MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 15/10/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[1].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[1].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

01

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a Nessuna delle altre.

b La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

c Le forze direttamente applicate sono conservative.

d Vale

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2) \,.$$

02

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a

$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha \dot{q}_1 + \beta \dot{q}_2)^2 + \gamma \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2 \,.$$

c

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2 \dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \beta^2 \dot{q}_2^2 \,.$$

d Nessuna delle altre.

03

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.

a Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3 \,,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.

b Nessuna delle altre.

c Esiste almeno un punto di equilibrio.

d Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

04

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a
$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b
$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

c Nessuna delle altre.

d
$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

05

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.

a $\ell = 8$.

b $\ell = 7$.

c $\ell = 9$.

d Nessuna delle altre.

06

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.

a $\ell = 9$.

b $\ell = 11$.

c Nessuna delle altre.

d $\ell = 10$.

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h .$$

07 Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?

a

$$I_{11}\omega_1^2 .$$

b Nessuna delle altre.

c

$$I_{11}^2\omega_1 + I_{22}^2\omega_2 + I_{33}^2\omega_3 .$$

d

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 .$$

08

Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?

a Nessuna scelta.

b Nessuna delle altre.

c Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.

d Almeno due scelte.

09

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.

b Nessuna delle altre.

c Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.

d Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 , \qquad s \in \boldsymbol{R} ,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h) , \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0) ,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R) .$$

10
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1 \cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s) ,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.
a
$$s(t_1) = \alpha .$$
b
$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha} .$$
c
$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha} .$$
d Nessuna delle altre.

11
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.
a La forza peso.
b
$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s) .$$
c Nessuna delle altre.
d
$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s) .$$

12 Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2 \Big(\frac{x_3}{h}\Big)^2 (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) ,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.
a Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.
b Tutti i moti sono limitati.
c Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.
d Nessuna delle altre.

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

13

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0)\,.$$

a

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{w}_3(t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

b

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

c Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.

d Nessuna delle altre.

14

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a Nessuna delle altre.

b Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.

c L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

d Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

15

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t\boldsymbol{u}_1(t) + \sin t\boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a Nessuna delle altre.

b È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.

c È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

d È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.

Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.
La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.
Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.
Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} \,,
\end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.
4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.
5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\theta}$.
6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 15/10/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[2].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[2].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[2].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h)\,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0)\,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R)\,.$$

01
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1 \cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s)\,,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.
a Nessuna delle altre.
b
$$s(t_1) = \alpha\,.$$
c
$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha}\,.$$
d
$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha}\,.$$

02 Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2 \Big(\frac{x_3}{h}\Big)^2 (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)\,,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.
a Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.
b Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.
c Tutti i moti sono limitati.
d Nessuna delle altre.

03
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.
a Nessuna delle altre.
b
$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s)\,.$$
c
$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s)\,.$$
d La forza peso.

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,.$$

04

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.

b Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.

c Nessuna delle altre.

d Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.

05

Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?

a Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.

b Almeno due scelte.

c Nessuna delle altre.

d Nessuna scelta.

06 Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?

a Nessuna delle altre.

b

$$I_{11}\omega_1^2 \,.$$

c

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 \,.$$

d

$$I_{11}^2\omega_1 + I_{22}^2\omega_2 + I_{33}^2\omega_3 \,.$$

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

07

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a

$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b

$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

08

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.

a Nessuna delle altre.

b $\ell = 9$.

c $\ell = 8$.

d $\ell = 7$.

09

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.

a $\ell = 11$.

b $\ell = 9$.

c $\ell = 10$.

d Nessuna delle altre.

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

10

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

b Nessuna delle altre.

c Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.

d L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

11

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t \boldsymbol{u}_1(t) + \sin t \boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.

b È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

c È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.

d Nessuna delle altre.

12

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0) .$$

a

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{w}_3(t) = 0 , \qquad \text{per ogni } t.$$

b Nessuna delle altre.

c Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.

d

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1 .$$

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

13

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2 \dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \beta^2 \dot{q}_2^2 \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2 \,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha \dot{q}_1 + \beta \dot{q}_2)^2 + \gamma \,.$$

14

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

b Nessuna delle altre.

c Vale

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2) \,.$$

d Le forze direttamente applicate sono conservative.

15

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.

a Nessuna delle altre.

b Esiste almeno un punto di equilibrio.

c Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

d Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3 \,,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.

Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.
La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.
Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.
Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} \,,
\end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.
4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.
5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot\varphi$, $\dot\theta$, $\ddot\varphi$, $\ddot\theta$.
6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

PROF. DANIELE ANDREUCCI

Prova scritta del 15/10/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[3].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[3].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[3].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

01

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t \boldsymbol{u}_1(t) + \sin t \boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a Nessuna delle altre.

b È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.

c È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

d È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.

02

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0)\,.$$

a

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

b Nessuna delle altre.

c Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.

d

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{w}_3(t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

03

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

b Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.

c Nessuna delle altre.

d L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

04

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2 \,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha\dot{q}_1 + \beta\dot{q}_2)^2 + \gamma \,.$$

d

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2\dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta\dot{q}_1\dot{q}_2 + \beta^2\dot{q}_2^2 \,.$$

05

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.

a Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

b Nessuna delle altre.

c Esiste almeno un punto di equilibrio.

d Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3 \,,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.

06

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a Vale

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2) \,.$$

b Nessuna delle altre.

c La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

d Le forze direttamente applicate sono conservative.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h) \,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0) \,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R) \,.$$

07

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.

a

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s) \,.$$

b

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s) \,.$$

c La forza peso.

d Nessuna delle altre.

08

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1\cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s) \,,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.

a

$$s(t_1) = \alpha \,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha} \,.$$

d

$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha} \,.$$

09 Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2 \left(\frac{x_3}{h}\right)^2 (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \,,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.

a Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.

b Nessuna delle altre.

c Tutti i moti sono limitati.

d Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,.$$

$\boxed{\textbf{10}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.

b Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.

c Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{11}}$ Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?

a

$$I_{11}^2 \omega_1 + I_{22}^2 \omega_2 + I_{33}^2 \omega_3 \,.$$

b

$$I_{11} \omega_1^2 \,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$I_{11}^2 \omega_1^2 + I_{22}^2 \omega_2^2 + I_{33}^2 \omega_3^2 \,.$$

$\boxed{\textbf{12}}$

Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?

a Nessuna scelta.

b Nessuna delle altre.

c Almeno due scelte.

d Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

13

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a

$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

d

$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

14

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.

a $\ell = 9$.

b $\ell = 7$.

c $\ell = 8$.

d Nessuna delle altre.

15

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.

a $\ell = 10$.

b $\ell = 11$.

c Nessuna delle altre.

d $\ell = 9$.

Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.
La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.
Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.
Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} \,, \end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.
4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.
5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\theta}$.
6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

PROF. DANIELE ANDREUCCI

Prova scritta del 15/10/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[4].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[4].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[4].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

01

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

b Le forze direttamente applicate sono conservative.

c Nessuna delle altre.

d Vale

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2)\,.$$

02

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2 \dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \beta^2 \dot{q}_2^2\,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha \dot{q}_1 + \beta \dot{q}_2)^2 + \gamma\,.$$

03

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.

a Nessuna delle altre.

b Esiste almeno un punto di equilibrio.

c Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

d Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3\,,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

$\boxed{\textbf{04}}$

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.

a $\ell = 8$.
b $\ell = 7$.
c Nessuna delle altre.
d $\ell = 9$.

$\boxed{\textbf{05}}$

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a
$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b Nessuna delle altre.

c
$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

d
$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

$\boxed{\textbf{06}}$

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.

a $\ell = 9$.
b $\ell = 11$.
c Nessuna delle altre.
d $\ell = 10$.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h) \,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0) \,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R) \,.$$

07

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1 \cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s) \,,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.

a Nessuna delle altre.

b

$$s(t_1) = \alpha \,.$$

c

$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha} \,.$$

d

$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha} \,.$$

08 Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2 \Big(\frac{x_3}{h}\Big)^2 (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \,,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.

a Nessuna delle altre.
b Tutti i moti sono limitati.
c Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.
d Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.

09

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.

a

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s) \,.$$

b

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s) \,.$$

c La forza peso.
d Nessuna delle altre.

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

10

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t \boldsymbol{u}_1(t) + \sin t \boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a Nessuna delle altre.
b È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.
c È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.
d È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

11

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.
b Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.
c Nessuna delle altre.
d L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

12

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0)\,.$$

a Nessuna delle altre.
b

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{w}_3(t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

c Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.
d

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,.$$

$\boxed{\textbf{13}}$ Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?

a

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 \,.$$

b

$$I_{11}^2\omega_1 + I_{22}^2\omega_2 + I_{33}^2\omega_3 \,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$I_{11}\omega_1^2 \,.$$

$\boxed{\textbf{14}}$

Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?

a Nessuna delle altre.

b Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.

c Nessuna scelta.

d Almeno due scelte.

