente applicate le forze

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &= -k|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^2(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) \,, \quad \text{su } \boldsymbol{X}_1; \\ \boldsymbol{F}_2 &= -k|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2|^2(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1) \,, \quad \text{su } \boldsymbol{X}_2. \end{aligned}$$

Qui $k > 0$ è costante.
Si usino le coordinate lagrangiane $(\varphi, x) \in (-\pi/4, 7\pi/4) \times \boldsymbol{R}$ tali che

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(\varphi, t) = R\cos\varphi \boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\varphi \boldsymbol{u}_3(t) \,, \ \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(\varphi, x, t) = x\boldsymbol{u}_1(t) + R\sin\varphi \boldsymbol{u}_3(t) \,.$$

1) Determinare il potenziale lagrangiano del sistema di forze $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$.
2) Determinare l'energia cinetica lagrangiana nel sistema di riferimento fisso.
3) Le equazioni di Lagrange del sistema sono:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}[m_1 + m_2(\cos\varphi)^2] &= \sin\varphi[(m_2\dot{\varphi}^2 - m_1\alpha^2)\cos\varphi + kR^{-1}(R\cos\varphi - x)^3] \,, \\ m_2\ddot{x} &= m_2\alpha^2 x + k(R\cos\varphi - x)^3 \,. \end{aligned}$$

Dimostrare che esistono moti in cui φ è costante, ma x non lo è, determinando i possibili valori di φ.
4) Dimostrare che esistono almeno due diverse posizioni (φ_1, x_1) e (φ_2, x_2) di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$.
5) Si dimostri che tutti i moti sono limitati (da una costante dipendente dal moto stesso).
6) Se per le (nuove) coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q$ si ha

$$\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(q_1, q_2, t) = q_1\boldsymbol{u}_1(t) + q_2\boldsymbol{u}_3(t) \,,$$

completare la parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}$, specificando il dominio Q delle coordinate lagrangiane.

76. [02/02/2024 (ex)I] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante e $\boldsymbol{X}_O = 0$ origine del sistema di riferimento fisso. Denotiamo con (x_h) le coordinate nel sistema di riferimento fisso, e con (y_h) le coordinate in $\mathcal{S}$.
Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio alla parabola solidale con $\mathcal{S}$, di asse y_1,

$$y_2 = 0 \,, \qquad y_1 = \beta y_3^2 \,,$$

ove $\beta > 0$ è una costante. Sul punto agisce la forza peso

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Si usi come coordinata lagrangiana $z \in \boldsymbol{R}$ tale che

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(z, t) = \beta z^2 \boldsymbol{u}_1(t) + z \boldsymbol{u}_3(t) \,.$$

1) Si calcoli l'energia cinetica lagrangiana del sistema nel sistema di riferimento fisso.
2) Si calcoli il potenziale lagrangiano del sistema, relativo alle forze presenti nel sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Si determinino le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e se ne studi la stabilità.
4) Si calcoli la forza di Coriolis che agisce su $\boldsymbol{X}$ in un moto generico.
5) Si scrivano i vincoli nelle coordinate (x_h) del sistema di riferimento fisso, ossia come due equazioni

$$f_1(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \,.$$

6) Si scriva l'equazione di Lagrange del moto e si dimostri che se $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, allora $\dot{z}(t) < 0$ almeno in un intervallo $(0, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$ opportuno.

77. [05/07/2024 (ex)I] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ ove $\boldsymbol{X}_O = 0$ è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante. Indichiamo con (y_h) le coordinate in $\mathcal{S}$.
Due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m)$ e $(\boldsymbol{X}_2, m)$ di uguale massa sono vincolati a rimanere sul piano $y_2 = 0$ a uguale quota y_3, in modo che il punto $(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2)/2$ appartenga alla circonferenza solidale con $\mathcal{S}$ di equazioni

$$y_1^2 + y_3^2 = R^2 \,, \qquad y_2 = 0 \,,$$

con $R > 0$ costante.
I due punti si scambiano l'attrazione elastica

$$\boldsymbol{F}_1 = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) \,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = -k(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1) \,,$$

con $k > 0$ costante.
Si usi la parametrizzazione lagrangiana

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(s, \varphi) &= R\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{u}_3 + s\boldsymbol{u}_1 \,, \\ \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(s, \varphi) &= R\cos\varphi \boldsymbol{u}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{u}_3 - s\boldsymbol{u}_1 \,, \end{aligned}$$

con $(s, \varphi) \in (-\infty, +\infty) \times (-\pi/4, 7\pi/4)$.
1) Si scriva l'energia cinetica lagrangiana relativa a $\mathcal{S}$ del sistema.
2) Si scriva il potenziale lagrangiano relativo a $\mathcal{S}$ del sistema.
3) Si scrivano le equazioni di Lagrange e si determini se esistono moti in cui s è costante e φ non lo è, e viceversa.
4) Si determinino le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ e la loro stabilità. Si assuma in questo quesito $2k > m\alpha^2$.
5) Nel caso $m\alpha^2 = 2k$ si stabilisca se esistono posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ stabile.
6) Si dia una condizione su k, m, α tale che in ciascun moto s si mantenga limitato (in dipendenza delle condizioni iniziali).

78. [04/07/2025 (ex)I] Si consideri il sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ costante. Denotiamo con y_h le coordinate in $\mathcal{S}$. Si consideri il sistema di due punti materiali $(\boldsymbol{X}_1, m)$, $(\boldsymbol{X}_2, M)$ soggetto ai vincoli lisci: $\boldsymbol{X}_1$ appartiene all'asse y_3; $\boldsymbol{X}_2$ appartiene alla circonferenza mobile (solidale a $\mathcal{S}$)

$$y_1 = 0 \,, \qquad (y_2 - R)^2 + y_3^2 = R^2 \,.$$

Sui due punti agiscono rispettivamente le forze

$$\boldsymbol{F}_1 = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) \,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = -k(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1) - \mu \boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui k, μ sono costanti positive. Si usi la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(z) = z\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(\varphi, t) = R(1+\cos\varphi)\boldsymbol{u}_2(t) + R\sin\varphi\boldsymbol{u}_3(t)\,.$$

con $(z, \varphi) \in \boldsymbol{R} \times (-3\pi/4{,}5\pi/4)$.
Si consideri il moto del sistema relativo al sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
1) Si scriva l'energia cinetica del sistema in rappresentazione lagrangiana, relativa a $\mathcal{S}$.
2) Si calcoli il potenziale lagrangiano del sistema, relativo al sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$ (ossia comprendente le forze apparenti).
3) Nell'ipotesi $k > M\alpha^2$ si dimostri che esiste almeno una posizione di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$ in cui $\varphi = \bar{\varphi} \in (0, \pi/2)$.
4) Nell'ipotesi $k = M\alpha^2$ si determinino tutte le posizioni di equilibrio relativo a $\mathcal{S}$, e si discuta la loro stabilità.
5) Si scrivano le equazioni di Lagrange del sistema, e si dica se esistono moti con z costante e φ non costante.
6) Usando le equazioni di Lagrange si calcoli la reazione vincolare che agisce su $\boldsymbol{X}_1$ nel moto generico, come funzione di α, k, R, φ, t (non di $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$).

660. Equazioni di Lagrange: equilibrio

1. [4/7/2005 (ex)I] Due aste rigide omogenee AB e BC, ciascuna di lunghezza $2L$ e massa m, sono così vincolate nel sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3):

- entrambe giacciono nel piano $x_3 = 0$;
- hanno in comune l'estremo B;
- $A = O$, ossia $x_{1A} = x_{2A} = x_{3A} = 0$;
- $x_{2C} = d$, ove $2L < d < 4L$ (cioè C appartiene alla retta $x_2 = d$); qui d è una costante assegnata.

