con densità non omogenea

$$\rho(\boldsymbol{\lambda}) d\mu(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{M}{8L^3} d\boldsymbol{\lambda} + m d\delta_{(L,L,L)}(\boldsymbol{\lambda}),$$

ossia è un cubo omogeneo di massa M e spigolo $2L$, con un punto materiale P di massa m fissato nel vertice $\boldsymbol{\lambda}_A = (L, L, L)$.

Il corpo è vincolato a muoversi di moto polare di polo l'origine O del sistema di riferimento fisso, coincidente con il punto solidale $\boldsymbol{\lambda} = 0$, ossia con l'origine del sistema solidale $\mathcal{S} = (\mathbf{X}_O, (\mathbf{u}_h))$, di cui $\boldsymbol{\lambda}$ rappresenta le coordinate.

Sul corpo agiscono la forza $\mathbf{F}_B = \alpha t \mathbf{u}_1$ applicata nel punto di coordinate solidali $\boldsymbol{\lambda}_B = (L, L, 0)$, e una forza da determinare $\mathbf{F}_D$ applicata nel punto di coordinate solidali $\boldsymbol{\lambda}_D = (0, 0, L)$, della forma

$$\mathbf{F}_D = \beta(t) \mathbf{u}_1 + \gamma(t) \mathbf{u}_2.$$

Qui $\alpha > 0$ è una costante assegnata e $\beta, \gamma \in C(\mathbf{R})$ sono funzioni del tempo a priori incognite.

Il corpo parte da fermo nella posizione tale che $\mathbf{u}_h(0) = \mathbf{e}_h$, $h = 1, 2, 3$.

Determinare $\mathbf{F}_D$ in modo che il moto sia una rotazione intorno all'asse λ_3 .

R.

$$\beta(t) = I_{12} \left(-\frac{\alpha}{I_{11}} t + \frac{L\alpha^2}{4I_{11}^2} t^4 \right), \quad \gamma(t) = I_{12} \left(\frac{\alpha}{I_{11}} t + \frac{L\alpha^2}{4I_{11}^2} t^4 \right).$$

86. [09/06/2023 (ex)I] Un cono circolare retto C di altezza H , raggio di base R e massa m è vincolato a muoversi di moto polare, con il vertice V nell'origine O del sistema di riferimento fisso.

Si consideri il sistema di riferimento solidale $\mathcal{S} = (\mathbf{X}_O, (\mathbf{u}_h))$, con

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\overrightarrow{VA}}{H},$$

ove A è il centro della base di C .

Sul cono sono applicate, nei punti indicati, le forze

$$\mathbf{F}_A = \lambda \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{F}_B = \mu \mathbf{u}_2,$$

ove $\overrightarrow{AB} = R \mathbf{u}_1$. Qui $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

1) Si scriva il momento delle forze rispetto a V (scomposto nella terna solidale).

2) Assumendo $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$, $\mu = 0$, si scrivano le equazioni di Eulero del rigido e si determini $\boldsymbol{\omega}(t)$ (scomposta nella terna solidale).

3) Assumendo $\mu = 0$, si scriva la derivata dT/dt come funzione delle componenti di $\boldsymbol{\omega}$.

4) Si assuma $\mu = 0$, $\lambda = 0$ e, per $\omega_{10}, \omega_{30} > 0$,

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_{10} \mathbf{u}_1(0) + \omega_{30} \mathbf{u}_3(0), \quad \mathbf{u}_h(0) = \mathbf{e}_h, \quad h = 1, 2, 3.$$

450. Corpi rigidi: moti polari

Si determini $\mathbf{L}_V(t)$ per ogni t , scomposto nella terna fissa $(\mathbf{e}_h)$.

5) Nelle ipotesi del quesito 4), si determini una relazione tra ω_{10} e ω_{30} che garantisca che

$$\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(0) \geq \frac{1}{4} |\boldsymbol{\omega}(0)|^2, \quad \text{per ogni } t > 0.$$

6) Supponiamo che

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha \mathbf{u}_2(t),$$

con $\alpha > 0$ costante. Si determini il primo istante $\bar{t} > 0$ in cui $\mathbf{u}_3(\bar{t}) = \mathbf{u}_3(0)$.

SOLUZIONE

1) Dato che il momento delle reazioni vincolari rispetto a V è zero per l'ipotesi dei lavori virtuali, si ha dalla definizione

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_V^{\text{ext}} &= \overrightarrow{VA} \times \mathbf{F}_A + \overrightarrow{VB} \times \mathbf{F}_B \\ &= (H\mathbf{u}_3) \times (\lambda\mathbf{u}_1) + (H\mathbf{u}_3 + R\mathbf{u}_1) \times (\mu\mathbf{u}_2) \\ &= H\lambda\mathbf{u}_2 - H\mu\mathbf{u}_1 + R\mu\mathbf{u}_3. \end{aligned}$$

2) In V la terna indicata è principale, e $I_{11} = I_{22}$. Dunque le equazioni di Eulero sono

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{11} - I_{33})\omega_2\omega_3 - H\mu, \\ I_{11}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + H\lambda, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= R\mu. \end{aligned}$$

Se $\mu = 0$ e $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$, allora $\omega_3(t) = 0$ per ogni t ; ne segue, per la prima equazione, che anche $\omega_1(t) = 0$ per ogni t e, dalla seconda, $\omega_2(t) = H\lambda t / I_{11}$.