$\boxed{\textbf{15}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.

b Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.

c Nessuna delle altre.

d Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.

Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.
La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.
Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.
Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} \,, \end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.
4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.
5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\theta}$.
6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 15/10/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[5].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[5].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[5].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

01

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.

a Nessuna delle altre.
b $\ell = 8$.
c $\ell = 9$.
d $\ell = 7$.

02

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.

a $\ell = 9$.
b $\ell = 10$.
c $\ell = 11$.
d Nessuna delle altre.

03

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a Nessuna delle altre.

b
$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

c
$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

d
$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

04

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0)\,.$$

a

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

b Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.

c

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{w}_3(t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

d Nessuna delle altre.

05

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t\boldsymbol{u}_1(t) + \sin t\boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.

b Nessuna delle altre.

c È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.

d È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

06

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

b L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

c Nessuna delle altre.

d Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 , \qquad s \in \boldsymbol{R} ,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h) , \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0) ,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R) .$$

07

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.

a

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s) .$$

b

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s) .$$

c Nessuna delle altre.

d La forza peso.

08

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1\cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s) ,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.

a

$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha} .$$

b

$$s(t_1) = \alpha .$$

c

$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha} .$$

d Nessuna delle altre.

09 Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2 \left(\frac{x_3}{h}\right)^2 (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) ,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.

a Nessuna delle altre.

b Tutti i moti sono limitati.

c Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.

d Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,.$$

10 Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?

a

$$I_{11}^2\omega_1 + I_{22}^2\omega_2 + I_{33}^2\omega_3 \,.$$

b

$$I_{11}\omega_1^2 \,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 \,.$$

11

Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?

a Nessuna delle altre.

b Almeno due scelte.

c Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.

d Nessuna scelta.

12

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.

b Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.

c Nessuna delle altre.

d Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

13

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

b Vale

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2)\,.$$

c Le forze direttamente applicate sono conservative.

d Nessuna delle altre.

14

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a

$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha\dot{q}_1 + \beta\dot{q}_2)^2 + \gamma\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2\dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta\dot{q}_1\dot{q}_2 + \beta^2\dot{q}_2^2\,.$$

d

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2\,.$$

15

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.

a Esiste almeno un punto di equilibrio.

b Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

c Nessuna delle altre.

d Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3\,,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.

Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.
La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.
Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.
Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} \,,
\end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.
4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.
5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\theta}$.
6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 15/10/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[6].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[6].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

01

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a

$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b

$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

c

$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

d Nessuna delle altre.

02

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.

a Nessuna delle altre.
b $\ell = 9$.
c $\ell = 10$.
d $\ell = 11$.

03

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.

a $\ell = 8$.
b $\ell = 9$.
c Nessuna delle altre.
d $\ell = 7$.

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

04

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

b L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

c Nessuna delle altre.

d Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.

05

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0)\,.$$

a

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{w}_3(t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

b Nessuna delle altre.

c Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.

d

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

06

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t\boldsymbol{u}_1(t) + \sin t\boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

b È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.

c È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.

d Nessuna delle altre.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2+h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.

Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h)\,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0)\,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R)\,.$$

$\boxed{\textbf{07}}$

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.

a

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s)\,.$$

b La forza peso.

c

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s)\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{08}}$

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1\cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s)\,,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.

a

$$s(t_1) = \alpha\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha}\,.$$

d

$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha}\,.$$

$\boxed{\textbf{09}}$ Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2\Big(\frac{x_3}{h}\Big)^2(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)\,,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.

a Nessuna delle altre.

b Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.

c Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.

d Tutti i moti sono limitati.

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

10

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a Nessuna delle altre.

b

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2 .$$

c

$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha\dot{q}_1 + \beta\dot{q}_2)^2 + \gamma .$$

d

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2\dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta\dot{q}_1\dot{q}_2 + \beta^2\dot{q}_2^2 .$$

11

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

b Nessuna delle altre.

c Le forze direttamente applicate sono conservative.

d Vale

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2) .$$

12

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.

a Esiste almeno un punto di equilibrio.

b Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3 ,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.

c Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

d Nessuna delle altre.

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h .$$

13

Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?

a Nessuna delle altre.

b Almeno due scelte.

c Nessuna scelta.

d Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.

14

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Nessuna delle altre.

b Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.

c Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.

d Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.

