MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

PROF. DANIELE ANDREUCCI

Prova scritta del 15/10/2025

1.

Siano $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{w}_h)$ due terne ortonormali positive mobili in $\boldsymbol{R}^3$.

01

Si assuma che $\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}_h(0)$, $h = 1, 2, 3$, all'istante $t = 0$, e che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = \boldsymbol{w}_1(t) = \cos t \boldsymbol{u}_1(t) + \sin t \boldsymbol{u}_2(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

a È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base $\mathcal{N}$.

b È possibile trovare esplicitamente la scomposizione di ciascun $\boldsymbol{u}_h(t)$ nella base fissa.

c È impossibile che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t)$ sia data come sopra.

d Nessuna delle altre.

02

Supponiamo che $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t. Si considerino due sistemi di riferimento mobili $\mathcal{S}_1 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}_2 = (\boldsymbol{X}_O, \mathcal{N})$, ove quindi il moto dell'origine è identico per entrambi. Sia $\boldsymbol{X}$ un moto.

a Le velocità relative a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ di $\boldsymbol{X}$ possono essere diverse.

b Se $\boldsymbol{X}$ è costante rispetto al sistema di riferimento fisso, lo è anche rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

c L'accelerazione di $\boldsymbol{X}$ relativa a $\mathcal{S}_1$ è uguale a quella relativa a $\mathcal{S}_2$.

d Nessuna delle altre.

03

Sia $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}(t) = 0$ per ogni t, e supponiamo che

$$\boldsymbol{u}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(0)\,.$$

a

$$\boldsymbol{u}_1(t) \cdot \boldsymbol{w}_3(t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t.$$

b Il versore $\boldsymbol{u}_1$ non è costante rispetto alla terna fissa.

c

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_1\,.$$

d Nessuna delle altre.

SOLUZIONE

I: c

Si sa che che se la velocità angolare relativa è costante in una delle due terne, deve esserlo anche nell'altra (questo segue dalla definizione).

II: c
Segue dal teorema di Coriolis.
III: a
Infatti

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_2(t)\,, \qquad \textit{per ogni } t,$$

perché

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{u}_1 = 0 + 0 = 0\,,$$

quindi le componenti di $\boldsymbol{u}_1$ in $\mathcal{N}$ sono costanti. La c non vale perché

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \times \boldsymbol{w}_1 = 0 + 0 = 0\,.$$

2.
Siano C_1 e C_2 corpi rigidi non degeneri, con coordinate locali $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^6$ rispettivamente. Con ℓ si indica il numero dei gradi di libertà del sistema formato da C_1, C_2.

04

Siano C_1 e C_2 due cilindri vincolati ad avere gli assi di simmetria di rotazione coincidenti (ossia sovrapposti alla stessa retta che non è specificata dal vincolo e può variare nel tempo), e i due centri coincidenti.
a $\ell = 8$.
b $\ell = 7$.
c $\ell = 9$.
d Nessuna delle altre.

05

C_1 e C_2 sono due coni vincolati a avere i vertici alla stessa quota.
a $\ell = 10$.
b $\ell = 11$.
c $\ell = 9$.
d Nessuna delle altre.

06

Si consideri solo il corpo C_1 che è un disco di raggio R con sistema solidale $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ è il centro del disco e $\boldsymbol{u}_3$ è ortogonale al piano del disco. Le coordinate in $\mathcal{S}$ sono denotate da $\boldsymbol{\lambda}$. La densità di C_1 è

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,,$$

con a, $b > 0$ costanti. Allora il momento d'inerzia I_{33} in $\boldsymbol{X}_O$ vale
a

$$I_{33} = \pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

b

$$I_{11} = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

c

$$I_{11} = a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,.$$

d Nessuna delle altre.

Soluzione

I: b

Il vincolo può essere riformulato così: C_1 è libero di muoversi (quindi mantiene 6 gradi di libertà), poi C_2 è vincolato ad avere l'asse parallelo a quello di C_1 (-2 gradi di libertà), e il centro sovrapposto a quello del primo cilindro (-3 gradi di libertà). Quindi

$$\ell = 6 + 6 - 2 - 3 = 7\,.$$

II: b

Il vincolo può essere riformulato così: C_1 è libero di muoversi (quindi mantiene 6 gradi di libertà), poi C_2 è vincolato ad avere il vertice sul piano di quota costante, coincidente con quella del vertice del primo (-1 gradi di libertà). Quindi

$$\ell = 6 + 6 - 1 = 11\,.$$

III: b

Si ha

$$\begin{aligned} I_{33} &= \iint\limits_{C_1} a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + b)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 \\ &= 2\pi a \int\limits_0^R (r^2 + b) r^3\,\mathrm{d}r = 2\pi a\Big(\frac{R^6}{6} + b\frac{R^4}{4}\Big)\,. \end{aligned}$$

3.

