**Calcolo Differenziale**

Esercizi di esame e di controllo

(ex): esercizi d'esame; (hw): esercizi di controllo.

## 200. E.d.o. del I ordine generalita'

**1.** [11/07/2002 (ex)I] Trovare tutte le soluzioni di

$$y' = |y-2|x + |y|x - 2x \,.$$

Si noti che si deve dimostrare che le soluzioni trovate siano effettivamente tutte quelle dell'equazione.

**2.** [11/07/2002 (ex)II] Trovare tutte le soluzioni di

$$y' = -|y-3|x - |y|x + 3x \,.$$

Si noti che si deve dimostrare che le soluzioni trovate siano effettivamente tutte quelle dell'equazione.

## 220. Integrali generali

**1.** [24/4/2002 (hw)I] Dire quali delle seguenti espressioni possono essere integrali generali dell'equazione di II grado $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$.

$$\text{i)}\quad c_1 t + c_2 t^2 \,; \qquad \text{ii)}\quad (c_1 + c_2) e^t \,;$$
$$\text{iii)}\quad c_1 + c_2 t + \log t \,; \qquad \text{iv)}\quad c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 \,.$$

R. *i) e iii).*

**2.** [24/4/2002 (hw)I] Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$\dot{x} = 2tx - 2t \operatorname{arctg}(\log t) + \frac{1}{t + t(\log t)^2} \,, \qquad t > 0 \,,$$

sapendo che una sua soluzione particolare è

$$w(t) = \operatorname{arctg}(\log t) \,, \qquad t > 0 \,.$$

R.

$$x(t) = Ce^{t^2} + \operatorname{arctg}(\log t) \,, \qquad t > 0 \,.$$

## 250. E.d.o. a variabili separabili

**1.** [02/2001 (hw)I] Trovare tutte le soluzioni di

$$y' = (1 + y^2)x \,,$$

e disegnarne schematicamente il grafico.

**2.** [02/2001 (hw)I] Trovare tutte le soluzioni di

$$y' = (\cos y)^2 \sin x \,,$$

e disegnarne schematicamente il grafico.

**3.** [11/07/2002 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y' + y = \frac{1}{y}\,, \\ y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \end{cases}$$

nel più grande intervallo possibile.

**4.** [11/07/2002 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y' - y = -\frac{1}{y}\,, \\ y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \end{cases}$$

nel più grande intervallo possibile.

## 260. E.d.o. riconducibili a variabili separabili

**1.** [12/09/2001 (ex)I] Trovare le soluzioni dell'equazione

$$y' = e^{3\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\,,$$

e determinare la soluzione massimale tale che $y(x) \to +\infty$ se $x \to e$.

**2.** [12/09/2001 (ex)II] Trovare le soluzioni dell'equazione

$$y' = e^{4\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\,,$$

e determinare la soluzione massimale tale che $y(x) \to +\infty$ se $x \to e^2$.

**3.** [02/2001 (hw)I] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} + 1\,, \\ y(1) = 1\,. \end{cases}$$

**4.** [5/03/2001 (hw)I] Si risolva

$$y' = \frac{y}{y+x}\,, \qquad y(-1) = -1\,.$$

La soluzione va lasciata in forma implicita.
R.

$$\ln|y| - \frac{x}{y} = -1\,.$$

**5.** [5/03/2001 (hw)I] Trovare in forma implicita la $y(x)$ che risolve

$$y' = \operatorname{tg}^2(x+y)\,, \qquad y(0) = 0\,.$$

Si dimostri che la soluzione cessa di esistere per qualche $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$.
R.

$$y + \frac{1}{2}\sin 2(x+y) = x\,.$$

**6.** [27/06/2002 (ex)I] Trovare tutte le soluzioni di

$$y' = \frac{y+x}{y-x} + \frac{y}{x}\,.$$

**7.** [27/06/2002 (ex)II] Trovare tutte le soluzioni di

$$y' = -\frac{y-x}{y+x} + \frac{y}{x}\,.$$

**8.** [11/09/2002 (ex)I] Trovare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{\frac{y}{x}}e^{-\sqrt{\frac{y}{x}}} + \frac{y}{x}\,, \\ y(1) = 1\,, \end{cases}$$

e naturalmente l'intervallo ove è definita.

**9.** [11/09/2002 (ex)II] Trovare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{y}{x}}e^{-\sqrt{\frac{y}{x}}}\,, \\ y(e) = e\,, \end{cases}$$

e naturalmente l'intervallo ove è definita.

**10.** [4/12/2002 (ex)I] Trovare la soluzione $y : (-\infty, +\infty) \to \boldsymbol{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + 2\sqrt{y-x}\,, \\ y(3) = 4\,. \end{cases}$$

**11.** [4/12/2002 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y' = (x+y)^2\,, \\ y(1) = 2\,. \end{cases}$$

**12.** [23/5/2002 (hw)I] Calcolare l'integrale generale di

$$y' = \frac{y}{x}(\log y - \log x + 1)\,.$$

R. $y = xe^{Cx}$

**13.** [10/12/2003 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$y' = \frac{1}{\ln y - \ln x} + \frac{y}{x}\,, \qquad y(3) = \pi\,.$$

(Non è richiesto di determinare l'intervallo massimale di esistenza.)

**14.** [10/12/2003 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$y' = \frac{1}{\ln x - \ln y} + \frac{y}{x}\,, \qquad y(1) = \pi\,.$$

(Non è richiesto di determinare l'intervallo massimale di esistenza.)

**15.** [19/5/2003 (hw)I] Risolvere

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x}\frac{y}{y-x}\,, \\ y(1) &= u_0\,, \qquad u_0 > 0\,,\, u_0 \neq 1\,. \end{aligned}$$

(La soluzione verrà trovata in forma implicita.)
a) Se $u_0 < 1$, si dimostri che la soluzione è decrescente, ma non si annulla mai, e anzi

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = u_0 e^{-u_0} < u_0\,.$$

b) Se $u_0 > 1$, si dimostri che la soluzione soddisfa

$$y(x) > (u_0 - \ln u_0)x > x\,, \qquad \text{per ogni } x > 1.$$

R.

$$\frac{y(x)}{x} - \ln y(x) = u_0 - \ln u_0\,.$$

## 270. Lineari del primo ordine

**1.** [24/4/2002 (hw)I] Determinare l'unica soluzione di

$$y' = \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x^2}\,,$$

tale che: (1) $y(1) = 3$; (2) $y(1) = 1$. Procedere ove possibile sia per separazione delle variabili che con i metodi delle equazioni lineari.
R.

$$\begin{aligned} &(1) : y(x) = 2e^{1-\frac{1}{x}} + 1\,, \qquad x > 0\,. \\ &(2) : y(x) = 1\,, \qquad x > 0\,. \end{aligned}$$

**2.** [10/12/2003 (ex)I] Risolvere il seguente problema di Cauchy, e dare una condizione sufficiente su $f \in C(\boldsymbol{R})$, $f > 0$, affinché la soluzione sia definita (almeno) su $[1,3]$:

$$\begin{cases} y' = y + f(x)y^{\pi}\,, \\ y(1) = 2\,. \end{cases}$$

**3.** [10/12/2003 (ex)II] Risolvere il seguente problema di Cauchy, e dare una condizione sufficiente su $f \in C(\boldsymbol{R})$, $f > 0$, affinché la soluzione sia definita (almeno) su $[-3, -1]$:

$$\begin{cases} y' = -y - f(x)y^{\pi}\,, \\ y(-1) = 2\,. \end{cases}$$

## 280. Bernoulli

**1.** [11/07/2002 (ex)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (x + |x|)y + y^2\,, \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

nel più grande intervallo di definizione ottenibile per la soluzione.

**2.** [11/07/2002 (ex)II] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (x - |x|)y + y^2\,, \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$$

nel più grande intervallo di definizione ottenibile per la soluzione.

**3.** [6/5/2002 (hw)I] Determinare l'unica soluzione di

$$y' = y + xy^{\pi}\,, \qquad y(0) = 1\,,$$

e dimostrare che il suo intervallo di definizione è limitato a destra.
R.

$$y(x) = \left( \frac{\pi - 2}{\pi - 1} e^{(1-\pi)x} - x - \frac{1}{1-\pi} \right)^{\frac{1}{1-\pi}}\,.$$

**4.** [23/5/2002 (hw)I] Determinare una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + e^t y^{\frac{3}{4}}\,, \\ y(0) = \frac{1}{256} \end{cases}$$

definita su tutto $\boldsymbol{R}$.
R.

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{81}\left(e^t - \frac{e^{\frac{t}{4}}}{4}\right)^4\,, & t \geq -\frac{8}{3}\log 2\,, \\ 0\,, & t < -\frac{8}{3}\log 2\,. \end{cases}$$

**5.** [4/07/2003 (ex)I] Trovare una soluzione massimale, definita su tutto $\boldsymbol{R}$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + e^x y^{\frac{2}{3}}\,, \\ y(0) = -8\,. \end{cases}$$

**6.** [4/07/2003 (ex)II] Trovare una soluzione massimale, definita su tutto $\boldsymbol{R}$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y - e^{-x} y^{\frac{2}{3}} , \\ y(0) = -27 . \end{cases}$$

**7.** [19/5/2003 (hw)I] Risolvere

$$y' = \frac{y}{t} + \sin(t^2) y^2 ,$$
$$y(\sqrt{\pi}) = \lambda .$$

R.

$$y(t) = \frac{2\lambda t}{2\sqrt{\pi} - \lambda(\cos(t^2) + 1)} , \qquad t \in I ,$$

*con:*

$$I = (0, +\infty) , \quad \lambda < \sqrt{\pi} ; \qquad I = (t_1, t_2) , \quad \lambda \geq \sqrt{\pi} ,$$

*ove* $t_1 < \sqrt{\pi} < t_2$ *sono i due punti più vicini a* $\sqrt{\pi}$ *ove* $\cos(t_i^2) = 2\sqrt{\pi}/\lambda - 1 \in (-1, 1]$, $i = 1, 2$.

**8.** [16/6/2003 (hw)I] Trovare le soluzioni di

$$\begin{cases} y = xy' + (y')^2 , \\ y(0) = 1 , \end{cases} \tag{P1}$$

e quelle di

$$\begin{cases} y = xy' + (y')^2 , \\ y(2) = -1 . \end{cases} \tag{P2}$$

R.

$$\textit{(P1)} \quad y = 1 - x , \quad y = 1 + x . \qquad \textit{(P2)} \quad y = 1 - x , \quad y = -\frac{x^2}{4} .$$

## 350. E.d.o. riconducibili al I ordine: $y'' = f(x, y')$

**1.** [5/03/2001 (hw)I] Si risolva il problema di Cauchy

$$y'' = xy' + (y')^{\pi} e^{\frac{x^2(1-\pi)}{2}} ,$$
$$y(0) = 0 , \qquad y'(0) = 1 ,$$

trovando le limitazioni per l'intervallo di definizione della soluzione. [La $y(x)$ non si può esprimere mediante funzioni elementari.]
R.

$$y(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} (1 + t)^{\frac{1}{1-\pi}} \, \mathrm{d}t , \qquad -1 < x < \infty .$$

**2.** [24/4/2002 (hw)I] Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$x''(t) = e^{t+x'(t)+1} \,,$$

e riconoscere che tutte le soluzioni sono definite in intervalli limitati a destra.
Come esercizio extra, partendo dall'integrale generale ritrovare l'equazione differenziale (naturalmente si dovrà derivare due volte).
R.

$$x(t) = C_1 - \int_{t_0}^{t} \log(C_2 - e^{s+1}) \,\mathrm{d}s \,.$$

**3.** [9/5/2002 (hw)I] Si risolva il problema di Cauchy

$$y'' = (y' + t)^3 - 1 \,, \qquad y(0) = 1 \,, \quad y'(0) = 2 \,.$$

R.

$$y(t) = \frac{3}{2} - \frac{t^2}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 2t} \,, \qquad t < \frac{1}{8} \,.$$

**4.** [16/07/2003 (ex)I] Risolvere per ogni $\lambda \in \boldsymbol{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \frac{y'}{x}\Big(\ln\frac{y'}{x} + 1\Big) \,, \\ y(-1) = \lambda \,, \\ y'(-1) = -1 \,, \end{cases}$$

e spiegarne il significato geometrico.