15 Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?

a

$$I_{11}\omega_1^2 .$$

b

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 .$$

c Nessuna delle altre.

d

$$I_{11}^2\omega_1 + I_{22}^2\omega_2 + I_{33}^2\omega_3 .$$

Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.
La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.
Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.
Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} \,,
\end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.
4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.
5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\theta}$.
6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 15/10/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[7].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

01

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.

b Nessuna delle altre.

c L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

d Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

02

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t\boldsymbol{u}_1(t) + \sin t\boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.

b Nessuna delle altre.

c È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

d È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.

03

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0) .$$

a

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1 .$$

b Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.

c Nessuna delle altre.

d

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{w}_3(t) = 0 , \qquad \text{per ogni } t.$$

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,.$$

$\boxed{\textbf{04}}$ Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?

a

$$I_{11}^2 \omega_1 + I_{22}^2 \omega_2 + I_{33}^2 \omega_3 \,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$I_{11} \omega_1^2 \,.$$

d

$$I_{11}^2 \omega_1^2 + I_{22}^2 \omega_2^2 + I_{33}^2 \omega_3^2 \,.$$

$\boxed{\textbf{05}}$

Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?

a Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.

b Almeno due scelte.

c Nessuna delle altre.

d Nessuna scelta.

$\boxed{\textbf{06}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.

b Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.

c Nessuna delle altre.

d Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

07

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.

a Nessuna delle altre.

b $\ell = 9$.

c $\ell = 8$.

d $\ell = 7$.

08

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a

$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

d

$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

09

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.

a $\ell = 11$.

b $\ell = 10$.

c $\ell = 9$.

d Nessuna delle altre.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h)\,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0)\,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R)\,.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2 \Big(\frac{x_3}{h}\Big)^2 (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)\,,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.
a Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.
b Tutti i moti sono limitati.
c Nessuna delle altre.
d Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.

$\boxed{\mathbf{11}}$

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1\cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s)\,,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.
a
$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha}\,.$$
b
$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha}\,.$$
c Nessuna delle altre.
d
$$s(t_1) = \alpha\,.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.
a La forza peso.
b Nessuna delle altre.
c
$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s)\,.$$
d
$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s)\,.$$

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

13

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a Vale
$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2) \,.$$
b Le forze direttamente applicate sono conservative.
c Nessuna delle altre.
d La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

14

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.
a Esiste almeno un punto di equilibrio.
b Nessuna delle altre.
c Se il potenziale lagrangiano è
$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3 \,,$$
ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.
d Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

15

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.
a
$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha \dot{q}_1 + \beta \dot{q}_2)^2 + \gamma \,.$$
b Nessuna delle altre.
c
$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2 \dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \beta^2 \dot{q}_2^2 \,.$$
d
$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2 \,.$$

Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.
La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.
Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.
Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} \,, \end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.
4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.
5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot\varphi$, $\dot\theta$, $\ddot\varphi$, $\ddot\theta$.
6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 15/10/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[8].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[8].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[8].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h)\,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0)\,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R)\,.$$

01

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1\cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s)\,,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.

a
$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha}\,.$$
b
$$s(t_1) = \alpha\,.$$
c
$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha}\,.$$
d Nessuna delle altre.

02 Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2\Big(\frac{x_3}{h}\Big)^2(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)\,,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.
a Tutti i moti sono limitati.
b Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.
c Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.
d Nessuna delle altre.

03

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.

a
$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s)\,.$$
b La forza peso.
c
$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s)\,.$$
d Nessuna delle altre.

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

04

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0)\,.$$

a

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{w}_3(t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

d Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.

05

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a Nessuna delle altre.

b L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

c Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

d Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.

06

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t\boldsymbol{u}_1(t) + \sin t\boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.

b Nessuna delle altre.

c È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

d È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

07

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a

$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b

$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

08

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.

a $\ell = 11$.

b $\ell = 10$.

c $\ell = 9$.

d Nessuna delle altre.

09

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.

a $\ell = 8$.

b Nessuna delle altre.

c $\ell = 7$.

d $\ell = 9$.

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,.$$

10 Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?

a

$$I_{11}\omega_1^2 \,.$$

b

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 \,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$I_{11}^2\omega_1 + I_{22}^2\omega_2 + I_{33}^2\omega_3 \,.$$

11

Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?

a Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.

b Nessuna delle altre.

c Nessuna scelta.

d Almeno due scelte.

12

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.

b Nessuna delle altre.

c Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.

d Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

13

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.

a Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3\,,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.

b Esiste almeno un punto di equilibrio.

c Nessuna delle altre.

d Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

14

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a

$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha\dot{q}_1 + \beta\dot{q}_2)^2 + \gamma\,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2\,.$$

c

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2\dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta\dot{q}_1\dot{q}_2 + \beta^2\dot{q}_2^2\,.$$

d Nessuna delle altre.

