

Programma del corso di Meccanica Razionale (recupero 3° anno)

Ingegneria Meccanica – Roma 2003/04 – E.N.M. Cirillo

Nozioni preliminari

Spazi vettoriali reali, proprietà e operazioni. Prodotto scalare, componenti, basi ortonormali. Matrici ortogonali, regole di trasformazioni delle componenti, gruppo $O(3)$ e sottogruppo $SO(3)$. Proiezioni e coseni direttori. Equazioni vettoriali: $\vec{x} \cdot \vec{a} = \lambda$ e $\vec{x} \times \vec{b} = \vec{a}$. Analisi vettoriale: definizione di funzioni vettoriali, proprietà differenziali elementari, derivazione e regole di derivazione. Spazi affini tridimensionali: piani, rette, riferimenti cartesiani.

Richiami di cinematica dell'elemento

Schema di elemento. Rappresentazione parametrica e intrinseca del moto. Versori tangente, normale principale e binormale. Velocità e accelerazione. Rappresentazione polare e cilindrica del moto. Classificazione del moto in base alla legge oraria e alla traiettoria: moto rettilineo e moto piano. Velocità areolare nei moti piani. Moti centrali: formula di Binet, traiettoria nel caso kepleriano, studio dell'orbita della Terra nel moto di rivoluzione attorno al Sole, leggi di Keplero. Moto centrale armonico: la legge oraria.

Campi scalari e vettoriali

Campi scalari e vettoriali. Campi circolari ed elicoidali. Operatori differenziali: gradiente, divergenza, rotore e laplaciano. Campi conservativi. Circuitazione di un campo conservativo: condizione necessaria e sufficiente. Rotore di un campo conservativo: condizione necessaria e sufficiente. Esempi: campi a simmetria cilindrica e campi a simmetria sferica.

Cinematica del corpo rigido: moto

Il modello di corpo rigido. Rappresentazione cartesiana del moto rigido: riferimento solidale, gradi di libertà di un corpo rigido, coordinate lagrangiane. Esempi: moto piano del disco e moto di una sbarretta con un elemento fisso. Moto rigido, velocità degli elementi, atto di moto del corpo rigido. Introduzione del vettore velocità angolare e formula fondamentale della cinematica del corpo rigido. Proprietà della velocità angolare: formule di Poisson. Classificazione dei moti: traslatorio, rotatorio, sferico e piano. Gradi di libertà di ciascun moto e coordinate lagrangiane. Angoli di Eulero. Espressione della velocità angolare in termini degli angoli di Eulero.

Cinematica del corpo rigido: atto di moto

Definizione di atto di moto. Proprietà fondamentale, invariante scalare e vettoriale, caratterizzazione di un atto di moto rigido. Campo delle accelerazioni. Classificazione: atto traslatorio, rotatorio e sferico. Proprietà dei diversi atti di moto. Carattere elicoidale dell'atto di moto rigido e asse istantaneo del moto. Proprietà dell'asse istantaneo del moto. Atto di moto piano: proprietà, centro istantaneo di rotazione e sua determinazione. Teorema di Chasles.

Cinematica del corpo rigido: moti relativi

Riferimento fisso e riferimento mobile, assioma sui moti relativi. Moti relativi per un elemento: moto assoluto, moto relativo, velocità assoluta, velocità relativa, Teorema dei moti relativi e accelerazione relativa. Moti relativi per un corpo rigido: velocità angolare relativa. Moti di contatto e velocità di strisciamento: assenza di strisciamento, moti di puro rotolamento e di imperniamento. Coni di Poinot, precessioni e precessioni regolari. Traiettorie polari: base e rulletta (centroide fissa e mobile). Ellissografo, parallelogramma e antiparallelogramma articolato.

Dinamica dell'elemento

Leggi della meccanica, equazioni parametriche del moto, determinazione del moto a partire dalle condizioni iniziali: unicità. Quantità di moto e momento della quantità di moto (momento angolare). Teoremi di conservazione. Riferimenti non inerziali e forze apparenti. Elemento vincolato, vincoli lisci e scabri, reazioni vincolari. Il pendolo semplice e il pendolo sferico.

Dinamica dei sistemi isolati e non isolati

Terza legge della meccanica. Sistema fondamentale della dinamica dei sistemi di elementi. Teoremi di conservazione per i sistemi isolati. Baricentro: posizione, velocità e quantità di moto. Conservazione della quantità di moto del baricentro. Il riferimento del baricentro: moto relativo al baricentro. Momento angolare totale rispetto al baricentro del moto assoluto e del moto relativo al baricentro. Relazione tra le osservabili dinamiche del moto assoluto e del moto relativo al baricentro; Teorema di Koenig. Sistema fondamentale della dinamica

dei sistemi non isolati. Equazioni globali (cardinali) per la dinamica dei sistemi. Sollecitazioni autonome e Teorema del baricentro.