Si considerino solo configurazioni con $0 < x_{1B} < x_{1C}$.
Ciascun punto delle due aste è soggetto a una densità di forza data da

$$-\frac{\mu}{2L}\boldsymbol{e}_1\,, \quad \text{per l'asta } AB; \qquad \frac{\mu}{2L}\boldsymbol{e}_1\,, \quad \text{per l'asta } BC,$$

con $\mu \in \boldsymbol{R}$ costante.
Trovare le configurazioni di equilibrio.
(Si usi $y = x_{2B}$ come coordinata lagrangiana.)

2. [4/7/2005 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato a un piano liscio $\pi(t)$, ruotante intorno a un suo asse fisso r con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$. Se denotiamo con x la distanza di P da r, P è soggetto a forze conservative di potenziale

$$U(x) = a(x-d)^2 - bx^2 \,,$$

ove a, b, $d > 0$ sono costanti assegnate.
Per quali valori di $|\boldsymbol{\omega}|$ la posizione $x = d$ è di equilibrio relativo al piano ruotante?

3. [4/7/2005 (ex)II] Due aste rigide omogenee AB e BC, ciascuna di lunghezza $2L$ e massa m, sono così vincolate nel sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3):

- entrambe giacciono nel piano $x_3 = 0$;
- hanno in comune l'estremo B;
- $A = O$, ossia $x_{1A} = x_{2A} = x_{3A} = 0$;
- $x_{1C} = d$, ove $2L < d < 4L$ (cioè C appartiene alla retta $x_1 = d$).

Si considerino solo configurazioni con $0 > x_{2B} > x_{2C}$.
Ciascun punto delle due aste è soggetto a una densità di forza data da

$$\frac{\lambda}{2L}\boldsymbol{e}_2 \,, \quad \text{per l'asta } AB; \qquad -\frac{\lambda}{2L}\boldsymbol{e}_2 \,, \quad \text{per l'asta } BC,$$

con $\lambda \in \boldsymbol{R}$ costante.
Trovare le configurazioni di equilibrio.
(Si usi $x = x_{1B}$ come coordinata lagrangiana.)

4. [4/7/2005 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato a un piano liscio $\pi(t)$, ruotante intorno a un suo asse fisso r con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$. Se denotiamo con x la distanza di P da r, P è soggetto a forze conservative di potenziale

$$U(x) = -a(x-d)^2 - 2bx^2 \,,$$

ove a, b, $d > 0$ sono costanti assegnate.
Per quali valori di $|\boldsymbol{\omega}|$ la posizione $x = d$ è di equilibrio relativo al piano ruotante?

5. [12/9/2005 (ex)I] Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza $2L$ e massa m ha il centro coincidente con l'origine del sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3). È inoltre vincolata a giacere su un piano mobile $\pi(t)$ che passa per l'asse x_3 e ruota con velocità $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_3$, con $\omega > 0$ costante.
Il punto A [rispettivamente il punto B] è richiamato dal punto fisso $P_1 = (0,0,R)$ [rispettivamente dal punto fisso $P_2 = (0,0,-R)$], con forza elastica di costante $k > 0$. Qui $R > 0$ è costante.

Si trovino le posizioni di equilibrio relativo a $\pi(t)$.

6. [12/9/2005 (ex)II] Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza $2L$ e massa m ha il centro coincidente con l'origine del sistema di riferimento fisso (O, x_1, x_2, x_3). È inoltre vincolata a giacere su un piano mobile $\pi(t)$ che passa per l'asse x_1 e ruota con velocità $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_1$, con $\omega > 0$ costante.
Il punto A [rispettivamente il punto B] è richiamato dal punto fisso $P_1 = (R,0,0)$ [rispettivamente dal punto fisso $P_2 = (-R,0,0)$], con forza elastica di costante $k > 0$. Qui $R > 0$ è costante.
Si trovino le posizioni di equilibrio relativo a $\pi(t)$.

7. [15/12/2005 (ex)I] Un punto materiale di massa m, soggetto a vincoli lisci e fissi, si muove con lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \big(L^2 \dot{\varphi}^2 + R^2 \dot{\psi}^2 \big) + k \cos(\varphi + \psi) - h \sin \varphi \,.$$

Qui $\varphi \in (0, \pi)$ e $\psi \in (0, \pi)$ sono le coordinate lagrangiane e L, R, k e h sono costanti positive.
Studiare le posizioni di equilibrio del punto e la loro stabilità.

8. [7/4/2006 (ex)I] Un punto materiale P di massa $m > 0$ è vincolato alla superficie ottenuta ruotando intorno all'asse z la curva

$$z = a(x^2 - bx) \,, \qquad x > 0 \,, \qquad y = 0 \,,$$

ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k(x, y, 0) - \lambda(0,0,1) \,,$$

con a, b, k, $\lambda > 0$ costanti.
Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.

9. [7/7/2006 (ex)I] Consideriamo un sistema a vincoli olonomi lisci e fissi, la cui lagrangiana sia

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\alpha \dot{\theta}^2 + \beta \dot{\psi}^2) - k \Big(e^{\psi - \theta} - \cos \psi + \frac{\theta}{2} \Big) \,,$$

ove α, β, k sono costanti positive, e

$$-\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \,, \qquad -\pi < \psi < \pi \,.$$

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

10. [7/7/2006 (ex)II] Consideriamo un sistema a vincoli olonomi lisci e fissi, la cui lagrangiana sia

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\alpha \dot{\theta}^2 + \beta \dot{\varphi}^2) - k \Big(e^{\varphi - \theta} - \cos \varphi + \frac{\theta}{2} \Big) \,,$$

ove α, β, k sono costanti positive, e

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}\,, \qquad 0 < \varphi < 2\pi\,.$$

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

11. [19/7/2006 (ex)I] Consideriamo un sistema a vincoli olonomi lisci e fissi, la cui lagrangiana sia

$$\mathcal{L} = (1+\theta^2)\dot\theta^2 + 3\dot\varphi^2 - 4k\big(\cos(\theta-\varphi) + \varphi^3 - \varphi^2\big)\,,$$

ove k è una costante positiva, e

$$-1 < \theta < 1\,, \qquad -1 < \varphi < 1\,.$$

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

12. [19/7/2006 (ex)II] Consideriamo un sistema a vincoli olonomi lisci e fissi, la cui lagrangiana sia

$$\mathcal{L} = (3+\varphi^2)\dot\theta^2 + (4+\theta^2)\dot\varphi^2 - k\big(\cos(\varphi-\theta) - 2\theta^2 + 2\theta^3\big)\,,$$

ove k è una costante positiva, e

$$-1 < \theta < 1\,, \qquad -1 < \varphi < 1\,.$$

Determinare le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

13. [13/12/2006 (ex)I] Un'asta AB di massa m e lunghezza R è vincolata in modo che A abbia coordinate

$$\big(L\cos(\omega t), L\sin(\omega t), 0\big)\,,$$

nel sistema di riferimento fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$.
Sull'asta agisce il peso, diretto nel verso negativo dell'asse x_3.
Si scrivano le equazioni che determinano le posizioni di equilibrio di AB relative al sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$, ove $\boldsymbol{u}_3(t) = \boldsymbol{e}_3$ per ogni t, e che ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_3$; in particolare

$$\overrightarrow{OA} = L\boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

14. [19/7/2007 (ex)I] Un sistema vincolato ha lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2) - \alpha\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big)^4 + \beta\cos(\varphi-\theta)\,,$$

ove le coordinate lagrangiane sono

$$(\varphi, \theta) \in (0,\pi)\times(0,\pi)\,,$$

e α, β, m e R sono costanti positive.
Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema, studiandone la stabilità.