**5.** [16/07/2003 (ex)II] Risolvere per ogni $\lambda \in \boldsymbol{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \frac{y'}{x}\Big(\ln\frac{y'}{2x} + 1\Big) \,, \\ y(-1) = \lambda \,, \\ y'(-1) = -2 \,, \end{cases}$$

e spiegarne il significato geometrico.

**6.** [5/7/2004 (ex)I] Trovare l'integrale generale di

$$y'' = y'(x + 1) \,.$$

**7.** [5/7/2004 (ex)II] Trovare l'integrale generale di

$$y'' = y'(2 - x) \,.$$

**1.** [5/03/2001 (hw)I] Trovare la soluzione di

$$y'' = -\frac{1}{2} e^{(y')^2 + y} \,,$$
$$y(0) = -1 \,, \qquad y'(0) = 1 \,.$$

R.

$$y(x) = -\frac{(x-2)^2}{4} \,, \qquad x \in \boldsymbol{R} \,.$$

**2.** [16/5/2002 (hw)I] Calcolare la soluzione di

$$\begin{cases} y'' + |y| = 0 \,, \\ y(0) = -1 \,, \\ y'(0) = 0 \,. \end{cases}$$

R.

$$y(t) = -\frac{e^t + e^{-t}}{2} \,.$$

**3.** [16/5/2002 (hw)I] Calcolare la soluzione di

$$\begin{cases} y'' + |y| = 0 \,, \\ y(0) = -1 \,, \\ y'(0) = 2 \,, \end{cases}$$

almeno sull'intervallo $(-\infty, \pi)$.
R.

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^t - 3e^{-t}) \,, & -\infty < t < \log\sqrt{3} \,, \\ \sqrt{3} \sin(t - \log\sqrt{3}) \,, & \log\sqrt{3} \le t < \log\sqrt{3} + \pi \,, \\ -\frac{1}{2} e^{t-\pi} + \frac{3}{2} e^{\pi - t} \,, & \log\sqrt{3} + \pi \le t < \infty \,. \end{cases}$$

## 400. Teoria locale e globale del prb di Cauchy

**1.** [9/4/2001 (ex)I] Mostrare che al problema di Cauchy

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1 \,, \qquad y(1) = 1 \,,$$

si può applicare uno dei teoremi di esistenza e unicità. Trovarne quindi la soluzione, indicando l'intervallo ove è definita.

**2.** [9/4/2001 (ex)II] Mostrare che al problema di Cauchy

$$y' = 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1 \,, \qquad y(1) = 0 \,,$$

si può applicare uno dei teoremi di esistenza e unicità. Trovarne quindi la soluzione, indicando l'intervallo ove è definita.

**3.** [23/5/2002 (hw)I] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0\,, \\ y(1) = 0\,, \qquad y'(1) = 1\,, \end{cases}$$

e dimostrare che è unica (usando il teorema di unicità).
R. $y(t) = -e^{2-2t} + te^{2-2t}$

## 420. Dipendenza continua e stime

**1.** [15/03/2001 (hw)I] Dimostrare che le soluzioni dei due problemi di Cauchy

$$\begin{aligned} y_1' &= \operatorname{arctg}(y_1 + x + \cos^2 y_1)\,, \qquad y_1(0) = 1\,; \\ y_2' &= \operatorname{arctg}(y_2 + x + \cos^2 y_2)\,, \qquad y_2(0) = 2\,; \end{aligned}$$

sono uniche, e trovare il segno e una stima dello scarto $y_1(3) - y_2(3)$.
R.

$$0 < y_2(3) - y_1(3) \le e^6\,.$$

**2.** [24/4/2002 (hw)I] Un punto materiale di massa $m$ si muove di moto rettilineo. La sua ascissa al tempo $t$ è indicata da $x(t)$. Si assuma sempre $x(t) > 1$, $\dot{x}(t) > 0$. Stime energetiche dicono che la sua energia cinetica è limitata da

$$K\left[\frac{x(t)}{\log x(t)}\right]^2,$$

per un'opportuna costante $K > 0$. Trovare una maggiorazione per $x(t)$, per ogni $t > 0$, sapendo che $x(0) \le R$.
R.

$$x(t) \le Re^{c\sqrt{t}}\,, \qquad t > 0\,, \qquad c^2 = 2\sqrt{2K/m}\,.$$

**3.** [19/5/2003 (hw)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= -y^p\,, \\ y(0) &= u_0 > 0\,, \end{aligned}$$

ove $p > 1$. Dimostrare che esiste una costante $C$, dipendente solo da $p$, tale che

$$0 < y(1) \le C\,,$$

qualunque sia $u_0$.
R.

$$y(t) = \frac{u_0}{\left[1 + (p-1)u_0^{p-1}t\right]^{\frac{1}{p-1}}}\,, \qquad t \ge 0\,;$$

$$C = \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p-1}}}\,.$$

**4.** [19/5/2003 (hw)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$y' = t^{-\alpha} y^p \,,$$
$$y(1) = u_0 > 0 \,,$$

con $\alpha \geq 0$, $p > 1$. Dimostrare che:
i) Se $0 \leq \alpha \leq 1$, la soluzione è tale che

$$\lim_{t \to t_0 -} y(t) = +\infty \,,$$

per un opportuno $t_0 > 1$.
ii) Se $\alpha > 1$ esiste una costante $c > 0$ dipendente solo da $\alpha$ e da $p$ tale che, se $u_0 > c$, si ha per $y$ il comportamento del punto i), mentre se $u_0 \leq c$, la soluzione è definita su tutto $(-\infty, +\infty)$.
R. ***Caso*** $\alpha \neq 1$***:*** *Nei $t$ in cui la $y$ è definita vale*

$$y(t) = \frac{u_0}{\left[1 + \frac{p-1}{\alpha-1} u_0^{p-1} (t^{-\alpha+1} - 1)\right]^{\frac{1}{p-1}}} \,.$$

*a) Nel caso $\alpha < 1$, il termine $[\dots]$, per $t$ che varia tra $1$ e $+\infty$, decresce da $1$ a $-\infty$. Dunque si annulla in un $t_0 > 1$ e il punto i) è dimostrato (per $\alpha \neq 1$).*
*b) Nel caso $\alpha > 1$, il termine $[\dots]$, per $t$ che varia tra $1$ e $+\infty$, decresce da $1$ a*

$$1 - \frac{p-1}{\alpha - 1} u_0^{p-1} \,.$$

*Se questo numero è negativo, siamo nel caso precedente, altrimenti il denominatore non si annulla mai per $t > 1$ e la soluzione è definita ovunque. Si verifica subito che questi due casi corrispondono a $u_0 > c$, e rispettivamente a $u_0 \leq c$, ove*

$$c = \left(\frac{\alpha - 1}{p - 1}\right)^{\frac{1}{p-1}} \,.$$

***Caso*** $\alpha = 1$***:*** *Nei $t$ in cui la $y$ è definita vale*

$$y(t) = \frac{u_0}{\left[1 - (p-1) u_0^{p-1} \ln t\right]^{\frac{1}{p-1}}} \,.$$

*Dunque per ogni $u_0 > 0$ si ha il comportamento di i), con*

$$t_0 = \exp\left\{\frac{1}{u_0^{p-1}(p-1)}\right\} \,.$$

## 430. Applicazioni dell'unicita'

**1.** [6/5/2002 (hw)I] 1) Si determinino per tentativi le soluzioni dei due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (|y| - e^{-t})^2 - y \,, \\ y(0) = 1 \,; \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = (|y| - e^{-t})^2 - y \,, \\ y(0) = -1 \,. \end{cases}$$

(*Sugg.* Provare con esponenziali.)
2) Si dimostri che tali soluzioni sono uniche.
3) Si deduca qualcosa sul comportamento della soluzione di

$$\begin{cases} y' = (|y| - e^{-t})^2 - y \,, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

per $t \to +\infty$ (ammettendo che tale soluzione sia definita in $[0, +\infty)$).

**2.** [16/07/2003 (ex)I] Dimostrare che

$$\begin{cases} y' = e^{-y^2} \operatorname{arctg}(y) \cos x \,, \\ y(0) = 2 \,, \end{cases}$$

ha un'unica soluzione definita su $(-\infty, \infty)$, che questa è sempre positiva, e che essa *non* ha limite per $x \to +\infty$.

**3.** [16/07/2003 (ex)II] Dimostrare che

$$\begin{cases} y' = e^{-y^2} \sin^2(y) \sin x \,, \\ y(0) = 3 \,, \end{cases}$$

ha un'unica soluzione definita su $(-\infty, \infty)$, che questa è sempre positiva, e che essa *non* ha limite per $x \to +\infty$.

**4.** [16/6/2003 (hw)I] Determinare il valore di

$$\lim_{x \to \infty} y(x) \,,$$

ove $y$ soddisfa

$$\begin{cases} y' = (y - 1) \operatorname{arctg}\left( \frac{y}{x} + y e^{-y} \right) , \\ y(1) = a \,, \end{cases}$$

con $a \in (0, 1)$ qualunque.
R.

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0 \,.$$

**5.** [16/6/2003 (hw)I] Determinare il valore di

$$\lim_{x \to \infty} y(x) \,,$$

ove $y$ soddisfa

$$\begin{cases} y' = (1 - y) \operatorname{arctg}\left( \frac{y}{x} + y e^{-y} \right) , \\ y(1) = a \,, \end{cases}$$

con $a \in (0, 1)$ qualunque.
R.

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 1 \,.$$

## 440. Questioni non standard di unicita'

**1.** [15/03/2001 (hw)I] Il probabilista russo Kolmogorov (A.N. Kolmogorov, Bull. Acad. Sci. USSR, Math. Ser. **1** (1937), 355–359) e l'ingegnere statunitense Avrami (M. Avrami, Kinetics of phase change I, J. Chem. Phys. **7** (1939), 1103–1112; II, J. Chem. Phys. **8** (1940), 212–224; III, J. Chem. Phys. **9** (1941), 177–184) proposero indipendentemente un modello matematico per la crescita di cristalli in una sostanza inizialmente amorfa (cioè non cristallina). Se denotiamo con $w(t)$ la frazione di volume occupata dai cristalli al tempo $t$, il modello di Avrami-Kolmogorov può essere messo nella forma (valida in dimensione spaziale pari a 3)

$$
(\mathrm{P}) \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = K(1-w)\left[\ln\frac{1}{1-w}\right]^{\frac{3}{4}}, \qquad w(0) = 0\,.
$$

Qui $K$ è una costante positiva; per ovvi motivi, fisici e matematici, si deve avere $0 \le w < 1$.

