

**ISTRUZIONI PER LA RISOLUZIONE
DELLA PROVA SCRITTA
MECCANICA RAZIONALE BMER, SAPIENZA**

DANIELE ANDREUCCI

2024-12-05

Queste istruzioni riguardano solo le modalità di risoluzione dell'esame scritto in presenza.

1. FORMATO DELL'ESAME

L'esame è diviso in due parti, la prima a *a scelta multipla* e la seconda a *formato aperto*. La durata totale dell'esame è di due ore. Dopo un'ora viene ritirata la parte a scelta multipla.

Ciascuna delle due parti dell'esame è divisa in un certo numero di problemi, ciascuno dei quali è diviso in un certo numero di domande. Si rimanda al facsimile di testo allegato al presente documento.

- (1) Il valore in punti di ciascuna domanda è riportato nel frontespizio del testo (per le domande a scelta multipla, valore positivo se la risposta è giusta, negativo se è sbagliata).
- (2) Il candidato può rispondere in ciascuna delle due parti dell'esame a un numero massimo di domande specificato nel frontespizio del testo.
- (3) Non ci sono penalità se non si risponde al numero massimo permesso di domande.
- (4) Non ci sono restrizioni sul numero di risposte ammesse in ciascun problema; si può rispondere in ciascun problema a un numero arbitrario di domande, anche a nessuna (nei limiti ricordati sopra per il numero massimo di risposte).
- (5) Durante l'esame è permesso l'uso di al più tre testi a stampa, rilegati. È permesso inoltre anche l'uso di una ragionevole dotazione di carta e penne per scrivere e eseguire calcoli.
- (6) L'uso di calcolatrici (anche non programmabili) e altri mezzi elettronici è comunque proibito. Si noti che questo per esempio implica che non si possano usare i telefoni cellulari o gli smartwatch, neanche come orologi, e neppure auricolari e cuffie.

- (7) Appena ricevete il compito, riempite gli spazi appositi con nome, cognome e matricola. Il compito va compilato a penna (non a matita).
- (8) Appena consegnata la prima parte del compito riempite gli spazi appositi della parte che vi rimane con nome, cognome e matricola.

2. FORMATO DELLE DOMANDE

Sul contenuto delle domande notiamo specificamente:

- (1) Per ciascuna domanda a scelta multipla sono presentate alcune risposte, ciascuna indicata da una lettera minuscola **a**, **b**, ...; per ciascuna domanda una sola risposta è corretta, le altre sono sbagliate; per ciascuna domanda può essere data solo una risposta.
- (2) Le domande a scelta multipla sono numerate in modo progressivo, con una numerazione unica che attraversa i problemi.
- (3) Nel rispondere a ciascuna domanda (in entrambe le parti del compito) si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera).
- (4) Nella risoluzione delle domande a formato aperto, si devono motivare ragionevolmente tutti i calcoli e passaggi.

3. FORMATO DELLE RISPOSTE

- (1) Le risposte alle domande a scelta multipla vanno riportate sull'apposita lista fornita insieme al testo, nella forma di una lettera per ciascuna delle domande cui si sceglie di rispondere (non introdurre altro testo, in particolare motivazioni; si consiglia di usare le lettere maiuscole).
- (2) Le risposte alle domande a formato aperto vanno scritte per esteso nei fogli forniti insieme al testo. Non si possono usare altri spazi per le risposte a parte queste quattro facciate. All'inizio di ciascuna risposta indicare il numero della domanda.

4. CORREZIONE DEL COMPITO

- (1) La seconda parte del compito (domande a formato aperto) viene corretta solo a chi supera la prima parte.
- (2) In alto a destra in ciascun testo è riportato il numero d'ordine del compito; questo è necessario se volete confrontare le vostre risposte con quelle della soluzione del compito, perché l'ordine delle domande e delle risposte è diverso per ciascun testo. Dopo

l'esame vengono pubblicati tutti i testi, tra i quali potrete così trovare il vostro.

5. GLI ALLEGATI

- 1) Esempio di testo di esame (la scelta di numero di domande e punteggi può variare da appello a appello).

[1].0

MECCANICA RAZIONALE
ING. MECCANICA
PROF. DANIELE ANDREUCCI
Prova scritta del 00/12/2024 (vedi 18/01/2024)

Nome e cognome:

Matricola:

01 _____

02 _____

03 _____

04 _____

05 _____

06 _____

07 _____

08 _____

09 _____

10 _____

11 _____

12 _____

13 _____

14 _____

15 _____

ATTENZIONE:

Avvertenze generali: È permesso l'uso di un massimo di 3 testi a stampa, rilegati. Non si possono usare mezzi elettronici (neanche calcolatrici anche non programmabili, smartwatch e simili). La risoluzione va scritta a penna e non a matita, pena la nullità del compito.

È proibita qualsiasi comunicazione con altri.

Nel rispondere a ciascuna domanda si devono assumere solo le ipotesi stabilite nel problema relativo, oltre a quelle standard convenzionalmente in uso nel corso (per esempio: i vincoli sono lisci e i corpi rigidi omogenei salvo diverso avviso, le solite definizioni di forza elastica o forza peso eccetera; la forza peso non è presente se non è esplicitamente indicato il contrario).

Alla correzione della seconda parte accede solo chi supera la prima.

Le due parti dell'esame hanno peso uguale nella determinazione del voto finale dello scritto, per chi supera la prima.

Prima parte dell'esame (a scelta multipla): consta dei problemi 1–5 (domande 1–15). Il candidato deve indicare la risposta, al massimo, a 10 domande tra quelle relative a questi problemi. Ciascuna risposta esatta vale +3 punti e ciascuna risposta sbagliata vale $-0,5$ punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Per ciascuna domanda una sola tra le risposte presentate è corretta.

Non ci sono restrizioni per problemi; in ciascun problema si può rispondere a un numero qualsiasi di domande, anche nessuna (compatibilmente con il limite ricordato sopra).

Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande. Le risposte ambigue (per esempio più di una risposta per una domanda) sono nulle.

Ciascuna risposta è indicata da una lettera, che va riportata nella lista delle risposte accanto al numero della domanda, separata da uno spazio e senza aggiungere altri caratteri. Non aggiungete altro testo.

Seconda parte dell'esame (a risposta aperta): consta del problema 6; il problema contiene 6 domande in principio indipendenti. Il candidato deve risolvere, al massimo, 5 tra queste domande; ciascuna domanda vale un massimo di 6 punti. Non ci sono penalità per le risposte non date.

Se eccedete il limite delle risposte, verranno considerate le prime nell'ordine della numerazione delle domande.

In questa seconda parte si devono *motivare tutte le risposte*, cioè svolgere tutti i calcoli (ragionevolmente) necessari. La risoluzione va scritta a penna nei fogli forniti insieme al testo.

Nome e cognome:

Matricola:

[1].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

Soluzione del problema a risposta aperta:

[1].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[1].0

Soluzione del problema a risposta aperta:

[1].0

Un sistema di punti materiali con coordinate locali $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^{n_c}$ è soggetto a vincoli olonomi regolari nella forma

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0, \quad \mathbf{f} : \mathbf{R}^{n_c} \rightarrow \mathbf{R}^m .$$

01 Se vale l'ipotesi dei lavori virtuali allora

- a L'energia cinetica del sistema è costante.
- b Il lavoro compiuto dalla reazione vincolare sul primo moto \mathbf{X}_1 è nullo.
- c Vale la conservazione dell'energia.
- d Nessuna delle altre.

02 Lo spazio degli spostamenti virtuali $V_{\mathbf{z},t}\mathbf{f}$ e quello normale $N_{\mathbf{z},t}\mathbf{f}$ soddisfano

- a Sono identici perché i vincoli sono fissi.
- b $\dim V_{\mathbf{z},t}\mathbf{f} > \dim N_{\mathbf{z},t}\mathbf{f}$.
- c $\dim V_{\mathbf{z},t}\mathbf{f}$ è indipendente da (\mathbf{z}, t) .
- d Nessuna delle altre.