15. [19/7/2007 (ex)II] Un sistema vincolato ha lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}\dot{\theta}) - \gamma\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big)^6 + \delta \cos(\theta - \varphi)\,,$$

ove le coordinate lagrangiane sono

$$(\varphi, \theta) \in (0, \pi) \times (0, \pi)\,,$$

e γ, δ, m e R sono costanti positive.
Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema, studiandone la stabilità.

16. [17/9/2007 (ex)I] Due aste rigide AB e CD ciascuna di lunghezza $2L$ e massa m sono sottoposte ai vincoli

- A coincide con l'origine O del sistema fisso;
- gli estremi B e C coincidono;
- le due aste giacciono sul piano $x_3 = 0$.

Sulle due aste agiscono la forza peso (diretta nel verso negativo dell'asse x_2), e una coppia di azione e reazione di forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_D = -k\overrightarrow{PD}\,, \qquad \boldsymbol{F}_P = -k\overrightarrow{DP}\,,$$

ove $k > 0$ è costante, e P è il punto medio di AB ($\boldsymbol{F}_D$ [rispettivamente, $\boldsymbol{F}_P$] è applicata in D [rispettivamente, in P]).
Trovare le equazioni che danno le posizioni di equilibrio, e ricavarne che in tali posizioni il centro di massa del sistema appartiene all'asse x_2.

17. [17/9/2007 (ex)I] Un sistema vincolato da vincoli olonomi è soggetto a forze di potenziale

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = (\theta - \pi)^2 \cos\varphi + \sin^2\varphi\,,$$

con $\theta \in (0{,}2\pi)$, $\varphi \in (\pi/2{,}3\pi/2)$ opportune coordinate lagrangiane.
Determinare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

18. [17/9/2007 (ex)II] Due aste rigide AB e CD ciascuna di lunghezza $2L$ e massa m sono sottoposte ai vincoli

- A soddisfa
$$\overrightarrow{OA} = L\boldsymbol{e}_3\,,$$
ove O è l'origine del sistema fisso $(O, \boldsymbol{e}_i)$;

- gli estremi B e C coincidono;
- le due aste giacciono sul piano $x_2 = 0$.

Sulle due aste agiscono la forza peso (diretta nel verso negativo dell'asse x_3), e una coppia di azione e reazione di forze

$$\boldsymbol{F}_D = k\overrightarrow{PD}\,, \qquad \boldsymbol{F}_P = k\overrightarrow{DP}\,,$$

ove $k > 0$ è costante, e P è il punto medio di AB ($\boldsymbol{F}_D$ [rispettivamente, $\boldsymbol{F}_P$] è applicata in D [rispettivamente, in P]).
Trovare le equazioni che danno le posizioni di equilibrio, e ricavarne che in tali posizioni il centro di massa del sistema appartiene all'asse x_3.

19. [17/9/2007 (ex)II] Un sistema vincolato da vincoli olonomi è soggetto a forze di potenziale

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = 2 - (\theta - \pi)^2 \cos\varphi - \sin^2\varphi\,,$$

con $\theta \in (0,2\pi)$, $\varphi \in (\pi/2,3\pi/2)$ opportune coordinate lagrangiane.
Determinare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

20. [1/4/2008 (ex)I] Segnaposto.

21. [1/7/2008 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso (O, x_i) e inoltre ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2 = ax_1^2\,,$$

con $a > 0$ costante.
All'estremo B è applicata la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{QB}\,,$$

ove $Q = (0, R,0)$, e $k > 0$ è costante. Inoltre agisce la forza peso diretta nel verso negativo dell'asse x_2.
Scrivere il sistema che fornisce le posizioni di equilibrio.

22. [1/7/2008 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ del sistema di riferimento fisso (O, x_i) e inoltre ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2 = -ax_1^2\,,$$

con $a > 0$ costante.

All'estremo B è applicata la forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{QB}\,,$$

ove $Q = (0, -R, 0)$, e $k > 0$ è costante. Inoltre agisce la forza peso diretta nel verso positivo dell'asse x_2.
Scrivere il sistema che fornisce le posizioni di equilibrio.

23. [12/1/2009 (ex)I] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot\varphi^2 + \alpha\beta\dot\varphi\dot\theta + \beta^2\dot\theta^2\Big] - \gamma e^{\theta^2}\cos^2\varphi\,,$$

con α, β, $\gamma > 0$ costanti e $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in (-\infty, \infty)$ coordinate lagrangiane. Determinare i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.

24. [12/1/2009 (ex)II] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot\varphi^2 + \alpha\beta\dot\varphi\dot\theta + \beta^2\dot\theta^2\Big] - \gamma e^{-\theta^2}\cos^2\varphi\,,$$

con α, β, $\gamma > 0$ costanti e $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in (-\infty, \infty)$ coordinate lagrangiane. Determinare i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.

25. [15/7/2009 (ex)I] Una circonferenza γ di raggio R e centro C non omogenea ha densità ρ data da

$$\rho(P) = \rho_0\Big(1 + \alpha\frac{\operatorname{dist}(P, P_0P_1)^2}{R^2}\Big)\,,$$

ove P_0 e P_1 sono punti fissati su γ, solidali con essa e diametralmente opposti, ossia P_0P_1 è un diametro solidale con γ. Qui α e ρ_0 sono costanti positive. Inoltre γ è vincolata:

- ad avere il centro C coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso;
- a giacere sul piano ruotante Π di equazione

  $$x_1 \sin\omega t - x_2 \cos\omega t = 0\,,$$

  ove $\omega > 0$ è costante, e (x_i) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso.

Su γ agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_{P_0} = -k\overrightarrow{AP_0}\,,$$

applicata in P_0, ove A è il punto

$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_3\,.$$

Trovare tutte le posizioni di equilibrio di γ rispetto al sistema $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

26. [15/7/2009 (ex)II] Una circonferenza γ di raggio R e centro C non omogenea ha densità ρ data da

$$\rho(P) = \rho_0 \Big(1 - \alpha \frac{\operatorname{dist}(P, P_0P_1)^2}{R^2} \Big) \,,$$

ove P_0 e P_1 sono punti fissati su γ, solidali con essa e diametralmente opposti, ossia P_0P_1 è un diametro solidale con γ. Qui $0 < \alpha < 1$ e $\rho_0 > 0$ sono costanti.
Inoltre γ è vincolata:

- ad avere il centro C coincidente con l'origine O del sistema di riferimento fisso;
- a giacere sul piano ruotante Π di equazione

  $$x_1 \sin\omega t - x_2 \cos\omega t = 0 \,,$$

  ove $\omega > 0$ è costante, e (x_i) denota le coordinate nel sistema di riferimento fisso.

Su γ agisce la forza

$$\boldsymbol{F}_{P_0} = -k\overrightarrow{AP_0} \,,$$

applicata in P_0, ove A è il punto

$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Trovare tutte le posizioni di equilibrio di γ rispetto al sistema $\mathcal{S} = (O, \boldsymbol{u}_i)$ ove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

27. [20/11/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = -\alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \,, \qquad x_1^2 + x_2^2 > 0 \,.$$

Il punto è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,,$$

e alla forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{AP}\,,$$

ove A è individuato da

$$\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_1\,.$$

Trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

28. [25/1/2010 (ex)I] Una circonferenza materiale γ di raggio R, centro C e massa M è vincolata a giacere sul piano fisso

$$x_3 = 0\,.$$

Su di essa agiscono le forze

$$\boldsymbol{F}_A = -k_1\overrightarrow{OA}\,,\qquad \boldsymbol{F}_B = -k_2\overrightarrow{OB}\,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e i punti A e B, solidali con γ, sono tali che

$$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} = \frac{R}{2}\boldsymbol{u}_1\,;$$

qui $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con γ tale che $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$. Infine le costanti k_i soddisfano

$$0 < k_1 < k_2\,.$$

- Si scriva la lagrangiana della circonferenza.
- Si determinino tutte le posizioni di equilibrio della circonferenza.