Si noti che il problema (P) ha la soluzione $w(t) \equiv 0$. Spiegare come sia allora possibile che venga usato per predire valori di $w(t)$ positivi per ogni $t > 0$.

Si mostri che ogni soluzione della e.d.o. in (P) è non decrescente.

Si determini l'unica soluzione di (P) tale che $w(t) > 0$ per ogni $t > 0$.

Si trovino tutte le altre soluzioni di (P) e si dimostri che hanno tutte limite 1 per $t \to \infty$.

R.

$$
3: w(t) = 1 - e^{-kt^4}, \quad t > 0\,, \qquad w(t) = 0\,, \quad t \le 0\,, \qquad k = \left(\frac{K}{4}\right)^{\frac{1}{4}};
$$

4 : *le altre soluzioni sono della forma* $w(t - t_0)$ *per* $t_0 > 0$.

**2.** [15/03/2001 (hw)I] Trovare un aperto ove si possa applicare il teorema di esistenza e unicità al problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
y' &= -x\sqrt{y}\,,\\
y(0) &= 1\,.
\end{aligned}
$$

Determinare la soluzione massimale e dimostrare che è definita su tutto $\boldsymbol{R}$.

Dimostrare che tale soluzione è unica su tutto $\boldsymbol{R}$, nonostante questo non segua dal teorema di unicità.

R.

$$
1: \quad y(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}(x^2-4)^2\,, & -2 < x < 2\,,\\ 0\,, & x \le -2 \quad o \quad x \ge 2\,. \end{cases}
$$

**3.** [27/06/2002 (ex)I] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$
\begin{cases} y' = y + ty^{\frac{2}{3}}\,,\\ y(0) = 1\,. \end{cases}
$$

Dimostrare che tale soluzione è definita per ogni $t \in \boldsymbol{R}$ ed è unica.

**4.** [27/06/2002 (ex)II] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y + ty^{\frac{2}{3}}\,, \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Dimostrare che tale soluzione è definita per ogni $t \in \boldsymbol{R}$ ed è unica.

**5.** [11/09/2002 (ex)I] Trovare tutte le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \sin(y'' + 2y' + y) = 0\,, \\ y(0) = 5\,, \quad y'(0) = 0\,, \end{cases}$$

e spiegare il significato geometrico del problema stesso.

**6.** [11/09/2002 (ex)II] Trovare tutte le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \cos(y'' - 2y' + y) = 1\,, \\ y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 3\,, \end{cases}$$

e spiegare il significato geometrico del problema stesso.

**7.** [4/12/2002 (ex)I] Trovare tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} (y'' - 2y' + y)^2 = \frac{1}{x}\,, \\ y(1) = 0\,; \end{cases}$$

non occorre calcolare esplicitamente gli integrali.

**8.** [24/4/2002 (hw)I] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\cos(u'x) = 1\,,$$

tali che $u(-1) = 1/2$; specificare anche l'intervallo di definizione.
R. *Per ogni fissato $k$ intero, si ha la soluzione*

$$u(x) = 2k\pi \log|x| + \frac{1}{2}\,, \qquad x < 0\,.$$

**9.** [16/5/2002 (hw)I] Trovare qualche soluzione di

$$(y'' + y' - 2y)(y' - y) = 0\,.$$

R.

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}\,.$$

**10.** [16/5/2002 (hw)I] Trovare tutte le soluzioni di

$$(y'' + y' - 2y)(y' - y) = 0\,.$$

R.

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} .$$

**11.** [23/09/2003 (ex)I] Trovare tutte le soluzioni massimali di

$$(y'')^2 = (y' + 1)^4 ,$$

che siano funzioni convesse, insieme con il loro intervallo di definizione.

**12.** [23/09/2003 (ex)II] Trovare tutte le soluzioni massimali di

$$(y'')^2 = (y' + 1)^4 ,$$

che siano funzioni concave, insieme con il loro intervallo di definizione.

## 480. Soluzioni massimali

**1.** [16/07/2001 (ex)I] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \lambda(y-1)^2 + 1 , \qquad y(0) = 0 ,$$

ove $\lambda > 0$ è assegnato.
Dimostrare che l'intervallo di definizione della soluzione è limitato a destra per ogni fissato $\lambda > 0$, ma che l'estremo superiore di tale intervallo può essere reso arbitrariamente grande scegliendo $\lambda > 0$ opportunamente.

**2.** [16/07/2001 (ex)II] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = -\lambda(y+1)^2 - 1 , \qquad y(0) = 0 ,$$

ove $\lambda > 0$ è assegnato.
Dimostrare che l'intervallo di definizione della soluzione è limitato a sinistra per ogni fissato $\lambda > 0$, ma che l'estremo inferiore di tale intervallo può essere reso arbitrariamente piccolo scegliendo $\lambda > 0$ opportunamente.

**3.** [02/2001 (hw)I] Trovare le soluzioni di

$$\begin{cases} y' = \frac{y^4}{3} x , \\ y(0) = u_0 . \end{cases}$$

al variare di $u_0 \in \boldsymbol{R}$ (questo include la determinazione dell'intervallo di definizione di ciascuna soluzione), e tracciarne il grafico.

**4.** [15/03/2001 (hw)I] Dimostrare che tutte le soluzioni massimali di

$$y' = y^2 + 1$$

sono illimitate.

R.

$$
\begin{aligned}
&y(x) = \operatorname{tg}(x + C)\,, \quad x \in I\,,\\
&\textit{per } I \textit{ intervallo di lunghezza } \pi \textit{ opportuno.}
\end{aligned}
$$

**5.** [15/03/2001 (hw)I] Dimostrare che tutte le soluzioni massimali di

$$
y' = (y^2 + 1)\cos^2 y
$$

sono limitate.
R.

$$
\textit{Infatti } y \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi \textit{ è soluzione per ogni fissato } k \textit{ intero.}
$$

**6.** [4/07/2003 (ex)I] Trovare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$
\begin{cases}
y' = xe^{-(y-x)} + 1\,,\\
y(1) = u_0\,,
\end{cases}
$$

e discuterne il variare dell'intervallo di definizione al variare di $u_0 \in \boldsymbol{R}$.

**7.** [4/07/2003 (ex)II] Trovare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$
\begin{cases}
y' = -xe^{y-x} + 1\,,\\
y(1) = u_0\,,
\end{cases}
$$

e discuterne il variare dell'intervallo di definizione al variare di $u_0 \in \boldsymbol{R}$.

**8.** [23/09/2003 (ex)I] Risolvere il seguente problema di Cauchy, e determinare se l'intervallo di definizione della soluzione è limitato a destra o a sinistra:

$$
\begin{cases}
y' = y + |x|y^2\,,\\
y(0) = 1\,.
\end{cases}
$$

**9.** [23/09/2003 (ex)II] Risolvere il seguente problema di Cauchy, e determinare se l'intervallo di definizione della soluzione è limitato a destra o a sinistra:

$$
\begin{cases}
y' = -y + |x|y^2\,,\\
y(0) = 1\,.
\end{cases}
$$

**10.** [16/6/2003 (hw)I] Dimostrare, senza calcolarla, che la soluzione massimale di

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{y - 2x}{y - x}\,,\\
y(1) &= \frac{3}{2}\,,
\end{aligned}
$$

è definita su un intervallo della forma $(a, b)$, con

$$1 < b < \infty\,, \qquad -\infty \le a \le 0\,.$$

(*Sugg.* Studiare le zone del piano $xy$ ove $y'$ ha segno definito; usare il teorema sul comportamento delle soluzioni massimali.)

**11.** [5/7/2004 (ex)I] Si determini l'intervallo di definizione di tutte le soluzioni massimali di

$$y' = \operatorname{arctg}(y|x|) + ye^{-y^2} \cos^2 \frac{1}{x^2+1}\,,$$

e si trovi

$$\lim_{x \to \Sigma -} y(x)\,,$$

ove $\Sigma \le \infty$ è l'estremo destro di tale intervallo.

**12.** [5/7/2004 (ex)II] Si determini l'intervallo di definizione di tutte le soluzioni massimali di

$$y' = \operatorname{arctg}(ye^{2x}) + \frac{y}{y^2+1} \left|\sin(1-e^{-x})\right|\,,$$

e si trovi

$$\lim_{x \to \Sigma -} y(x)\,,$$

ove $\Sigma \le \infty$ è l'estremo destro di tale intervallo.

## 500. Varie e.d.o.

**1.** [24/4/2002 (hw)I] (Ripasso dell'ascissa curvilinea) Una formica, che assumiamo puntiforme, si arrampica su un filo d'erba che ha la forma di un'elica circolare, ossia è parametrizzato da

$$x(v) = r\cos v\,, \qquad y(v) = r\sin v\,, \qquad z(v) = hv\,, \qquad v \ge 0\,,$$

con $r$ e $h$ costanti positive.
L'insetto parte da quota $z = 2h\pi$, in salita, e la sua velocità (scalare ..., ossia $\dot{s}$ se $s$ denota l'ascissa curvilinea della posizione della formica) è pari a $cz$, ove $c$ è una costante positiva, e $z$ è la quota a cui si trova la formica.
Determinare quanto tempo occorre perché descriva una spira completa, ossia si trovi ancora sulla verticale del punto di partenza. Notare che questo tempo si mantiene limitato per $h \to \infty$, nonostante la distanza percorsa vada a $\infty$ in questo caso, e spiegarsi intuitivamente il fenomeno.
R.

$$t = \log 2 \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{ch}\,.$$

## 520. Clairaut

**1.** [23/09/2003 (ex)I] Trovare tutte le soluzioni di

$$y = xy' + \cosh y'\,.$$

**2.** [23/09/2003 (ex)II] Trovare tutte le soluzioni di

$$y = xy' + \sinh y' .$$

## 550. Sistemi del I ordine

**1.** [4/07/2003 (ex)I] Determinare i $k \in \boldsymbol{R}$ tali che le soluzioni di tutti i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} , \\ \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{u}_0 , \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -2k & -2 \end{pmatrix} ,$$

al variare di $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{R}^2$ soddisfino

$$\boldsymbol{y}(t) \to (0,0) , \qquad t \to +\infty .$$

**2.** [4/07/2003 (ex)I] Trovare, con il metodo degli autovettori, l'integrale generale di

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 , \\ y_2' = 2y_1 + y_2 . \end{cases}$$

**3.** [4/07/2003 (ex)II] Determinare i $k \in \boldsymbol{R}$ tali che le soluzioni di tutti i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} , \\ \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{u}_0 , \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -3k \\ -k & 7 \end{pmatrix} ,$$

al variare di $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{R}^2$ soddisfino

$$\boldsymbol{y}(t) \to (0,0) , \qquad t \to -\infty .$$

**4.** [4/07/2003 (ex)II] Trovare, con il metodo degli autovettori, l'integrale generale di

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2 , \\ y_2' = -y_1 + y_2 . \end{cases}$$

**5.** [19/5/2003 (hw)I] Dimostrare che la soluzione di

$$\begin{aligned} x' &= -y^2 - x , \\ y' &= -y + xy , \\ x(0) &= x_0 , \\ y(0) &= y_0 , \end{aligned}$$

(per qualunque scelta di $(x_0, y_0)$), soddisfa $(x(t), y(t)) \to (0, 0)$ per $t \to \infty$. (*Sugg.* Si ricavi dal sistema un'equazione differenziale per $\delta(t) = x(t)^2 + y(t)^2$.)
R. *Vale*

$$\delta' = 2x'x + 2y'y = -2\delta\,,$$

*da cui* $\delta(t) = \delta(0)e^{-2t} \to 0$ *per* $t \to \infty$.

**6.** [5/7/2004 (ex)I] Si determini una matrice risolvente del sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 12y_2\,, \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2\,. \end{cases}$$

Si determinino i valori iniziali $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{u}_0$ tali che il relativo problema di Cauchy abbia soluzione $\boldsymbol{y}$ tale che

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(t) = 0\,.$$

**7.** [5/7/2004 (ex)II] Si determini una matrice risolvente del sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 32y_2\,, \\ y_2' = 2y_1 + y_2\,. \end{cases}$$

Si determinino i valori iniziali $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{u}_0$ tali che il relativo problema di Cauchy abbia soluzione $\boldsymbol{y}$ tale che

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(t) = 0\,.$$

## 590. Ricostruzione di e.d.o.

**1.** [8/03/2001 (hw)I] Trovare una e.d.o. lineare omogenea a coefficienti costanti, di ordine minimo possibile, tale che $e^x$ e $\cos 2x$ siano sue soluzioni.
R.

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0\,.$$

**2.** [8/03/2001 (hw)I] Trovare una e.d.o. lineare non omogenea a coefficienti costanti del $2^o$ ordine, tale che $e^x + e^{x^2}$ e $e^{-x} + e^{x^2}$ siano sue soluzioni.
R.

$$y'' - y = (4x^2 + 1)e^{x^2}\,.$$

**3.** [16/5/2002 (hw)I] Trovare una e.d.o. lineare omogenea del III ordine a coefficienti costanti tale che

$\lim_{t\to\infty} y(t)e^{-3t} = 1$ per qualche soluzione $y$;

esistano soluzioni con un numero infinito di zeri.

Dimostrare che non è possibile trovare una e.d.o. con queste proprietà, se si richiede che il suo ordine sia invece pari a 2.
R. *Per esempio*

$$y''' - 3y'' + y' - 3y = 0 \,, \quad y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t \,.$$

## 600. E.d.o. lineari

**1.** [16/5/2002 (hw)I] Si calcoli l'integrale generale di

$$y^{(n)} + y^{(n-1)} - 2y^{(n-2)} = 0 \,.$$

R.

$$y(t) = c_1 + c_2 t + \dots + c_{n-2} t^{n-3} + c_{n-1} e^{t} + c_n e^{-2t} \,.$$

**2.** [16/6/2003 (hw)I] Trovare tutte le funzioni $y \in C^4(\boldsymbol{R})$ tali che

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \quad \text{in } \boldsymbol{R}; \qquad y(0) = y'(0) \,; \qquad y\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 1 \,.$$

R.

$$y(t) = (a+b)\cos x + a \sin x + bx\cos x + \frac{2}{\pi}(1-a)x\sin x \,, \qquad x \in \boldsymbol{R} \,,$$

*con* $a$, $b \in \boldsymbol{R}$.

## 610. Prb al contorno

**1.** [9/4/2001 (ex)I] Dire per quali $k \in (-1, 1)$ esiste una soluzione del problema ai limiti

$$\begin{cases} y'' + 2ky' + y = k \,, \\ y(0) = 0 \,, \quad y(\pi) = 1 \,, \end{cases}$$

e calcolarla.

**2.** [9/4/2001 (ex)II] Dire per quali $k \in (-1, 1)$ esiste una soluzione del problema ai limiti

$$\begin{cases} y'' + 2ky' + y = -2k \,, \\ y(0) = 0 \,, \quad y(\pi) = 1 \,, \end{cases}$$

e calcolarla.

**3.** [8/03/2001 (hw)I] Trovare le soluzioni di

$$\begin{aligned} & y'' - \lambda^2 y = 0 \,, \\ & y(1) = 1 \,, \qquad y(-1) = 1 \,. \end{aligned}$$

Qui $\lambda > 0$ è una costante reale.

R.

$$y(x) = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

**4.** [8/03/2001 (hw)I] Trovare la relazione tra $\lambda > 0$ e $x_0 > 0$ che fa sì che

$$\begin{aligned} & y'' + \lambda^2 y = 0\,, \\ & y(x_0) = 0\,, \qquad y(-x_0) = 0 \end{aligned}$$

abbia soluzioni non identicamente nulle. Sia $\mathcal{L}$ il luogo geometrico dei punti nel piano $\lambda x_0$ che soddisfano tale relazione: tracciare alcune delle curve che compongono $\mathcal{L}$.
R.

$$\lambda x_0 = \frac{k\pi}{2} \qquad k \in \boldsymbol{N}\,.$$

**5.** [11/07/2002 (ex)I] Trovare la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 5y = 0\,, \\ y(0) = 1\,, \qquad y(-1) = 0\,. \end{cases}$$

**6.** [11/07/2002 (ex)II] Trovare la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 0\,, \\ y(0) = 0\,, \qquad y(1) = e\,. \end{cases}$$

## 620. Studio qualitativo

**1.** [8/03/2001 (hw)I] Dimostrare che tutte le soluzioni di

$$y'' + 2y' - 3y = 0\,,$$

che soddisfano $0 > y(0) > y'(0)$ sono decrescenti su $\boldsymbol{R}$.

**2.** [16/5/2002 (hw)I] Per ciascuna delle condizioni seguenti, trovare tutte le soluzioni di

$$y''' - \pi y'' - y' + \pi y = 0\,,$$

che la soddisfano:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y''(0) = 0\,. \\ \text{b)} & \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0\,, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0\,, \quad y(1) = 1\,. \\ \text{c)} & \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad \int_0^1 y(t)\,\mathrm{d}t = 0\,. \end{array}$$

R.

$$
\begin{array}{ll}
a) & y(t) = \dfrac{1}{1-\pi^2}e^{\pi t} + \dfrac{\pi}{2(\pi-1)}e^{t} + \dfrac{\pi}{2(\pi+1)}e^{-t} \,. \\
b) & \textit{nessuna.} \\
c) & y(t) = \dfrac{\pi(e-1)}{\pi(e-1)-e^{\pi}+1}e^{\pi t} + \dfrac{1-e^{\pi}}{\pi(e-1)-e^{\pi}+1}e^{t} \,.
\end{array}
$$

**3.** [23/5/2002 (hw)I] Determinare $\lambda$ in modo che la soluzione di questo problema di Cauchy abbia limite per $t \to \infty$, e calcolare tale soluzione:

$$
\begin{cases}
y''' - y'' + y' - y = 0 \,, \\
y(0) = 1 \,, \qquad y'(0) = 1 \,, \qquad y''(0) = \lambda \,.
\end{cases}
$$

R. $\lambda = 1$

**4.** [10/12/2003 (ex)I] Per ogni $k \in \boldsymbol{R}$, trovare l'integrale generale di

$$
y'' + 2y' + ky = 0 \,. \tag{A}
$$

Determinare i valori di $k \in \boldsymbol{R}$ tali che:

$$
y(0) = 0, \text{ e } y \text{ soluzione di (A)} \quad \Longrightarrow \quad y(1) = 0.
$$

**5.** [10/12/2003 (ex)II] Per ogni $k \in \boldsymbol{R}$, trovare l'integrale generale di

$$
y'' - 2y' + ky = 0 \,. \tag{A}
$$

Determinare i valori di $k \in \boldsymbol{R}$ tali che:

$$
y(0) = 0, \text{ e } y \text{ soluzione di (A)} \quad \Longrightarrow \quad y(1) = 0.
$$

## 650. E.d.o. lineari a coefficienti costanti non omogenee: forme speciali

**1.** [16/07/2001 (ex)I] Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$
y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \,.
$$

**2.** [16/07/2001 (ex)II] Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$
y'' + 6y' + 9y = e^{-3x} \,.
$$

**3.** [8/03/2001 (hw)I] Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{aligned}&y'' - 4y = \cos 2x\,,\\&y(0) = 0\,, \qquad y'(0) = 0\,.\end{aligned}$$

R.

$$y(x) = \frac{1}{16}(e^{2x} + e^{-2x}) - \frac{1}{8}\cos 2x\,.$$

**4.** [8/03/2001 (hw)I] Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{aligned}&y'' + 4y = \cos 2x\,,\\&y(0) = 0\,, \qquad y'(0) = 0\,.\end{aligned}$$

R.

$$y(x) = \frac{1}{4}x\sin 2x\,.$$

**5.** [8/03/2001 (hw)I] Trovare l'integrale generale di

$$y'' + 2y' + y = x + \cos 3x\,.$$

R.

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + x - 2 + \frac{3}{50}\sin 3x - \frac{2}{25}\cos 3x\,, \quad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

**6.** [15/03/2001 (hw)I] Si dimostri che per $\varepsilon \to 0$ la soluzione $y_\varepsilon$ del problema di Cauchy

$$\begin{aligned}&y'' + y = \sin\frac{x}{\varepsilon}\,, \qquad (0 < \varepsilon < 1)\\&y(0) = 1\,, \qquad y'(0) = 0\,,\end{aligned}$$

converge, in ogni $x$ fissato, alla soluzione $y_0$ di

$$\begin{aligned}&y'' + y = 0\,,\\&y(0) = 1\,, \qquad y'(0) = 0\,.\end{aligned}$$

R.

$$y_\varepsilon(x) = \cos x - \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}\sin x + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}\sin\frac{x}{\varepsilon} \to y_0(x) = \cos x\,.$$

**7.** [27/06/2002 (ex)I] a) Trovare l'integrale generale di

$$y'' + 4y = \cos(\omega t)\,,$$

per ogni fissato $\omega > 0$.
b) Trovare per quali assegnati $\omega > 0$ la condizione

$$|y(0)| + |y'(0)| \le 1\,,$$

implica che esista una costante $C > 0$ tale che

$$|y(t)| \leq C\,, \qquad \text{per ogni } t \in \boldsymbol{R}.$$

Per tali $\omega$, determinare $C$ (che dipende da $\omega$).

**8.** [27/06/2002 (ex)I] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}\,, \\ y(1) = e\,, \qquad y'(1) = e\,. \end{cases}$$

**9.** [27/06/2002 (ex)II] a) Trovare l'integrale generale di

$$y'' + 9y = \sin(\lambda t)\,,$$

per ogni fissato $\lambda > 0$.
b) Trovare per quali assegnati $\lambda > 0$ la condizione

$$|y(0)| + |y'(0)| \leq 2\,,$$

implica che esista una costante $C > 0$ tale che

$$|y(t)| \leq C\,, \qquad \text{per ogni } t \in \boldsymbol{R}.$$

Per tali $\lambda$, determinare $C$ (che dipende da $\lambda$).