15

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

b Nessuna delle altre.

c Vale

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2)\,.$$

d Le forze direttamente applicate sono conservative.

Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.
La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.
Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.
Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi \, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi \, \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi \, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi \, \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} \,, \end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.
4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.
5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\theta}$.
6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 15/10/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[9].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,.$$

01

Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?
a Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.
b Nessuna delle altre.
c Nessuna scelta.
d Almeno due scelte.

02 Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?
a

$$I_{11}^2\omega_1 + I_{22}^2\omega_2 + I_{33}^2\omega_3 \,.$$

b

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 \,.$$

c Nessuna delle altre.
d

$$I_{11}\omega_1^2 \,.$$

03

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.
b Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.
c Nessuna delle altre.
d Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

$\boxed{\textbf{04}}$

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a

$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha \dot{q}_1 + \beta \dot{q}_2)^2 + \gamma\,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2 \dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \beta^2 \dot{q}_2^2\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2\,.$$

$\boxed{\textbf{05}}$

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a Nessuna delle altre.

b Le forze direttamente applicate sono conservative.

c Vale

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2)\,.$$

d La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

$\boxed{\textbf{06}}$

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.

a Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

b Esiste almeno un punto di equilibrio.

c Nessuna delle altre.

d Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3\,,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

07

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.

a $\ell = 10$.

b $\ell = 9$.

c $\ell = 11$.

d Nessuna delle altre.

08

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a

$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b

$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

09

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.

a $\ell = 7$.

b $\ell = 8$.

c $\ell = 9$.

d Nessuna delle altre.

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

10

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.

b L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

c Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

d Nessuna delle altre.

11

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0)\,.$$

a

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{w}_3(t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

b

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

c Nessuna delle altre.

d Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.

12

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t\boldsymbol{u}_1(t) + \sin t\boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.

b Nessuna delle altre.

c È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

d È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h)\,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0)\,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R)\,.$$

13
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1\cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s)\,,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.
a
$$s(t_1) = \alpha\,.$$
b
$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha}\,.$$
c Nessuna delle altre.
d
$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha}\,.$$

14 Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2\Big(\frac{x_3}{h}\Big)^2(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)\,,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.
a Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.
b Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.
c Tutti i moti sono limitati.
d Nessuna delle altre.

15
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.
a La forza peso.
b
$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s)\,.$$
c
$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s)\,.$$
d Nessuna delle altre.

Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.
La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.
Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.
Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} \,,
\end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.
4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.
5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot\varphi$, $\dot\theta$, $\ddot\varphi$, $\ddot\theta$.
6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.

[10].0

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

PROF. DANIELE ANDREUCCI

Prova scritta del 15/10/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[10].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[10].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[10].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[10].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

01

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t \boldsymbol{u}_1(t) + \sin t \boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.

b È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

c È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.

d Nessuna delle altre.

02

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0)\,.$$

a

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{w}_3(t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

b Nessuna delle altre.

c Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.

d

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

03

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a Nessuna delle altre.

b Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

c L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

d Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

04

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a

$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

d

$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

05

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.

a $\ell = 7$.

b $\ell = 8$.

c Nessuna delle altre.

d $\ell = 9$.

06

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.

a $\ell = 11$.

b $\ell = 10$.

c $\ell = 9$.

d Nessuna delle altre.

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,.$$

07

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.

b Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.

c Nessuna delle altre.

d Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.

08

Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?

a Nessuna scelta.

b Nessuna delle altre.

c Almeno due scelte.

d Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.

09 Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?

a Nessuna delle altre.

b

$$I_{11}\omega_1^2 \,.$$

c

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 \,.$$

d

$$I_{11}^2\omega_1 + I_{22}^2\omega_2 + I_{33}^2\omega_3 \,.$$

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h)\,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0)\,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R)\,.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.

a

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s)\,.$$

b

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s)\,.$$

c La forza peso.
d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{11}}$
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1\cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s)\,,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.

a

$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha}\,.$$

b

$$s(t_1) = \alpha\,.$$

c

$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha}\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2\Big(\frac{x_3}{h}\Big)^2(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)\,,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.
a Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.
b Nessuna delle altre.
c Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.
d Tutti i moti sono limitati.

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

13

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2 \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2\dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta\dot{q}_1\dot{q}_2 + \beta^2\dot{q}_2^2 \,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha\dot{q}_1 + \beta\dot{q}_2)^2 + \gamma \,.$$

14

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.

a Esiste almeno un punto di equilibrio.

b Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

c Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3 \,,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.

d Nessuna delle altre.

