DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI MECCANICA RAZIONALE A.A. 2025-2026 CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

DANIELE ANDREUCCI
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo MMM si riferiscono al testo *Meccanica Razionale, Modelli Matematici per l'Ingegneria*, D. Andreucci, (Independently published (5 settembre 2022) disponibile su www.amazon.it).
La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m, nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

1. Lunedì 22/09/2025
(Aula 14: 14-17)

Presentazione del corso.
Moti. Basi ortonormali. Prodotto scalare in componenti di basi ortonormali. Matrici di cambiamento di base $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$. Si ha $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}{}^{\mathrm{t}}$.

Teorema 1.1. (s.d.) *Se $\boldsymbol{a}$ ha componenti $\boldsymbol{\lambda}$ in $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{\mu}$ in $\mathcal{N}$, allora $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}\boldsymbol{\lambda}$.*

Definizione di matrice ortogonale.

Teorema 1.2. (s.d.) *Le matrici di cambiamento di base sono ortogonali: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = (\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}})^{-1}$. Quindi il loro determinante ha valore assoluto pari a 1.*

Teorema 1.3. (s.d.) *Composizione delle matrici del cambiamento di base: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{P}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{P}}$.*

Definizione di base ortonormale positiva. Esempi in $\boldsymbol{R}^2$. Le componenti in una base ortonormale sono date dal prodotto scalare.

Esercizio 1.4. 5/100
Caratterizzazione delle matrici ortogonali in $\boldsymbol{R}^2$. □

Per casa 1.5. Si considerino la base ortonormale standard $(\boldsymbol{e}_h)$ e quella data da:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = -\frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

Si esprima il vettore

$$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3$$

nella base $(\boldsymbol{u}_h)$, sia calcolando e usando la matrice di cambiamento di base, sia usando direttamente la definizione di $(\boldsymbol{u}_h)$. □

Prodotto vettoriale e triplo in $\boldsymbol{R}^3$.

Teorema 1.6. *Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è una base ortonormale positiva di $\boldsymbol{R}^3$, allora*

$$\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{u}_2\,, \quad \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1\,.$$

Corollario 1.7. *Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è una base ortonormale positiva,*

$$\boldsymbol{a} = \sum_{h=1}^{3}\alpha_h\boldsymbol{u}_h\,, \quad \boldsymbol{b} = \sum_{h=1}^{3}\beta_h\boldsymbol{u}_h\,, \quad \textit{si ha} \quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\,.$$

Per casa 1.8. Si consideri la base ortonormale data da:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = -\frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

Si calcoli il prodotto vettoriale

$$(3\boldsymbol{u}_1 + 7\boldsymbol{u}_2) \times (4\boldsymbol{u}_2 - 5\boldsymbol{u}_3)\,.$$

□

Definizione di sistema di riferimento fisso e mobile in $\boldsymbol{R}^3$. Coordinate. Velocità e accelerazione relativa.

Esempio 1.9. Moto $\boldsymbol{X}(t) = R\boldsymbol{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ con origine mobile nell'origine del sistema fisso e base ruotante intorno all'asse $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 9.1, 10.1, 10.2, 10.3.

2. Martedì 23/09/2025
(Aula 14: 15-17)

Esempio 2.1. Moto $\boldsymbol{X}(t) = (L + ct)\boldsymbol{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ dell'ultimo esempio della lezione precedente. □

Definizione di velocità e accelerazione relativa a un sistema di riferimento mobile (usando la rappresentazione in coordinate nel sistema mobile).

Per casa 2.2. Calcolare velocità e accelerazione relativa nell'Esempio precedente. □

Funzioni vettoriali costanti in una terna mobile (e quindi di lunghezza costante); moti solidali con un sistema di riferimento mobile. Regole di derivazione per la derivata relativa; derivata relativa di uno scalare.

Teorema 2.3. *Data una terna mobile* $(\boldsymbol{u}_h)$ *esiste una unica funzione* $\boldsymbol{\omega}$ *tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_h \,, \qquad h = 1\,, 2\,, 3\,.$$

$\boldsymbol{\omega}$ si dice velocità angolare della terna.

Teorema 2.4. *Per ogni* $\boldsymbol{a} \in C^1(I)$ *si ha*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}\,.$$

Esercizio 2.5. La terna

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

ha $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$. □

Per casa 2.6. MMM/10.36 Trovare la velocità angolare della rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_1$ e a $\boldsymbol{u}_2$. □

Teorema del moto relativo sulla scomposizione della velocità nel sistema fisso. Velocità di trascinamento.

Esercizio 2.7. Ricostruzione di $\boldsymbol{v}$ data $\boldsymbol{v}_{\mathcal{S}}$ (come in 1/340). □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.2, 10.3, 10.4, 10.5.

3. Giovedì 25/09/2025
(Aula 14: 14-17)

Teorema di Coriolis sulla scomposizione dell'accelerazione nel sistema fisso. Accelerazione di trascinamento e di Coriolis.

Per casa 3.1. MMM/10.43 (sistema di riferimento terrestre) ☐

Dinamica relativa; le forze apparenti di trascinamento e di Coriolis.

Esercizio 3.2. Il moto circolare con il vettore velocità angolare. MMM/10.44 (epiciclo) ☐

Teorema 3.3. *La velocità angolare di $\mathcal{M}$ è costante in $\mathcal{M}$ se e solo se è costante; ha direzione costante in $\mathcal{M}$ se e solo se ha direzione costante.*

Definizione di rotazione e rotazione costante per una terna. Definizione di moto polare e rotazione (e rotazione costante) per un sistema mobile di riferimento.
Teorema della ricostruzione di terne mobili data la velocità angolare (s.d.).

Esercizio 3.4. Una terna si muove di rotazione (intorno a $\boldsymbol{u}_3$) se e solo se $\boldsymbol{\omega} = \alpha(t)\boldsymbol{u}_3$ o $\boldsymbol{\omega} = \alpha(t)\boldsymbol{e}_3$ (terna fissa e mobile coincidenti a $t = 0$).
9/340, 37/340 ☐

Per casa 3.5. 1/340, 15/340, 21/340 ☐

Grafico e orbita di un moto. Retta tangente.

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.2, 10.5, 10.6, 12.1.

4. Lunedì 29/09/2025
(Aula 14: 14-17)

Teorema 4.1. (s.d.) *Se un moto ammette retta tangente, allora la sua derivata è il vettore tangente. Viceversa, se un moto ha derivata diversa da zero, allora ammette retta tangente.*

Per casa 4.2. Consideriamo la curva data dall'intersezione di due superficie:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0\,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0\,;$$

dare una definizione di vettore tangente alla curva indipendente da una sua eventuale parametrizzazione (senza dimostrazioni). □

Esercizio 4.3. Equazioni e disequazioni differenziali ordinarie.
Il caso di $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0$. □

Definizione di punto materiale. Legge del moto.
Problema di Cauchy o ai valori iniziali. Funzioni localmente lipschitziane. Criterio di lipschitzianità mediante le derivate. Soluzioni massimali.

Teorema 4.4. (s.d.) *La soluzione massimale del problema di Cauchy per l'equazione* $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}, t)$ *esiste ed è unica se* $\boldsymbol{F}$ *è continua in un aperto* $A \subset \boldsymbol{R}^7$ *e localmente lipschitziana rispetto a* $\boldsymbol{X}$, $\dot{\boldsymbol{X}}$.
Il suo intervallo di definizione (σ, Σ) *è aperto e per* $t \to \Sigma-$ *si deve avere che* $(t, \boldsymbol{X}(t), \dot{\boldsymbol{X}}(t))$ *diventa illimitata oppure la sua distanza da* ∂A *tende a* 0.

Esercizio 4.5. MMM/1.24: Risoluzione completa del problema

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -k\boldsymbol{X}\,, \qquad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}_0\,, \qquad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{v}_0\,.$$

□

Esercizio 4.6. Non unicità per il problema

$$\dot{x} = -k\sqrt{|x|}\,, \qquad x(\bar{t}) = 0\,,$$

in cui non è soddisfatta l'ipotesi di lipschitzianità. □

Esercizio 4.7. MMM/1.25: Prima integrazione del problema

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\gamma m \frac{\boldsymbol{X}}{|\boldsymbol{X}|^3}\,, \qquad \boldsymbol{X}(0) = L\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = -c\boldsymbol{e}_1\,.$$

Uso del teorema di unicità. L'intervallo di definizione è limitato a destra ($\Sigma < +\infty$). □

Per casa 4.8. 1) Trovare tutte le soluzioni di

$$\dot{X}_1 = -X_2\,, \qquad \dot{X}_2 = X_1\,.$$

2) Riduzione del problema precedente in coordinate polari. □

Esercizio 4.9. Non unicità per il problema

$$\dot{x} = -k\sqrt{|x|}\,, \qquad x(\bar{t}) = 0\,,$$

in cui non è soddisfatta l'ipotesi di lipschitzianità. □

Per casa 4.10. 1/100, 2/100, 3/100, 4/100 □

Energia cinetica T di un punto materiale.

Teorema 4.11 (del lavoro o dell'energia cinetica)**.** *Se* $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}$, *allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{X}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.3, 1.5, 1.8.

5. Martedì 30/09/2025
(Aula 14: 15-17)

Esercizio 5.1. MMM/1.45: Risolvere il problema di Cauchy:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{B} \times \dot{\boldsymbol{X}}\,,\\
\boldsymbol{X}(0) &= L\boldsymbol{e}_1\,,\\
\dot{\boldsymbol{X}}(0) &= c\boldsymbol{e}_2\,.
\end{aligned}
$$

Qui $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_3$, $B > 0$, $L > 0$, $c > 0$. Integrale dell'energia cinetica. □

Riduzione dell'ordine di un sistema differenziale, aumentando il numero delle variabili.
Dipendenza continua. Necessità di assumere intervalli limitati.

Esercizio 5.2. Il caso $\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{F}$ globalmente lipschitziana. □

Esercizio 5.3. Integrale generale del sistema lineare a coefficienti costanti del primo ordine

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{X}\,,$$

nell'ipotesi che la matrice $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ abbia una base di autovettori. Studio della stabilità dell'origine (è stabile se e solo se tutti gli autovalori sono non positivi o con parte reale non positiva se complessi). □

Per casa 5.4. Dimostrare la dipendenza continua per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = -k\boldsymbol{X}$ e per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = k\boldsymbol{X}$, m, $k > 0$.
MMM/1.49 □

Sistemi differenziali autonomi. Traslazione nel tempo delle soluzioni.
Definizione di punto di equilibrio $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}} \in \boldsymbol{R}^3$ per un sistema autonomo di primo o di secondo ordine.
Il punto $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}$ è di equilibrio se e solo se la funzione costante $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}$ è soluzione.

Esercizio 5.5. Andamento qualitativo delle soluzioni di $\dot{x} = x(1 - x)$. □

Per casa 5.6. Andamento qualitativo delle soluzioni di $\dot{x} = \sin x$.
MMM/1.69: Si dimostri che le sole soluzioni periodiche di

$$\dot{x} = f(x)\,, \qquad f \in C^1(\boldsymbol{R})\,,$$

sono le costanti. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.5, 1.6, 1.7, 1.8.

6. Giovedì 02/10/2025
(Aula 14: 14-17)

Definizione di equilibrio stabile.

Esercizio 6.1. Il caso $\boldsymbol{F} = 0$.
MMM/1.58: Tutti i punti di $\boldsymbol{R}^3$ sono di equilibrio stabile per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\mu\dot{\boldsymbol{X}}$, m, $\mu > 0$.
Il caso di $m\ddot{X} = -\mu(1+t^2)^{-1}\dot{X}$, m, $\mu > 0$. □

Per casa 6.2. 1) MMM/1.59: Studiare la stabilità dell'equilibrio per $m\ddot{X} = -\mu\dot{X}^{1+q}$, m, μ, $q > 0$. Si assuma $\dot{X} > 0$.
2) I casi $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \pm k\boldsymbol{X}$, $k > 0$.
3) MMM/1.64
4) MMM/1.46: Risolvere tutti i problemi di Cauchy

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\mu(t)\dot{\boldsymbol{X}}\,, \quad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}_0\,, \quad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{v}_0\,;$$

qui $\mu(t) > 0$ è una funzione continua su $\boldsymbol{R}$. Dare una condizione su μ tale che $T(t) \not\to 0$ per $t \to +\infty$. □

Esempio di integrazione completa nel teorema dell'energia cinetica. Definizione di forza conservativa.

Teorema 6.3. *Se $\boldsymbol{F} = \nabla U$, allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(\tau)) \cdot \dot{\boldsymbol{X}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = U(\boldsymbol{X}(t_1)) - U(\boldsymbol{X}(t_0))\,.$$

Definizione di energia (meccanica).

Teorema 6.4. *Se un moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{F}$ è conservativa con potenziale U, allora l'energia*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

si mantiene costante durante il moto.

Teorema 6.5. *Se un moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_0$, con $\boldsymbol{F}$ conservativa con potenziale U, e $\boldsymbol{F}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{X}} = 0$, allora l'energia*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

si mantiene costante durante il moto.

Esercizio 6.6. Conservazione dell'energia come strumento per ottenere informazioni sul moto. Il caso della forza elastica.
7/120, 9/120 □

Per casa 6.7. MMM/2.9
1/120, 3/120, 8/120 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.7, 2.1, 2.2.

7. Lunedì 06/10/2025
(Aula 14: 14-17)

Campi di forze posizionali e conservativi (potenziali). Esempi. Un campo conservativo è chiuso, ma non vale l'implicazione contraria.

Teorema 7.1 (Criterio necessario e sufficiente della circuitazione nulla.)**.** (s.d.) *Un campo $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in A \subset \boldsymbol{R}^3$ è conservativo in A se e solo se il suo integrale su tutte le curve chiuse contenute in A è nullo.*

Semplicemente connessi in $\boldsymbol{R}^2$ e $\boldsymbol{R}^3$.

Teorema 7.2. (s.d.) *Un campo chiuso in un aperto semplicemente connesso A è conservativo in A.*

Integrali primi.

Per casa 7.3. MMM/2.22 (esempio), MMM/2.23
Sia $\varphi(x, y)$ un'anomalia polare in $\boldsymbol{R}^2$; si trovi $\nabla \varphi$ e se ne deduca che il campo

$$-\frac{y}{x^2 + y^2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad (x, y) \neq (0, 0) \,,$$

ha per potenziale locale l'anomalia polare, ma non in tutto $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. □

Piano delle fasi di moti 1-dimensionali conservativi. Passaggio da $m\ddot{x} = f(x) = U'(x)$ al sistema equivalente

$$\dot{x} = p \,, \qquad \dot{p} = \frac{1}{m} f(x) \,.$$

Orbite. Le orbite giacciono sulle curve che hanno la forma

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))} \,, \quad x \in J(E) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid E + U(x) \geq 0\} \,.$$

Ciascuna curva può contenere più orbite.

Esercizio 7.4. Il diagramma di fase di $m\ddot{x} = -kx$ e di $m\ddot{x} = -k \sin x$.
Punti di inversione, di equilibrio stabili e instabili riconosciuti dal ritratto di fase. □

Per casa 7.5. 21/150, 25/150 □

Teorema 7.6. *Se due orbite si intersecano, allora coincidono.*

Teorema 7.7. *Se un'orbita si autointerseca, allora corrisponde a una soluzione periodica.*

Teorema 7.8. (s.d.) *Se $X \in C^2((\sigma, \Sigma))$ è una soluzione massimale di $m\ddot{X} = F(X)$ e*

$$X(t) \to x_0 \,, \qquad t \to \Sigma- \,, \qquad |\dot{X}(t)| \leq C \,, \qquad t \in (\delta, \Sigma) \,,$$

allora $\Sigma = +\infty$ e $F(x_0) = 0$. Se anche $\dot{X}(t) \to p$ per $t \to +\infty$, allora $p = 0$.

Per casa 7.9. È possibile fare tutti gli esercizi del gruppo 150.
6/150, 16/150, 18/150, 27/150 □

Energia come funzione di due variabili:

$$W(x, p) = \frac{m}{2}p^2 - U(x) \,.$$

Punti di equilibrio di $m\ddot{x} = U'(x)$ sono i punti critici del potenziale e corrispondono ai punti $(\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}, 0)$ critici per W. Questi ultimi possono essere sella o minimi. Le orbite del piano delle fasi (x, p) giacciono su curve di livello di W. Curve di livello di W vicino a massimi e minimi di U e confronto con il diagramma di fase.

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.3, 2.4, 2.5, 2.6.

8. Martedì 07/10/2025
(Aula 14: 15-17)

Teorema 8.1. *(Dirichlet) Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X)$.*

Teorema 8.2. *Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X) - r(X, \dot{X})\dot{X}$, ove $r \geq 0$.*

Teorema 8.3. *(Dimensione $N > 1$). Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \nabla U(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})$, ove $\boldsymbol{h} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \leq 0$.*

Per casa 8.4. 1) 19/660, 39/660, 50/660, 52/660, 56/660
2) Sia $f \in C^2(\boldsymbol{R})$. Trovare condizioni sufficienti su $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ perché il moto piano $m\boldsymbol{a} = \nabla U$ abbia in $(0,0)$ un punto di equilibrio stabile, ove

$$U(x_1, x_2) = f(x_1^2 + x_2^2)\,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

3) Dimostrare che se $U(x) = U(0)$ per ogni $x \in [0,1]$ allora ogni $x \in [0,1]$ è di equilibrio instabile. □

Esercizio 8.5. 6/150 □

Determinazione della stabilità dei punti critici del potenziale.

Esercizio 8.6. 17/660 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.6.

9. Giovedì 09/10/2025
(Aula 14: 14-17)

Sistemi di punti materiali $(\boldsymbol{X}_h, m_h)$, $h = 1, \dots, n$ e sistema differenziale delle loro equazioni di moto.
Centro di massa e involucro convesso. Quantità di moto, coincidente con $m\boldsymbol{v}_G$; momento delle quantità di moto.
Definizione di forza totale $\boldsymbol{F}$ e momento delle forze $\boldsymbol{M}_A$.

Teorema 9.1. *(Equazioni globali) Valgono:*

$$m\ddot{\boldsymbol{X}}_G = \boldsymbol{F}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{P} \times \dot{\boldsymbol{X}}_A\,.$$

Sotto le ipotesi opportune sulle forze interne, le equazioni globali valgono ancora se in $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{M}_A$ si tiene conto solo delle forze esterne.
Le equazioni globali in genere non determinano il moto del sistema di punti materiali.

Esercizio 9.2. Due punti che si attraggono a vicenda con forze elastiche. □

Sistemi di forze conservative $\boldsymbol{F}_i$, cioè tali che

$$\boldsymbol{F}_i = \nabla_{\boldsymbol{x}_i} U(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)\,.$$

Energia cinetica e meccanica del sistema.
Conservazione dell'energia, anche in presenza di forze non conservative di lavoro complessivo nullo.

Teorema 9.3. *Se un sistema di punti materiali liberi è soggetto alle equazioni di moto $m_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_i^0$ ove il sistema delle forze $\boldsymbol{F}_i$ è conservativo con potenziale U, e*

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^0 \cdot \boldsymbol{v}_i = 0 \qquad \textit{in ogni istante}$$

allora l'energia meccanica $T - U$ si conserva lungo i moti.

Esercizio 9.4. MMM/1.64
MMM/5.19(B)
46/660 □

Per casa 9.5. MMM/5.19
64/620, 66/620 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.1, 5.2.