**10.** [27/06/2002 (ex)II] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{t}\,, \\ y(-1) = -e\,, \qquad y'(-1) = e\,. \end{cases}$$

**11.** [11/09/2002 (ex)I] Determinare tutte le soluzioni di

$$y^{(4)} - y'' = 7\,.$$

**12.** [11/09/2002 (ex)I] Trovare tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} y'' + y' = (1 + e^{-x})^2\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

**13.** [11/09/2002 (ex)II] Determinare tutte le soluzioni di

$$y^{(4)} + 4y'' = \pi\,.$$

**14.** [11/09/2002 (ex)II] Trovare tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} y'' + y' = (1 - e^{-x})^2 \,, \\ y(0) = 1 \,. \end{cases}$$

**15.** [4/12/2002 (ex)I] Determinare tutte le soluzioni di

$$y'' + ky' + 2y = x \,,$$

al variare del parametro $k$ in $\boldsymbol{R}$.

**16.** [16/07/2003 (ex)I] Trovare tutti i valori di $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\lambda \neq -9$, tali che

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = e^{-3x} \,, \\ y(0) = 0 \,, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0 \,, \end{cases}$$

abbia soluzioni, e calcolarle.

**17.** [16/07/2003 (ex)I] Calcolare l'integrale generale di

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x \,.$$

**18.** [16/07/2003 (ex)II] Trovare tutti i valori di $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\lambda \neq 4$, tali che

$$\begin{cases} y'' - \lambda y = e^{2x} \,, \\ y(0) = 0 \,, \\ \lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = 0 \,, \end{cases}$$

abbia soluzioni, e calcolarle.

**19.** [16/07/2003 (ex)II] Calcolare l'integrale generale di

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \sin(2x) \,.$$

**20.** [23/09/2003 (ex)I] Risolvere

$$\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = e^x + x \,, \\ y(0) = 1 \,, \\ y'(0) = 0 \,. \end{cases}$$

**21.** [23/09/2003 (ex)II] Risolvere

$$\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = e^x + 2x \,, \\ y(0) = 0 \,, \\ y'(0) = 1 \,. \end{cases}$$

**22.** [10/12/2003 (ex)I] Trovare l'integrale generale di

$$y''' + y'' - 2y' = \cos x + e^{2x}.$$

**23.** [10/12/2003 (ex)II] Trovare l'integrale generale di

$$y''' - y'' - 2y' = \sin x + e^{x}.$$

**24.** [5/7/2004 (ex)I] Calcolare la soluzione di

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 8y = 7e^{2x} \cos 2x\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

**25.** [5/7/2004 (ex)II] Calcolare la soluzione di

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 10y = 9e^{3x} \sin x\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

## 690. Equazioni di Eulero

**1.** [29/03/2001 (hw)I] Trovare un aperto ove si possa applicare il teorema di esistenza e unicità al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0\,, \\ y(1) = 1\,, \quad y'(1) = 0\,, \end{cases}$$

e trovarne la soluzione.
R.

$$y(x) = \frac{1 + \ln x}{x}\,, \qquad x > 0\,.$$

**2.** [29/03/2001 (hw)I]

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 5\frac{y'}{x} + 5\frac{y}{x^2} = 0\,, \qquad x > 0\,.$$

Trovare per quali valori di $x_1 > 1$ il problema ai limiti per tale equazione, con dati

$$y(1) = 1\,, \quad y(x_1) = 2\,,$$

ammette soluzione.

R.

$$
\begin{aligned}
1: &\quad y(x) = C_1 \frac{\cos(\ln x)}{x^2} + C_2 \frac{\sin(\ln x)}{x^2}\,, \qquad x > 0\,; \\
2: &\quad \textit{ammette soluzioni per } x \neq e^{k\pi},\ k = 1,\,2,\,3,\,\dots
\end{aligned}
$$

**3.** [16/6/2003 (hw)I] Calcolare la soluzione di

$$
y'' + \frac{3}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0\,, \quad \text{per } x > 0; \qquad y(1) = 2\,; \qquad \int_1^2 y(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.
$$

R.

$$
y(x) = \frac{2}{x} - \frac{4}{\ln 2} \frac{\ln x}{x}\,.
$$

## 730. Integrazione di forme esatte in $R^2$

**1.** [9/4/2001 (ex)I] Trovare il dominio di definizione $A$ della forma

$$
\omega = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x - \sin^2 y}} - \frac{\sin 2y}{\sqrt{x - \sin^2 y}}\,\mathrm{d}y\,,
$$

e dimostrare che $\omega$ è esatta in $A$. Trovare la primitiva $F$ tale che $F(1,0) = \pi$.

**2.** [9/4/2001 (ex)II] Trovare il dominio di definizione $A$ della forma

$$
\omega = \frac{2 \sin 2x}{\sqrt{y - \cos^2 x}}\,\mathrm{d}x + \frac{2\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y - \cos^2 x}}\,,
$$

e dimostrare che $\omega$ è esatta in $A$. Trovare la primitiva $F$ tale che $F(\pi, 2) = \pi$.

**3.** [12/09/2001 (ex)I] Trovare il più grande aperto connesso contenente $(0,0)$ ove la forma

$$
\omega = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x + y^2)} + \frac{2y\,\mathrm{d}y}{\cos^2(x + y^2)}
$$

è esatta, e determinarne le primitive.

**4.** [12/09/2001 (ex)II] Trovare il più grande aperto connesso contenente $(0,0)$ ove la forma

$$
\omega = \frac{2x\,\mathrm{d}x}{\cos^2(x^2 - y)} + \frac{\mathrm{d}y}{\cos^2(x^2 - y)}
$$

è esatta, e determinarne le primitive.

**5.** [22/03/2001 (hw)I] Dire se la forma

$$
\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y\,,
$$

è integrabile nel suo dominio di definizione.
R.

$$
\textit{Sì}\,.
$$

**6.** [22/03/2001 (hw)I] Dire se la forma

$$
\frac{x^3}{(x^4+y^4-1)^{\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}x+\frac{y^3}{(x^4+y^4-1)^{\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}y\,,
$$

è integrabile nel suo dominio di definizione. (*Sugg.* È possibile, ma non indispensabile, calcolare direttamente il periodo.)
R.

$$
\textit{Sì}\,.
$$

**7.** [22/03/2001 (hw)I] Data la forma

$$
\Big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{x\ln y}\Big)\,\mathrm{d}x+\Big(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}-\frac{\ln x}{y(\ln y)^2}\Big)\,\mathrm{d}y\,,
$$

trovarne l'insieme di definizione e di esattezza;

trovarne la primitiva che vale $\pi$ in $(1/2,\sqrt{3}/2)$;

trovarne la primitiva $F$ tale che $F(x,x)\to 0$ se $x\to 0$.

R.

$$
\begin{aligned}
1:&\quad A=(0,1)\times(0,1)\,;\\
2:&\quad F(x,y)=\arcsin x+\arcsin y+\frac{\ln x}{\ln y}+\frac{\pi}{2}-\frac{\ln 4}{\ln\frac{4}{3}}\,;\\
3:&\quad F(x,y)=\arcsin x+\arcsin y+\frac{\ln x}{\ln y}-1\,.
\end{aligned}
$$

**8.** [22/03/2001 (hw)I] Trovare la primitiva di

$$
-\frac{e^{-x-y}}{\cos^2 e^{-x-y}}\,\mathrm{d}x-\frac{e^{-x-y}}{\cos^2 e^{-x-y}}\,\mathrm{d}y\,,
$$

che si annulla nell'origine.
R.

$$
F(x,y)=\operatorname{tg}e^{-x-y}-\operatorname{tg}1\,,\qquad x+y>\ln\frac{2}{\pi}\,.
$$

**9.** [29/03/2001 (hw)I] Si assuma che la forma

$$
4\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\big(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y\big)
$$

sia chiusa nel suo dominio di definizione (come in effetti è).

Dimostrare che è esatta nel suo dominio di definizione.

Trovarne una primitiva.

R.

$$2: \quad F(x,y) = \big(\ln(x^2+y^2)\big)^2 + C\,, \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

**10.** [29/03/2001 (hw)I] Data la forma

$$\frac{2x}{(x^2+y^4+z^2)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{4y^3}{(x^2+y^4+z^2)^2}\,\mathrm{d}y + \frac{2z}{(x^2+y^4+z^2)^2}\,\mathrm{d}z\,,$$

dire se è esatta nel suo dominio di definizione;

se lo è, calcolarne la primitiva tale che $F(x,0,0) \to 0$ se $x \to +\infty$.

R.

$$1: \quad \text{sì;} \qquad 2: \quad F(x,y,z) = -\frac{1}{x^2+y^4+z^2}\,, \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^3 - \{(0,0,0)\}.$$

**11.** [29/03/2001 (hw)I] Data la forma

$$\left(y + \frac{y}{2(z-xy)^{\frac{3}{2}}}\right)\mathrm{d}x + \left(x + \frac{x}{2(z-xy)^{\frac{3}{2}}}\right)\mathrm{d}y - \frac{\mathrm{d}z}{2(z-xy)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}z\,,$$

dire se è esatta nel suo dominio di definizione;

se lo è, calcolarne la primitiva tale che $F(1,2,3) = 4$.

R.

$$1: \quad \text{sì;} \qquad 2: \quad F(x,y,z) = xy + \frac{1}{\sqrt{z-xy}} + 1\,, \qquad \text{in } \{(x,y,z) \mid z > xy\}.$$

**12.** [27/06/2002 (ex)I] Determinare l'aperto di definizione $A$ della forma

$$\left(\frac{2x(x^2+1)}{\sqrt{(x^2+1)^2-y^2}} + 1\right)\mathrm{d}x - \frac{y}{\sqrt{(x^2+1)^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\,,$$

e dire se è esatta in $A$. In caso affermativo calcolarne una primitiva.

**13.** [27/06/2002 (ex)II] Determinare l'aperto di definizione $A$ della forma

$$-\frac{x}{2\big((y^2+1)^2-x^2\big)^{\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}x + \left(\frac{y(y^2+1)}{\big((y^2+1)^2-x^2\big)^{\frac{3}{4}}} + 1\right)\mathrm{d}y\,,$$

e dire se è esatta in $A$. In caso affermativo calcolarne una primitiva.

**14.** [11/09/2002 (ex)I] Trovare il più grande aperto $A$ ove la forma

$$-2\sqrt{x^2}ye^{-x^2}\sin(ye^{-x^2})\,\mathrm{d}x - e^{-x^2}\sin(ye^{-x^2})\,\mathrm{d}y$$

è esatta, e determinarne tutte le primitive in $A$.

**15.** [11/09/2002 (ex)II] Trovare il più grande aperto $A$ ove la forma

$$e^{-y^2}\cos(xe^{-y^2})\,\mathrm{d}x + 2\sqrt{y^2}xe^{-y^2}\cos(xe^{-y^2})\,\mathrm{d}y$$

è esatta, e determinarne tutte le primitive in $A$.

**16.** [4/12/2002 (ex)I] Determinare un aperto di $\boldsymbol{R}^2$ ove la forma differenziale

$$(e^{xy}+2x)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{y}e^{xy} - \frac{1}{y^2}e^{xy} + 2y\right)\mathrm{d}y\,,$$

sia esatta e calcolarne una primitiva.