15

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a Nessuna delle altre.

b Le forze direttamente applicate sono conservative.

c Vale

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2) \,.$$

d La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.
La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.
Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.
Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} \,, \end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.
4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.
5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot\varphi$, $\dot\theta$, $\ddot\varphi$, $\ddot\theta$.
6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 15/10/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verrano considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[11].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[11].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.

Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h) \,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0) \,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R) \,.$$

01 Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2 \Big(\frac{x_3}{h}\Big)^2 (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \,,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.

a Nessuna delle altre.

b Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.

c Tutti i moti sono limitati.

d Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.

02

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.

a Nessuna delle altre.

b La forza peso.

c

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s) \,.$$

d

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s) \,.$$

03

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1\cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s) \,,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.

a

$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha} \,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha} \,.$$

d

$$s(t_1) = \alpha \,.$$

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

04

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.

a $\ell = 10$.

b Nessuna delle altre.

c $\ell = 11$.

d $\ell = 9$.

05

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a

$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b

$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

c

$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

d Nessuna delle altre.

06

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.

a $\ell = 7$.

b $\ell = 9$.

c $\ell = 8$.

d Nessuna delle altre.

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

07

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t\boldsymbol{u}_1(t) + \sin t\boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.

b È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

c È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.

d Nessuna delle altre.

08

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

b Nessuna delle altre.

c Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.

d Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

09

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0) .$$

a

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1 .$$

b Nessuna delle altre.

c Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.

d

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{w}_3(t) = 0 , \qquad \text{per ogni } t.$$

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,.$$

10

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Nessuna delle altre.

b Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.

c Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.

d Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.

11

Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?

a Nessuna delle altre.

b Nessuna scelta.

c Almeno due scelte.

d Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.

12 Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?

a

$$I_{11}\omega_1^2 \,.$$

b

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 \,.$$

c

$$I_{11}^2\omega_1 + I_{22}^2\omega_2 + I_{33}^2\omega_3 \,.$$

d Nessuna delle altre.

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

13

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

b Le forze direttamente applicate sono conservative.

c Vale
$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2) .$$

d Nessuna delle altre.

14

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a Nessuna delle altre.

b
$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2 .$$

c
$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2\dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta\dot{q}_1\dot{q}_2 + \beta^2\dot{q}_2^2 .$$

d
$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha\dot{q}_1 + \beta\dot{q}_2)^2 + \gamma .$$

15

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.

a Se il potenziale lagrangiano è
$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3 ,$$
ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.

b Nessuna delle altre.

c Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

d Esiste almeno un punto di equilibrio.

Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.
La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.
Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.
Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} \,,
\end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.
4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.
5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot\varphi$, $\dot\theta$, $\ddot\varphi$, $\ddot\theta$.
6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.

[12].0

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

PROF. DANIELE ANDREUCCI

Prova scritta del 15/10/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[12].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[12].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[12].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,.$$

01

Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?

a Nessuna delle altre.

b Nessuna scelta.

c Almeno due scelte.

d Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.

02

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Nessuna delle altre.

b Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.

c Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.

d Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.

03 Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?

a

$$I_{11}\omega_1^2 \,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$I_{11}^2\omega_1 + I_{22}^2\omega_2 + I_{33}^2\omega_3 \,.$$

d

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 \,.$$

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h) \,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0) \,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R) \,.$$

04
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.
a La forza peso.
b Nessuna delle altre.
c

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s) \,.$$

d

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s) \,.$$

05
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1\cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s) \,,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.
a Nessuna delle altre.
b

$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha} \,.$$

c

$$s(t_1) = \alpha \,.$$

d

$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha} \,.$$

06 Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2 \Big(\frac{x_3}{h}\Big)^2 (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \,,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.
a Nessuna delle altre.
b Tutti i moti sono limitati.
c Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.
d Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

07

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.

a Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

b Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3 \,,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.

c Nessuna delle altre.

d Esiste almeno un punto di equilibrio.

08

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2 \dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \beta^2 \dot{q}_2^2 \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2 \,.$$

c

$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha \dot{q}_1 + \beta \dot{q}_2)^2 + \gamma \,.$$

d Nessuna delle altre.

09

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

b Le forze direttamente applicate sono conservative.

c Vale

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2) \,.$$

d Nessuna delle altre.

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

10

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.

a $\ell = 9$.

b Nessuna delle altre.

c $\ell = 11$.

d $\ell = 10$.

11

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.

a $\ell = 8$.

b $\ell = 7$.

c $\ell = 9$.

d Nessuna delle altre.

12

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a

$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b

$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

c

$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

d Nessuna delle altre.

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

13

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0)\,.$$

a Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.
b Nessuna delle altre.
c

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

d

$$\boldsymbol{u}_1(t)\cdot\boldsymbol{w}_3(t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

14

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.
a L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.
b Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.
c Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.
d Nessuna delle altre.

15

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t\boldsymbol{u}_1(t) + \sin t\boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.
a È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.
b Nessuna delle altre.
c È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.
d È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.

La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.

Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.

Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.

Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} \,, \end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.

2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.

3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.

4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.

5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot\varphi$, $\dot\theta$, $\ddot\varphi$, $\ddot\theta$.

6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA
PROF. DANIELE ANDREUCCI
Prova scritta del 15/10/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[13].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[13].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

01

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.

a $\ell = 8$.

b $\ell = 7$.

c $\ell = 9$.

d Nessuna delle altre.

02

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.

a Nessuna delle altre.

b $\ell = 9$.

c $\ell = 10$.

d $\ell = 11$.

03

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a

$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b

$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

04

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

b Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

c Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.

d Nessuna delle altre.

05

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t\boldsymbol{u}_1(t) + \sin t\boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.

b Nessuna delle altre.

c È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.

d È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

06

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0)\,.$$

a Nessuna delle altre.

b

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

c

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{w}_3(t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

d Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,.$$

$\boxed{\textbf{07}}$ Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?

a

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 \,.$$

b

$$I_{11}\omega_1^2 \,.$$

c Nessuna delle altre.

d

$$I_{11}^2\omega_1 + I_{22}^2\omega_2 + I_{33}^2\omega_3 \,.$$

$\boxed{\textbf{08}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.

b Nessuna delle altre.

c Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.

d Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.

$\boxed{\textbf{09}}$

Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?

a Almeno due scelte.

b Nessuna delle altre.

c Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.

d Nessuna scelta.

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

10

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

b Nessuna delle altre.

c Vale

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2)\,.$$

d Le forze direttamente applicate sono conservative.

11

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2\dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta\dot{q}_1\dot{q}_2 + \beta^2\dot{q}_2^2\,.$$

d

$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha\dot{q}_1 + \beta\dot{q}_2)^2 + \gamma\,.$$

12

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.

a Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

b Nessuna delle altre.

c Esiste almeno un punto di equilibrio.

d Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3\,,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 \,, \qquad s \in \boldsymbol{R} \,,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h) \,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0) \,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R) \,.$$

$\boxed{\mathbf{13}}$
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1 \cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s) \,,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.
a Nessuna delle altre.
b
$$s(t_1) = \alpha \,.$$
c
$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha} \,.$$
d
$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha} \,.$$

$\boxed{\mathbf{14}}$
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.
a Nessuna delle altre.
b
$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s) \,.$$
c La forza peso.
d
$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s) \,.$$

$\boxed{\mathbf{15}}$ Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2 \Big(\frac{x_3}{h}\Big)^2 (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \,,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.
a Nessuna delle altre.
b Tutti i moti sono limitati.
c Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.
d Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.

Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.
La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.
Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.
Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi \, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi \, \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi \, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi \, \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} \,, \end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.
4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.
5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot\varphi$, $\dot\theta$, $\ddot\varphi$, $\ddot\theta$.
6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 15/10/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale −0,5 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

[14].0

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[14].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[14].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[14].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

01

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a Vale

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2) .$$

b Le forze direttamente applicate sono conservative.

c Nessuna delle altre.

d La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

02

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.

a Esiste almeno un punto di equilibrio.

b Nessuna delle altre.

c Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

d Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3 ,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.

03

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2 .$$

b Nessuna delle altre.

c

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2 \dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta\dot{q}_1\dot{q}_2 + \beta^2\dot{q}_2^2 .$$

d

$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha\dot{q}_1 + \beta\dot{q}_2)^2 + \gamma .$$

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2+h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.
Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h)\,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0)\,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R)\,.$$

$\boxed{\textbf{04}}$
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1\cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s)\,,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.
a

$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha}\,.$$

b

$$s(t_1) = \alpha\,.$$

c Nessuna delle altre.
d

$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha}\,.$$

$\boxed{\textbf{05}}$
Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.
a Nessuna delle altre.
b La forza peso.
c

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s)\,.$$

d

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s)\,.$$

$\boxed{\textbf{06}}$ Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2\Big(\frac{x_3}{h}\Big)^2(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)\,,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.
a Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.
b Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.
c Tutti i moti sono limitati.
d Nessuna delle altre.