10. Lunedì 13/10/2025
(Aula 14: 14-17)

Esempi di vincoli per un singolo moto: superficie, curva come intersezione di due superficie.
Calcolo dei gradi di libertà mediante i parametri necessari o mediante le equazioni vincolari. Vincolo per due moti di essere allineati con l'origine; una delle componenti del prodotto vettoriale (che devono essere tutte nulle) risulta combinazione lineare delle altre.
Vincoli in generale. Configurazioni compatibili. Esempi. Vincoli fissi e mobili.

Esercizio 10.1. MMM/5.28: Piano e sfera: i 3 casi possibili. □

Per casa 10.2. MMM/5.21, MMM/5.25 □

Teorema del Dini per 1 vincolo scalare e per $m > 1$ vincoli scalari (s.d.).
Esempi di applicazione del teorema del Dini (vincoli lineari). Calcolo dei gradi di libertà.
Coordinate dipendenti e indipendenti.

Per casa 10.3. Vincolo di parallelismo per due moti (4 gradi di libertà) con il teorema del Dini.
Coordinate dipendenti e indipendenti sulla sfera e sull'iperboloide

$$x_3^2 + 1 = x_1^2 + x_2^2 \,.$$

MMM/5.32 (Due superfici) □

Esercizio 10.4. 52/660 □

Definizione di vincolo olonomo regolare. Numero dei gradi di libertà.

Esercizio 10.5. MMM/5.38 □

Per casa 10.6. 1/310, 2/310, 3/310, 4/310
MMM/5.39, MMM/5.40 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.3, 5.4, 5.5, 5.6.

11. Martedì 14/10/2025
(Aula 14: 15-17)

Coordinate lagrangiane e rappresentazione lagrangiana del moto. Moto lagrangiano. Velocità in coordinate lagrangiane per vincoli fissi e mobili.

Esercizio 11.1. MMM/6.5: Esempio di un punto vincolato a una sfera di raggio variabile e di un punto vincolato a essere allineato con il primo e con l'origine. □

Per casa 11.2. Mostrare che le coordinate indipendenti sono anche coordinate lagrangiane.
MMM/5.44
26/620, 1/630, 9/630, 15/630 (scrittura della velocità in rappresentazione lagrangiana) □

Atti di moto (ossia derivata nel tempo del vettore delle coordinate locali $\boldsymbol{z}$). Definizione di spazio tangente; spostamenti virtuali. Se il vincolo è fisso la concatenazione di tutti i vettori velocità appartiene allo spazio tangente. Il vettore $\dot{\boldsymbol{q}}$ può assumere qualunque valore.

Teorema 11.3. *Gli atti di moto costituiscono lo spazio affine*

$$V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} + \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial t}\,.$$

Spostamenti virtuali e effettivi, e loro significato. Coincidono per i vincoli fissi. Caso dei vincoli elementari di curva e superficie.

Per casa 11.4. 1) Trovare lo spazio tangente per: i) due punti vincolati a essere a distanza costante; ii) MMM/6.24 un punto vincolato al piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0\,.$$

2) 66/620 (spazio tangente) □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.7, 6.1, 6.3.

12. Giovedì 16/10/2025
(Aula 14: 14-17)

Definizione di spazio tangente.

Esercizio 12.1. MMM/6.24 Trovare lo spazio tangente per un punto vincolato al piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0 \,.$$

□

Vale per ogni $j \in \{1\,, \dots\,, \ell\}$, $k \in \{1\,, \dots\,, m\}$

$$\nabla_{\boldsymbol{z}}\, f_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial q_j} = 0 \,.$$

Definizione di spazio normale come sottospazio di $\boldsymbol{R}^{n_c}$ generato dai $\nabla_z\, f_k$.

Teorema 12.2. *Lo spazio normale è l'ortogonale dello spazio tangente.*

In particolare lo spazio tangente è indipendente dalla parametrizzazione lagrangiana.

Esercizio 12.3. MMM/6.21 Calcolo dello spazio normale e tangente nei casi:
1) superficie ($n_c = 3$, $m = 1$),
2) curva ($n_c = 3$, $m = 2$),
3) due punti vincolati a avere distanza costante. □

Per casa 12.4. 15/630
MMM/6.24 Trovare lo spazio normale per un punto vincolato al piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0 \,.$$

□

Esercizio 12.5. MMM/7.1 Sistema vincolato di due punti, con $n_c = 6$, $m = 1$,

$$f_1(z_1, \dots, z_6) = 2z_1 - z_4 = 0 \,.$$

Inoltre le forze sono $\boldsymbol{F}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{F}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{e}_1$. Equazioni di moto; ipotesi sulle reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$. Lavoro complessivo nullo delle rezioni vincolari in questo caso, ma ciascuna ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^i$ fa lavoro non nullo sul moto $\boldsymbol{X}_i$. □

Significato dell'ILV: il lavoro complessivo virtuale delle reazioni vincolari è nullo.

Esercizio 12.6. MMM/6.25 Circonferenza che trasla. □

Per casa 12.7. Scrivere le equazioni di moto con l'ipotesi dei lavori virtuali: 9/620, 36/620, 57/620, 59/620, 23/630 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.3, 7.1.

13. Lunedì 20/10/2025
(Aula 14: 14-17)

L'ipotesi dei lavori virtuali (ILV) in diverse forme; caso del singolo punto vincolato a una superficie.
Energia cinetica T^{L} in forma lagrangiana.

Teorema 13.1. *Vale*

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{p} + b_0 \,.$$

$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *è la matrice simmetrica e definita positiva data da*

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_k} \,,$$

e $\boldsymbol{b}_1$ *e* b_0 *si annullano se* $\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}/\partial t = 0$.

Per casa 13.2. 1) Calcolare le energie cinetiche negli esercizi:
9/620, 36/620, 57/620, 59/620, 23/630 □

Forze in coordinate lagrangiane.

Teorema 13.3. *L'ipotesi dei lavori virtuali determina il moto.*

Esercizio 13.4. 15/620 (modificato: asta omogenea → asta composta da due punti materiali), risolto con l'ipotesi $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$. Calcolo dell'energia cinetica.
Punto materiale su piano ruotante, in assenza di forze direttamente applicate: dinamica nel sistema mobile e in quello fisso. Spazio tangente e normale. □

Per casa 13.5. 57/620, 66/620
Scrivere le equazioni di moto di un punto libero con la ILV. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.2, 7.3, 7.5.

14. Martedì 21/10/2025
(Aula 14: 15-17)

Lemma 14.1. *Valgono*

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial p_h}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q},t)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t),t)\Big) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),t)\,.$$

Notazione

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial}{\partial p_h}\,.$$

Le componenti lagrangiane delle forze Q_h.

Teorema 14.2. *(Equazioni di Lagrange) Le ℓ equazioni*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial \dot{q}_h}\Big] - \frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} = Q_h\,,\quad h = 1\,,\dots\,,\ell\,,$$

sono equivalenti all'ipotesi dei lavori virtuali.

Esercizio 14.3. 57/620
17/630 □

Per casa 14.4. (Non usare lagrangiana né passaggio al sistema di riferimento mobile)
MMM 7.1 con le equazioni di Lagrange.
1/620, 37/620, 61/620 (senza potenziale lagrangiano)
29/630, 31/630, 37/630 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.6.

15. Giovedì 23/10/2025
(Aula 14: 14-17)

Forze conservative e componenti lagrangiane delle forze.

Teorema 15.1. *Se il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale* $U(\boldsymbol{z})$*, si ha*

$$Q_h = \frac{\partial}{\partial q_h}[U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},t))] \,, \qquad h = 1\,, \dots\,, \ell\,.$$

Esercizio 15.2. Componenti lagrangiane delle forze per un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

e soggetto alla forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_A)\,, \qquad \boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_3\,.$$

□

Per casa 15.3. Calcolare le componenti lagrangiane delle forze per il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ vincolato alla circonferenza mobile

$$x_1^2 + x_2^2 = r(t)^2\,, \qquad r > 0\,, r \in C^2(\boldsymbol{R})\,,$$

e soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_A)\,, \qquad \boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_2\,, \qquad R > 0\,.$$

□

Se i vincoli sono mobili l'energia in genere non si conserva anche se le forze direttamente applicate sono conservative.

Teorema 15.4. *Se i vincoli sono fissi e il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale* $U(\boldsymbol{z})$*, l'energia*

$$T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}))\,,$$

si conserva lungo un moto lagrangiano che soddisfa l'ipotesi dei lavori virtuali.

Definizione di potenziale lagrangiano e forze conservative in senso lagrangiano.

Esercizio 15.5. MMM/8.19 Un moto con potenziale lagrangiano ma con forze non conservative (punto vincolato a circonferenza con forza tangente). □

Per casa 15.6. MMM/8.20 □

Definizione di lagrangiana.
Equazioni di Lagrange in forma conservativa.

Esercizio 15.7. 35/620 (Punto pesante vincolato a superficie di rotazione), 40/620 MMM/8.17 □

Per casa 15.8. 1/620, 32/620, 56/620, 59/620, 64/620, 65/620, 68/620, 71/620 6/630 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.1, 8.2.

16. LUNEDÌ 27/10/2025
(AULA 14: 14-17)

Teorema 16.1. *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e* $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})$. *Allora se*

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}_0) = 0\,, \qquad h = 1\,,\dots\,,\ell\,,$$

la funzione costante $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0$ *risolve le equazioni di Lagrange.*

Esercizio 16.2. 8/660 □

Teorema 16.3. *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e* $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})$ *e inoltre le forze direttamente applicate siano conservative in senso tradizionale, con* $\boldsymbol{q}_0$ *punto di massimo isolato per* U^{L}. *Allora* $\boldsymbol{q}_0$ *è di equilibrio stabile.*

Esercizio 16.4. 40/660, 48/660, 23/630 □

Per casa 16.5. 60/620
9/630, 15/630
14/660, 27/660, 41/660, 46/660, 47/660 (senza piccole oscillazioni), 53/660 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.4.

17. MARTEDÌ 28/10/2025
(AULA 14: 15-17)

Piccole oscillazioni in punti di equilibrio, con hessiana del potenziale definita negativa, per sistemi vincolati da vincoli olonomi fissi e soggetti a forze conservative. Energia cinetica ridotta, potenziale ridotto, lagrangiana ridotta.
Il caso 1-dimensionale: moto armonico.
Equazioni di Lagrange delle piccole oscillazioni nel caso $\ell > 1$:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\mathcal{U}}\boldsymbol{q} = 0\,.$$

Ricerca delle frequenze delle piccole oscillazioni con la sostituzione $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0 \cos(\omega t)$; equazione $\det(\omega^2\boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{U}}) = 0$.
Teorema di esistenza delle coordinate normali.

Esercizio 17.1. 6/680 □

Per casa 17.2. 4/680, 16/680, 20/680, 25/680, 37/680 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 9.3.

18. Giovedì 30/10/2025
(Aula 14: 14-17)

Definizione di lunghezza L della traiettoria di un moto come estremo superiore delle lunghezze delle approssimazioni con spezzate. In effetti

Teorema 18.1. (s.d.)

$$L = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\boldsymbol{X}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \, .$$

Definizione di lunghezza d'arco s. Parametrizzazione mediante s.
Moto dato mediante la traiettoria e la legge oraria. Versore tangente, versore normale principale, curvatura. Scomposizione di velocità e accelerazione:

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{T}(s) \, , \qquad \boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{T}(s) + \dot{s}^2 k(s)\boldsymbol{N}(s) \, .$$

Accelerazione tangente e normale. La terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ (se $k > 0$).
Moto vincolato a una curva, reazioni vincolari. Necessità di ipotesi costitutive. La $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ non va bene, la $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$ sì. È la legge di vincolo liscio.
Il caso del vincolo liscio per le curve; la componente tangente dell'equazione del moto è indipendente dalle altre 2, che servono a determinare la reazione vincolare.
Legge di attrito dinamico di Coulomb-Morin.

Esercizio 18.2. 1) Terna intrinseca nella circonferenza, e nell'elica cilindrica (definita nell'Esempio MMM 3.22).
MMM/3.28, MMM/3.31 □

Per casa 18.3. Lunghezza d'arco e terna intrinseca nell'ellisse.
6/100, 2/120, 3/120, 12/120, 7/560, 9/560, 11/560, 13/560, 15/560, 16/560, 19/560, 22/560, 24/560, 10/620 □

Per casa 18.4. 1) Scrivere il moto che ha per traiettoria l'elica cilindrica e legge oraria $s(t) = bt^2$.
2) Scrivere la legge oraria per il moto sull'elica cilindrica che ha per prima coordinata $R\cos(bt^3)$. □

Le formule di Frenet-Serret.

Teorema 18.5. *La velocità angolare della terna intrinseca di una curva descritta da un moto di legge oraria $s(t)$ è*

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{s}[-\tau\boldsymbol{T} + k\boldsymbol{B}] \, .$$

Esercizio 18.6. 23/560 □

Per casa 18.7. Calcolare la torsione dell'elica cilindrica. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.1, 3.2, 3.3, 3.5, 3.6, 3.7, 10.8.

19. Lunedì 03/11/2025
(Aula 14: 14-17)

Coordinate cicliche e relativi integrali primi.
Raggio di curvatura. Ricerca della terna intrinseca nelle curve piane.
Velocità angolare relativa di una terna mobile rispetto a un'altra.

Teorema 19.1. *Date due terne mobili $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ esiste un'unica $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ tale che*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{u}_h \,.$$

Teorema 19.2. *Per ogni $\boldsymbol{a} \in C^1(I)$ si ha*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{a} \,.$$

Dalla definizione segue $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} = 0$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$.

Teorema 19.3 (Composizione di velocità angolari)**.** *Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ sono terne mobili, vale*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \,.$$

Esercizio 19.4. 5/340, MMM/10.62 Precessioni regolari □

Teorema 19.5. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i vincoli sono fissi e $\ell = 1$.*

Teorema 19.6. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i moti sono vincolati a un piano solidale cui appartiene anche la velocità angolare.*

Esercizio 19.7. 11/340, 54/630 □

Per casa 19.8. MMM/12.18 (piano che ruota intorno a un asse esterno)
1/630, 3/630, 14/630, 25/630, 42/630, 63/630
23/680 □

Per casa 19.9. 6/340, 26/340, 27/340
65/630, 69/630
2/660 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.3, 8.2, 10.7, 12.2, 12.4.

20. Martedì 04/11/2025
(Aula 14: 15-17)

Esercizio 20.1. MMM/12.12 Vincoli mobili: punto materiale vincolato a circonferenza che trasla:

$$R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + \frac{ct^2}{2}\boldsymbol{e}_1\,,$$

soggetto al peso $-mg\boldsymbol{e}_2$.
Determinazione della lagrangiana e delle equazioni di Lagrange nel sistema mobile e in quello fisso. □

Teorema 20.2. *Se due lagrangiane soddisfano*

$$\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\boldsymbol{q},t)\,,$$

allora hanno equazioni di Lagrange equivalenti.

Esercizio 20.3. 68/630 □

Attrito statico; motivi della disuguaglianza nella legge di Coulomb-Morin. Coni di attrito per la superficie e la curva.

Esercizio 20.4. MMM/4.18, MMM/4.19: Punti di equilibrio per un punto pesante vincolato a una sfera scabra, e poi a un suo meridiano scabro. □

Per casa 20.5. 1/520, 2/520, 5/520, 6/520 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 4.5, 12.3.

21. Giovedì 06/11/2025 (Aula 14: 14-17)

Vincoli di rigidità per n moti $\boldsymbol{X}_i$. Numero dei gradi di libertà per 3 moti non allineati ($\ell = 6$).

Teorema 21.1. (s.d.) *Risultano costanti nel tempo le quantità:*

$$(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{X}_i) \cdot (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_h) \,,$$
$$|(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{X}_i) \times (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_h)| \,.$$

Teorema 21.2. (s.d.) *Per ogni $r \geq 4$ esistono $\lambda_h \in \boldsymbol{R}$ costanti tali che*

$$\boldsymbol{X}_r(t) - \boldsymbol{X}_1(t) = \sum_{h=1}^{3} \lambda_h \boldsymbol{u}_h(t) \,, \qquad t \in I \,.$$

Qui $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$.

Dunque $\ell = 6$ per ogni $n \geq 3$.
Vincoli di rigidità per n moti $\boldsymbol{X}_i$. Numero dei gradi di libertà per 3 moti non allineati ($\ell = 6$).
Sistema rigido non degenere. Sistema di riferimento solidale. Moti del sistema rigido e moti solidali al sistema rigido.
Angoli di Eulero.

Esercizio 21.3. MMM/13.10 Velocità angolare nella forma

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \boldsymbol{e}_3 + \dot{\theta} \boldsymbol{w}_1 + \dot{\psi} \boldsymbol{u}_3 \,.$$

□

Sistema rigido degenere rettilineo.

Teorema 21.4. *Dato un versore $\boldsymbol{u} \in C^1(I)$ esiste unico $\boldsymbol{\omega}$ tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u} \,, \qquad \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \,.$$

Moti solidali al rigido $\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda})$. Scomposizione

$$\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{X}_O(t) + \sum_{h=1}^{3} \lambda_h \boldsymbol{u}_h(t) \,.$$

Esercizio 21.5. MMM/12.12, 2/520 □

Per casa 21.6. 5/310, 6/310, 4/340, 13/340, 35/340, 38/340, 76/620, 44/630, 52/630
MMM/7.10 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 13.1, 13.2, 13.3.

22. Lunedì 10/11/2025
(Aula 14; 14-17)

Corpi rigidi continui (e non continui). Distribuzioni di massa: solidi, superfici, curve, punti isolati. Definizione di corpo rigido non degenere e degenere rettilineo. Massa.
Definizione di moto del centro di massa $\boldsymbol{X}_G$.

Teorema 22.1. *($\boldsymbol{X}_G$ è solidale) Si ha $\boldsymbol{X}_G(t) = \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda}_G)$, con*

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{1}{m} \int_C \boldsymbol{\lambda} \rho(\boldsymbol{\lambda}) \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Teorema 22.2. *(additività)* (s.d.) *Se $C = C_1 \cup C_2$, con $\int_{C_1 \cap C_2} \rho \, \mathrm{d}\mu = 0$, allora*

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{m_1}{m} \boldsymbol{\lambda}_G^1 + \frac{m_2}{m} \boldsymbol{\lambda}_G^2 \, ,$$

con m_i e $\boldsymbol{\lambda}_G^i$ rispettivamente massa e coordinate del centro di massa di C_i.

Esempio 22.3. Esempio di calcolo di $\boldsymbol{\lambda}_G$ per il disco forato. □

Definizione di piano di simmetria materiale ortogonale.

Teorema 22.4. (s.d.) *Se Π è di simmetria materiale ortogonale per C allora $\boldsymbol{\lambda}_G \in \Pi$.*

Corpi con simmetria materiale di rotazione.

Per casa 22.5. MMM/14.18 (proprietà di minimo del centro di massa)
7/580, 8/580 □

Definizione di quantità di moto e momento delle quantità di moto di polo Z. Quantità di moto e momento delle quantità di moto in cui si sostituisce la formula della velocità di trascinamento (per il sistema di riferimento solidale).
Definizione del tensore d'inerzia $\boldsymbol{\sigma}_Z$ di polo Z.

Teorema 22.6. *Vale per ogni moto $\boldsymbol{X}_Z$*

$$\boldsymbol{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{X}_G - \boldsymbol{X}_Z) \times \boldsymbol{V}_T(\boldsymbol{X}_Z, t) \, .$$

In particolare $\boldsymbol{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega}$ se $\boldsymbol{X}_G = \boldsymbol{X}_Z$ o se $\boldsymbol{X}_Z$ è sia fisso che solidale.

Esercizio 22.7. Calcolo di $\boldsymbol{L}_O$ per l'asta rigida ruotante.
75/630 □

Per casa 22.8. 19/330, 26/330, 31/330, 48/330, 59/330 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.1, 14.2, 14.3.

23. Martedì 11/11/2025
(Aula 14: 15-17)

Calcolo degli elementi della matrice di inerzia in un sistema qualunque. La matrice è simmetrica. Definizione di momenti di inerzia e deviatori.

Teorema 23.1. *Le quantità* $\boldsymbol{\sigma u} \cdot \boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{\sigma u} \cdot \boldsymbol{w}$ *(con* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 0$*) espresse in funzione di distanze da rette e piani (mediante integrali).*

Corollario 23.2. *La* $\boldsymbol{\sigma}$ *è definita positiva se il corpo è non degenere, e semidefinita positiva nel caso dell'asta rigida.*

Calcolo di $\boldsymbol{\sigma}$ per l'asta rigida. La matrice $\boldsymbol{\sigma}$ nel caso delle lamine.

Esercizio 23.3. Calcolo della matrice d'inerzia per la lamina quadrata. 19/330 □

Per casa 23.4. 26/330, 31/330, 52/330, 53/330 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.4.

24. Giovedì 13/11/2025 (Aula 14: 14-17)

Momenti d'inerzia e deviatori possono dipendere dal tempo. Però:

Teorema 24.1. *Se* $\mathcal{M}$ *e* $\boldsymbol{X}_Z$ *sono solidali con il corpo rigido, allora la matrice* $\boldsymbol{\sigma}_Z^{\mathcal{M}}$ *è costante nel tempo.*

Definizione di vettori principali di inerzia, assi principali di inerzia, terne principali di inerzia.

Teorema 24.2. *Sia* $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ *una terna ortonormale. Allora se* $\boldsymbol{u}_1$ *è principale si ha* $I_{12} = I_{13} = 0$.

Teorema 24.3. *Sia* C *un rigido non degenere. In ogni punto esiste una terna ortonormale principale, che rende la matrice di* $\boldsymbol{\sigma}$ *diagonale.*
Se $\boldsymbol{X}_Z$ *è un moto solidale, esiste una base solidale principale* $\mathcal{M}$ *in* $\boldsymbol{X}_Z$ *(ossia tale che* $\boldsymbol{\sigma}_Z^{\mathcal{M}}$ *sia diagonale e costante).*

Proprietà di minimo e massimo dei momenti principali.

Per casa 24.4. 31/630, 35/630, 46/630, 55/630 □

Teorema 24.5. *1) Dati due versori ortogonali principali, il loro prodotto vettoriale è principale.*
2) Se in un punto tutti i momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i vettori sono principali in quel punto.
3) Se in un punto due momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i versori del piano generato dai due versori principali corrispondenti sono principali.

Esercizio 24.6. La diagonale del rettangolo non è principale nel centro del rettangolo (se il rettangolo non è quadrato). □

Ricerca di assi principali (s.d.):
la normale a un piano di simmetria materiale ortogonale è principale (in un punto del piano);
traslabilità di terne principali centrali lungo gli assi;
teorema di Huygens.

Esercizio 24.7. Ricerca di assi principali per la lamina usando le proprietà di minimo e massimo.
39/330
Ricerca degli assi principali: sfera e cubo (in un punto qualsiasi). □

Per casa 24.8. 52/330 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.4, 14.5, 14.6.

25. Lunedì 17/11/2025
(Aula 14: 14-17)

Distribuzioni di forze su un corpo rigido. Esempi.
Risultante e momento risultante delle forze.

Esercizio 25.1. Calcolo di risultante, momento e potenziale negli esempi. □

Per casa 25.2. MMM/15.13 (potenziale gravitazionale terrestre, Terra non sferica)
MMM/15.15 (forze solidali e non solidali) □

Equazioni globali per un corpo rigido. Forze esterne.

Teorema 25.3. *Le due equazioni globali determinano il moto di un corpo rigido non degenere.*

Energia cinetica in un rigido.

Esercizio 25.4. 7/330 □

Teorema 25.5. *Vale per un corpo rigido C e un moto $\boldsymbol{X}_Z$*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{V}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{X}_Z,t)|^2 \\ + m\boldsymbol{V}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{X}_Z,t)\cdot\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{X}_G-\boldsymbol{X}_Z]\,.$$

Corollario 25.6. *(König)*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2\,.$$

Corollario 25.7. *In un moto polare di polo Z*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Esercizio 25.8. 1/330 □

Per casa 25.9. 5/330, 9/330, 25/330, 29/330, 41/330, 45/330, 57/330
5/470, 8/470
28/620, 38/620, 41/620, 44/620, 47/620, 55/620
21/630, 27/630, 49/630 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.1, 15.2, 15.3, 15.4, 15.7.

26. Martedì 18/11/2025
(Aula 14: 15-17)

Sistemi di corpi rigidi vincolati. Coordinate locali. Moti solidali a un corpo rigido del sistema; velocità di moti solidali in forma lagrangiana; energia cinetica di un corpo rigido e del sistema di corpi rigidi. Ipotesi dei lavori virtuali.

Teorema 26.1. (s.d.) *Le equazioni date dall'ipotesi dei lavori virtuali determinano il moto.*

Le equazioni di Lagrange per sistemi di corpi rigidi. Le forze scambiate tra punti dello stesso rigido si possono ignorare.

Esercizio 26.2. 14/620 □

Per casa 26.3. 10/330
11/620, 20/620, 30/620, 51/620, 58/620, 63/620
1/660, 5/660, 13/660, 25/660, 36/660, 44/660, 57/660
10/680, 18/680, 22/680 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 16.1, 16.2.

27. Giovedì 20/11/2025
(Aula 14: 14-17)

Teorema 27.1. *(Equazioni di Eulero) Supponiamo che l'origine O del sistema solidale con il rigido non degenere sia fissa o coincida con il centro di massa. Vale*

$$\boldsymbol{\sigma}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} . \tag{27.1}$$

Corollario 27.2. *In componenti, in una terna principale $(\boldsymbol{u}_h)$, denotando*

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h , \qquad \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = \sum_{h=1}^{3} M_h \boldsymbol{u}_h ,$$

la (27.1) *equivale a*

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 + M_1 , \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + M_2 , \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + M_3 . \end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero in genere vanno accoppiate con la prima equazione globale. Nel caso del moto polare determinano il moto. Sono sempre un sistema del II ordine negli angoli di Eulero, e possono essere considerate un sistema del I ordine nelle ω_h se $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ dipende solo dalle ω_h e da t.

Teorema 27.3. *In un moto polare di polo Z*

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_Z^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega} .$$

Esercizio 27.4. 1/470
1/450, 4/450 □

Per casa 27.5. MMM/15.26 (forza non solidale su sfera)
2/470, 6/470, 10/470
MMM/15.42 (derivata della T di un corpo rigido nel caso generale)
7/450, 9/450, 11/450, 13/450 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.5, 15.7.

28. Martedì 25/11/2025
(Aula 14: 15-17)

Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema solidale al rigido non degenere.

Teorema 28.1. *Sia O fisso.*
Se il moto è una rotazione intorno a un asse principale allora $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ è parallelo all'asse di rotazione.
Se viceversa $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ è parallelo a un asse principale, il moto è di rotazione intorno a quell'asse per le opportune condizioni iniziali.

Teorema 28.2. *Sia O fisso.*
Se il moto è una rotazione intorno a un asse non principale, allora il momento $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ ha componente ortogonale all'asse non nulla in ogni istante in cui $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$.

Motivazione della denominazione di momenti deviatori.
Caso del corpo vincolato a ruotare intorno a un asse fisso: si possono usare le equazioni di Eulero, quella relativa alla direzione dell'asse di rotazione dà l'equazione del moto, le altre due danno il momento della reazione vincolare.
Nel caso del corpo vincolato a ruotare intorno a un asse fisso con vincolo liscio (cioè se vale l'ipotesi dei lavori virtuali), il momento della reazione vincolare ha componente nulla lungo l'asse di rotazione.
Nel caso del corpo vincolato a muoversi di moto polare con vincolo liscio (cioè se vale l'ipotesi dei lavori virtuali), il momento della reazione vincolare è nullo.
Moti polari per inerzia di polo O.

Teorema 28.3. *In un moto polare per inerzia valgono gli integrali primi:*
1) $\boldsymbol{L}_O(t) = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{L}(t_0)$.
2) $T(t) = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}/2 = T(t_0)$.

Il vettore $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ è costante nella terna fissa ma in genere non solidale al rigido. Se $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per un t allora non si annulla mai.

Esercizio 28.4. 26/450, 41/450 □

Per casa 28.5. 17/450, 21/450, 23/450, 32/450, 45/450, 47/450, 49/450, 65/450, 84/450 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.6, 15.8, 16.5.

29. Giovedì 27/11/2025
(Aula 14: 14-17)

Ellissoide d'inerzia solidale e mobile. Normale all'ellissoide.

Teorema 29.1. *(Moto alla Poinsot) Consideriamo un corpo rigido non degenere che si muove di moto polare per inerzia di polo O.*
Allora l'ellissoide d'inerzia mobile si muove rotolando senza strisciare su un piano fisso, che ha normale $\boldsymbol{L}_O(t)$.

Teorema 29.2. *Se C si muove di moto polare per inerzia, e di rotazione, allora la rotazione è uniforme e l'asse di rotazione è principale d'inerzia.*
Viceversa, le rotazioni uniformi intorno a assi principali sono moti polari per inerzia.

Caso dell'ellissoide sferico: tutti i moti polari per inerzia sono rotazioni.

Teorema 29.3. *Se un corpo è un giroscopio in $\boldsymbol{X}_O$, allora i moti polari per inerzia sono precessioni regolari.*

Esercizio 29.4. 45/450, 56/450 □

Per casa 29.5. 29/450, 31/450, 35/450, 57/450, 63/450, 64/450, 71/450 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.8.

30. Martedì 02/12/2025
(Aula 14: 15-17)

Definizioni di poloidi ed erpoloidi. Casi dell'ellissoide di rotazione e sferico. Caso dell'ellissoide non di rotazione: rotazioni per inerzia stabili e instabili; moti per inerzia non periodici (corrispondono alle 4 polodie separatrici).
Moto senza strisciamento.

Esercizio 30.1. MMM/16.11 Due circonferenze che rotolano l'una sull'altra senza strisciamento (rotolamento puro).
Esercizio a scelta multipla. □

Per casa 30.2. 69/450
MMM/11.22 (periodo nelle precessioni regolari) □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 11.2, 15.9, 16.4.

31. Giovedì 04/12/2025
(Aula 14: 14-17)

Campo delle velocità di trascinamento di un sistema di riferimento mobile $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}$. Studio del campo della velocità di trascinamento.
Scomposizione della velocità di trascinamento in componente parallela e ortogonale a $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$. Centro istantaneo del moto. Asse istantaneo di moto e sue proprietà (asse di istantanea rotazione).

Lemma 31.1. *Vale*

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_1, t) - \boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2, t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\,,$$

e quindi $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}$ per t fissato è costante sulle rette parallele a $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Rigate del moto.

Esercizio 31.2. 16/340, 17/340, 19/340 □

Moti rigidi piani. Base e rulletta.
Teorema di Chasles.

Esempio 31.3. MMM/11.20 Il compasso ellittico. □

Per casa 31.4. 18/340 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 11.1, 11.2, 11.3.

32. Martedì 09/12/2025
(Aula 14: 15-17)

Forze a direzione radiale. Moti centrali.

Teorema 32.1. *In un moto centrale il vettore $\boldsymbol{X}(t) \times \dot{\boldsymbol{X}}(t)$ è costante.*

Teorema 32.2. *Sia $\boldsymbol{X}$ un moto centrale.*
1) Se $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) \neq 0$, allora il moto avviene nel piano per $\boldsymbol{X}(0)$ perpendicolare al vettore $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0)$.
2) Se $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) = 0$, allora il moto avviene sulla retta per $\boldsymbol{X}(0)$ e l'origine.

Moti piani e coordinate polari; versori radiale e trasversale. Velocità e accelerazione radiale e trasversale. Equazioni del moto centrale scomposte nella base dei versori radiale e trasversale; l'accelerazione trasversale è nulla, quindi la velocità areolare è costante.
La formula di Binet (s.d.).

Esercizio 32.3. MMM/2.43
1/220, 3/220, 5/220 □

Per casa 32.4. 7/220 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.8.

33. Giovedì 11/12/2025
(Aula 14: 14-17)

Teorema 33.1. *Una forza a direzione radiale è conservativa se e solo se è nella forma*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(|\boldsymbol{x}|)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,,$$

e allora il suo potenziale è (per $d > 0$ arbitrario)

$$U(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{d}^{|\boldsymbol{x}|} f(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Esercizio 33.2. 81/620, 88/450 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.8.

34. Lunedì 15/12/2025
(Aula 14: 14-17)

Le rigate del moto nelle precessioni regolari sono coni circolari retti.

Esercizio 34.1. 17/450
Esercizi a scelta multipla.
78/630 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 11.4.

Fine del corso