**17.** [5/6/2002 (hw)I] Dimostrare che la forma

$$\Big[\log(x^2+y^2-1) + \frac{2x^2}{x^2+y^2-1}\Big]\,\mathrm{d}x + \frac{2y}{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}y$$

è esatta in $A = \{x^2+y^2>1\}$, usando i criteri noti. Calcolarne la primitiva $F$ tale che $F(1,1)=5$.
R.

$$F(x,y) = x\log(x^2+y^2-1)+5\,.$$

**18.** [5/6/2002 (hw)I] Data la forma

$$\left[\frac{y}{\cos^2(xy)} + \cos x\right]\mathrm{d}x + \left[\frac{x}{\cos^2(xy)} - \sin y\right]\mathrm{d}y\,,$$

dire se la forma è esatta o no in ciascuna delle componenti connesse di $A = \{0 < xy < \pi/2\}$, e determinarne le primitive.
R.

$$F(x,y) = \operatorname{tg}(xy) + \sin x + \cos y + K\,.$$

**19.** [5/6/2002 (hw)I] Data la forma

$$\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\,\mathrm{d}y\,,$$

determinarne l'aperto di definizione, e trovare un aperto connesso ove è esatta, calcolandone una primitiva.
R.

$$F(x,y) = \mathit{arcsin}\,(x-y)+K\,, \qquad -1 < x-y < 1\,.$$

**20.** [19/6/2002 (hw)I] Trovare la primitiva $F : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ di

$$-y\sin(xy)\,\mathrm{d}x + \Big(z\cos(zy) - x\sin(xy)\Big)\,\mathrm{d}y + y\cos(zy)\,\mathrm{d}z\,,$$

tale che $F(0,0,0)=\pi$.
R.

$$F(x,y)=\cos(xy)+\sin(zy)+\pi-1\,.$$

**21.** [4/07/2003 (ex)I] Trovare la primitiva di

$$\Big(\frac{2x}{1+x^2+y^2}-\sin x\Big)\,\mathrm{d}x+\Big(\frac{2y}{1+x^2+y^2}+\cos y\Big)\,\mathrm{d}y$$

definita in $\boldsymbol{R}^2$, che soddisfa $F(0,0)=2$.

**22.** [4/07/2003 (ex)II] Trovare la primitiva di

$$\Big(\frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}+\cos x\Big)\,\mathrm{d}x+\Big(\frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}-\sin y\Big)\,\mathrm{d}y$$

definita in $\boldsymbol{R}^2$, che soddisfa $F(0,0)=2$.

**23.** [23/09/2003 (ex)I] Trovare la primitiva di

$$\frac{x-1}{(x-1)^2+y^4}\,\mathrm{d}x+\frac{2y^3}{(x-1)^2+y^4}\,\mathrm{d}y\,,$$

definita nel più grande aperto possibile, e tale che $F(5,0)=\pi$.

**24.** [23/09/2003 (ex)II] Trovare la primitiva di

$$-\frac{1-x}{(1-x)^2+y^6}\,\mathrm{d}x+\frac{3y^5}{(1-x)^2+y^6}\,\mathrm{d}y\,,$$

definita nel più grande aperto possibile, e tale che $F(0,0)=\pi$.

**25.** [10/12/2003 (ex)I] Trovare gli aperti di definizione e di esattezza della forma

$$\omega=\Big(1+\frac{y}{1+x^2y^2}\Big)\,\mathrm{d}x+\Big(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{x}{1+x^2y^2}\Big)\,\mathrm{d}y\,,$$

e la primitiva $F$ tale che $F(0,0)=e$.

**26.** [10/12/2003 (ex)II] Trovare gli aperti di definizione e di esattezza della forma

$$\omega=\Big(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y}{1+x^2y^2}\Big)\,\mathrm{d}x+\Big(1+\frac{x}{1+x^2y^2}\Big)\,\mathrm{d}y\,,$$

e la primitiva $F$ tale che $F(0,0)=e$.

**27.** [23/6/2003 (hw)I] Trovare un aperto connesso $A$ ove la forma

$$|x|y\,\mathrm{d}x-\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}y$$

sia esatta, e determinarne tutte le primitive in $A$.

R.
$$A = \{x < 0\}\,, \qquad F(x,y) = -\frac{x^2}{2}y + C\,.$$

**28.** [23/6/2003 (hw)I] Trovare una primitiva di
$$-\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,,$$
nell'aperto $A \subset \boldsymbol{R}^2$ delimitato dalle curve
$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t\cos t\,, \\ y = t\sin t\,, \end{cases} \quad 2\pi \le t \le 6\pi\,. \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x = (t+1)\cos t\,, \\ y = (t+1)\sin t\,, \end{cases} \quad 2\pi \le t \le 6\pi\,.$$
$$\gamma_3 : \begin{cases} x = t\,, \\ y = 0\,, \end{cases} \quad 2\pi \le t \le 2\pi + 1\,. \qquad \gamma_4 : \begin{cases} x = t\,, \\ y = 0\,, \end{cases} \quad 6\pi \le t \le 6\pi + 1\,.$$

R. *L'anomalia polare.*

**29.** [23/6/2003 (hw)I] Sia $A = [(-2,2)\times(-2,2)]\setminus I$, ove $I$ è il segmento $I = \{(x,0) \mid -1 \le x \le 1\}$. Determinare tutte le primitive di
$$\omega = f(x,y)\,\mathrm{d}x\,,$$
in $A$, ove $f \in C^1(A)$ è definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} x\bigl(x^2 - \frac{1}{4}\bigr)^2\,, & |x| < \frac{1}{2}\,, y > 0\,, \\ 0\,, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

R.
$$F(x,y) = \begin{cases} C + \frac{1}{6}\bigl(x^2 - \frac{1}{4}\bigr)^3\,, & |x| < \frac{1}{2}\,, y > 0\,, \\ C\,, & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

**30.** [23/6/2003 (hw)I] Sia $A = [(-2,2)\times(-2,2)]\setminus I$, ove $I$ è il segmento $I = \{(x,0) \mid -1 \le x \le 1\}$. Sia
$$\omega = f(x,y)\,\mathrm{d}x\,,$$
in $A$, ove $f \in C^1(A)$ è definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \bigl(x^2 - \frac{1}{4}\bigr)^2\,, & |x| < \frac{1}{2}\,, y > 0\,, \\ 0\,, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Dimostrare che $\omega$ non è integrabile in $A$, ma lo è in
$$B = [(-2,2)\times(-2,2)]\setminus\{(x,0) \mid x \ge -1\}\,.$$

**31.** [23/6/2003 (hw)I] Determinare il più grande aperto connesso $A$ di $\boldsymbol{R}^2$ ove la forma
$$\frac{\sin 2x}{2\sqrt{\sin^2 x + y^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{\sin^2 x + y^2}}\,\mathrm{d}y$$

sia esatta, e determinarne le primitive.
R.

$$A = \boldsymbol{R}^2 \setminus \bigcup_{n\in\boldsymbol{Z}} \{(n\pi, 0)\} ,$$
$$F(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + y^2} + C .$$

## 780. Calcolo di integrali su curve di forme lineari in $R^2$

**1.** [22/03/2001 (hw)I] Si calcoli l'integrale della forma

$$\frac{2x}{x^2 + y^2 - 1}\,\mathrm{d}x + \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}\,\mathrm{d}y ,$$

sul grafico di $y = 2\cos x$, $-\pi \le x \le \pi$.
R.

$$0 .$$

**2.** [22/03/2001 (hw)I] Si calcoli l'integrale della forma

$$2x \sin(y - x^2)\,\mathrm{d}x + \sin(x^2 - y)\,\mathrm{d}y ,$$

sul grafico di $y = \frac{1}{3}(1 + x + x^2)(2 - x)$, $-1 \le x \le 1$.
R.

$$0 .$$

**3.** [29/03/2001 (hw)I] Sia $T \subset \boldsymbol{R}^2$ un dominio regolare, misurabile, e simmetrico rispetto all'asse $x$. Calcolare

$$\int_{+\partial T} (2xy + \cos y)\,\mathrm{d}x + (x^2 + 7y)\,\mathrm{d}y .$$

R.

$$0 .$$

**4.** [27/06/2002 (ex)I] Calcolare

$$\int_{+\gamma(A,B)} \left( \frac{2x}{1 + (x^2 + y)^2} + \frac{1}{2\sqrt{10 + x}} \right) \mathrm{d}x + \frac{1}{1 + (x^2 + y)^2}\,\mathrm{d}y ,$$

ove $A = (-3, 0)$, $B = (0, 2)$ e $\gamma$ è l'arco più lungo di ellisse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 ,$$

compreso tra $A$ e $B$ (cioè $\gamma$ passa per $(0,-2)$ e $(3,0)$).

**5.** [27/06/2002 (ex)II] Calcolare

$$\int_{+\gamma(A,B)} \frac{1}{1+(x+y^2)^2}\,\mathrm{d}x + \left(\frac{2y}{1+(x+y^2)^2} + \frac{1}{2\sqrt{20+y}}\right)\mathrm{d}y\,,$$

ove $A=(-3,0)$, $B=(0,2)$ e $\gamma$ è l'arco più lungo di ellisse

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\,,$$

compreso tra $A$ e $B$ (cioè $\gamma$ passa per $(0,-2)$ e $(3,0)$).

**6.** [11/07/2002 (ex)I] Sia $f$ una funzione $C^1(\boldsymbol{R})$. Si determini l'aperto di definizione di

$$f'\Big(\frac{1}{x^2+y^2}\Big)\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x + f'\Big(\frac{1}{x^2+y^2}\Big)\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,,$$

e se ne calcoli l'integrale lungo la curva

$$\gamma=\{y=\cos x\,, -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\}\,,$$

percorsa in un verso a piacere.

**7.** [11/07/2002 (ex)I] Calcolare l'integrale

$$\int_{+\gamma} -\frac{3y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{3x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,,$$

ove $\gamma$ è la curva regolare a tratti ottenuta congiungendo

$$\gamma_1=\{x^2+y^2=1\,,\,x\le 0\}\,,\qquad \gamma_2=\{y=\cos x\,,\,0\le x\le\frac{\pi}{2}\}\,,$$

percorsa nel verso che va da $(0,-1)$ a $(\pi/2,0)$. Se la si conosce, si può usare un'espressione della primitiva della forma.

**8.** [11/07/2002 (ex)II] Sia $f$ una funzione $C^1(\boldsymbol{R})$. Si determini l'aperto di definizione di

$$f'\big(\log(x^2+y^2)\big)\frac{2x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + f'\big(\log(x^2+y^2)\big)\frac{2y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,,$$

e se ne calcoli l'integrale lungo la curva

$$\gamma=\{y=x^2-1\,,-1\le x\le 1\}\,,$$

percorsa in un verso a piacere.

**9.** [11/07/2002 (ex)II] Calcolare l'integrale

$$\int_{+\gamma} -\frac{2y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,,$$

ove $\gamma$ è la curva regolare a tratti ottenuta congiungendo

$$\gamma_1 = \{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \,,\, y \geq 0\} \,, \qquad \gamma_2 = \{y = -\cos\big(\frac{\pi}{4}x\big) \,,\, 0 \leq x \leq 2\} \,,$$

percorsa nel verso che va da $(-2, 0)$ a $(0, -1)$. Se la si conosce, si può usare un'espressione della primitiva della forma.

