MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA

prof. Daniele Andreucci

Prova scritta del 26/01/2026

1.

Calcolare il potenziale lagrangiano nei seguenti casi. Si ricordi che U^{L} è definito a meno di una costante additiva.

Qui α, R, k, k_0, k_1 sono costanti positive date. La coordinata lagrangiana è denotata da $\varphi \in (-\pi, \pi)$ e le coordinate cartesiane nel sistema fisso da $\boldsymbol{x}$.

$\boxed{\textbf{01}}$

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ ha parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi) = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Su di esso agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = \alpha|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} \,.$$

a

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = \frac{\alpha}{3}R^3[(\cos\varphi)^3 + (\sin\varphi)^3] \,.$$

b

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = \frac{\alpha}{3}R^6[(\cos\varphi)^6 + (\sin\varphi)^6] \,.$$

c

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = 0 \,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{02}}$

Un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ ha rappresentazione lagrangiana, per $t > 0$,

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, t) = \alpha t\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + 2\alpha t\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Su di esso agisce la forza

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{x} \,.$$

a

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi, t) = -\frac{k}{2}\alpha^2 t^2 \,.$$

b

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -\frac{k}{2}\alpha^2[(\cos\varphi)^2 + 4(\sin\varphi)^2] \,.$$

c

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -\frac{k}{2}\alpha^2 t^2[1 + 3(\sin\varphi)^2] \,.$$

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\mathbf{03}}$

Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa M ha parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, s) = s\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + (R + s\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2 .$$

Qui $s \in [-L, L]$ è la coordinata solidale. Sull'asta agisce la distribuzione di forze

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, s) = -(k_0 + sk_1)\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}s .$$

a

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -\frac{2}{3}k_1 R L^3 \sin\varphi .$$

b

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = 0 .$$

c

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = k_0 R L^2 (\cos\varphi)^2 .$$

d Nessuna delle altre.

Soluzione

I: c

Infatti la forza ha potenziale conservativo

$$U(\boldsymbol{x}) = \frac{\alpha}{3}|\boldsymbol{x}|^3 ,$$

per cui quello lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = \frac{\alpha}{3}|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi)|^3 = \frac{\alpha}{3}R^3 ,$$

ossia costante.

II: c

Infatti la forza ha potenziale conservativo

$$U(\boldsymbol{x}) = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{x}|^2 ,$$

per cui quello lagrangiano è

$$U^{\mathrm{L}}(\varphi) = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi)|^2 = -\frac{k}{2}[\alpha^2 t^2 (\cos\varphi)^2 + 4\alpha^2 t^2 (\sin\varphi)^2] = -\frac{k}{2}\alpha^2 t^2 [1 + 3(\sin\varphi)^2] .$$

III: a

La distribuzione del potenziale elastico è

$$\mathrm{d}U(\boldsymbol{x}, s) = -\frac{k_0 + sk_1}{2}|\boldsymbol{x}|^2\,\mathrm{d}s ,$$

e pertanto quella del potenziale lagrangiano è

$$\mathrm{d}U^{\mathrm{L}}(\varphi, s) = -\frac{k_0 + sk_1}{2}|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}(\varphi, s)|^2\,\mathrm{d}s = -\frac{k_0 + sk_1}{2}[R^2 + s^2 + 2Rs\sin\varphi]\,\mathrm{d}s .$$

Dunque integrando, e ricordando che l'integrale di s e s^3 su $[-L, L]$ si annulla, si ha

$$
\begin{aligned}
U^{\mathrm{L}}(s) &= -\frac{k_0}{2}\int_{-L}^{L}(s^2+R^2)\,\mathrm{d}s - \frac{k_1}{2}\int_{-L}^{L} 2Rs^2\sin\varphi\,\mathrm{d}s \\
&= -\frac{k_0}{2}\Big(\frac{2}{3}L^3 + 2LR^2\Big) - k_1 R\frac{2}{3}L^3\sin\varphi\,.
\end{aligned}
$$

2.

Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare di polo O. Il vincolo è liscio. T denota l'energia cinetica di C, $\boldsymbol{L}_O$ il suo momento angolare (o della quantità di moto) relativo a O e $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ il momento delle forze esterne direttamente applicate relativo a O. Indichiamo anche con $(\boldsymbol{u}_h)$ una terna solidale principale in O e con $\boldsymbol{\omega}$ la sua velocità angolare.

$\boxed{\textbf{04}}$

Sia

$$\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = -k\boldsymbol{\omega}\,,$$

con $k > 0$ costante. Sia anche, all'istante $t = 0$, $T(0) > 0$.

a Si ha $T(t) > 0$ per ogni $t > 0$.

b Si può avere o meno $T(\bar{t}) = 0$ per qualche $\bar{t} > 0$, in dipendenza della geometria delle masse di C.

c Si ha comunque $T(\bar{t}) = 0$ per qualche $\bar{t} > 0$.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{05}}$

Sia $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}(t) = 0$ per ogni t. Si può concludere che il moto sia certamente una precessione regolare o una rotazione?

a Sì, ma solo per particolari geometrie delle masse di C.

b Sì, sempre.

c Sì, sotto la sola ipotesi che O sia il centro di massa di C.

d Nessuna delle altre.

$\boxed{\textbf{06}}$

Sia $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}(t) = 0$ per ogni t. Allora scrivendo

$$\boldsymbol{L}_O(t) = \sum_{h=1}^{3}\alpha_h(t)\boldsymbol{u}_h(t) = \sum_{h=1}^{3}\beta_h(t)\boldsymbol{e}_h\,,$$

si ha

a Le componenti α_h nella base solidale sono costanti nel tempo.

b Le componenti β_h nella base fissa sono costanti nel tempo.

c Né le α_h né le β_h sono in genere costanti.

d Nessuna delle altre.

Soluzione

I: a
Infatti dalla teoria

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega} = -k|\boldsymbol{\omega}|^2 \,,$$

e

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \geq \frac{1}{2} I_m |\boldsymbol{\omega}|^2 \,,$$

ove I_m è il minimo tra i momenti d'inerzia principali in O. Pertanto

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \geq -\frac{2k}{I_m} T \,,$$

da cui per ogni $t > 0$

$$T(t) \geq T(0) e^{-\frac{2k}{I_m}t} > 0 \,.$$

II: a
Dalla teoria, questo è il caso se l'ellissoide d'inerzia in O ha simmetria di rotazione.
III: b
Dalla teoria, nei moti polari per inerzia $\boldsymbol{L}_O$ è costante nella base fissa.

3.
Un corpo rigido non degenere C si muove di moto polare di polo O. Il vincolo è liscio. La terna $(\boldsymbol{u}_h)$ è solidale e principale in O; indichiamone con I_{hh} i momenti d'inerzia. Supponiamo che

$$I_{11} < I_{22} < I_{33} \,.$$

Indichiamo con $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ il momento delle forze esterne direttamente applicate relativo a O.
Qui α, β sono costanti positive date.
$\boxed{\textbf{07}}$
Supponiamo che per ogni t

$$\boldsymbol{M}_0^{\mathrm{ext}}(t) = \alpha e^{\beta t} \boldsymbol{u}_2(t) \,.$$

a Il moto può essere una rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_3(t)$, ma non intorno a $\boldsymbol{u}_2(t)$.
b Il moto può essere una rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_2(t)$, ma non intorno a $\boldsymbol{u}_3(t)$.
c Il moto non può essere una rotazione.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\textbf{08}}$
Supponiamo che per ogni t

$$\boldsymbol{M}_0^{\mathrm{ext}}(t) = \alpha e^{\beta t} (\boldsymbol{u}_2(t) + \boldsymbol{u}_3(t)) \,.$$

a Il moto può essere una rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_2(t) + \boldsymbol{u}_3(t)$, ma non intorno a $\boldsymbol{u}_1(t)$.
b Il moto può essere una rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_1(t)$, ma non intorno a $\boldsymbol{u}_2(t) + \boldsymbol{u}_3(t)$.

c Il moto può essere una rotazione sia intorno a $\boldsymbol{u}_1(t)$, che intorno a $\boldsymbol{u}_2(t)+\boldsymbol{u}_3(t)$.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{09}}$
Si assuma che $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per ogni t. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a La risultante delle reazioni vincolari è nulla.
b Per ogni $\bar{t} > 0$ fissato esistono infiniti moti solidali che hanno velocità assoluta nulla all'istante $\bar{t}$.
c Può accadere che la velocità assoluta di ogni moto solidale $\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda})$, diverso dal polo O, sia sempre diversa da zero, per ogni t e ogni $\boldsymbol{\lambda}$.
d Nessuna delle altre.
Soluzione
I: b
Si sa dalla teoria che se il momento delle forze è parallelo a un asse principale, il moto può essere una rotazione intorno a quell'asse e viceversa, se il moto è una rotazione intorno a un asse principale, il momento deve essere parallelo a quell'asse.
II: d
Infatti $\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3$ non è principale, quindi il moto non può essere una rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3$ perché il momento $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ ha componente normale a tale asse nulla.
Inoltre $\boldsymbol{u}_1$ è invece principale, quindi non si può avere rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_1$, perché allora si dovrebbe avere $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ parallelo a $\boldsymbol{u}_1$.
III: b
Infatti tutti i punti dell'asse istantaneo di rotazione hanno velocità nulla, quindi vale b. La a non vale in genere.