3) Usiamo il risultato noto dalla teoria:

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{M}_V^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega} = H\lambda\mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\omega} = H\lambda\omega_2.$$

4) Il moto è polare per inerzia, quindi $\mathbf{L}_V(t) = \mathbf{L}_V(0)$ per ogni t . D'altronde

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_V(0) &= \boldsymbol{\sigma}_V(0)\boldsymbol{\omega}(0) \\ &= I_{11}\omega_{10}\mathbf{u}_1(0) + I_{33}\omega_{30}\mathbf{u}_3(0) \\ &= I_{11}\omega_{10}\mathbf{e}_1 + I_{33}\omega_{30}\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

5) Il moto è polare per inerzia, e l'ellissoide è di rotazione intorno a $\mathbf{u}_3$. Quindi la poloide descritta da $\boldsymbol{\omega}(t)$ è una circonferenza su un piano ortogonale a $\mathbf{u}_3$, con centro sull'asse $\mathbf{u}_3$. Più precisamente vale

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2 = \omega_{10}^2, \quad \omega_3 = \omega_3(0) = \omega_{30}.$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) &= \sum_{h=1}^3 \omega_h \mathbf{u}_h = \frac{1}{I_{11}} (I_{11}\omega_1\mathbf{u}_1 + I_{11}\omega_2\mathbf{u}_2 + I_{33}\omega_3\mathbf{u}_3) + \left(1 - \frac{I_{33}}{I_{11}}\right) \omega_3 \mathbf{u}_3 \\ &= \frac{1}{I_{11}} \mathbf{L}_V + \alpha \omega_{30} \mathbf{u}_3, \quad \alpha := 1 - \frac{I_{33}}{I_{11}}. \end{aligned}$$

450. Corpi rigidi: moti polari

Si ricordi che L_V è costante. Quindi

$$|\boldsymbol{\omega}(t) - \boldsymbol{\omega}(0)| = |\alpha|\omega_{30}|\mathbf{u}_3(t) - \mathbf{u}_3(0)| \leq 2|\alpha|\omega_{30}.$$

Perciò

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(0) &= \boldsymbol{\omega}(0) \cdot \boldsymbol{\omega}(0) + (\boldsymbol{\omega}(t) - \boldsymbol{\omega}(0)) \cdot \boldsymbol{\omega}(0) \geq |\boldsymbol{\omega}(0)|^2 - |\boldsymbol{\omega}(t) - \boldsymbol{\omega}(0)||\boldsymbol{\omega}(0)| \\ &\geq |\boldsymbol{\omega}(0)|^2 - 2|\alpha|\omega_{30}|\boldsymbol{\omega}(0)| \geq \frac{1}{4}|\boldsymbol{\omega}(0)|^2, \end{aligned}$$

se

$$|\alpha|\omega_{30} \leq \frac{3}{8}|\boldsymbol{\omega}(0)|.$$

6) Dalla teoria, il moto è una rotazione con

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \cos(-\alpha t)\mathbf{u}_1(0) + \sin(-\alpha t)\mathbf{u}_3(0), \\ \mathbf{u}_3 &= -\sin(-\alpha t)\mathbf{u}_1(0) + \cos(-\alpha t)\mathbf{u}_3(0), \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_2(0). \end{aligned}$$

Dunque si ha $\mathbf{u}_3(t) = \mathbf{u}_3(0)$ se $t = -2n\pi/\alpha$, $n \in \mathbf{Z}$.

R. 1)

$$\mathbf{M}_V^{\text{ext}} = -H\mu\mathbf{u}_1 + H\lambda\mathbf{u}_2 + R\mu\mathbf{u}_3.$$

2)

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{H\lambda}{I_{11}}t\mathbf{u}_2(t), \quad t > 0.$$

3)

$$\frac{dT}{dt} = H\lambda\omega_2.$$

4)

$$\mathbf{L}_V = I_{11}\omega_{10}\mathbf{e}_1 + I_{33}\omega_{30}\mathbf{e}_3.$$

5)

$$\left|1 - \frac{I_{33}}{I_{11}}\right|\omega_{30} \leq \frac{3}{8}\sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{30}^2}.$$

6)

$$\bar{t} = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

87. [08/09/2023 (ex)I] Un corpo rigido C è costituito da un disco omogeneo D di raggio R , massa M , raggio R e centro $\mathbf{X}_O$, cui è fissato solidalmente un punto materiale $(\mathbf{X}_P, m)$. Nel sistema solidale $\mathcal{S} = (\mathbf{X}_O, (\mathbf{u}_h))$ di coordinate $(\boldsymbol{\lambda})$, il disco è

$$\{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^3 \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leq R^2, \lambda_3 = 0\},$$