29. [25/1/2010 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = \alpha\cos\left[\beta\sqrt{x^2+y^2}\right]\,,\qquad x^2+y^2>0\,,$$

ove $\alpha > 0$, $\beta > 1$ sono costanti. P è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,,$$

e alla forza

$$\boldsymbol{F}_1 = k\boldsymbol{e}_1\,,$$

con $k > 0$ costante.
Determinare tutte le posizioni di equilibrio per P, e studiarne la stabilità.

30. [25/1/2010 (ex)II] Una circonferenza materiale γ di raggio R, centro C e massa M è vincolata a giacere sul piano fisso

$$x_3 = 0 \,.$$

Su di essa agiscono le forze

$$\boldsymbol{F}_A = -k_1\overrightarrow{OA} \,, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k_2\overrightarrow{OB} \,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e i punti A e B, solidali con γ, sono tali che

$$-\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} = \frac{3}{2}R\boldsymbol{u}_1 \,;$$

qui $\mathcal{S} = (C, \boldsymbol{u}_i)$ è un sistema di riferimento solidale con γ tale che $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$. Infine le costanti k_i soddisfano

$$0 < k_1 < k_2 \,.$$

- Si scriva la lagrangiana della circonferenza.
- Si determinino tutte le posizioni di equilibrio della circonferenza.

31. [25/1/2010 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = -\alpha \cos\left[\beta\sqrt{x^2 + y^2}\right] \,, \qquad x^2 + y^2 > 0 \,,$$

ove $\alpha > 0$, $\beta > 1$ sono costanti. P è soggetto alla forza peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3 \,,$$

e alla forza

$$\boldsymbol{F}_1 = k\boldsymbol{e}_1 \,,$$

con $k > 0$ costante.
Determinare tutte le posizioni di equilibrio per P, e studiarne la stabilità.

32. [22/2/2010 (ex)I] Un'asta AB di massa M e lunghezza $2L$ è vincolata ad avere l'estremo A sulla parabola

$$x_2 = \alpha x_1^2 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

e a giacere sul piano $x_3 = 0$. Qui α è una costante positiva.
Sull'asta agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_2.
Trovare tutte le posizioni di equilibrio dell'asta, e studiarne la stabilità.

33. [22/2/2010 (ex)II] Un'asta AB di massa M e lunghezza $2L$ è vincolata ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2 = \alpha x_1^4 \,, \qquad x_3 = 0 \,,$$

e a giacere sul piano $x_3 = 0$. Qui α è una costante positiva.
Sull'asta agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_2.
Trovare tutte le posizioni di equilibrio dell'asta, e studiarne la stabilità.

34. [9/4/2010 (ex)I] Un sistema olonomo ha potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = \frac{\alpha\varphi^2}{\beta + \theta^2} + \frac{\beta\theta^2}{\alpha + \varphi^2} ,$$

con $\varphi \in \boldsymbol{R}$, $|\theta| < \sqrt{|\beta|}$. Qui $\alpha > 0$ e $\beta < 0$ sono costanti.
Determinare tutte le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

35. [8/7/2010 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha x_1 x_2 .$$

Il peso è diretto come $-\boldsymbol{e}_3$, e su P agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\overrightarrow{OP} ,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso. Qui α e k sono costanti positive.
Trovare condizioni su k, m, g, α perché il punto O sia di equilibrio stabile.

36. [7/9/2010 (ex)I] Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è vincolata ad avere l'estremo A sulla superficie

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 ,$$

e a rimanere ortogonale a tale superficie, in modo che

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = R < \left|\overrightarrow{OB}\right| = R + 2L ,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso.
Sull'asta agiscono il peso, diretto come $-\boldsymbol{e}_3$, e la forza

$$\boldsymbol{F}_B = k\boldsymbol{e}_1 ,$$

applicata in B. Qui R e k sono costanti positive.

1. Scrivere la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di AB in funzione delle opportune coordinate lagrangiane.

2. Trovare le posizioni di equilibrio dell'asta.

37. [20/1/2014 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere sul piano ruotante (y_1, y_3) e ad avere l'estremo A sulla parabola solidale con tale piano

$$y_3 = \alpha y_1^2 \,, \qquad y_1 \in \boldsymbol{R} \,,$$

ove $\alpha > 0$ è una costante assegnata e (y_h) denota le coordinate del sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$. Qui O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

con $\omega > 0$ costante. Sull'asta agisce una forza elastica di richiamo applicata nel suo centro di massa C

$$\boldsymbol{F}_C = -k\overrightarrow{C'C} \,,$$

ove C' è la proiezione ortogonale di C sull'asse y_1 e $k > 0$ è costante.
Si scrivano le equazioni che danno le eventuali posizioni di equilibrio rispetto a $\mathcal{S}$.

38. [20/1/2014 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a giacere sul piano ruotante (y_1, y_3) e ad avere l'estremo A sulla parabola solidale con tale piano

$$y_3 = \alpha y_1^2 \,, \qquad y_1 \in \boldsymbol{R} \,,$$

ove $\alpha > 0$ è una costante assegnata e (y_h) denota le coordinate del sistema di riferimento mobile $\mathcal{S} = (O, (\boldsymbol{u}_h))$. Qui O è l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned}$$

con $\omega > 0$ costante. Sull'asta agisce il peso nel verso negativo dell'asse y_3.
Si scrivano le equazioni che danno le eventuali posizioni di equilibrio rispetto a $\mathcal{S}$.

39. [19/6/2014 (ex)I] Un sistema olonomo è soggetto al potenziale

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = \alpha\varphi^4 - 2\alpha\beta\varphi^2 \cos\theta + \beta \cos^2\theta \,,$$

con

$$\theta \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \Big) \,, \qquad \varphi \in \boldsymbol{R} \,,$$

e α, $\beta > 1$.
Si trovino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.

40. [10/2/2015 (ex)I] Due punti materiali P_1 e P_2 di massa rispettivamente m_1 e m_2 sono vincolati alla circonferenza verticale

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

e anche a mantenersi sulla stessa retta verticale, ossia a rispettare

$$x_{1P_1} = x_{1P_2}\,.$$

Si assuma $x_{2P_1} \neq x_{2P_2}$.
Il peso ha direzione $-\boldsymbol{e}_2$.
Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità in dipendenza dei valori di m_1 e m_2.

41. [10/2/2015 (ex)II] Due punti materiali P_1 e P_2 di massa rispettivamente m_1 e m_2 sono vincolati alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,, \qquad x_3 = 0\,,$$

e anche a mantenersi sulla stessa retta parallela all'asse x_2, ossia a rispettare

$$x_{1P_1} = x_{1P_2}\,.$$

Si assuma $x_{2P_1} \neq x_{2P_2}$.
Sui punti agiscono rispettivamente le forze

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = k_1 \overrightarrow{P_1' P_1}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{P_2} = -k_2 \overrightarrow{P_2' P_2}\,,$$

ove P_i' è la proiezione di P_i sull'asse X_1, e $k_i > 0$ sono costanti.
Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità in dipendenza dei valori di k_1 e k_2.

42. [4/6/2015 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = f(x_1, x_2)\,, \qquad f \in C^2(\boldsymbol{R}^2)\,,$$

e soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = g(x_3)\boldsymbol{e}_3\,, \qquad g \in C^1(\boldsymbol{R})\,.$$

Si determinino gli eventuali punti di equilibrio in cui si possono definire le piccole oscillazioni.

43. [4/6/2015 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = \frac{\alpha(x_1^2 + x_2^2)}{1 + \alpha^2(x_1^2 + x_2^2)^2}\,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2\,,$$

ove $\alpha > 0$, ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad k \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\} \,.$$

Si determinino gli eventuali punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

44. [12/1/2015 (ex)I] Un disco di raggio R e massa M è vincolato ad avere il centro C sull'asse x_3, a mantenersi ortogonale all'asse x_3, e ad avere il punto solidale A, appartenente al suo bordo, sull'elica cilindrica

$$x_1 = R\cos\varphi \,, \quad x_2 = R\sin\varphi \,, \quad x_3 = h\varphi \,, \qquad \varphi \in \boldsymbol{R} \,.$$

Sul disco agiscono il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata in A

$$\boldsymbol{F}_A = kx_3^2 \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{CA} \,.$$

Qui h, k sono costanti positive assegnate.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Studiare la stabilità degli eventuali punti di equilibrio.

45. [12/1/2015 (ex)II] Un disco di raggio R e massa M è vincolato ad avere il centro C sull'asse x_3, a mantenersi ortogonale all'asse x_3, e ad avere il punto solidale A, appartenente al suo bordo, sull'elica cilindrica

$$x_1 = R\cos\varphi \,, \quad x_2 = R\sin\varphi \,, \quad x_3 = h\varphi \,, \qquad \varphi \in \boldsymbol{R} \,.$$

Sul disco agiscono il peso diretto come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata in A

$$\boldsymbol{F}_A = k[a - x_3^2] \boldsymbol{e}_3 \times \overrightarrow{CA} \,.$$

Qui h, k, a sono costanti positive assegnate.

- Scrivere le equazioni di moto.
- Dare una condizione su a perché esistano due punti di equilibrio.

46. [19/3/2016 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie ottenuta ruotando intorno all'asse z la curva

$$z = a(bx - x^2) \,, \qquad x > 0 \,,$$

ed è soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -kx\boldsymbol{e}_1 - \lambda\boldsymbol{e}_3 \,.$$

Qui a, b, k, λ sono costanti positive assegnate.

Si determinino le posizioni di equilibrio di P e se ne studi la stabilità in dipendenza dei parametri.

47. [7/6/2016 (ex)I] Si consideri un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi fissi e a sollecitazioni conservative il cui potenziale in forma lagrangiana è dato da

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -\lambda(x-a)^2(x+a)^4 - \mu e^{y^2} ,$$

ove $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate lagrangiane. Qui a, λ, μ sono costanti positive assegnate.
Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
Si determinino anche le eventuali posizioni ove è possibile definire le piccole oscillazioni.

48. [12/7/2016 (ex)I] Due punti materiali P_1 e P_2 di uguale massa m sono vincolati alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 , \qquad x_3 = 0 .$$

Sui punti agiscono le seguenti forze

$$\boldsymbol{F}_{P_1} = -k_1\overrightarrow{AP_1} - k_2\overrightarrow{P_2P_1} , \qquad \boldsymbol{F}_{P_2} = -k_1\overrightarrow{AP_2} - k_2\overrightarrow{P_1P_2} ,$$

ove k_1, $k_2 > 0$ sono costanti assegnate e $\overrightarrow{OA} = R\boldsymbol{e}_1$.

- Si scriva il sistema che dà le posizioni di equilibrio.
- Si dimostri che se $k_1 = k_2$ una posizione di equilibrio si ottiene per A, P_1, P_2 che formano un triangolo equilatero.

49. [11/07/2017 (ex)I] Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli lisci e fissi e a forze di potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\theta,\varphi,\psi) = -\theta(\theta-1) + (\varphi^2-1)(\psi^2-1) ,$$

ove $(\theta,\varphi,\psi) \in \boldsymbol{R}^3$ sono le coordinate lagrangiane.
Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità, individuando quelli ove è possibile definire le piccole oscillazoni.

50. [15/01/2018 (ex)I] Un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conservative ha potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = -y^2 - \frac{1}{3}x^3y + 4xy , \qquad x > 0 , y \in \boldsymbol{R} .$$

Determinare i punti di equilibrio studiandone la stabilità.

51. [15/01/2018 (ex)II] Un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conservative ha potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = \frac{1}{3}xy^3 - 2x^2 - 4xy\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,, y > 0\,.$$

Determinare i punti di equilibrio studiandone la stabilità.

52. [23/07/2018 (ex)I] Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli lisci e fissi e a forze conservative di potenziale

$$U^{\mathrm{L}}(x,y) = e^{x^2(1-x)} - y^4\,,$$

ove $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ sono le coordinate lagrangiane.
Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

53. [11/02/2019 (ex)I] Un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi fissi ha 2 gradi di libertà e coordinate lagrangiane φ, $\theta \in (-\pi,\pi)$.
Le componenti lagrangiane delle forze sono

$$Q_\varphi = \varphi\theta e^{\varphi^2}\,, \qquad Q_\theta = \frac{1}{2}e^{\varphi^2} + \frac{\theta}{1+\theta^2}\,.$$

Trovare il potenziale lagrangiano e i punti di equilibrio.

54. [11/02/2019 (ex)II] Un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi fissi ha 2 gradi di libertà e coordinate lagrangiane φ, $\theta \in (-\pi,\pi)$.
Le componenti lagrangiane delle forze sono

$$Q_\varphi = \theta e^{\varphi\theta}\,, \qquad Q_\theta = \varphi e^{\varphi\theta} + \frac{1}{1+\theta^2}\,.$$

Trovare il potenziale lagrangiano e i punti di equilibrio.

55. [09/01/2020 (ex)I] Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli olonomi e forze conservative di potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi,\theta) = (1-\varphi^2)\cos\theta\,,$$

ove $\varphi \in \boldsymbol{R}$, $\theta \in (-\pi,\pi)$ sono le coordinate lagrangiane.
Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

56. [09/01/2020 (ex)II] Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli olonomi e forze conservative di potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\theta,\varphi) = (4-\theta^2)\sin\varphi\,,$$

ove $\theta \in \boldsymbol{R}$, $\varphi \in (-\pi/2{,}3\pi/2)$ sono le coordinate lagrangiane.
Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

57. [10/02/2020 (ex)I] Un disco C di raggio R e massa M è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Denotiamo con G il centro del disco e scegliamo un sistema di riferimento solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_G, (\boldsymbol{u}_h))$ in modo che, se $\boldsymbol{\lambda}$ indica le coordinate solidali, allora

$$C = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \lambda_3 = 0\,, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \le R^2\}\,.$$

Sul disco agisce la distribuzione di forze elastiche

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -K(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}\,,$$

ove $\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$ è la misura di area e

$$K(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} k\,, & \lambda_2 > 0\,, \\ 0\,, & \lambda_2 \le 0\,. \end{cases}$$

Qui $k > 0$ è una costante assegnata, $\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda})$ denota il moto solidale di coordinate $\boldsymbol{\lambda}$, e si intende che $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0$ fuori di C.
Calcolare il potenziale lagrangiano totale della distribuzione di forze, dimostrare che esiste qualche posizione di equilibrio e che in esse

$$\boldsymbol{X}_G \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0\,.$$

[*Si scelgano le coordinate lagrangiane* $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *tali che* $\boldsymbol{X}_G = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ *e*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

Gli integrali doppi in coordinate solidali non nulli si possono lasciare indicati.]