4.
Si consideri il moto di un elemento materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ vincolato a una curva regolare $\boldsymbol{\psi}(s)$, con $s \in \boldsymbol{R}$ ascissa curvilinea e curvatura $k > 0$. Sul punto è applicata direttamente la forza $\boldsymbol{F}$.
Indichiamo con $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ la terna intrinseca e con $\alpha > 0$ una costante data.
$\boxed{\mathbf{10}}$
Se il vincolo è liscio, quale delle seguenti ipotesi garantisce che l'energia cinetica resti costante?
a $\boldsymbol{F}$ è conservativa.
b $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{T}$.
c $\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{N}$.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{11}}$
Se il vincolo è scabro, secondo la legge di Coulomb-Morin, con $\dot{s} \neq 0$, quale delle seguenti è vera?
a La velocità deve annullarsi in un tempo finito.
b La reazione vincolare deve avere componente nulla lungo $\boldsymbol{N}$.
c La forza $\boldsymbol{F}$ deve avere componente nulla lungo $\boldsymbol{B}$.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{12}}$

Quale delle seguenti può essere vera durante il moto, se $\dot{s} \neq 0$?
a
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N}) > 0\,.$$
b
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{T} > 0\,.$$
c
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{N} = 0\,.$$
d Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: c
Infatti $m\ddot{s} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} = 0$ *nel caso c, quindi* $\dot{s}$ *si mantiene costante.*
II: d
La a ovviamente non vale senza ipotesi su $\boldsymbol{F}$*. La b e la c non hanno senso.*
III: b
Infatti $\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{T}$ *e* $\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{T} + k\dot{s}^2\boldsymbol{N}$*.*

5.
Un sistema di punti materiali è vincolato da vincoli olonomi regolari. La parametrizzazione lagrangiana è $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t)$, $\boldsymbol{q} \in Q$, $t \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^{n_c}$. Si assuma la ipotesi dei lavori virtuali.
$\boxed{\mathbf{13}}$
Lo spazio normale $N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ contiene in ogni istante:
a La reazione vincolare complessiva $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \in \boldsymbol{R}^{n_c}$.
b L'atto di moto $\dot{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{R}^{n_c}$ del sistema.
c Gli spostamenti virtuali, se i vincoli sono fissi.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{14}}$
Le reazioni vincolari sui punti materiali del sistema
a Fanno ciascuna lavoro virtuale nullo.
b Fanno complessivamente lavoro nullo, se i vincoli sono fissi.
c Hanno risultante nulla.
d Nessuna delle altre.
$\boxed{\mathbf{15}}$
Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$
a Dipende dalla parametrizzazione lagrangiana scelta.
b È indipendente da $(\boldsymbol{z}, t)$ se le forze sono conservative.
c Contiene gli atti di moto $\dot{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{R}^{n_c}$, se i vincoli sono fissi.
d Nessuna delle altre.
SOLUZIONE
I: a
È l'ipotesi dei lavori virtuali. L'atto di moto appartiene a un traslato dello spazio degli spostamenti virtuali, che coincide con esso se i vincoli sono fissi.
II: b
L'ipotesi dei lavori virtuali implica che il lavoro virtuale complessivo delle reazioni

vincolari sia nullo, ma il lavoro virtuale coincide con quello effettivo se i vincoli sono fissi. La a e la c in genere non valgono.
III: c
Lo spazio $V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$ dipende solo dai vincoli e non dalla parametrizzazione lagrangiana, perciò a non vale, e, dato che appunto lo spazio non dipende dalle forze, la b non ha senso. Vale invece c, perché gli atti di moto in genere soddisfano

$$\dot{\boldsymbol{z}} \in V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} + \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial t}\,,$$

ma $\frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial t} = 0$ *se i vincoli sono fissi.*

6. Si consideri il sistema mobile di riferimento $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$, ove $\boldsymbol{X}_O$ coincide con l'origine del sistema di riferimento fisso e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Indichiamo con (y_h) le coordinate in $\mathcal{S}$.
Due punti materiali di uguale massa $(\boldsymbol{X}_1, m)$ e $(\boldsymbol{X}_2, m)$ sono vincolati alla parabola solidale con $\mathcal{S}$ data da

$$y_2 = 0\,, \qquad y_1 = \beta y_3^2\,.$$

I due punti si scambiano le forze elastiche

$$\boldsymbol{F}_1 = -k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2)\,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = -k(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1)\,.$$