Un sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi fissi; si assuma l'ipotesi dei lavori virtuali. Sia anche $\ell = 2$, con coordinate lagrangiane $(q_1, q_2) \in Q = \boldsymbol{R}^2$, e componenti lagrangiane delle forze Q_1, Q_2.

$\boxed{\textbf{07}}$

Quale delle seguenti può essere l'energia cinetica del sistema? Qui α, β, γ sono costanti positive.

a

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha(q_1^2 + \dot{q}_1^2)\dot{q}_1^2 + \beta(q_1^2 + q_2^2 + 1)\dot{q}_2^2\,.$$

b

$$T^{\mathrm{L}} = \alpha^2\dot{q}_1^2 + 2\alpha\beta\dot{q}_1\dot{q}_2 + \beta^2\dot{q}_2^2\,.$$

c

$$T^{\mathrm{L}} = (\alpha\dot{q}_1 + \beta\dot{q}_2)^2 + \gamma\,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{08}}$

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano tali che esista il potenziale lagrangiano. Allora si può concludere che

a Vale

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2) .$$

b La lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.
c Le forze direttamente applicate sono conservative.
d Nessuna delle altre.

09

Supponiamo che le forze direttamente applicate siano conservative.
a Se il potenziale lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}) = -q_1^8 - q_2^3 ,$$

ogni moto lagrangiano del sistema è limitato (in modulo) da una costante.
b Se $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ è un punto critico per il potenziale lagrangiano, ove questo ha hessiana indefinita, allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.
c Esiste almeno un punto di equilibrio.
d Nessuna delle altre.

Soluzione

I: d

Poiché i vincoli sono fissi, T^{L} deve ridursi a una forma quadratica definita positiva nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$, con coefficienti dipendenti solo dalle $\boldsymbol{q}$.

II: d

Le a, b e c non valgono perché per esempio le forze direttamente applicate potrebbero dipendere dal tempo.

III: d

Non vale a, perché per la conservazione dell'energia

$$q_1^8 + q_2^3 \le T^{\mathrm{L}} - U^{\mathrm{L}} = E ,$$

con E dipendente dalle condizioni iniziali, ma questo non dà limitazione su q_2, da sotto. La b non vale perché $\boldsymbol{q}_0$ risulta punto sella per il potenziale. Non vale la c, perché esistono casi di forze conservative senza punti di equilibrio.

4.

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ è vincolato con vincolo liscio all'elica

$$\boldsymbol{\psi}(s) = R\cos(\alpha s)\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\alpha s)\boldsymbol{e}_2 + h\alpha s\boldsymbol{e}_3 , \qquad s \in \boldsymbol{R} ,$$

con R, $h > 0$, $\alpha = 1/\sqrt{R^2 + h^2}$, s ascissa curvilinea. Il moto è rappresentato da $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(s(t))$.

Il punto è soggetto alla forza direttamente applicata $\boldsymbol{F}$ come specificato sotto. Nel seguito k è la curvatura dell'elica, e τ la torsione (entrambe costanti come noto). La terna intrinseca è denotata da $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ e vale

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha(-R\sin(\alpha s), R\cos(\alpha s), h) , \qquad \boldsymbol{N}(s) = -(\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), 0) ,$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \alpha(h\sin(\alpha s), -h\cos(\alpha s), R) .$$

10

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Quale delle seguenti forze direttamente applicate garantisce che $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ per tutto il moto? Qui α, $\beta > 0$ sono costanti assegnate.

a

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s \boldsymbol{T}(s) + km\dot{s}^2 \boldsymbol{N}(s) + \beta\tau \boldsymbol{B}(s) \,.$$

b

$$\boldsymbol{F}(s, \dot{s}) = \alpha s \boldsymbol{T}(s) + kmv_0^2 \boldsymbol{N}(s) \,.$$

c La forza peso.

d Nessuna delle altre.