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

07

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda}) \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b) \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2 \,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a

$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big) \,.$$

b

$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big) \,.$$

c

$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big) \,.$$

d Nessuna delle altre.

08

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.

a $\ell = 11$.

b Nessuna delle altre.

c $\ell = 9$.

d $\ell = 10$.

09

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.

a Nessuna delle altre.

b $\ell = 9$.

c $\ell = 8$.

d $\ell = 7$.

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

10

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t\boldsymbol{u}_1(t) + \sin t\boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a Nessuna delle altre.

b È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.

c È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.

d È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

11

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.

b Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

c L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

d Nessuna delle altre.

12

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0)\,.$$

a Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.

b

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{w}_3(t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

c

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

d Nessuna delle altre.

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,.$$

13

Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?

a Nessuna delle altre.

b Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.

c Almeno due scelte.

d Nessuna scelta.

14

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.

b Nessuna delle altre.

c Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.

d Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.

15 Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?

a

$$I_{11}\omega_1^2 \,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$I_{11}^2\omega_1 + I_{22}^2\omega_2 + I_{33}^2\omega_3 \,.$$

d

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 \,.$$

Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.
La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.
Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.
Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3 \,,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} \,,
\end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) \,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.
4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.
5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot\varphi$, $\dot\theta$, $\ddot\varphi$, $\ddot\theta$.
6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

PROF. DANIELE ANDREUCCI

Prova scritta del 15/10/2025

Nome e cognome: **Matricola:**

01 ______

02 ______

03 ______

04 ______

05 ______

06 ______

07 ______

08 ______

09 ______

10 ______

11 ______

12 ______

13 ______

14 ______

15 ______

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.
È proibita qualsiasi comunicazione con altri.
Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.
Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale $+3$ punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0{,}5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.
Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.
Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome: **Matricola:**

Soluzione del problema a risposta aperta:

[15].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[15].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[15].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2+h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.

Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h)\,, \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0)\,,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R)\,.$$

01 Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2 \Big(\frac{x_3}{h}\Big)^2 (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)\,,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.

a Tutti i moti sono limitati.

b Nessuna delle altre.

c Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.

d Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.

02

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.

a

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2\boldsymbol{N}(s) + \beta\tau\boldsymbol{B}(s)\,.$$

b La forza peso.

c

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s\boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2\boldsymbol{N}(s)\,.$$

d Nessuna delle altre.

03

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1\cos(\alpha s)\boldsymbol{T}(s)\,,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.

a

$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha}\,.$$

b Nessuna delle altre.

c

$$s(t_1) = \alpha\,.$$

d

$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha}\,.$$

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

04

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.

a Nessuna delle altre.

b Esiste almeno un punto di equilibrio.

c Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3 \,,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.

d Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.

05

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2 \dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \beta^2 \dot{q}_2^2 \,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha \dot{q}_1 + \beta \dot{q}_2)^2 + \gamma \,.$$

c

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2 \,.$$

d Nessuna delle altre.

06

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.

b Nessuna delle altre.

c Le forze direttamente applicate sono conservative.

d Vale

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2) \,.$$

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \,.$$

$\boxed{\textbf{07}}$ Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?

a

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 \,.$$

b

$$I_{11}\omega_1^2 \,.$$

c

$$I_{11}^2\omega_1 + I_{22}^2\omega_2 + I_{33}^2\omega_3 \,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{08}}$

Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?

a Nessuna scelta.

b Nessuna delle altre.

c Almeno due scelte.

d Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.

$\boxed{\textbf{09}}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.

b Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.

c Nessuna delle altre.

d Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

10

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a Nessuna delle altre.

b L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

c Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.

d Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

11

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0)\,.$$

a

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

b Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.

c Nessuna delle altre.

d

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{w}_3(t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

12

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t\boldsymbol{u}_1(t) + \sin t\boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

b Nessuna delle altre.

c È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.

d È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.

Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

$\boxed{\textbf{13}}$

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale

a
$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b Nessuna delle altre.

c
$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

d
$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

$\boxed{\textbf{14}}$

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.

a $\ell = 9$.

b $\ell = 10$.

c $\ell = 11$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{15}}$

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.

a $\ell = 8$.

b Nessuna delle altre.

c $\ell = 9$.

d $\ell = 7$.

Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.
La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.
Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.
Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3 ,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.
Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3 , \\ \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R} , \end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi) .$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.
2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.
4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.
5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot\varphi$, $\dot\theta$, $\ddot\varphi$, $\ddot\theta$.
6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.