

Programma del corso Fisica Matematica

Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica

E.N.M. Cirillo – Anno Accademico 2004–2005

Cenni sulle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

- Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine autonome. Interpretazione geometrica: piano delle fasi esteso, campo delle direzioni, curve integrali, punti fissi (critici o d'equilibrio), stabilità. Esempi: legge di Malthus ed equazione logistica. [1, Capitolo 1, Paragrafo 1]
- Il teorema di esistenza e unicità di Cauchy: condizione iniziale non critica e condizione critica. Condizione di Lipschitz. [1, Capitolo 1, Paragrafo 2]
- Modelli di problemi fisici: variazione della pressione atmosferica con la quota, decadimento radioattivo, assorbimento di raggi X da parte di un metallo.

Cenni sui sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

- Equazioni differenziali di ordine superiore al primo e sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.
- Interpretazione geometrica: piano delle fasi e piano delle fasi esteso, linee di fase e curve integrali, campo vettoriale delle direzioni, punti fissi (critici o d'equilibrio), stabilità. Esempi: prodotto diretto, pendolo inverso, modello di Lotka–Volterra. [1, Capitolo 1, Paragrafo 2]
- Derivata nella direzione di un campo vettoriale. Integrali primi e equazioni differenziali alle derivate parziali. [1, Capitolo 2, Paragrafo 10]
- Determinazione di un integrale primo. Il metodo del fattore integrante. Metodo di separazione delle variabili per le equazioni differenziali alle derivate parziali. Applicazione al problema di Lotka–Volterra: integrale primo e ritratto di fase.
- Sistemi meccanici conservativi: il pendolo semplice [1, Capitolo 2, Paragrafo 12]

Equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine

- Equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) del primo ordine; equazioni lineari, semi-lineari e quasi-lineari. Principio di sovrapposizione per il caso lineare. Due esempi semplici: $\partial u/\partial x = 0$ e $\partial u/\partial x + \partial u/\partial y = 0$; soluzione con il metodo di separazione delle variabili e mediante l'analogia con il problema della determinazione di un integrale primo per un sistema dinamico planare.
- PDE del primo ordine lineari omogenee e non omogenee. Curve caratteristiche e integrale generale. Il problema di Cauchy: esistenza e unicità. Dimostrazione nel caso bidimensionale. Cenni al Teorema di rettificazione, [2, Appendice al Capitolo 3]. [1, Capitolo 2, Paragrafo 11]
- Applicazioni: equazione del trasporto e equazione delle onde, formula di d'Alambert, moto di profili. [7, Capitolo 2, Paragrafo 2]
- PDE del primo ordine quasi-lineari. Curve caratteristiche e Teorema di appartenenza alle superfici integrali. Il problema di Cauchy: esistenza e unicità (senza dimostrazione). [5, Capitolo 1, Paragrafo 1]
- PDE del primo ordine quasi-lineari: metodo delle caratteristiche per la soluzione del Problema di Cauchy. Applicazioni: l'equazione di Burger unidimensionale.

Cenni sulla serie di Fourier

- Spazi \mathcal{L}^2 , prodotto scalare, norma e convergenza in media.
- Coefficienti e serie di Fourier. Convergenza in media. Serie di soli seni e di soli coseni.
- Problemi di Sturm–Liouville sull’intervallo $[0, \pi]$ con condizioni al bordo di Dirichlet, Neumann e miste. Autovalori e autofunzioni. Legame con i sistemi ortonormali completi di $\mathcal{L}^2([0, \pi])$.

Equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine

- Equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine semilineari. Problemi di Dirichlet e di Neumann. Equazioni della fisica matematica: Laplace, d’Alambert (onde) e calore. Alcuni esempi di problemi al contorno. [6, Capitolo 2]
- Classificazione delle PDE del secondo ordine semilineari in dimensione due. Forma canonica; covarianza della forma canonica sotto opportuni cambiamenti di coordinate. Covarianza dell’equazione di Laplace sotto traslazioni e rotazioni. Covarianza dell’equazioni delle onde sotto le trasformazioni di Lorentz. Il caso a coefficienti costanti: caratteristiche e riduzione alla forma canonica; forma pura e rilevanza delle equazioni della Fisica Matematica. [6, Capitolo 3]

Equazione di Laplace

- Applicazioni fisiche delle equazioni di Laplace e di Poisson: potenziale elettrostatico, distribuzione stazionaria delle temperature.
- Soluzione fondamentale dell’equazione di Laplace in dimensione maggiore o uguale a due. [3, Capitolo 2]
- Proprietà delle funzioni armoniche: teorema della media e principio del massimo. Teorema di unicità per il Problema di Dirichlet. [3, Capitolo 2]
- Esistenza della soluzione del problema di Dirichlet nel rettangolo: metodo di separazione delle variabili. [3, Capitolo 2]
- Esistenza della soluzione del problema di Dirichlet nel disco: operatore laplaciano in coordinate cilindriche.
- Problema di Neumann e problemi misti sul rettangolo: metodo di separazione delle variabili. Equazione agli autovalori per l’operatore Laplaciano nel rettangolo (equazione di Schrödinger indipendente dal tempo).

Equazione delle onde

- Esempi fisici: deduzione dell’equazione di d’Alambert a partire dalle equazioni di Maxwell. Onde elettromagnetiche piane: ortogonalità dei campi ed equazione di propagazione. Deduzione dell’equazione di d’Alambert per le piccole oscillazioni di una corda sottile. Argomento di Lagrange: campo classico come limite continuo di un problema a n gradi di libertà. Funzionale energia. [4, Capitolo 11]
- Equazione di d’Alambert in una dimensione. Riduzione del problema alla soluzione di due equazioni del primo ordine lineari e omogenee. Problema di Cauchy nel caso unidimensionale e Teorema di esistenza e unicità. Formula di d’Alambert. Propagazione di profili lungo corde tese illimitate e semi-illimitate, riflessione di un profilo. [7, Capitolo 2, Paragrafo 2]
- Equazione delle onde completa in una dimensione: il Principio di Duhamel. [3, Capitolo 2]

- Dominio di dipendenza e velocità di propagazione: l'argomento energetico. [3, Capitolo 2]
- La corda finita. Unicità della soluzione del problema di Cauchy con condizione di Dirichlet agli estremi. Esistenza della soluzione nel caso omogeneo e in quello completo con il metodo della separazione delle variabili. Corda forzata e condizione di risonanza. Generalizzazioni: l'equazione del telegrafista. [3, Capitolo 2]
- Vibrazioni di una membrana: l'equazione di d'Alambert bidimensionale. Armoniche del tamburo rettangolare.

Equazione del calore

- Introduzione all'equazione del calore: deduzione alla Fourier dell'equazione del calore [7, Capitolo 3].
- Possibili problemi ai limiti. Metodo della separazione delle variabili per la sbarra limitata. [7, Capitolo 3]

Bibliografia

- [1] Vladimir I. Arnol'd, "Ordinary Differential Equations." Springer-Verlag, 1992.
- [2] Gianfausto Dell'Antonio, "Elementi di meccanica." Vol. 1, meccanica classica. Liguori, 1996.
- [3] Lawrence C. Evans, "Partial Differential Equations." Graduate Studies in Mathematics vol. 19, American Mathematical Society, 2002.
- [4] Herbert Goldstein, "Meccanica classica." Zanichelli, Bologna, 1982.
- [5] Fritz John, "Partial Differential Equations." Applied Mathematical Sciences vol. 1, Springer-Verlag, 1971.
- [6] Sergei L. Sobolev, "Partial Differential equations of Mathematical Physics." Dover Publications Inc. New York, 1964.
- [7] Andrej N. Tychonov, Aleksandr A. Samarski, "Equazioni della fisica matematica." Mir, Mosca, 1981.