03 Consideriamo il caso del sistema con un solo punto materiale (\mathbf{X}_1, m) . Allora

- a Si può avere $\ell = 5$.
- b La funzione \mathbf{f} determina se il vincolo è scabro o liscio.
- c L'ipotesi di vincolo scabro e quella dei lavori virtuali sono incompatibili.
- d Nessuna delle altre.

Si consideri una lamina rettangolare C di centro O e lati a, b con $a > b$, vincolata con vincolo liscio a muoversi di moto polare di polo O .

- 04** Supponiamo che non vi siano forze direttamente applicate. Allora
- a** Esistono assi solidali per O che non possono essere di rotazione con $\boldsymbol{\omega} \neq 0$.
 - b** L'ellissoide d'inerzia in O è di rotazione.
 - c** L'unico moto possibile è quello di quiete.
 - d** Nessuna delle altre.

- 05** Supponiamo che il momento delle forze esterne soddisfi

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = M\mathbf{u},$$

ove M è una funzione regolare degli angoli di Eulero e delle loro derivate prime, e \mathbf{u} è un versore solidale normale al piano della lamina.

- a** Il moto non può essere di rotazione.
- b** Il moto può essere di rotazione con asse parallelo a un lato della lamina.
- c** Il moto può essere di rotazione con asse ortogonale al piano della lamina.
- d** Nessuna delle altre.

- 06** Supponiamo che il moto sia polare per inerzia.

- a** Il vettore $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ ha componenti costanti in qualunque base solidale.
- b** Il vettore $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ ha componenti costanti in qualunque base fissa.
- c** Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ ha componenti costanti nella base solidale.
- d** Nessuna delle altre.

Un punto materiale (\mathbf{X}, m) è vincolato a una superficie regolare $S \subset \mathbf{R}^3$, parametrizzata da $\mathbf{r}(\varphi, \theta)$ con $(\varphi, \theta) \in D \subset \mathbf{R}^2$.

07 La componente dell'accelerazione che contiene $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\theta}$ è

a Mai nulla.

b Sempre normale a S .

c Sempre tangente a S .

d Nessuna delle altre.

08 Supponiamo che il vincolo sia scabro con legge di attrito statico secondo Coulomb-Morin, e coefficiente di attrito statico $\mu > 0$. Il punto materiale sia fermo all'istante iniziale nella posizione $\mathbf{x}_0 \in S$, ove la normale a S è $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{e}_1$. Il punto sia soggetto alla forza direttamente applicata $\mathbf{F} = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_3$ con α, β, γ costanti assegnate.

Allora il moto permane di quiete oppure no, in dipendenza da

a Tutti i valori di μ, α, β e γ .

b I valori di μ e α , ma non quelli di β e γ .

c I valori di μ, β e γ , ma non quello di α .

d Nessuna delle altre.

09 Supponiamo che l'elemento materiale sia soggetto alla forza posizionale direttamente applicata $\mathbf{F}(\varphi, \theta)$. Il vincolo sia liscio.

a Vale la conservazione dell'energia.

b La velocità iniziale del moto può essere prescritta ad arbitrio, purché tangente a S nella posizione iniziale.

c Le equazioni di moto si possono scrivere nella forma

$$\ddot{\varphi} = h_1(\varphi, \theta), \quad \ddot{\theta} = h_2(\varphi, \theta),$$

per opportune funzioni $h_1, h_2 : D \rightarrow \mathbf{R}$.

d Nessuna delle altre.

Sia C un corpo rigido non degenere. Sia $\mathcal{S} = (\mathbf{X}_O, (\mathbf{u}_h))$ un sistema di riferimento solidale a C .