58. [10/02/2020 (ex)II] Un disco C di raggio R e massa M è vincolato a giacere sul piano $x_3 = 0$.
Denotiamo con G il centro del disco e scegliamo un sistema di riferimento solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_G, (\boldsymbol{u}_h))$ in modo che, se $\boldsymbol{\lambda}$ indica le coordinate solidali, allora

$$C = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \lambda_3 = 0\,, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \le R^2\}\,.$$

Sul disco agisce la distribuzione di forze elastiche

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -K(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}\,,$$

ove $\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$ è la misura di area e

$$K(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} k\,, & \lambda_1 > 0\,, \\ 0\,, & \lambda_1 \le 0\,. \end{cases}$$

Qui $k > 0$ è una costante assegnata, $\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda})$ denota il moto solidale di coordinate $\boldsymbol{\lambda}$, e si intende che $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0$ fuori di C.
Calcolare il potenziale lagrangiano totale della distribuzione di forze, dimostrare che esiste qualche posizione di equilibrio e che in esse

$$\boldsymbol{X}_G \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0 \,.$$

[*Si scelgano le coordinate lagrangiane* $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *tali che* $\boldsymbol{X}_G = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ *e*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Gli integrali doppi in coordinate solidali non nulli si possono lasciare indicati.]

680. Equazioni di Lagrange: piccole oscillazioni

1. [4/7/2005 (ex)I] Si consideri un sistema con lagrangiana

$$\mathcal{L} = T + U \,, \quad T = \alpha^2\dot\theta^2 + \alpha\beta\dot\theta\dot\varphi + \beta^2\dot\varphi^2 \,, \quad U = \lambda\cos(\theta - \varphi) - \mu\theta^2 + \gamma\sin^2\varphi \,,$$

ove α, β, γ, λ, $\mu > 0$ sono costanti, con $\gamma < \lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$.
Si riconosca che $\theta = 0$, $\varphi = 0$ è una posizione di equilibrio stabile e si scrivano le relative equazioni delle piccole oscillazioni.

2. [4/7/2005 (ex)II] Si consideri un sistema con lagrangiana

$$\mathcal{L} = T + U \,, \quad T = \alpha^2\dot\varphi^2 + \alpha\beta\dot\theta\dot\varphi + \beta^2\dot\theta^2 \,, \quad U = \lambda\cos(\theta - \varphi) - \mu\varphi^2 + \gamma\sin^2\theta \,,$$

ove α, β, γ, λ, $\mu > 0$ sono costanti, con $\gamma < \lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$.
Si riconosca che $\theta = 0$, $\varphi = 0$ è una posizione di equilibrio stabile e si scrivano le relative equazioni delle piccole oscillazioni.

3. [7/4/2006 (ex)I] Si consideri un sistema con lagrangiana

$$\mathcal{L} = T + U \,, \quad T = \alpha^2\dot\varphi^2 + \alpha\beta\dot\theta\dot\varphi + \beta^2\dot\theta^2 \,, \quad U = -\lambda(\theta - \varphi)^2 - 2\mu\theta^2 + \gamma e^{\theta^2} \,,$$

ove α, β, γ, λ, $\mu > 0$ sono costanti, con $\gamma < 2\mu$.
Si riconosca che $\theta = 0$, $\varphi = 0$ è una posizione di equilibrio stabile e si scrivano le relative equazioni delle piccole oscillazioni.

4. [13/12/2006 (ex)I] Un sistema olonomo ha lagrangiana

$$\mathcal{L}(\varphi, \psi, \dot\varphi, \dot\psi) = \frac{1}{2}\Big(\alpha\dot\varphi^2 + \beta(1 + \varphi^2)\dot\varphi\dot\psi + \alpha\dot\psi^2\Big) + a\cos(\varphi + \psi^3) - b\varphi^4 - c\psi^2 \,,$$

con φ, $\psi \in (-\pi, \pi)$ e α, β, a, b, c costanti positive, $2\alpha > \beta(1+\pi^2)$.
Si dimostri che $(\varphi, \psi) = (0,0)$ è una posizione di equilibrio stabile e si scriva la relativa lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^* = T^* + U^*$.

5. [26/3/2007 (ex)I] Un sistema olonomo ha lagrangiana

$$\mathcal{L}(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\Big(\alpha(\varphi^4+1)\dot{\varphi}^2 + \alpha\dot{\varphi}\dot{\theta} + \alpha(\varphi^4+1)\dot{\theta}^2\Big) + a(1-\varphi^2)^2 + \frac{b}{1+\theta^2}\,,$$

con φ, $\theta \in (-\pi, \pi)$ e α, a, b, costanti positive.
Si dimostri che $(\varphi, \theta) = (0,0)$ è una posizione di equilibrio stabile e si scrivano le equazioni di Lagrange relative alla lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^* = T^* + U^*$.

6. [4/7/2007 (ex)I] Si scriva la lagrangiana ridotta (intorno all'unica posizione di equilibrio stabile) per un punto P di massa m vincolato all'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

e sottoposto alla forza peso, che agisce nel verso negativo dell'asse z.
[*Sugg.* Si scelgano x, y come coordinate lagrangiane.]

7. [4/7/2007 (ex)II] Si scriva la lagrangiana ridotta (intorno all'unica posizione di equilibrio stabile) per un punto P di massa m vincolato all'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

e sottoposto alla forza costante $\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{e}_1$, con $k > 0$.
[*Sugg.* Si scelgano y, z come coordinate lagrangiane.]

8. [13/12/2007 (ex)I] Scrivere le equazioni di moto per le piccole oscillazioni del sistema con lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \alpha\cos(x + xy) + \beta\cos(y + xy) + \gamma\sqrt{1-y^2}\,,$$

intorno al punto $(x, y) = (0,0)$. Qui α, β e γ sono costanti positive.

9. [13/12/2007 (ex)II] Scrivere le equazioni di moto per le piccole oscillazioni del sistema con lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \alpha\cos(y + xy) + \beta\cos(x + xy) + \gamma\sqrt{1-y^2} - \delta x^4\,,$$

intorno al punto $(x, y) = (0,0)$. Qui α, β, γ e δ sono costanti positive.

10. [18/7/2008 (ex)I] Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è soggetta ai vincoli:

- giace sul piano fisso verticale $x_3 = 0$;
- ha l'estremo A sull'asse x_1.

Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_2. Inoltre in B è applicata la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_B = -k\overrightarrow{OB}\,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e $k > 0$ è costante.
Si determinino

1. tutte le posizioni di equilibrio, discutendone la stabilità;
2. la lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$ in almeno una delle posizioni di equilibrio in cui si possono definire le piccole oscillazioni.

11. [18/7/2008 (ex)I] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \alpha^2(1+\varphi^2)\dot{\varphi}^2 + \alpha\beta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2(1+\cos^2\theta)\dot{\theta}^2 \\ + \gamma\cos(\varphi\theta) - \delta\sin^2\varphi - \delta\theta^2\,,$$

con α, β, γ, $\delta > 0$ costanti e φ, $\theta \in (-\pi,\pi)$ coordinate lagrangiane.
Riconoscere che in $(\varphi,\theta) = (0{,}0)$ si possono definire le piccole oscillazioni, e calcolarne le frequenze normali.

12. [18/7/2008 (ex)II] Un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ è soggetta ai vincoli:

- giace sul piano fisso verticale $x_3 = 0$;
- ha l'estremo A sull'asse x_1.