Qui α, β, k sono costanti positive assegnate.
Si usi la parametrizzazione lagrangiana

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{L}}(r,t) = \beta r^2 \boldsymbol{u}_1(t) + r\boldsymbol{u}_3(t)\,, \qquad \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{L}}(s,t) = \beta s^2 \boldsymbol{u}_1(t) + s\boldsymbol{u}_3(t)\,,$$

$(r,s) \in \boldsymbol{R}^2$.
Si consideri il moto relativo a $\mathcal{S}$.
1) Si determini l'energia cinetica lagrangiana del sistema, relativa al sistema di riferimento $\mathcal{S}$.
2) Si determini il potenziale lagrangiano del sistema, corrispondente alla dinamica relativa al sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$.
3) Si trovino le posizioni di equilibrio relativo al sistema di riferimento $\mathcal{S}$ tali che $r = -s$.
4) Si scrivano le equazioni di Lagrange e si determini se ammettono soluzioni della forma $r(t) = s(t)$ per ogni $t > 0$.
5) Si determini la componente lungo $\boldsymbol{u}_2$ della reazione vincolare su $\boldsymbol{X}_1$, nel moto generico, come funzione di r, s, $\dot{r}$, $\dot{s}$, $\ddot{r}$, $\ddot{s}$, e di m, k, α e β.
6) Si scrivano i vincoli su $\boldsymbol{X}_1$ nella forma canonica $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = 0$ per i vincoli

olonomi, usando le sue coordinate cartesiane $\boldsymbol{x}$ nel sistema di riferimento fisso $(\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{e}_h))$.

SOLUZIONE

1) Si ha dalla definizione

$$\boldsymbol{v}^1_{\mathcal{S}} = 2\beta r\dot{r}\boldsymbol{u}_1 + \dot{r}\boldsymbol{u}_3 , \qquad \boldsymbol{v}^2_{\mathcal{S}} = 2\beta s\dot{s}\boldsymbol{u}_1 + \dot{s}\boldsymbol{u}_3 ,$$

e quindi

$$T^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}^1_{\mathcal{S}}|^2 + \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}^2_{\mathcal{S}}|^2 = \frac{m}{2}[(1+4\beta^2r^2)\dot{r}^2 + (1+4\beta^2s^2)\dot{s}^2] .$$

2) Oltre alle forze elastiche direttamente applicate, dobbiamo considerare le forze apparenti; la forza di Coriolis però ha componenti lagrangiane nulle, dalla teoria, perché i moti si svolgono su un piano solidale a $\mathcal{S}$ che contiene anche $\boldsymbol{\omega} = \alpha\boldsymbol{u}_3$.
Il potenziale delle forze elastiche è

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}|\boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_1 - \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}_2|^2 = -\frac{k}{2}[(\beta r^2 - \beta s^2)^2 + (r-s)^2] .$$

Il campo di forze di trascinamento è

$$\boldsymbol{F}_{T} = m\alpha^2(y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2) ,$$

con potenziale

$$U_{T} = \frac{m\alpha^2}{2}(y_1^2 + y_2^2) .$$

Pertanto il potenziale lagrangiano di trascinamento del sistema vale

$$U^{\mathrm{L}}_{T} = \frac{m\alpha^2}{2}(\beta^2r^4 + \beta^2s^4) .$$

Infine il potenziale lagrangiano vale

$$U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}} = -\frac{k}{2}(r-s)^2[\beta^2(r+s)^2 + 1] + \frac{m\alpha^2\beta^2}{2}(r^4+s^4) .$$

3) Si noti che la quiete relativa a $\mathcal{S}$ si ha proprio per (r,s) costante. Il sistema del gradiente è

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}}{\partial r} = -k(r-s)[\beta^2(r+s)^2+1] - k\beta^2(r-s)^2(r+s) + 2m\alpha^2\beta^2r^3 = 0 ,$$
$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}_{\mathcal{S}}}{\partial s} = k(r-s)[\beta^2(r+s)^2+1] - k\beta^2(r-s)^2(r+s) + 2m\alpha^2\beta^2s^3 = 0 .$$

Nell'ipotesi $r = -s$ entrambe le equazioni si riducono a

$$-2kr + 2m\alpha^2\beta^2r^3 = 2r(-k + m\alpha^2\beta^2r^2) = 0 ,$$

che ammette le soluzioni

$$r = 0 , \qquad r = r_0 := \sqrt{\frac{k}{m\alpha^2\beta^2}} , \qquad r = -r_0 .$$