10 Consideriamo il minimo valore I_m assunto dai momenti d'inerzia di C rispetto a tutte le direzioni e tutti i poli possibili.

a Il minimo è raggiunto solo ed esclusivamente nel centro di massa.

b In realtà il minimo potrebbe non esistere come tale, ossia essere un estremo inferiore e valere 0.

c Il minimo I_m è raggiunto nel polo dato dal centro di massa, ma non necessariamente solo in tale polo.

d Nessuna delle altre.

11 Fissato \mathbf{X}_O , esiste una sola terna ortonormale principale d'inerzia in \mathbf{X}_O .

a Non è vero, perché può non esistere.

b Esistono corpi per cui non è vero in nessun punto, ossia in ogni polo esistono più terne principali.

c È sempre così se \mathbf{X}_O non è il centro di massa.

d Nessuna delle altre.

12 La matrice del tensore d'inerzia in \mathbf{X}_O relativa alla base (\mathbf{u}_h)

a Ha necessariamente tutti gli autovalori uguali.

b Può avere un autovalore nullo.

c Deve essere costante nel tempo.

d Nessuna delle altre.

Si consideri un moto unidimensionale soggetto a forza posizionale di potenziale

$$U(x) = -ae^{(x^2-1)^2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

ove $a > 0$ è una costante assegnata. Nel seguito ci si riferisce al diagramma di fase del moto.

13 Esistono orbite illimitate?

- a Sì, ma solo se $a = 1$.
- b Sì, indipendentemente dal valore di a .
- c No, indipendentemente dal valore di a .
- d Nessuna delle altre.

14 Esistono orbite relative a moti periodici?

- a Sì, ma solo se $a = 1$.
- b Sì, indipendentemente dal valore di a .
- c No, indipendentemente dal valore di a .
- d Nessuna delle altre.

15 Esistono sia punti di equilibrio stabile che di equilibrio instabile?

- a Sì, ma solo se $a = 1$.
- b Sì, indipendentemente dal valore di a .
- c No, indipendentemente dal valore di a .
- d Nessuna delle altre.

Un'asta rigida AB di lunghezza $2L$ e massa m è vincolata a giacere sul piano $x_3 = 0$ (le x_h denotano le coordinate del sistema di riferimento fisso). L'estremo A è vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2, \quad x_3 = 0.$$

Sull'asta agiscono la forza peso diretta come $-e_2$ e la forza elastica

$$\mathbf{F}_B = -k\mathbf{X}_B,$$

applicata nell'estremo B . Qui L, R, k sono costanti positive assegnate. Si usino come coordinate lagrangiane $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ tali che

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_A^L(\varphi) &= R \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R \sin \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{X}_B^L(\varphi, \theta) - \mathbf{X}_A^L(\varphi) &= 2L \cos \theta \mathbf{e}_1 + 2L \sin \theta \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

- 1) Si determini l'energia cinetica in rappresentazione lagrangiana dell'asta.
- 2) Determinare il potenziale lagrangiano delle forze direttamente applicate.
- 3) Determinare le posizioni di equilibrio ove $\varphi = \theta$.
- 4) Dimostrare che esiste una posizione di equilibrio con $\varphi = \theta$ ove, se i parametri k, m, R, L, g soddisfano una condizione opportuna, è possibile definire le piccole oscillazioni; calcolare l'energia cinetica ridotta in tale posizione.
- 5) All'istante $t = 0$ si abbia

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_A(0) &= \frac{R}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{v}_A(0) = \frac{v_0}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \\ \mathbf{X}_B(0) &= \frac{R + 2L}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{v}_B(0) = \frac{v_0}{2}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1), \end{aligned}$$

con $v_0 > 0$ costante assegnata. Ricavare $\varphi(0), \theta(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0)$.

- 6) Usando come coordinate locali per l'asta

$$\mathbf{z} = (x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, x_{1B}, x_{3B}),$$

scrivere i vincoli nella forma $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0$ (omettere il vincolo di rigidità $|\mathbf{X}_A - \mathbf{X}_B| = 2L$), e dimostrare che hanno matrice iacobiana di rango massimo.