11 Sul punto è applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = c_1 t^2 \Big(\frac{x_3}{h}\Big)^2 (x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2) \,,$$

ove $c_1 > 0$ è una costante assegnata.

a Vale la conservazione dell'energia per tutti i moti.

b Esistono moti definiti in un intervallo massimale di tempi limitato.

c Tutti i moti sono limitati.

d Nessuna delle altre.

12

Sia $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. Sul punto materiale sia applicata la forza

$$\boldsymbol{F}(s) = c_1 \cos(\alpha s) \boldsymbol{T}(s) \,,$$

con $c_1 > 0$ costante assegnata. Determinare $s(t_1)$ nel primo istante $t_1 > 0$ tale che $\dot{s}(t_1) = 0$.

a

$$s(t_1) = \frac{2\pi}{\alpha} \,.$$

b

$$s(t_1) = \frac{\pi}{\alpha} \,.$$

c

$$s(t_1) = \alpha \,.$$

d Nessuna delle altre.

SOLUZIONE

I: b

La proiezione su $\boldsymbol{B}$ dell'equazione di moto dà in ogni caso

$$0 = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B} + \mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} \,.$$

Dunque nel caso b si ha $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$. Nei casi a e c questo non è vero, in generale.

II: a

Infatti, la forza non è conservativa, però

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = -c_1 t^2 (\alpha s)^2 R \boldsymbol{N}(s) \cdot (\dot{s} \boldsymbol{T}(s)) = 0 \,,$$

quindi le forze fanno lavoro nullo e vale la conservazione dell'energia. La b e la c non valgono perché l'equazione di moto dà

$$m\ddot{s} = 0\,,$$

e dunque i moti sono tutti della forma $s(t) = s(0) + t\dot{s}(0)$, $t \in \boldsymbol{R}$.
III: b
L'equazione di moto dà

$$m\ddot{s} = c_1 \cos(\alpha s)\,,$$

da cui moltiplicando per $\dot{s}$ *e integrando su* $[0, t]$ *si ha*

$$T(t) = \frac{m}{2}\dot{s}(t)^2 = \frac{c_1}{\alpha}\sin(\alpha s(t))\,.$$

Quindi $s(t_1) = \pi/\alpha$.

5.
Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare per inerzia, di polo O. Indichiamo con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale d'inerzia solidale in O, con I_{hh} i relativi momenti d'inerzia e poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h\,.$$

13
Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a Se $I_{11} = I_{22}$ tutti i moti sono rotazioni.
b Esiste una condizione sugli I_{hh} che implica che nessun moto sia una rotazione.
c Se il momento angolare si mantiene costante nella base solidale, allora $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale.
d Nessuna delle altre.
14
Supponiamo che C sia un disco omogeneo. Quali scelte del polo O (come punto solidale) implicano che tutti i moti polari per inerzia siano rotazioni?
a Solo quella di O come centro del disco e nessun'altra.
b Almeno due scelte.
c Nessuna scelta.
d Nessuna delle altre.
15 Quale delle seguenti quantità si mantiene costante lungo ciascun moto?
a

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2\,.$$

b

$$I_{11}^2\omega_1 + I_{22}^2\omega_2 + I_{33}^2\omega_3\,.$$

c

$$I_{11}\omega_1^2\,.$$

d Nessuna delle altre.

SOLUZIONE

I: c

Il caso in a è vero se e solo tutti i momenti principali sono uguali tra di loro. La b non vale perché esistono sempre le rotazioni intorno agli assi principali, e la c vale perché il momento angolare è sempre costante nella terna fissa, ma è solidale solo se è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$, ossia se $\boldsymbol{\omega}$ è principale.

II: b

Tutti i moti polari per inerzia sono rotazioni se e solo se i 3 momenti principali sono uguali tra di loro. Questo nel caso del disco omogeneo avviene almeno nelle due posizioni sull'asse ortogonale al disco nel centro, a distanza tale che per il teorema di Huygens, i due momenti uguali sugli assi paralleli al disco siano uguali a quello sull'asse ortogonale. Infatti la terna principale in questi punti è uguale a quella principale nel centro di massa, per un noto risultato teorico.

III: a

Gli integrali primi scalari sono

$$|\boldsymbol{L}_O|^2 = I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 = c\,, \quad T = \frac{1}{2}(I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 + I_{33}\omega_3^2) = c\,.$$

6. Un sistema di corpi rigidi è costituito dalla circonferenza materiale γ di raggio R, massa M e centro O, e dall'elemento materiale $(\boldsymbol{X}_P, m)$.

