Modalità d'esame e programma del corso Fisica Matematica
Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica

E.N.M. Cirillo – Anno Accademico 2005–2006

L'esame consiste in una prova scritta e una orale; per la prima sessione del 2006 sono previsti due appelli: 7 aprile (orale il 10 aprile) e 20 aprile (orale il 21 aprile).

Durante lo svolgimento del corso sono previste due prove d'esonero per lo scritto: la prima il 4 marzo e la seconda il 22 marzo alle ore 9:00 in aula 7 del sito di via Scarpa. La prima prova riguarderà i sistemi di equazioni differenziali ordinarie autonome, si vedano i primi due paragrafi del programma che segue, la seconda le equazioni alle derivate parziali delle fisica matematica. Gli studenti esonerati dallo scritto potranno sostenere l'orale in uno dei due appelli previsti nella prima sessione, cioè il 7 aprile oppure il 20 aprile. Volendo potranno sostenere anche la prova scritta; in quest'ultimo caso come voto della prova scritta si sceglierà il massimo tra la media aritmetica dei due esoneri e il voto dello scritto.

Equazioni differenziali ordinarie autonome del primo ordine [2, 3]

- Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine autonome. Interpretazione geometrica: piano delle fasi esteso, campo delle direzioni, curve integrali, punti fissi (critici o d'equilibrio), stabilità. Esempi: legge di Malthus ed equazione logistica.
- Il teorema di esistenza e unicità di Cauchy: condizione iniziale non critica e condizione critica. Condizione di Lipschitz. Stime dei tempi di percorrenza.
- Modelli di problemi fisici: variazione della pressione atmosferica con la quota, decadimento radioattivo, assorbimento di raggi X da parte di un metallo.

Sistemi di equazioni differenziali ordinarie autonome del primo ordine [2, 3]

- Equazioni differenziali di ordine superiore al primo e sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Condizione di Lipschitz e teoremi di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy (senza dimostrazione).
- Interpretazione geometrica: piano delle fasi e piano delle fasi esteso, linee di fase e curve integrali, campo vettoriale delle direzioni, punti fissi (critici o d'equilibrio), stabilità e stabilità asintotica. Esempi: prodotto diretto, pendolo inverso, modello di Lotka–Volterra.
- Derivata nella direzione di un campo vettoriale. Integrali primi e equazioni differenziali alle derivate parziali.
- Determinazione di un integrale primo. Il metodo del fattore integrante. Metodo di separazione delle variabili per le equazioni differenziali alle derivate parziali. Applicazione al problema di Lotka–Volterra: integrale primo e ritratto di fase. Teorema sul legame tra l'esistenza degli integrali primi e l'assenza di punti di equilibrio asintoticamente stabili.

- Stabilità dei punti fissi. Teorema di stabilità lineare per i sistemi dinamici non lineari (senza dimostrazione), confronto con l'analogo teorema per i sistemi lineari. Applicazioni. Funzioni di Liapunov e teorema di Liapunov sulla stabilità. Stabilità dei punti fissi del pendolo semplice e del pendolo dissipativo. Teorema di Barbasin–Krasovskij (senza dimostrazione).
- Moti alla Poinsot. Studio della stabilità delle rotazioni permanenti sulla base della teoria della stabilità dei sistemi dinamici. Il caso con momenti d'inerzia centrali a due a due distinti, il caso del giroscopio e il caso del corpo a simmetria sferica.
- Sistemi meccanici conservativi unidimensionali. Il teorema di Dirichelet per la stabilità e il teorema sull'instabilità delle posizioni di equilibrio. Analisi qualitativa: ritratto di fase, tempi di percorrenza e periodo delle piccole oscillazioni.