4) Dalla teoria le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(1+4\beta^2r^2)\dot r] - 4m\beta^2 r\dot r^2 = \\ -k(r-s)[\beta^2(r+s)^2+1] - k\beta^2(r-s)^2(r+s) + 2m\alpha^2\beta^2 r^3\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(1+4\beta^2s^2)\dot s] - 4m\beta^2 s\dot s^2 = \\ k(r-s)[\beta^2(r+s)^2+1] - k\beta^2(r-s)^2(r+s) + 2m\alpha^2\beta^2 s^3\,.$$

Se $r=s$ entrambe si riducono alla

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(1+4\beta^2z^2)\dot z] - 4m\beta^2 z\dot z^2 = 2m\alpha^2\beta^2 z^3\,,$$

per $z=r$ o $z=s$. Dunque ammettono soluzione $r=s$ se e solo se i dati iniziali sono compatibili, cioè $r(0)=s(0)$, $\dot r(0)=\dot s(0)$; infatti basta porre $r(t)=s(t)=z(t)$ con z soluzione dell'equazione sopra e dati iniziali corrispondenti a quelli assegnati.
5) Si ha

$$m\boldsymbol{a}^1_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}^1_{\scriptscriptstyle T} + \boldsymbol{F}^1_{\scriptscriptstyle C} + \mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^1\,.$$

Inoltre

$$\boldsymbol{a}^1_{\mathcal{S}} = 2\beta(r\ddot r + \dot r^2)\boldsymbol{u}_1 + \ddot r\boldsymbol{u}_3\,,\qquad \boldsymbol{F}_1 = -k[\beta(r^2-s^2)\boldsymbol{u}_1 + (r-s)\boldsymbol{u}_3]\,,$$
$$\boldsymbol{F}^1_{\scriptscriptstyle T} = m\alpha^2\beta r^2\boldsymbol{u}_1\,,\quad \boldsymbol{F}^1_{\scriptscriptstyle C} = -2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}^1_{\mathcal{S}} = -4m\alpha\beta r\dot r\boldsymbol{u}_2\,.$$

Dunque

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^1\cdot\boldsymbol{u}_2 = -\boldsymbol{F}^1_{\scriptscriptstyle C}\cdot\boldsymbol{u}_2 = 4m\alpha\beta r\dot r\,.$$

6) Il vincolo è costituito dalla parabola ruotante $y_2=0$, $y_1=\beta y_3^2$. Si ha quindi

$$y_2 = \boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{u}_2 = \sum_{h=1}^3 x_h\boldsymbol{e}_h\cdot\boldsymbol{u}_2 = -x_1\sin(\alpha t) + x_2\cos(\alpha t) = 0\,,$$

e anche

$$y_1 - \beta y_3^2 = \boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{u}_1 - \beta(\boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{u}_3)^2 = x_1\cos(\alpha t) + x_2\sin(\alpha t) - \beta x_3^2 = 0\,.$$

R.

1) $T^{\scriptscriptstyle L}_{\mathcal{S}} = \dfrac{m}{2}[(1+4\beta^2r^2)\dot r^2 + (1+4\beta^2s^2)\dot s^2]\,.$

2) $U^{\scriptscriptstyle L}_{\mathcal{S}} = -\dfrac{k}{2}(r-s)^2[\beta^2(r+s)^2+1] + \dfrac{m\alpha^2\beta^2}{2}(r^4+s^4)\,.$

3) $(0{,}0)\,,\quad (r_0,-r_0)\,,\quad (-r_0,r_0)\,,\qquad r_0 := \sqrt{\dfrac{k}{m\alpha^2\beta^2}}\,.$

4) $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(1+4\beta^2r^2)\dot r] - 4m\beta^2 r\dot r^2 = \\ \quad -k(r-s)[\beta^2(r+s)^2+1] - k\beta^2(r-s)^2(r+s) + 2m\alpha^2\beta^2 r^3\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(1+4\beta^2s^2)\dot s] - 4m\beta^2 s\dot s^2 = \\ \quad k(r-s)[\beta^2(r+s)^2+1] - k\beta^2(r-s)^2(r+s) + 2m\alpha^2\beta^2 s^3\,. \end{cases}$$ *Sì.*

5) $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}{}^1\cdot\boldsymbol{u}_2 = 4m\alpha\beta r\dot r\,.$

6) $-x_1\sin(\alpha t) + x_2\cos(\alpha t) = 0\,,\quad x_1\cos(\alpha t) + x_2\sin(\alpha t) - \beta x_3^2 = 0\,.$