Il peso è diretto nel verso negativo dell'asse x_2. Inoltre nel centro C è applicata la forza elastica

$$\boldsymbol{F}_C = -k\overrightarrow{OC}\,,$$

ove O è l'origine del sistema di riferimento fisso, e $k > 0$ è costante.
Si determinino

1. tutte le posizioni di equilibrio, discutendone la stabilità;
2. la lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$ in almeno una delle posizioni di equilibrio in cui si possono definire le piccole oscillazioni.

13. [18/7/2008 (ex)II] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \alpha^2(1+\theta^2)\dot{\varphi}^2 + \alpha\beta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2(1+\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2 \\ + \gamma\cos(\varphi\theta) - \delta\varphi^2 - \delta\sin^2\theta + \delta\theta^4\,,$$

con α, β, γ, $\delta > 0$ costanti e φ, $\theta \in (-\pi, \pi)$ coordinate lagrangiane.
Riconoscere che in $(\varphi, \theta) = (0{,}0)$ si possono definire le piccole oscillazioni, e calcolarne le frequenze normali.

14. [12/9/2008 (ex)I] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha\beta}{1+\lambda^2\varphi^2}\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2\dot{\theta}^2\Big] - \gamma\varphi(\lambda^2\varphi^2 - 1) - \delta(e^{\lambda\theta} + e^{-\lambda\theta})\,,$$

con α, β, γ, δ, $\lambda > 0$ costanti e φ, $\theta \in (-\infty, \infty)$ coordinate lagrangiane.
Determinare i punti di equilibrio del sistema e, ove possibile, scrivere la lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$.

15. [12/9/2008 (ex)II] Sia data la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big[\alpha^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha\beta}{1+\lambda^2\theta^2}\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2\dot{\theta}^2\Big] - \gamma\varphi(\lambda^2\varphi^2 - 4) - \delta(e^{\frac{\lambda\theta}{2}} + e^{-\frac{\lambda\theta}{2}})\,,$$

con α, β, γ, δ, $\lambda > 0$ costanti e φ, $\theta \in (-\infty, \infty)$ coordinate lagrangiane.
Determinare i punti di equilibrio del sistema e, ove possibile, scrivere la lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$.

16. [12/2/2009 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha x_1^2\,,$$

ed è soggetto alla forza elastica

$$\boldsymbol{F}_e = -k\overrightarrow{OP}\,,$$

e al peso

$$\boldsymbol{F}_p = -mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Qui α, k sono costanti positive.
Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni nell'unica posizione di equilibrio.

17. [12/2/2009 (ex)II] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_2 = \alpha x_1^2\,,$$

ed è soggetto alla forza elastica

$$\boldsymbol{F}_e = -k\overrightarrow{OP}\,,$$

e al peso

$$\boldsymbol{F}_p = -mg\boldsymbol{e}_2\,.$$

Qui α, k sono costanti positive.
Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni nell'unica posizione di equilibrio.

18. [12/6/2009 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2 = \beta \sin \alpha x_1 \,, \qquad 0 < x_1 < \frac{2\pi}{\alpha} \,.$$

Qui α, β sono costanti positive. Sull'asta agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_2.
Determinare:

1. La lagrangiana del sistema.
2. I punti di equilibrio, e, ove possibile, scrivere le equazioni di Lagrange ridotte e determinare le frequenze normali.

19. [12/6/2009 (ex)II] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata

- a giacere sul piano $x_3 = 0$;
- ad avere l'estremo A sulla curva

$$x_2 = \alpha \cos \beta x_1 \,, \qquad -\frac{\pi}{2\beta} < x_1 < \frac{3\pi}{2\beta} \,.$$

Qui α, β sono costanti positive. Sull'asta agisce il peso diretto nel verso negativo dell'asse x_2.
Determinare:

1. La lagrangiana del sistema.
2. I punti di equilibrio, e, ove possibile, scrivere le equazioni di Lagrange ridotte e determinare le frequenze normali.

20. [11/9/2009 (ex)I] Un sistema olonomo con due gradi di libertà ha lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big(\alpha^2 \dot\varphi^2 + \frac{2\alpha\beta}{2 + \alpha^2\varphi^2}\dot\varphi\dot\theta + \beta^2\dot\theta^2\Big) + U(\varphi, \theta) \,,$$

ove il potenziale U è dato da

$$U(\varphi, \theta) = e^{\lambda\varphi^2}(1 - \mu\theta^2) + e^{\gamma\theta^3}(1 - \delta\varphi^2) \,.$$

Qui α, β, γ, δ, λ, μ, sono costanti positive.
Determinare condizioni su tali costanti perché

$$(\varphi, \theta) = (0, 0)$$

sia un punto di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni, e trovare le frequenze normali di queste ultime.

21. [11/9/2009 (ex)II] Un sistema olonomo con due gradi di libertà ha lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big(\alpha^2\dot{\varphi}^2 + \frac{2\alpha\beta}{2+\alpha^2\varphi^2}\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta^2\dot{\theta}^2\Big) + U(\varphi,\theta)\,,$$

ove il potenziale U è dato da

$$U(\varphi,\theta) = e^{\lambda\theta^2}(1-\mu\varphi^2) + e^{\gamma\varphi^3}(1-\delta\theta^2)\,.$$

Qui α, β, γ, δ, λ, μ, sono costanti positive.
Determinare condizioni su tali costanti perché

$$(\varphi,\theta) = (0,0)$$

sia un punto di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni, e trovare le frequenze normali di queste ultime.

22. [8/7/2010 (ex)I] Un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa M è vincolata a mantenere l'estremo A sulla circonferenza verticale fissa γ di raggio R, e a giacere nel piano ortogonale a γ in A. Si assuma $R > L$.
Scrivere le equazioni delle piccole oscillazioni nei punti di equilibrio ove questo è possibile.

23. [17/2/2014 (ex)I] Si consideri il piano ruotante $\Pi(t)$ di equazione

$$-x_1\sin(\omega t) + x_2\cos(\omega t) = 0\,,$$

ove $\omega > 0$ è costante. Qui (x_h) denota le coordinate nel sistema fisso. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una circonferenza γ solidale con Π e giacente su di esso, di raggio $R > 0$, con centro C a distanza $d > 2R$ dall'asse x_3.
Il punto P è soggetto alla forza elastica di richiamo

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{PA}\,,$$

ove A è il punto della circonferenza γ più vicino all'asse x_3. Qui k è la costante positiva

$$k = m\omega^2\Big(\frac{d}{R} - 2\Big) > 0\,.$$

Si studi la stabilità delle posizioni di equilibrio relativo a Π, e ove possibile si determinino le frequenze normali delle piccole oscillazioni.

24. [17/2/2014 (ex)II] Si consideri il piano ruotante $\Pi(t)$ di equazione

$$-x_1\sin(\omega t) + x_2\cos(\omega t) = 0\,,$$

ove $\omega > 0$ è costante. Qui (x_h) denota le coordinate nel sistema fisso. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una circonferenza γ solidale con Π e giacente su di esso, di raggio $R > 0$, con centro C a distanza $d > R$ dall'asse x_3.
Il punto P è soggetto alla forza elastica di richiamo

$$\boldsymbol{F} = k\overrightarrow{PA}\,,$$

ove A è il punto della circonferenza γ più vicino all'asse x_3. Qui k è la costante positiva

$$k = m\omega^2\Big(\frac{d}{R} + 3\Big) > 0\,.$$

Si studi la stabilità delle posizioni di equilibrio relativo a Π, e ove possibile si determinino le frequenze normali delle piccole oscillazioni.