La circonferenza è vincolata a mantenere il diametro solidale AB sull'asse fisso x_1, in modo che il centro O coincida con l'origine del sistema di riferimento fisso, le cui coordinate indichiamo con (x_h). In particolare $\boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{X}_B$.

Il punto $\boldsymbol{X}_P$ è vincolato a appartenere alla circonferenza γ.

Sul sistema agiscono la forza peso diretta come $-\boldsymbol{e}_3$ e la forza applicata sull'elemento $\boldsymbol{X}_P$ data da

$$\boldsymbol{F}_P^1 = \beta \boldsymbol{u}_3\,,$$

ove $\boldsymbol{u}_3$ è il versore della terna solidale alla circonferenza specificato sotto; $\beta > 0$ è una costante.

Si scelgano come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, ove la terna solidale a γ è data da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2 &= \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_3\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3\,, \\ \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2R}\,, \end{aligned}$$

in modo che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale al piano di γ, e

$$\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}(\varphi, \theta) = R\cos\theta \boldsymbol{u}_1(\varphi) + R\sin\theta \boldsymbol{u}_2(\varphi)\,.$$

1) Scrivere l'energia cinetica lagrangiana del sistema.

2) Scrivere le componenti lagrangiane delle forze.
3) Scrivere le equazioni di Lagrange e dimostrare che, con condizioni iniziali opportune, esistono moti in cui θ è costante e φ non lo è.
4) Determinare tutti i possibili punti di equilibrio, ossia le soluzioni costanti delle equazioni di moto, all'interno del dominio delle coordinate lagrangiane.
5) Usando la seconda equazione globale della dinamica dei sistemi, scrivere il momento risultante delle reazioni vincolari che agiscono sulla circonferenza materiale, in funzione di φ, θ, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\theta}$.
6) Assumiamo solo in questa domanda che φ sia assegnato come $\varphi(t) = ct$, $t \in (-\pi/c, \pi/c)$; ossia il vincolo su $\boldsymbol{X}_P$ è mobile. Calcolare la matrice iacobiana della parametrizzazione lagrangiana di $\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{L}}$ data sopra, e dimostrare che ha rango massimo.
SOLUZIONE
1) Calcoliamo

$$T^{\mathrm{L}} = T^{\mathrm{L}}_{\gamma} + T^{\mathrm{L}}_{P} .$$

Dato che il moto di γ è una rotazione di asse $\boldsymbol{u}_1$ con $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_1$, si ha

$$T^{\mathrm{L}}_{\gamma} = \frac{I_{11}}{2}\dot{\varphi}^2 .$$

Per $\boldsymbol{X}_P$ si calcola

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{L}}_P = R\dot{\theta}(-\sin\theta\boldsymbol{u}_1 + \cos\theta\boldsymbol{u}_2) + R\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{u}_3 ,$$

perché

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial\varphi} = \boldsymbol{u}_3 , \qquad \frac{\partial \boldsymbol{u}_3}{\partial\varphi} = -\boldsymbol{u}_2 .$$

Quindi

$$T^{\mathrm{L}}_P = \frac{m}{2}R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2(\sin\theta)^2) .$$

2) Le componenti lagrangiane della forza peso si possono calcolare usando il potenziale conservativo

$$U_{\mathrm{peso}} = -Mgx_{3O} - mgx_{3P} = -mgx_{3P} ,$$

che dà il potenziale lagrangiano

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{peso}}(\varphi,\theta) = -mgR\sin\varphi\sin\theta .$$

Quindi

$$Q^{\mathrm{peso}}_{\varphi} = \frac{\partial U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{peso}}}{\partial\varphi} = -mgR\cos\varphi\sin\theta ,$$
$$Q^{\mathrm{peso}}_{\theta} = \frac{\partial U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{peso}}}{\partial\theta} = -mgR\sin\varphi\cos\theta .$$

La forza $\boldsymbol{F}^1_P$ non è conservativa. Calcoliamo direttamente

$$Q^1_{\varphi} = \boldsymbol{F}^1_P \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_P}{\partial\varphi} = \beta\boldsymbol{u}_3 \cdot (R\sin\theta\boldsymbol{u}_3) = \beta R\sin\theta ,$$

e

$$Q^1_\theta = \boldsymbol{F}^1_P \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_P}{\partial \theta} = \beta \boldsymbol{u}_3 \cdot (R\boldsymbol{T}) = 0\,.$$

Si noti che perciò non esiste il potenziale lagrangiano di $\boldsymbol{F}^1_P$.
3) Le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I_{11}\dot\varphi + mR^2\dot\varphi(\sin\theta)^2] &= -mgR\cos\varphi\sin\theta + \beta R\sin\theta\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot\theta] - \frac{m}{2}R^2\dot\varphi^2\sin(2\theta) &= -mgR\sin\varphi\cos\theta\,.\end{aligned}$$

Se $\theta(t) = \pi/2$ *per ogni* t*, la II equazione è soddisfatta, e la I equazione diviene*

$$(I_{11} + mR^2)\ddot\varphi = -mgR\cos\varphi + \beta R\,,$$

che ha unica soluzione non costante con le opportune condizioni iniziali.
4) Dalle equazioni di Lagrange segue che (φ,θ) *è una soluzione costante se e solo se*

$$\begin{aligned}-mgR\cos\varphi\sin\theta + \beta R\sin\theta &= 0\,,\\ -mgR\sin\varphi\cos\theta &= 0\,.\end{aligned}$$

La I equazione implica che i) $\sin\theta = 0$ *oppure ii)* $\sin\theta \neq 0$ *e* $\cos\varphi = \beta/mg$.
Se vale i), necessariamente $\theta = 0$ *e* $\cos\theta = 1$*, quindi dalla II equazione otteniamo* $\sin\varphi = 0$ *e perciò* $\varphi = 0$*. Si ottiene quindi l'unica posizione di equilibrio* (0,0).
Se vale ii), deve essere $\beta/mg < 1$ e $\varphi \in \{-\varphi_0\,,\varphi_0\}$*, ove* $\varphi_0 = \arccos(\beta/mg)$*. Quindi* $\sin\varphi \neq 0$ *e deve essere per la II equazione* $\cos\theta = 0$*, ossia* $\theta \in \{-\pi/2\,,\pi/2\}$*. Si ottengono le 4 soluzioni* $(\pm\varphi_0, \pm\pi/2)$*, con segni indipendenti.*
5) Calcoliamo il momento delle quantità di moto

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\sigma}_O(\dot\varphi\boldsymbol{u}_1) = I_{11}\dot\varphi\boldsymbol{u}_1\,,$$

ove I_{11} *è il primo momento d'inerzia della circonferenza in* O*. Dalla II equazione globale si ha*

$$I_{11}\ddot\varphi\boldsymbol{u}_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{ext}}_O + \boldsymbol{M}^O_{\mathrm{vin}}\,.$$

Ma il momento risultante delle forze direttamente applicate alla circonferenza, ossia il peso, è nullo, come è noto, perché il centro di massa della circonferenza è in O.
6) Si ha per definizione che la matrice richiesta è

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_P}{\partial\theta}(\theta,t) = -R\sin\theta\boldsymbol{u}_1(ct) + R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(ct)\,,$$

ed è quindi in realtà un vettore, evidentemente mai nullo. Quindi il suo rango è 1.
R. *1)*

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{I_{11}}{2}\dot\varphi^2 + \frac{m}{2}R^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2(\sin\theta)^2)\,.$$

2)

$$Q_\varphi = -mgR\cos\varphi\sin\theta + \beta R\sin\theta\,,\quad Q_\theta = -mgR\sin\varphi\cos\theta\,.$$

3)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I_{11}\dot\varphi + mR^2\dot\varphi(\sin\theta)^2] = -mgR\cos\varphi\sin\theta + \beta R\sin\theta\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\dot\theta] - \frac{m}{2}R^2\dot\varphi^2\sin(2\theta) = -mgR\sin\varphi\cos\theta\,.$$

4) (0,0) *e, solo se* $\beta < mg$*, anche* $(\pm\varphi_0, \pm\pi/2)$ *con segni indipendenti, ove* $\varphi_0 = \arccos(\beta/mg)$.

5)

$$\boldsymbol{M}^O_{\mathrm{vin}} = I_{11}\ddot\varphi\boldsymbol{u}_1\,.$$

6)

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_P}{\partial\theta}(\theta,t) = -R\sin\theta\boldsymbol{u}_1(ct) + R\cos\theta\boldsymbol{u}_2(ct) \neq 0\,, \qquad \theta\in(-\pi,\pi)\,.$$