**10.** [5/6/2002 (hw)I] Calcolare l'integrale della forma $\cos x \,\mathrm{d}x + yx \,\mathrm{d}y$ sulle due curve:

$$1) \quad \gamma(t) = (t, t^2) \,, \quad 0 \leq t \leq 1 \,; \quad 2) \quad \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(1, y) \mid 0 \leq y \leq 1\} \,,$$

in entrambi i casi tra i punti $A(0, 0)$, e $B(1, 1)$.
R.

$$1) \quad \sin 1 + \frac{2}{5} \,; \qquad 2) \quad \sin 1 + \frac{1}{2} \,.$$

**11.** [5/6/2002 (hw)I] Usando il teorema di Gauss-Green calcolare

$$\int_{+\partial T} (x^2 + y^2)(\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y) \,,$$

ove $T = \{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1\}$.
R.

$$0 \,.$$

**12.** [19/6/2002 (hw)I] Calcolare

$$\int_{+\gamma} \frac{-y \,\mathrm{d}x + x \,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} \,,$$

ove $\gamma$ è l'ellisse

$$\frac{(x - 10)^2}{4} + \frac{(y - 20)^2}{9} = 1 \,,$$

percorsa in verso antiorario.
R.

$$0 \,.$$

**13.** [4/07/2003 (ex)I] Sia

$$\omega = \Big( -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x - 1}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}} \Big) \,\mathrm{d}x + \Big( \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}} \Big) \,\mathrm{d}y \,.$$

Calcolare

$$\int_{+\gamma} \omega \,, \qquad \text{ove } \gamma \text{ è l'ellisse } \quad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \,.$$

**14.** [4/07/2003 (ex)II] Sia

$$\omega = \Big( -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}} \Big) \mathrm{d}x + \Big( \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y-2}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}} \Big) \mathrm{d}y \,.$$

Calcolare

$$\int_{+\gamma} \omega \,, \qquad \text{ove } \gamma \text{ è l'ellisse } \quad \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{100} = 1 \,.$$

**15.** [16/07/2003 (ex)I] Si considerino i due domini

$$T = \Big[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \Big] \times \Big[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \Big] \,, \qquad D = [\, -\sqrt{2}, \sqrt{2} \,] \times [\, -\sqrt{2}, \sqrt{2} \,] \,.$$

La forma differenziale

$$\omega = -\frac{2x}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x^2 - y^2\right)} \mathrm{d}x - \frac{2y}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x^2 - y^2\right)} \mathrm{d}y \,.$$

può essere integrata solo su una delle due curve $\partial T$, $\partial D$. Spiegare su quale delle due, e calcolare l'integrale relativo.

**16.** [16/07/2003 (ex)I] Calcolare l'integrale della forma

$$\omega = \Big( 2xye^{x^2 y} - \sin(x+y) + 2y \Big) \mathrm{d}x + \Big( x^2 e^{x^2 y} - \sin(x+y) + 3 \Big) \mathrm{d}y$$

sulla curva $\partial T$, ove

$$T = \Big\{ (x,y) \mid \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1 \Big\} \,.$$

**17.** [16/07/2003 (ex)II] Si considerino i due domini

$$T = \Big\{ (x,y) \mid x^2 + \frac{y^2}{16} \le 1 \Big\} \,, \qquad D = \Big\{ (x,y) \mid x^2 + \frac{y^2}{2} \le 1 \Big\} \,.$$

La forma differenziale

$$\omega = 2x \,\mathrm{tg}\Big( \frac{\pi}{2} - x^2 - y^2 \Big) \mathrm{d}x + 2y \,\mathrm{tg}\Big( \frac{\pi}{2} - x^2 - y^2 \Big) \mathrm{d}y \,.$$

può essere integrata solo su una delle due curve $\partial T$, $\partial D$. Spiegare su quale delle due, e calcolare l'integrale relativo.

**18.** [16/07/2003 (ex)II] Calcolare l'integrale della forma

$$\omega = \Big( y^2 e^{xy^2} - \sin(x-y) + 1 \Big) \mathrm{d}x + \Big( 2xye^{xy^2} + \sin(x-y) + x \Big) \mathrm{d}y$$

sulla curva $\partial T$, ove

$$T = \Big\{ (x,y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1 \Big\} \,.$$

**19.** [23/09/2003 (ex)I] Si consideri la forma

$$\omega = -\frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Si dimostri che il valore dell'integrale

$$\int\limits_{+\gamma} \omega\,, \qquad \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3\,,$$

ove

$$\gamma_1 = \{y = x\operatorname{tg}\alpha \mid 0 \le x \le 2\}\,, \quad \gamma_2 = \{x^2+y^2 = 4 \mid x\operatorname{tg}\alpha \le y \le x\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2}-\alpha\Big)\}\,,$$
$$\gamma_3 = \{y = x\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2}-\alpha\Big) \mid 0 \le x \le 2\}\,,$$

non dipende dal valore di $\alpha \in (0, \pi/4)$, e lo si calcoli esplicitamente.

**20.** [23/09/2003 (ex)II] Si consideri la forma

$$\omega = -\frac{y-2}{(x-2)^2+(y-2)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x-2}{(x-2)^2+(y-2)^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Si dimostri che il valore dell'integrale

$$\int\limits_{+\gamma} \omega\,, \qquad \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3\,,$$

ove

$$\gamma_1 = \{y = x\operatorname{tg}\alpha \mid 0 \le x \le 4\}\,, \quad \gamma_2 = \{x^2+y^2 = 16 \mid x\operatorname{tg}\alpha \le y \le x\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2}-\alpha\Big)\}\,,$$
$$\gamma_3 = \{y = x\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2}-\alpha\Big) \mid 0 \le x \le 4\}\,,$$

non dipende dal valore di $\alpha \in (0, \pi/4)$, e lo si calcoli esplicitamente.

**21.** [10/12/2003 (ex)I] Integrare la forma differenziale

$$\omega = ye^{xy}\,\mathrm{d}x - |x|e^{xy}\,\mathrm{d}y\,,$$

sulla curva data in coordinate polari da

$$\rho = -2\cos\theta\,, \qquad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3}{2}\pi\,.$$

**22.** [10/12/2003 (ex)II] Integrare la forma differenziale

$$\omega = -|y|e^{xy}\,\mathrm{d}x + xe^{xy}\,\mathrm{d}y\,,$$

sulla curva data in coordinate polari da

$$\rho = -2\sin\theta\,, \qquad -\pi \le \theta \le 0\,.$$

**23.** [5/7/2004 (ex)I] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{+\gamma} \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \left(\frac{y}{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}y\,,$$

ove $\gamma$ è la curva $y = x^4 - 1$, $-3 \le x \le 2$.

**24.** [5/7/2004 (ex)II] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{+\gamma} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - x\right)\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\,,$$

ove $\gamma$ è la curva $x = y^4 - 1$, $-2 \le y \le 3$.

## 850. Questioni di esattezza in non semplicemente connessi in $R^3$

**1.** [9/4/2001 (ex)I] Dimostrare che la forma

$$\frac{8x}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2y}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}y + \cos z\,\mathrm{d}z$$

è esatta nel suo dominio di definizione.

**2.** [9/4/2001 (ex)II] Dimostrare che la forma

$$\sin x\,\mathrm{d}x + \frac{18y}{9y^2+z^2}\,\mathrm{d}y + \frac{2z}{9y^2+z^2}\,\mathrm{d}z$$

è esatta nel suo dominio di definizione.

**3.** [5/7/2004 (ex)I] Data la forma

$$\frac{xe^{-x^2-y^2}}{\sqrt{e^{-1}-e^{-x^2-y^2}}}\,\mathrm{d}x + \frac{ye^{-x^2-y^2}}{\sqrt{e^{-1}-e^{-x^2-y^2}}}\,\mathrm{d}y\,,$$

dimostrare che è esatta nel suo aperto di definizione, senza calcolarne una primitiva.

**4.** [5/7/2004 (ex)II] Data la forma

$$\frac{2xe^{x^2+y^2}}{e^{x^2+y^2}-e}\,\mathrm{d}x + \frac{2ye^{x^2+y^2}}{e^{x^2+y^2}-e}\,\mathrm{d}y\,,$$

dimostrare che è esatta nel suo aperto di definizione, senza calcolarne una primitiva.

## 880. Calcolo di integrali su curve di forme lineari in $R^2$

**1.** [16/07/2001 (ex)I] Si calcoli l'integrale

$$\int_{+\gamma} \omega\,, \quad \text{ove} \quad \omega = (z + e^{yz})\,\mathrm{d}x + zxe^{yz}\,\mathrm{d}y + yxe^{yz}\,\mathrm{d}z\,,$$

e $\gamma$ è la curva intersezione delle due superficie

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 1\,, \qquad x = \sqrt{3}z\,,$$

con orientazione positiva scelta ad arbitrio.

**2.** [16/07/2001 (ex)II] Si calcoli l'integrale

$$\int_{+\gamma} \omega\,, \quad \text{ove} \quad \omega = yze^{yx}\,\mathrm{d}x + zxe^{yx}\,\mathrm{d}y + (x + e^{yx})\,\mathrm{d}z\,,$$

e $\gamma$ è la curva intersezione delle due superficie

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 1\,, \qquad x = \frac{z}{\sqrt{3}}\,,$$

con orientazione positiva scelta ad arbitrio.

**3.** [29/03/2001 (hw)I] Calcolare l'integrale

$$\int_{+\gamma} xy^2\,\mathrm{d}x + (z + x)\,\mathrm{d}y + e^{x^2y^2z}\,\mathrm{d}z\,,$$

ove $\gamma$ è l'intersezione delle due superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, \qquad 2z = x^2 + y^2 - 1\,.$$

(*Sugg.* la componente $e^{x^2y^2z}\,\mathrm{d}z$ non dà fastidio perché ...)
R.

$$\pi\,.$$

**4.** [29/03/2001 (hw)I] Calcolare

$$\int_{+\gamma} \left( \frac{1}{1 + (x + y)^2} + e^z \right) \mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}y}{1 + (x + y)^2} + e^z x\,\mathrm{d}z\,,$$

ove $\gamma$ è la spira di elica circolare percorsa nel verso della $\theta$ crescente:

$$x = \cos\theta\,, \quad y = \sin\theta\,, \quad z = \frac{\theta}{2\pi}\,, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi\,.$$

R.

$$e - 1\,.$$

**5.** [11/09/2002 (ex)I] Calcolare l'integrale della forma

$$zy\,\mathrm{d}x + z(1 - x)\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z\,,$$

sulla circonferenza intersezione delle due superficie

$$(x - 1)^2 + (z - 2)^2 = 4\,, \qquad y = 3\,,$$

percorsa in un verso scelto ad arbitrio.

**6.** [11/09/2002 (ex)II] Calcolare l'integrale della forma

$$zy\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + y(1-x)\,\mathrm{d}z\,,$$

sulla circonferenza intersezione delle due superficie

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4\,, \qquad z = 5\,,$$

percorsa in un verso scelto ad arbitrio.

**7.** [4/12/2002 (ex)I] Si consideri la superficie

$$S_1 = \{(x, y, z) \mid z = y\}\,,$$

e inoltre l'altra superficie (data in coordinate cilindriche $(\rho, \theta, z)$)

$$S_2 = \{(x, y, z) \mid -\infty < z < +\infty\,, \rho = \theta\,, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Si calcoli l'integrale

$$\int_{+C} (2x + 3z)\,\mathrm{d}x + 7\,\mathrm{d}y + 3x\,\mathrm{d}z\,,$$

ove $C$ è la curva $S_1 \cap S_2$, percorsa in un verso arbitrario.