<u>Equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine</u> [1, 3]

- Concetto di campo e equazioni differenziali alle derivate parziali. Deduzione dell'equazione di continuità per un fluido incompressibile a partire dal principio di conservazione della massa. Problemi al contorno di interesse fisico.
- Equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) del primo ordine; equazioni lineari, semilineari e quasilineari. Principio di sovrapposizione per il caso lineare. Soluzione con il metodo di separazione delle variabili e mediante l'analogia con il problema della determinazione di un integrale primo per un sistema dinamico planare.
- PDE del primo ordine lineari omogenee. Curve caratteristiche e integrale generale. Il problema di Cauchy; metodi di soluzione. Applicazioni: equazione del trasporto, equazione di continuità con campo delle velocità dipendente dal tempo.
- PDE del primo ordine lineari non omogenee e semilineari. Curve caratteristiche e integrale generale. Il problema di Cauchy; metodi di soluzione. Applicazioni: equazione di continuità con campo delle velocità dipendente dalla variabile spaziale.
- PDE del primo ordine quasilineari. Curve caratteristiche, curve caratteristiche al suolo e proprietà. Costruzione delle superfici integrali con il metodo delle caratteristiche e prolema di Cauchy: Teorema di esistenza e unicità (senza dimostrazione) [5, Capitolo 1, Paragrafo 1].

<u>Richiami sulla serie di Fourier</u>

Spazi $\mathcal{L}^2$, prodotto scalare, norma e convergenza in media. Coefficienti e serie di Fourier. Convergenza in media. Serie di soli seni e di coli coseni. Problemi di Sturm–Liouville sull'intervallo $[0, \pi]$ con condizioni al bordo di Dirichelet, Neumann e miste. Autovalori e autofunzioni. Legame con i sistemi ortonormali completi di $\mathcal{L}^2([0, \pi])$.

<u>Equazione di Laplace</u> [1, 3, 6]

- Equazione di Laplace per la distribuzione stazionaria di temperatura, equazione di Poisson ed equazione di Laplace per il potenziale elettrostatico. Problemi al contorno di interesse fisico.

– Proprietà delle funzioni armoniche: teorema della media e principio del massimo. Teorema di unicità per il Problema di Dirichelet.
– Esistenza della soluzione del problema di Dirichelet nel rettangolo: metodo di separazione delle variabili.
– Problema di Neumann e problemi misti sul rettangolo: metodo di separazione delle variabili.

Equazione delle onde $[1, 3, 6]$

– Equazione di d'Alambert per le piccole oscillazioni della corda sottile: deduzione alla Lagrange e limite del continuo [4, Capitolo 11]. Problemi al contorno di interesse fisico.
– Equazione di d'Alambert in una dimensione. Riduzione del problema alla soluzione di due equazioni del primo ordine lineari e omogenee. Problema di Cauchy nel caso unidimensionale e Teorema di esistenza e unicità. Formula di d'Alambert. Propagazione di profili lungo corde tese illimitate e semi–illimitate, riflessione di un profilo [6, Capitolo 2, Paragrafo 2].
– La corda finita. Stime di energia. Unicità della soluzione del problema di Cauchy con condizione di Dirichelet agli estremi. Esistenza della soluzione nel caso omogeneo e in quello completo con il metodo della separazione delle variabili. Corda forzata e condizione di risonanza. Generalizzazioni: l'equazione del telegrafista.

Equazione del calore $[1, 3, 6]$

– Equazione del calore come conseguenza del principio di conservazione dell'energia e della legge di Fourier. Problemi al contorno di interesse fisico.
– Possibili problemi ai limiti. Metodo della separazione delle variabili per la sbarra limitata.
– Principio del massimo e teorema di unicità della soluzione.

Bibliografia

[1] Daniele Andreucci, "Appunti per il corso di equazioni alle derivate parziali."

[2] Vladimir I. Arnol'd, "Ordinary Differential Equations." Springer–Verlag, 1992.

[3] Emilio N.M. Cirillo, "Appunti delle lezioni."

[4] Herbert Goldstein, "Meccanica classica." Zanichelli, Bologna, 1982.

[5] Fritz John, "Partial Differential Equations." Applied Mathematical Sciences vol. 1, Springer–Verlag, 1971.

[6] Andrej N. Tychonov, Aleksandr A. Samarski, "Equazioni della fisica matematica." Mir, Mosca, 1981.