25. [17/7/2014 (ex)I] Un punto P di massa m è vincolato alla superficie

$$x_3 = \alpha(x_1^2 + \varepsilon^2)(x_2^2 + \varepsilon^2)\,, \qquad x_1\,, x_2 \in \boldsymbol{R}\,,$$

ove α, $\varepsilon > 0$ sono costanti, e le x_i indicano le coordinate nel sistema fisso.
Su P agisce il peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Determinare le frequenze normali delle piccole oscillazioni nell'unica posizione di equilibrio stabile.

26. [13/1/2015 (ex)I] Si consideri un sistema con energia cinetica e potenziale dati da

$$T^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta, \dot\varphi, \dot\theta) = b^2\cosh(a\varphi)\dot\varphi^2 - bc\cos(\varphi + \theta)\dot\varphi\dot\theta + c^2\dot\theta^2\,,$$
$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = -\arcsin(\alpha\varphi^2 + \beta\theta^2) + \alpha^2\varphi^4\,,$$

φ, $\theta \in (-\pi, \pi)$. Qui a, b, c, α, β sono costanti positive.
Si riconosca che $(\varphi, \theta) = (0{,}0)$ è una posizione di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni, si scrivano le equazioni di moto relative a queste e si determinino le frequenze normali.

27. [13/1/2015 (ex)II] Si consideri un sistema con energia cinetica e potenziale dati da

$$T^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta, \dot\varphi, \dot\theta) = \beta^2(1 + \gamma^2\varphi^2)\dot\varphi^2 - \alpha\beta e^{-\gamma\theta}\dot\varphi\dot\theta + \alpha^2 e^{-2\gamma\theta}\dot\theta^2\,,$$
$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = -\operatorname{arctg}(b\varphi^2 + a\theta^2) + b^2\theta^4\,,$$

φ, $\theta \in (-\pi, \pi)$. Qui a, b, α, β, γ sono costanti positive.
Si riconosca che $(\varphi, \theta) = (0{,}0)$ è una posizione di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni, si scrivano le equazioni di moto relative a queste e si determinino le frequenze normali.

28. [2/7/2015 (ex)I] Si consideri un sistema di lagrangiana

$$\mathcal{L} = \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 - \frac{\varphi^2}{1+\theta^4} - \theta^2(\theta-2)^4 \,,$$

ove $\varphi \in (-1{,}3)$, $\theta \in (-1{,}3)$.
Si determinino le posizioni di equilibrio stabile, quelle in cui si possono definire le piccole oscillazioni, e in queste ultime posizioni le frequenze normali.

29. [12/1/2015 (ex)I] Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\big[\alpha^2\dot{\theta}^2 + 2\alpha\beta(1+\varphi^2)\dot{\theta}\dot{\varphi} + \beta^2(1+\varphi^2)^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2\big] - \gamma\cos\theta^2 - \lambda\varphi^2 \,,$$

con $\theta \in (-\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi})$ e $\varphi \in (-1{,}1)$. Qui α, β, γ, λ sono costanti positive assegnate.
Si determinino i punti di equilibrio, se ne studi la stabilità e si calcoli la lagrangiana ridotta in quelli ove è possibile definire le piccole oscillazioni.

30. [12/1/2015 (ex)II] Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\big[\alpha^2\dot{\theta}^2 + \beta^2\dot{\varphi}^2\big] - \gamma\cos\theta^2 - \lambda\varphi^2 \,,$$

con $\theta \in (0, \sqrt{3\pi})$ e $\varphi \in (-1{,}1)$. Qui α, β, γ, λ sono costanti positive assegnate.
Si determinino i punti di equilibrio, se ne studi la stabilità, e si trovino le frequenze normali in quelli ove è possibile definire le piccole oscillazioni.

31. [17/01/2017 (ex)I] Un sistema di corpi rigidi vincolati da vincoli olonomi lisci è soggetto a forze conservative di potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\theta,\varphi) = -\lambda\theta^4(\theta-\alpha)^2 - \mu(\varphi-\beta)^2 \,,$$

con $(\theta,\varphi) \in \boldsymbol{R}^2$ coordinate lagrangiane e λ, μ, α, $\beta > 0$ costanti assegnate.
Trovare le posizioni di equilibrio e determinarne la stabilità, indicando in quali di esse è possibile definire le piccole oscillazioni.

32. [17/01/2017 (ex)II] Un sistema di corpi rigidi vincolati da vincoli olonomi lisci è soggetto a forze conservative di potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\theta,\varphi) = -\lambda\theta^2(\theta-\alpha)^4 - \mu(\varphi+\beta)^2 \,,$$

con $(\theta,\varphi) \in \boldsymbol{R}^2$ coordinate lagrangiane e λ, μ, α, $\beta > 0$ costanti assegnate.
Trovare le posizioni di equilibrio e determinarne la stabilità, indicando in quali di esse è possibile definire le piccole oscillazioni.

33. [13/02/2018 (ex)I] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = -(\cos x)(\cos y)\,,$$

ed è soggetto al peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Determinare la stabilità dei punti di equilibrio

$$(x, y) = (0{,}0)\,, \qquad (x, y) = (\pi{,}0)\,,$$

e ove possibile calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni.

34. [13/02/2018 (ex)II] Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie

$$z = (\cos x)(\cos y)\,,$$

ed è soggetto al peso

$$-mg\boldsymbol{e}_3\,.$$

Determinare la stabilità dei punti di equilibrio

$$(x, y) = (0{,}0)\,, \qquad (x, y) = (0, \pi)\,,$$

e ove possibile calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni.

35. [15/01/2019 (ex)I] Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conservative, e ha lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + e^y\dot{y}^2) + (y^2 - 1)^2(1 - x^2)\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

Determinare tutti i punti di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni.

36. [15/01/2019 (ex)II] Un sistema di corpi rigidi è soggetto a vincoli olonomi fissi e a forze conservative, e ha lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + e^y\dot{y}^2) + (x^2 - 4)^2(1 - y^2)\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

Determinare tutti i punti di equilibrio ove si possono definire le piccole oscillazioni.

37. [13/01/2020 (ex)I] Si consideri un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi fissi e forze conservative di potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = -\alpha(\sin\varphi)^2 + \beta(\varphi - \pi)^3 + \gamma\sin(\pi + \theta^2)\,, \qquad (\varphi, \theta) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

Qui α, β, γ sono costanti positive assegnate.
L'energia cinetica è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}(c\dot{\varphi}^2 + d\dot{\theta}^2)\,,$$

con c, $d > 0$.

- Si dimostri che in $(\varphi, \theta) = (\pi, 0)$ si possono definire le piccole oscillazioni.
- Si calcolino le frequenze normali delle piccole oscillazioni.
- Si dia una condizione sui parametri perché tutti i moti delle piccole oscillazioni siano periodici.

38. [13/01/2020 (ex)II] Si consideri un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli olonomi fissi e forze conservative di potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = -\alpha(\sin\theta)^2 + \beta\cos\Big(\frac{\pi}{2} + \varphi^2\Big) + \gamma\varphi^4\,, \qquad (\varphi, \theta) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

Qui α, β, γ sono costanti positive assegnate.
L'energia cinetica è

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}(c\dot{\varphi}^2 + d\dot{\theta}^2)\,,$$

con c, $d > 0$.

- Si dimostri che in $(\varphi, \theta) = (0, \pi)$ si possono definire le piccole oscillazioni.
- Si calcolino le frequenze normali delle piccole oscillazioni.
- Si dia una condizione sui parametri perché tutti i moti delle piccole oscillazioni siano periodici.