**8.** [19/6/2002 (hw)I] Calcolare l'integrale

$$\int_{+\gamma} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}$$

ove $\gamma$ è la curva (orientata in verso arbitrario)

$$y = z\,, \qquad x^2 + z^2 = 4\,.$$

R.

$$0\,.$$

## 900. Integrali multipli

**1.** [02/2001 (hw)I] Calcolare

$$\iint_T e^{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

ove $T$ è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

**2.** [02/2001 (hw)I] Prima giustificare senza calcoli la seguente uguaglianza, e poi calcolare con tutti i passaggi il valore dell'integrale:

$$\iint_T (x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\,,$$

ove $T=[-2,2]\times[-2,2]$.

**3.** [02/2001 (hw)I] Calcolare

$$\iiint_T xy^2e^z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,,$$

ove $T=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

**4.** [02/2001 (hw)I] Calcolare

$$\iiint_T |x| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,,$$

ove $T$ è la piramide di base $D=[-1,1]\times[-1,1]$ e di vertice $(0,0,1)$.

**5.** [6/5/2002 (hw)I] Calcolare

$$\iint_T (x+y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \,,$$

ove

$$T=A\cap B\,,\quad A=[0,1]\times[0,1]\,,\quad B=\{(x,y)\mid x-\frac{1}{2}\le y\le x+\frac{1}{2}\}\,.$$

R.

$$\frac{3}{4}$$

**6.** [6/5/2002 (hw)I] Trovare senza eseguire calcoli il valore di

$$\iint_T (x-y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \,,$$

ove $T$ è come nell'esercizio precedente. Si controlli poi l'esattezza della risposta calcolando l'integrale con le usuali formule di riduzione.
R.

$$0$$

**7.** [23/5/2002 (hw)I] Calcolare

$$\iiint_T |x|z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,,$$

ove $T=A_1\cup A_2\cup A_3$, e

$$A_1=\{x^2+y^2+(z-2)^2\le 1\}\,,\qquad A_2=\{x^2+y^2+(z+2)^2\le 1\}\,,$$
$$A_3=\{1\le z\le 2\,,(x-4)^2+y^2\le 1\}\,.$$

R. $12\pi$

**8.** [23/5/2002 (hw)I] Calcolare

$$\iint_T |x| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \,,$$

ove

$$T = \{x^2 + y^2 \le 4 \,, \frac{x^2}{9} + y^2 \ge 1 \,, y \ge 0\} \,.$$

R. $\frac{2}{3}(\frac{5\sqrt{5}}{6\sqrt{2}} - 1)$

**9.** [16/6/2003 (hw)I] Siano $f \in C(\boldsymbol{R})$, $R \in C^1(\boldsymbol{R})$, $R > 0$, e sia

$$D_t = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le R(t)^2\} \,.$$

Dimostrare che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{D_t} f\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 2\pi R(t) f(R(t)) R'(t) \,, \qquad t \in \boldsymbol{R} \,.$$

## 910. Cambiamenti di variabili in integrali multipli

**1.** [02/2001 (hw)I] Calcolare

$$\iint\limits_T x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,,$$

ove $T = \{(x, y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.

**2.** [02/2001 (hw)I] Calcolare

$$\iint\limits_T |x^2 + y^2 - 1| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,,$$

ove $T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1 \,,\ y \ge x \ge 0\}$.

**3.** [02/2001 (hw)I] Calcolare

$$\iiint\limits_T z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \,,$$

ove $T = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \le r^2 \,,\ 0 \le z \le r - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

**4.** [02/2001 (hw)I] Calcolare

$$\iiint\limits_T [|x| + |y|] \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,,$$

ove $T$ è il solido ottenuto ruotando intorno all'asse $z$ il dominio $D = \{0 \le y \le 1 \,, y^2 \le z \le 1\}$ del piano $yz$.

**5.** [02/2001 (hw)I] Calcolare

$$\iiint\limits_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \,,$$

ove

$$T = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2} \,,\ x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\} \,.$$

**6.** [02/2001 (hw)I] Calcolare

$$\iint_T y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,,$$

ove $T = \{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 \le 1\}$.

**7.** [02/2001 (hw)I] Dimostrare che

$$\iint_T e^{-x^2-y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \pi(1 - e^{-R^2}) \,,$$

se $T = \{x^2 + y^2 \le R^2\}$, $R > 0$. Dedurne che

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x > \sqrt{\pi(1 - e^{-R^2})} \,.$$

(Più difficile:) Dimostrare che addirittura

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \,.$$

**8.** [9/5/2002 (hw)I] Si calcoli

$$\iiint_T x^2 z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \,,$$

ove

$$T = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \le z^2 \,, z \ge 0 \,, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\} \,,$$

sia direttamente che usando coordinate cilindriche.
R.

$$\frac{\pi}{96} \,.$$

**9.** [9/5/2002 (hw)I] Calcolare

$$\iiint_D |xy| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \,,$$

ove $D$ è ottenuto ruotando intorno all'asse $z$ il dominio piano

$$E = \{(x, y, z) \mid x = 0 \,, 0 \le z \le 1 \,, 1 \le y \le 1 + z\} \,.$$

R.

$$\frac{13}{5} \,.$$

**10.** [9/5/2002 (hw)I] Calcolare

$$\iint_A \frac{y}{|x|}(x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,,$$

ove

$$A = \{(x, y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 9\,, 0 \le y \le \sqrt{3}|x|\}\,.$$

R.

$$40 \log 2\,.$$

**11.** [9/5/2002 (hw)I] Calcolare

$$\iiint\limits_T \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

ove $T$ è il guscio sferico compreso tra le sfere di centro l'origine e di raggi pari a 2 e 1.
R.

$$4\pi\,.$$

## 950. Integrali di superficie

**1.** [5/03/2001 (hw)I] Si calcoli l'area del grafico di $z = xy$, su $\{x^2 + y^2 \le R^2\}$.
R.

$$\frac{2}{3}\pi[(1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1]\,.$$

**2.** [5/03/2001 (hw)I] Si calcoli l'area $A_k$ della superficie ottenuta ruotando la curva $y = e^{-x}$, $0 \le x \le k$, intorno all'asse $x$. Si dimostri che $A_k$ tende a un limite finito quando $k \to \infty$.
R.

$$\frac{3}{2}\pi(2^{\frac{3}{2}} - (1 + e^{-k})^{\frac{3}{2}})\,.$$

**3.** [5/03/2001 (hw)I] Schizzare il disegno e trovare l'area delle due superfici seguenti, costituite da segmenti "appoggiati" a una spira di elica circolare:

$$S_1 : \quad \begin{cases} x = R\cos v\,, \\ y = R\sin v\,, \qquad -\frac{1}{4} \le u \le \frac{1}{4}\,, \; 0 \le v \le 2\pi\,; \\ z = h(u + v)\,, \end{cases}$$

$$S_2 : \quad \begin{cases} x = Ru\cos v\,, \\ y = Ru\sin v\,, \qquad \frac{1}{2} \le u \le 2\,, \; 0 \le v \le 2\pi\,; \\ z = hv\,, \end{cases}$$

qui $R$ e $h$ sono costanti positive.
R.

$$\begin{aligned} &\operatorname{area}(S_1) = \pi R h\,; \\ &\operatorname{area}(S_2) = \pi h^2 \left[\ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2t^2}\right]_{t=R/2h}^{t=2R/h}\,. \end{aligned}$$

**4.** [5/03/2001 (hw)I] Un'eruzione vulcanica ha liberato sulla superficie terrestre $S$ (che assimiliamo a una sfera) una certa sostanza chimica $A$, con concentrazione (cioè massa per unità di area) pari, in ciascun punto $P$ di $S$, a

$$c(P) = c_0 e^{-kr}\,,$$

ove $r$ è la distanza (misurata sulla superficie!) di $P$ dal sito dell'eruzione, e $c_0$, $k$ sono costanti positive. Calcolare la massa totale di $A$ liberata su tutta la Terra.
(*Sugg.:* si indichi con $R$ il raggio terrestre; *sugg. più interess.:* si scelga la parametrizzazione di $S$ in modo da esprimere semplicemente $r$. Ovviamente il vulcano si assume puntiforme.)
R.

$$\frac{4\pi c_0 R^2}{1+(kR)^2}\,.$$

## 960. Teoremi di Stokes, divergenza

**1.** [19/6/2002 (hw)I] Si consideri la superficie cilindrica $S$

$$x^2 + y^2 = r^2\,, \qquad 0 \le z \le 1\,.$$

Si calcoli (usando il teorema di Stokes)

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma\,,$$

ove $\mathbf{n}$ è il campo normale a $S$, $\mathbf{n} = (x, y, 0)/r$, e

$$\mathbf{F} = \Big(2xyze^{x^2} + \Big(\frac{2x}{x^2+y^2} + 1\Big)(1-z)\,, ze^{x^2} + \frac{2y(1-z)}{x^2+y^2}\Big)\,.$$

R.

$$0\,.$$

**2.** [23/6/2003 (hw)I] Calcolare

$$\int_{\partial T} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma\,,$$

ove

$$T = \{(x,y,z) \mid |z| \le 1 - |x| - |y|\}\,,$$
$$\boldsymbol{F} = (2xyz, \cos x + yz, -yz^2 + \sin y)\,.$$

R.

$$0\,.$$

## 970. Solidi di rotazione

**1.** [12/09/2001 (ex)I] Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione del dominio

$$D = A \cap B\,, \qquad A = \{(x,y) \mid |y| \leq \frac{x}{\sqrt{3}}\}\,, \quad B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}\,,$$

intorno all'asse $y$.

**2.** [12/09/2001 (ex)II] Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione del dominio

$$D = A \cap B\,, \qquad A = \{(x,y) \mid |y| \leq \sqrt{3}x\}\,, \quad B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}\,,$$

intorno all'asse $y$.

## 980. Superficie di rotazione

**1.** [19/6/2002 (hw)I] Calcolare (usando il teorema di Guldino) l'area della superficie ottenuta ruotando intorno all'asse $z$ il quadrato del piano $x = 0$ di centro $(0, a, 0)$ e lato $b < 2a$.
R.

$$8\pi ab\,.$$

## 990. Teoria della misura

**1.** [02/2001 (hw)I] Sia

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\,,$$

ove $Q_n$ è una successione di quadrati, lato$(Q_n) = 2^{-n}$. Ciascuno dei $Q_n$, con $n \geq 2$ ha il vertice inferiore sinistro coincidente con il vertice superiore destro del precedente $Q_{n-1}$; infine (o meglio, per cominciare) $Q_1 = [0, 1/2] \times [0, 1/2]$. Dimostrare che

$E$ è limitato e misurabile. (Più difficile.)

Si ha mis$(E) = 1/3$. (Più facile.)

**2.** [02/2001 (hw)I] Sia

$$E = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq \infty\,,\, 0 \leq y \leq e^{-x}\}\,.$$

Si noti che $E$ è illimitato. Dare un argomento a favore dell'affermazione:
Se mis$(E)$ viene definita in qualche modo ragionevole, deve
valere mis$(E) = 1$.