Dinamica del corpo rigido: geometria delle masse

Proprietà di ubicazione del baricentro. Relazione tra proprietà di simmetria di un corpo e ubicazione del baricentro. Determinazione del baricentro per solidi con cavità. Momento di inerzia e Teorema di Huyghens. Calcolo del momento di inerzia: sbarra, anello, disco, cilindro, sfera, cono ed ellissoide. Momento di inerzia per solidi con cavità. Matrice di inerzia; espressione del momento angolare totale e dell'energia cinetica di un corpo rigido in termini del vettore velocità angolare nel caso di moti sferici e rotatori. Energia cinetica per un generico moto rigido. Regole di trasformazione degli elementi della matrice di inerzia in corrispondenza di un cambiamento di base; matrice di inerzia come tensore doppio covariante. Diagonalizzazione del tensore di inerzia: tensore, terna, assi e momenti principali e centrali di inerzia. Assi principali e proprietà di simmetria: i corpi piani. Ellissoide di inerzia.

Dinamica del corpo rigido: il caso libero

Equazioni cardinali per la dinamica del corpo rigido. Sufficienza delle equazioni cardinali per la descrizione del moto di un corpo rigido. Equazioni stereodinamiche di Eulero. Ancora sulle sollecitazioni: relazione fondamentale per il momento totale di una sollecitazione. Trinomio invariante; sollecitazioni a trinomio invariante nullo. Asse centrale di una sollecitazione. Sollecitazioni equivalenti e loro caratterizzazione. Riduzione di una sollecitazione nei casi di trinomio invariante nullo e non nullo.

Dinamica del corpo rigido: moto in presenza di vincoli

Moto di un corpo rigido vincolato. Vincoli bilaterali e unilaterali. Un modello per i vincoli bilaterali: riduzione del numero di gradi di libertà e sollecitazione vincolare. Vincoli lisci e scabri; coefficiente d'attrito statico e dinamico. Modelli per alcuni vincoli particolari: giunto sferico, cerniera cilindrica, collare cilindrico, collare sottile, guida cilindrica; sufficienza delle equazioni cardinali. Esempi importanti: pendolo composto, moto di un disco con un punto a contatto con un piano inclinato e bilanciamento statico e dinamico. Moti alla Poincaré: conservazione del momento totale della quantità di moto e dell'energia cinetica. Teorema di Poincaré. Descrizione del moto nei casi di simmetria sferica e cilindrica: assi permanenti di rotazione. Moti giroscopici.

Lavoro ed energia per l'elemento e per il corpo rigido

Definizione di lavoro compiuto da una forza su un elemento. Teorema del lavoro per un elemento; sua interpretazione come conservazione dell'energia generalizzata. Forze posizionali e conservative; esempi: peso, forza elastica, forze centrali, forza centrifuga. Indipendenza dal percorso del lavoro compiuto da una forza conservativa. Caratterizzazione delle forze conservative: una condizione necessaria. Teorema di conservazione dell'energia meccanica. Applicazioni. Teorema del lavoro per lo schema particellare. Sollecitazioni posizionali e conservative. Lavoro compiuto da una sollecitazione conservativa. Teorema di conservazione dell'energia meccanica per lo schema particellare. Il caso del corpo rigido libero: lavoro della sollecitazione interna, lavoro di quella esterna e deduzione del Teorema del lavoro a partire dalle equazioni cardinali. Il caso del corpo rigido vincolato: ipotesi sui vincoli che assicurano la conservazione dell'energia meccanica.

Statica dell'elemento e del corpo rigido

Definizione di posizione di equilibrio per un elemento. Teorema sulla condizione necessaria e sufficiente per una posizione di equilibrio; equazione fondamentale della statica dell'elemento. Posizioni di equilibrio e punti di stazionarietà dell'energia potenziale. Definizione di posizione di equilibrio per un corpo rigido. Teorema sulla condizione necessaria e sufficiente per una posizione di equilibrio; equazione fondamentale della statica del corpo rigido. Determinazione delle posizioni di equilibrio a partire dalle equazioni del moto. Enunciati e applicazioni dei teoremi di Dirichlet e di Liapunov per l'elemento e per il corpo rigido.

Testi consigliati

- [1] P.G. Bordoni, "Lezioni di Meccanica Razionale." Veschi, 1984, Roma.
- [2] P. Benvenuti, G. Maschio, "Appunti delle Lezioni di Meccanica Razionale." Edizioni Kappa, 2000, Roma.
- [3] P. Benvenuti, G. Maschio, "Esercizi di Meccanica Razionale¹." Edizioni Kappa, 2000, Roma.

¹Gli esercizi dei Capitoli 8-10 sono pressoché tutti svolti con i metodi della Meccanica analitica (lagrangiana), lo studente può affrontarli anche usando le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi.